

О противоречивости специальной теории относительности

И.А. Соломещ

26 июня 2012 г.

Аннотация

Показано, что, при синхронизации часов световым сигналом по Эйнштейну и подходящем подборе, вообще говоря в каждом случае своём, единичных масштабов длины и времени, для ИСО классической физики можно добиться, чтобы пространственно-временные координаты точечных событий в различных ИСО были связаны преобразованием Лоренца. Доказано, что в ИСО специальной ТО реализуются эти же единичные масштабы, и значит нарушается „принцип физической равноценности единиц измерения“, требуемый специальным принципом относительности, т.е. что СТО внутренне противоречива.

Введение

При работе над статьями [15], [16] о парадоксах часов возникло подозрение, что в СТО при переносе часов из одной ИСО в движущуюся относительно неё другую приходится изменять скорость их хода и начальные показания и что в различных ИСО используются различные единичные масштабы длины, т.е. что масштаб, единичный для одной ИСО, при переносе в другую в общем случае уже не будет единичным.

В разделе 1 настоящей статьи для пространственно одномерного случая рассмотрены некоторые следствия использования синхронизации часов сигналом по Эйнштейну.

В разделе 2 на эвристическом уровне „выясняется“, что в СТО в различных ИСО используются, вообще говоря, различные единичные масштабы длины и времени.

В разделе 3, используя полученные в разделах 1,2 положения в качестве наводящих соображений, доказывається, что в СТО действительно не выполняется так называемый [8, §5, с.245] принцип физической равноценности единиц измерения и, как следствие, теряет смысл специальный принцип относительности.

Если происхождение наводящих соображений мало интересно, то разделы 1,2 можно прочесть бегло или пропустить.

1 Возможности синхронизации по сигналу

1.1 Рассмотрим координатную ось x , в каждой точке которой закреплены синхронизированные каким-то образом идентичные часы. Полученную таким образом пространственно-одномерную пространственно-временную систему отсчёта обозначим S . Время в ней будем обозначать t .

Пусть в S имеется некий сигнал, распространяющийся по оси x в положительном направлении (вправо) со скоростью u_1 и в отрицательном направлении (влево) — со скоростью u_2 , причём $u_2 > u_1 > 0$. Для наглядности можно себе представить, что сигнал передаётся гонцами вправо — черепахой, влево — Ахиллесом (в этом случае $u_2 \gg u_1$).

С помощью этого сигнала, будем называть его „А-ч“-сигналом, введём на оси x новое время τ . В качестве основных возьмём показывающие t -время часы C_0 , фиксированные в начале координат O . Предположим, что в остальных точках оси x кроме часов, показывающих t -время, помещены ещё одни точно такие же часы. На этих вторых часах, синхронизируя их по Эйнштейну „А-ч“-сигналом с часами C_0 , установим новое время τ .¹ Ось x с установленным в её точках временем τ образует новую пространственно-временную ИСО, обозначим её S_τ . Понятно, что в точке O t -время на часах C_0 совпадает с τ -временем.

1.2 Выясним связь τ и t в любой фиксированной точке x . Фиксируем произвольную точку x и произвольный момент времени в ней t и τ по t - и τ -времени соответственно. И пусть „А-ч“-сигнал, отправленный из точки $x_0 = 0$ (т.е. из начала координат) в момент t_0 (τ_0 — по τ -времени) в точку x , пришёл в x как раз в момент t и в тот же момент t из x в x_0 был отправлен сигнал, прибывший в x_0 в момент t_1 (τ_1 — по τ -времени).

Поскольку τ -время в точке x синхронно τ -времени в x_0 по Эйнштейну относительно „А-ч“- сигнала, то (см. [1, стр.9])

$$\tau - \tau_0 = \tau_1 - \tau. \quad (1.1)$$

Это можно записать и иначе

$$\tau = \frac{\tau_0 + \tau_1}{2}. \quad (1.2)$$

Рассмотрим сначала случай $x > 0$. В точке $x_0 = 0$ t -время и τ -время совпадают и поскольку t -скорость сигнала в направлении от x_0 к x равна u_1 , а в направлении от x к x_0 равна u_2 , то $\tau_0 = t_0 = t - x/u_1$ и $\tau_1 = t_1 = t + x/u_2$. Подставляя эти значения τ_0 и τ_1 в (1.2) получим

$$\tau = t - \alpha x, \quad \text{где } \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) > 0. \quad (1.3)$$

¹Отметим, что до появления СТО измерений односторонней скорости света не было (их и до сих пор нет), а в СТО изотропность скорости света в вакууме принята по определению. Так что, синхронизация по „А-ч“-сигналу не так уж и нелепа.

При $x < 0$ получаем тот же результат. Таким образом формула (2.3) даёт искомую связь между t - и τ -временем в любой точке x .

1.3 τ -время было введено синхронизацией по Эйнштейну „А-ч“-сигналом часов, расположенных во всех остальных точках оси x , с часами C_0 , расположенными в начале координат. Но оказывается, что фиксированные в любой точке x часы, показывающие τ -время, синхронны показывающим τ -время часам, фиксированным в любой другой точке x_0 . Здесь x_0 произвольная точка, а не обязательно совпадающая с началом координат, как в пункте (1.2).

Чтобы обосновать это надо показать, что (1.1) выполняется и при произвольной x_0 . Поскольку смысл (1.1) в том, что путь от x_0 до x и обратный „А-ч“-сигнал проходит за одинаковое τ -время, то вместо прямого обоснования равенства (1.1) достаточно доказать, что τ -скорость „А-ч“-сигнала, т.е. скорость его относительно τ -времени, одинакова в обоих направлениях.

Пусть точка M движется по оси x по закону $x = x(t)$ с постоянной t -скоростью u , τ -скорость движения M обозначим w . Получим связь между t - и τ -скоростями точки M . Согласно (1.3)

$$\tau'_t = 1 - \alpha x'(t) = 1 - \alpha u, \quad (1.4)$$

следовательно при

$$1 - \alpha u \neq 0 \quad (1.5)$$

$t'_\tau = \frac{1}{1 - \alpha u}$. Так что при соблюдении (1.5) τ -скорость M $w = x'_\tau = x'_t t'_\tau = \frac{u}{1 - \alpha u}$, т.е. тоже постоянна. Итак

$$w = \frac{u}{1 - \alpha u} \quad \text{при} \quad \forall u \neq \frac{1}{\alpha}, \quad (1.6)$$

u и w здесь t - и τ -скорости M относительно оси x .

Вычислим теперь τ -скорости „А-ч“-сигнала относительно оси x при движении вправо и влево w_1 и w_2 соответственно. t -скорости этого сигнала $u = u_1 > 0$ и $u = -u_2$ ($u_2 > 0$) соответственно, следовательно по (1.6)

$$w_1 = \frac{u_1}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)u_1} = \frac{2}{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}},$$

$$w_2 = \frac{-u_2}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)(-u_2)} = -\frac{2}{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}}.$$

Т.е. τ -скорости „А-ч“-сигнала в обоих направлениях действительно равны² и синхронность любых двух τ -часов относительно „А-ч“-сигнала доказана.

²Таким образом оказывается, что при синхронизации часов „А-ч“-сигналом по Эйнштейну скорости черепахи и Ахиллеса одинаковы, правда, они перемещаются в разных направлениях.

1.4 Полученные в п.(1.3) соотношения позволяют выяснить интересные особенности τ -времени.

1.4.1 „А-ч“-сигнал, распространяющийся в разных направлениях с различной t -скоростью, после синхронизации часов этим сигналом по Эйнштейну относительно нового времени τ оказался двигающимся в этих направлениях с одинаковой скоростью. Но, как легко получается из (1.6), любые два движения в противоположных направлениях, имеющие *одинаковую* ненулевую t -скорость, имеют *различные* τ -скорости по этим направлениям.

1.4.2 При $u = 1/\alpha$ согласно (1.4) $\tau'_t = 0$, т.е. τ постоянно. Таким образом по мере движения точки M вправо t -время прибытия её в точки оси x по показаниям часов в точках прибытия строго возрастает, а время прибытия по τ -часам во всех точках одинаково. Иными словами, перемещение M из одной точки оси в другую происходит за нулевой промежуток τ -времени, т.е. τ -скорость перемещения точки M $w = +\infty$.

Более того, при t -скорости $u > 1/\alpha$ согласно (1.4) $\tau'_t < 0$, т.е. с возрастанием t τ строго убывает, и при движении M из некоторой точки оси x в расположенную правее точку τ -время прибытия меньше τ -времени отправления³.

Как следствие, при такой t -скорости τ -скорость w точки M , равная отношению приращения x (положительного) к приращению τ (отрицательному), будет отрицательной, хотя точка M движется вправо.

Как видим, по отношению к τ -времени, как и к местному земному времени афоризм „После этого ещё не означает вследствие этого.“ можно дополнить другим „Раньше этого ещё не означает не вследствие этого.“. Т.е. ни одно из этих времён не позволяет по времени двух событий, произошедших в различных точках, судить о том, может или не может одно из них быть следствием другого.

Проследим за изменением τ -скорости w по мере увеличения t -скорости u в промежутке $[0, +\infty)$. Согласно (1.6) при возрастании u в пределах $[0, 1/\alpha)$ значения w возрастая пробегают промежуток $[0, +\infty)$. При $u = 1/\alpha$ $w = +\infty$ в том смысле, что перемещаясь по оси x вправо M достигает любую точку по пути следования в один и тот же момент τ -времени по часам в этой точке. При дальнейшем увеличении u в промежутке $(1/\alpha, +\infty)$ значения w возрастая пробегают промежуток $(-\infty, -1/\alpha)$.

Стремясь к образности можно сказать: по мере увеличения u от 0 до $1/\alpha$ w возрастает, достигая при $u = 1/\alpha$ „барьера“ $w = +\infty$; при дальнейшем возрастании u точка M приобретает „забарьерную“ τ -скорость (отрицательную по величине, хотя M ещё быстрее двигается вправо), которая, продолжая возрастать, стремится к $-1/\alpha$ при $u \rightarrow +\infty$.

Отрицательный знак „забарьерной“ скорости не означает, что движение происхо-

³С подобным по сути явлением в настоящее время сталкиваются, например, при перелёте из Лондона в Нью-Йорк, при котором местное время прилёта может оказаться не только больше, но и равным, или даже меньшим местного времени вылета.

дит влево, а указывает на тот факт, что при движении с этой скоростью точка M , пройдя мимо некоторой точки в какой-то момент τ -времени, прибывает в расположенную правее точку в меньший момент времени по τ -часам в точке прибытия. При этом супремум (недостижимый) „выигрыша“ времени на единицу пути равен α единиц времени⁴.

1.4.3 Приведённые факты, разумеется, никак не противоречат принципу причинности, а лишь отражают свойства τ -времени, которыми оно обязано способу синхронизации.

1.5 Несмотря на кажущуюся искусственность τ -времени, введённого синхронизацией по „А-ч“-сигналу, время СТО, введённое синхронизацией по Эйнштейну световым сигналом, обладает всеми указанными „недостатками“ τ -времени.

Покажем это. Чтобы подчеркнуть аналогию, некоторые объекты и величины в этом пункте обозначим теми же буквами, что и в п. 1.3.

Рассмотрим две пространственно-одномерные ИСО специальной теории относительности S и Σ с одинаково направленными координатными осями x и ξ , скользящими одна по другой, и временем t и τ соответственно. Пусть ось ξ движется относительно оси x вправо со скоростью $v \in (0, c)$, причём их начала координат совпадают при $t = \tau = 0$. Тогда координаты точечных событий в этих системах связаны соотношениями [1, с.17-18]

$$\begin{cases} \xi = \gamma(x - vt) \\ \tau = \gamma(t - \alpha x) \end{cases}, \quad (1.7)$$

где $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}$, $\alpha = v/c^2$.

Пусть как и в п.1.3 некая точка M движется по оси x по закону $x = x(t)$ с постоянной (в системе S) скоростью u , будем называть её t -скоростью. Скорость точки M в системе Σ обозначим ω и будем называть τ -скоростью. Согласно (1.7)

$$\begin{cases} \xi'_t = \gamma(u - v) \\ \tau'_t = \gamma(1 - \alpha u) \end{cases}. \quad (1.8)$$

В СТО постулируется, что скорость передачи информации из одной точки в другую не превосходит скорости света в вакууме – c ⁵, однако нет ограничений на скорость движения, неспособного нести информацию ([12, Лекция 8, с.183.]). Так скорость движения светового пятна от вращающегося лазера может быть как угодно большой при достаточном удалении поверхности, по которой это пятно движется. Поэтому можно рассматривать произвольно большие t -скорости u .

⁴Путь длиной l при „забарьерной“ скорости $w < 0$ проходится за $l/w < 0$ единиц τ -времени, т.е. „выигрыш“ во времени равен $l/|w|$ единиц времени или $1/|w|$ на единицу длины пути. При $u \nearrow +\infty$, $w \nearrow -1/\alpha$, т.е. $|w| \searrow 1/\alpha$ и следовательно „выигрыш“ времени на единицу пути $1/|w| \nearrow \alpha$.

⁵В дальнейшем, когда речь идёт о скорости света, всегда имеется в виду скорость в вакууме.

Будем рассматривать лишь $u > v$, при этом по (1.8₁) $\xi'_t > 0$, т.е. точка M движется и по оси ξ вправо. При t -скорости $u = 1/\alpha = c^2/v$ ($u > c$, т.к. $v \in (0, c)$) согласно (1.8₂) $\tau'_t = 0$, т.е. при движении по оси ξ вправо время прибытия точки M в точки оси ξ (по τ - часам в них) постоянна и значит τ -скорость $\omega = +\infty$.

При $u > 1/\alpha$ $\tau'_t < 0$ и по мере движения точки M по оси ξ вправо время прибытия M в точки оси ξ по τ -часам в этих точках убывает, т.е. $\omega < 0$.

По закону сложения скоростей в СТО

$$\omega = \frac{-v + u}{1 - \alpha u}, \quad \forall u \neq 1/\alpha \quad (1.9)$$

Из (1.9) и выше сказанного в этом пункте, буквально повторяя заключительную часть п.1.4.3, получаем: по мере увеличения u от v до $1/\alpha = c^2/v$ ω возрастает, достигая при $u = c^2/v$ „барьера“ $\omega = +\infty$, при дальнейшем возрастании u точка M приобретает „забарьерную скорость“ (отрицательную по величине, хотя M ещё быстрее движется вправо по оси ξ), которая, продолжая возрастать, пробегает промежуток $(-\infty, -c^2/v)$ стремясь к $-c^2/v$ при $u \rightarrow +\infty$.

Итак в разобранным случае диапазон возможных значений τ -скорости ω регистрируемых точечных явлений, перемещающихся вправо по оси ξ , следующий $(0, +\infty] \cup (-\infty, -c^2/v)$. Но т.к. для фиксированной Σ при $\forall v \in (0, c)$ найдётся ИСО S , относительно которой Σ движется со скоростью v , то в Σ возможны любые скорости перемещения вправо $\omega \in (0, +\infty] \cup (-\infty, -c)$.

Исходя из симметрии окончательно получаем: в любой пространственно-одномерной ИСО возможны все значения скоростей перемещений в диапазоне

$$\overleftarrow{\underbrace{(c, +\infty)}_{\text{забарьерные скорости}} \cup [-\infty, 0] \cup [0, +\infty] \cup \underbrace{(-\infty, -c)}_{\text{забарьерные скорости}}} \overrightarrow{\quad}, \quad (1.10)$$

где стрелки $\overleftarrow{\quad}$ и $\overrightarrow{\quad}$ указывают направление увеличения возможных скоростей движения в отрицательном и положительном направлениях координатной оси соответственно⁷. При этом недостижимый супремум „выигрыша“ времени на единицу пути при движении с „забарьерной“ скоростью в любую из сторон равен $1/c$.

Таким образом время в СТО действительно обладает всеми указанными в п.1.4 недостатками τ -времени, введённого синхронизацией по „А-ч“-сигналу.

⁶В нашем случае проще формулу (1.9) получить, используя соотношения $\omega = \xi'_\tau = \xi'_t/\tau'_t$ и (1.8).

⁷Напомним, что при изменении скорости в направлении стрелок на „забарьерных“ участках несмотря на уменьшение модуля скорости само движение в указанном направлении убыстряется.

2 Об изменении единичных масштабов длины и времени при переходе из одной ИСО в другую

Этот раздел имеет эвристический характер и предназначен для мотивации действий, предпринимаемых в следующем разделе.

2.1 Пусть S и S' — пространственно-одномерные ИСО специальной теории относительности с одинаково направленными координатными осями x и x' , скользящими одна по другой при наличии относительного движения, и временем t и t' , которое будем называть t - временем и t' - временем соответственно; P и A' — фиксированные точки оси x и x' ; координата x точки P $x_P = l > 0$; v_1 и v_2 — заданные числа, удовлетворяющие $0 < v_1 < v_2 < c$.

2.2 Рассмотрим следующую схему движения оси x' .

- 1) S' движется относительно S со скоростью v_1 ;
- 2) В момент $t = 0$ точка A' оси x' совпадает с началом координат O оси x (событие B);
- 3) Когда A' достигает точки P оси x (событие R_1), скорость её движения начинает плавно изменяться (при этом A' всё время остаётся фиксированной точкой оси x'): сначала уменьшается, становясь равной нулю, когда A' достигнет некоторой точки A оси x (событие R^*), затем
- 4) направление движения A' изменяется на противоположное и модуль её скорости постепенно увеличивается, так что при возвращении A' в точку P оси x (событие R_2) скорость её равна $-v_1$ ($-v_2$).

Режим торможения и последующего разгона (в противоположном направлении) точки A' , а значит и положение точки A , будут уточнены ниже.

- 5) Далее A' двигается с постоянной скоростью $-v_1$ ($-v_2$) и в некоторый момент снова совмещается с точкой O (событие E).

В других точках оси x события будут развиваться аналогично происходящему в точке P . В частности, в точке O — начале координат оси x будет наблюдаться следующая картина.

В момент $t = 0$ мимо точки O вправо (точнее, в положительном направлении оси x) со скоростью v_1 проходит точка A' . Далее точки оси x' будут проходить мимо точки O со скоростью v_1 , пока поравнявшаяся с O в некоторый момент точка оси x' , обозначим её B' , не начнёт плавно замедляться (событие L_1). Предположим, что в этот момент из точки O в положительном направлении оси x отправляется световой сигнал. Затем через какое-то время B' снова возвращается в точку O (событие L_2), двигаясь со скоростью $-v_1$ ($-v_2$), которую сохраняет и далее.

2.3 Теперь можно уточнить режимы торможения и разгона точки A' . Сначала — о случае, когда разгон осуществляется до скорости $-v_2$.

Режим торможения выбирается так, чтобы выполнялись два условия:

Условие 1. Световой сигнал из точки O о начале изменения скорости точек оси x' приходит в точку A' прежде, чем она придёт в точку A , т.е. до конца режима торможения точки A' .

Условие 2. Точка A оказывается настолько удалённой от точки P , что существует режим разгона, при котором точка A' при возвращении в точку P и далее имеет скорость $-v_2$.

Режим разгона теперь выбирается удовлетворяющим требованиям условия 2.

Условимся о некоторых обозначениях. Если \mathbf{A} и \mathbf{B} — точечные события, то через t_A обозначим время в системе S (т.е. t - время), когда это событие произошло, а через $\Delta_{AB}t$ — промежуток (точнее, длину промежутка) t - времени между событиями \mathbf{A} и \mathbf{B} , т.е.

$$\Delta_{AB}t = t_B - t_A. \quad (2.1)$$

Далее обозначим: $\delta = \Delta_{R_1^*R^*}t$ — время торможения точки A' ; $\delta_2 = \Delta_{R^*R_2}t$ — время разгона; $\Delta_{P_2}t = \Delta_{R_1R_2}t = \delta + \delta_2$ — время от прихода до возвращения точки A' в точку P .

Перейдём теперь к случаю разгона до скорости $-v_1$. Режим торможения выбираем тот же, что и в предыдущем случае. Следовательно, положение точки A при этом не изменяется. Не изменяется и точка B' . Ведь согласно условию 1 её положение определяется режимом торможения ещё до завершения торможения. Что касается режима разгона, то, поскольку на участке AP возможен разгон до скорости $-v_2$ с соблюдением условия 2, тем более ($v_1 < v_2$) возможен разгон до скорости $-v_1$ с соблюдением условия 2 с заменой v_2 на v_1 .

В этом случае: время торможения останется прежним, т.е. δ ; время разгона, обозначим его $\delta_1 = \Delta_{R^*R_2}t$, может измениться (т.к. теперь \mathbf{R}_2 , вообще говоря, отличается от \mathbf{R}_2 в случае $-v_2$; \mathbf{R}^* , разумеется, прежнее); время от прихода до возвращения точки A' в точку P $\Delta_{P_1}t = \Delta_{R_1R_2}t = \delta + \delta_1$.

2.4 Аналогично промежутки времени от прихода до возвращения точки B' в точку O для $-v_i$ обозначим $\Delta_{O_i}t = \Delta_{L_1L_2}t$. Как и в случае точки P для точки O событие \mathbf{L}_2 при $-v_1$ может отличаться от \mathbf{L}_2 при $-v_2$.

2.5 Перейдём к вопросу об изменении единичного масштаба длины.

2.5.1 Предварительно получим полезную для дальнейшего формулу. Положим временно, что S движется относительно S' со скоростью v . В общепринятом в СТО смысле это означает, что любая точка оси x движется относительно оси x' со скоростью v , причём при вычислении скорости время и расстояние измеряются в единицах, принятых в S' принятым в этой системе способом. Когда нужно акцентировать внимание на том, что используются именно время системы S' (т.е. t' -время), будем говорить о t' -скорости и обозначать её $v_{t'}$.

В нашем случае удобно воспользоваться скоростью S относительно S' , при вычислении которой время измеряется в S , а расстояние — попрежнему в S' . Эту t -ско-

рость обозначим v_t .

Пусть в момент $t = 0$ точка O совмещается с точкой оси x' с координатой x'_0 и t'_0 — местное время в точке x'_0 в этот момент. Тогда связь между пространственно-временными координатами точек в системах S и S' даётся формулами Лоренца (см., например, [15, (2.1)]):

$$\begin{cases} x' - x'_0 = \gamma(x + vt) \\ t' - t'_0 = \gamma(t + \frac{v}{c^2}x), \quad \gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для вычисления v_t фиксируем произвольную точку x на оси x . Положение этой точки на оси x' в любой момент времени t даётся выражением (2.2). Дифференцируя это выражение по t , имеем

$$v_t = \frac{dx'}{dt} = \gamma v. \quad (2.3)$$

2.5.2 В схеме, изложенной в п.п. (2.1)–(2.3), рассматриваются два отличающихся лишь режимом разгона точки A' варианта движения оси x' относительно оси x . Вычислим t_E — время возвращения точки A' в точку O сразу для обоих вариантов.

$$t_E = t_B + \Delta_{BR_1}t + \Delta_{R_1R_2}t + \Delta_{R_2E}t. \quad (2.4)$$

Согласно п. 2) в п. 2.2 $t_B = 0$. $\Delta_{BR_1}t$ — это t -время, за которое A' проходит путь от точки O до точки P , следовательно, с учётом п. 2.1 и 1) из п. 2.2

$$\Delta_{BR_1}t = l/v_1. \quad (2.5)$$

Согласно п. 2.3 при разгоне до скорости $-v_i$ $\Delta_{R_1R_2}t = \Delta_{Pi}$. Участок пути от P до O точка A' при возвращении проходит со скоростью $-v_i$ (см. 5) в п. 2.2), поэтому $\Delta_{R_2E}t = l/v_i$. Подставляя эти значения слагаемых в формулу (2.4), получаем

$$t_E = l\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_i}\right) + \Delta_{Pi}. \quad (2.6)$$

Поскольку $t_B = 0$, то с учётом (2.1) и (2.5) $\Delta_{BR_1}t = t_{R_1} - t_B = l/v_1$, и значит время прихода точки A' в точку P

$$t_{R_1} = l/v_1, \quad \text{т. е. } l = v_1 t_{R_1}. \quad (2.7)$$

Это позволяет (2.6) записать в виде

$$t_E = t_{R_1}\left(1 + \frac{v_1}{v_i}\right) + \Delta_{Pi}. \quad (2.8)$$

2.5.3 Вычисление t_E в предыдущем пункте основывалось на прослеживании движения точки A' по оси x . Здесь, исходя из относительности движения, рассчитаем t_E , прослеживая движение точки O по оси x' , и сравним результат с (2.8).

Исходя из изложенного в п. 2.2 после 5) имеем следующую картину.

В момент t_B точка O проходит мимо точки A' оси x' (событие \mathbf{B}) влево со скоростью $-v_1$ относительно оси x' и продолжая двигаться с такой же скоростью в некоторый неизвестный пока момент времени t_{L_1} поравняется с точкой B' оси x' (событие \mathbf{L}_1). Далее, двигаясь в переходном режиме, точка O возвращается в точку B' (событие \mathbf{L}_2). Продолжая движение по отрезку $[B', A']$ оси x' точка O возвращается в точку A' (событие \mathbf{E}) как раз в момент времени t_E , вычисленный в предыдущем пункте.

Поскольку согласно п. 2.3 (третий абзац после условия 2) точка B' одна и та же для переходных режимов движения точки A' с разгоном до скорости $-v_1(-v_2)$ (назовём их первым и вторым переходным режимом соответственно), то событие \mathbf{L}_1 , а значит и время t_{L_1} при обоих режимах одинаковы. События же \mathbf{L}_2 и \mathbf{E} для каждого из режимов, вообще говоря, различны.

Следуя этой схеме движения точки O выразим t_E через неизвестное t_{L_1} .

$$t_E = t_{L_1} + \Delta_{L_1 L_2} t + \Delta_{L_2 E} t. \quad (2.9)$$

Согласно п. 2.4 $\Delta_{L_1 L_2} t = \Delta_{O_i}$. Поэтому (2.9) принимает вид

$$t_E = t_{L_1} + \Delta_{O_i} + \Delta_{L_2 E} t. \quad (2.10)$$

Для продолжения вычислений сделаем допущение, что длительность каждого из переходных режимов для точек A' и B' одинакова, т.е. что

$$\Delta_{O_i} = \Delta_{P_i}. \quad (2.11)$$

Кроме того заметим, что процесс разгона точек отрезка $[B', A']$ оси x' до скорости $-v_1(-v_2)$ к моменту их возвращения в точки отрезка $[O, P]$ оси x , в которых началось их торможение, начавшись в точке A' , распространяется справа налево.

Поэтому к моменту, когда точка B' вернётся в точку O (событие \mathbf{L}_2), имея скорость $-v_1(-v_2)$, все остальные точки отрезка $[B', A']$ уже двигаются со скоростью $-v_1(-v_2)$ относительно оси x . Так что, отрезок $[B', A']$ оси x' в процессе прохождения мимо точки O можно рассматривать, как отрезок пространственной оси некоторой ИСО S'' , движущейся со скоростью $-v_1(-v_2)$ относительно S .

Сравнивая (2.10) и (2.8), с учётом (2.11) получим

$$t_{L_1} + \Delta_{L_2 E} t = t_{R_1} \left(1 + \frac{v_1}{v_i}\right). \quad (2.12)$$

В случае первого переходного режима время t_{L_1} легко вычислить. От момента $t = 0$ отрезок $[B', A']$ оси x' дважды проходит мимо точки O : сначала, находясь в системе S' , слева направо со скоростью v_1 относительно S , затем, находясь уже в системе S'' , справа налево со скоростью $-v_1$. Ситуации совершенно симметричные,

модули скоростей одинаковы, поэтому длина $[B', A']$ в обеих системах одинакова и значит в обоих случаях длительность прохождения одинакова.

Но в первом случае прохождение осуществляется за время t_{L_1} , значит и во втором — за такое же время, т.е. $\Delta_{L_2E}t = t_{L_1}$ при $i = 1$. Подставляя это в (2.12) при $i=1$ получим

$$t_{L_1} = t_{R_1}. \quad (2.13)$$

Поскольку t_{L_1} для обоих режимов одинаково, то, подставляя (2.13) в (2.12) при $i = 2$, имеем

$$\Delta_{L_2E}t = \frac{v_1}{v_2}t_{R_1} \quad \text{при } i = 2. \quad (2.14)$$

2.5.4 Теперь можем вычислить длину отрезка $[B', A']$ оси x' в ИСО S' и S'' .

Остановимся на втором режиме. t_{L_1} — t -время, за которое точка O , двигаясь вместе с системой S со скоростью $-v_1$ относительно системы S' , пройдёт отрезок $[B', A']$, находящийся в системе S' (т.е. неподвижный относительно S'), справа налево. t -скорость точки O относительно S' согласно (2.3) равна $-\gamma_1v_1$, где γ_i — значение γ (см. (2.2₃)) при $v = v_i$. Значит за t -время t_{L_1} точка O проходит вдоль оси x' влево расстояние равное $\gamma_1v_1t_{L_1} \stackrel{(2.13)}{=} \gamma_1v_1t_{R_1} \stackrel{(2.7)}{=} \gamma_1l$. Таким образом длина отрезка $[B', A']$ оси x' в системе S' равна

$$l' = \gamma_1l. \quad (2.15)$$

Аналогично при втором режиме $\Delta_{L_2E}t$ — t -время, за которое точка O проходит мимо отрезка $[B', A']$, находящегося в системе S'' , слева направо, двигаясь со скоростью v_2 относительно S'' . Но тогда, согласно (2.3), t -скорость движения точки O относительно S'' равна $v_2\gamma_2$. Следовательно, учитывая (2.14), длина отрезка $[B', A']$ в системе S''

$$l'' = v_2\gamma_2\frac{v_1}{v_2}t_{R_1} = \gamma_2v_1t_{R_1} \stackrel{(2.7)}{=} \gamma_2l. \quad (2.16)$$

2.5.5 Таким образом:

1) Один и тот же „физический“ объект — отрезок $[B', A']$, поочерёдно помещённый (неподвижно) в различные ИСО S' и S'' имеет в этих системах различную длину (см. (2.15),(2.16)); следовательно,

2) Единичным масштабom в любой из этих систем не может служить единичный масштаб, переданный в неё из другой системы.

И утверждение 1), и утверждение 2) противоречат общепринятому в СТО убеждению, что численная длина „физического“ отрезка, помещённого неподвижно в ИСО, и измеренная единичным масштабom, принятым в этой ИСО, во всех ИСО одинакова (см., например, [1, с.12], [8, с.245]).

2.6 Обсудим теперь вопрос об изменении единичных масштабom времени.

Пусть: ИСО S , S' и точки O , A' , P те же, что и в п. 2.1; S'' — ИСО, пространственная ось которой скользит по оси x . Часы ИСО $S(S')$, находящиеся в точке $O(A')$,

обозначим $C(C')$. Время, показываемое часами $C(C')$ в момент точечного события **A**, происходящего в точке расположения часов, обозначим $\tau_A(C)(\tau_A(C'))$.

Рассмотрим следующую схему взаимного перемещения часов C и C' .

- 1) $S'(S'')$ движется относительно S со скоростью $v_1(-v_1)$;
- 2) В момент $t = 0$ часы C' проходят мимо часов C слева направо (т.е. точки A' и O совпадают (событие **B**)), причём их показания $\tau_B(C') = 0$;
- 3) В момент, когда часы C' достигают точки P (событие **R**₁), часы C' мгновенно перемещаются в точку A'' системы S'' , совпадающую в этот момент с точкой P , фиксируются в ней и скорость их хода устанавливается такой же, как у часов системы S'' . В дальнейшем C' движется с системой S'' ; ⁸
- 4) В некоторый момент часы C' вновь проходят мимо часов C , теперь уже справа налево (событие **E**).

Рассчитаем показания C и C' в момент их повторной встречи (событие **E**).

$$\tau_E(C) = \Delta_{BR_1}t + \Delta_{R_1E}t. \quad (2.17)$$

t -время, за которое часы C' , двигающиеся со скоростью v_1 относительно S' , пройдут расстояние от точки O до точки P , равно $\Delta_{BR_1}t = l/v_1$. Аналогично, обратный путь часы C' , двигаясь с S'' со скоростью $-v_1$ относительно оси x , пройдут за время $\Delta_{R_1E}t = l/v_1$. Следовательно,

$$\tau_E(C) = 2l/v_1. \quad (2.18)$$

В свою очередь

$$\tau_E(C') = \Delta_{BR_1}t' + \Delta_{R_1E}t'. \quad (2.19)$$

По известному положению СТО об отставании движущихся часов (см., например, [2, с.74]) каждое из слагаемых в (2.19) в γ_1 раз меньше соответствующего слагаемого в (2.17). Следовательно, учитывая (2.18)

$$\tau_E(C') = \frac{2l}{\gamma_1 v_1}. \quad (2.20)$$

С точки зрения СТО системы S' и S'' , движущиеся относительно S со скоростью v_1 и $-v_1$ соответственно, совершенно симметричны. Поэтому скорость хода часов C' в обеих системах одинакова. И поскольку $\tau_B(C) = \tau_B(C') = 0$, то формулы (2.18) и (2.20) дают промежуток t - и t' -времени между событиями **B** и **E** (т.е. первой и второй встречей часов C и C').

⁸Возражение, что такое мгновенное перемещение часов C' физически невозможно, несущественно. Действительно, всегда можно считать, что часы C'' системы S'' , находящиеся в точке A'' , в момент её совмещения с A' показывают то же время, что и часы C' (ведь если это не так, то можно показания всех часов системы S'' сдвинуть на подходящую константу). И поскольку суть не в самих часах, а в их показаниях, далее можно следить уже за показаниями C'' , ведь они (показания) будут точно такими, как и на часах C' в случае, если бы их мгновенное перемещение было возможным.

Таким образом один и тот же временной промежуток часами C и C' , сохранявшими неизменную скорость хода (каждые — свою), был оценён разным количеством единиц времени. Часы C' показали в γ_1 раз меньше времени, чем часы C . Это означает, что часы C' используют в γ_1 раз большую единицу времени, чем часы C .

Иными словами, единичный масштаб времени в системе S' в γ_1 раз больше, чем в системе S .

3 Физический смысл преобразования Лоренца

В этом разделе используются синхронизация часов по Эйнштейну (некоторые последствия которой были строго обоснованы в разделе 1) и изменение единичных масштабов длины и времени (которое, как это выяснилось на эвристическом уровне в разделе 2, имеет место, хотя и неосознанно, в СТО). Показывается строго, что применение этих средств позволяет в рамках классической физики в достаточно широком классе движущихся равномерно и прямолинейно друг относительно друга инерциальных систем ввести прямоугольные координаты и время так, что скорость света во всех получившихся системах отсчёта равна c , а пространственно-временные координаты различных систем связаны преобразованием Лоренца. Способ построения этих СО не оставляет сомнений в смысле преобразований Лоренца в рассматриваемом случае и позволяет прояснить их смысл в СТО.

3.1 Классическая физика признаёт существование абсолютного времени t и некой трёхмерной пространственной системы отсчёта S , обладающей следующими свойствами: система S является элементарным евклидовым пространством, т.е. в ней справедлива элементарная евклидова геометрия и выбран эталон (единичный масштаб) длины; при использовании абсолютного времени t она является инерциальной СО и скорость света в вакууме относительно S в любом направлении равна c .

Пусть в S выбрана декартова прямоугольная система координат с координатными осями x, y, z и началом O . И пусть: \tilde{S} - другая пространственная СО, являющаяся элементарным евклидовым пространством с тем же, что и в S , единичным масштабом длины и использующая абсолютное время; в \tilde{S} выбрана декартова прямоугольная система координат с началом \tilde{O} и осями $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, сонаправленными с осями x, y, z соответственно, и \tilde{S} движется относительно S вдоль оси x (для определённости — в положительном направлении) со скоростью $0 < v < c$,⁹ причём в момент $t = 0$ начала координат O и \tilde{O} совпадают.

Поскольку используется абсолютное время и общий единичный масштаб длины, то исходя из эквивалентности S и \tilde{S} , как систем отсчёта, протяжённость тоже будет

⁹Хотя в классической физике нет ограничений на скорость v , но здесь вариант $|v| \geq c$ не рассматривается по двум причинам: во-первых, в этом случае свет в \tilde{S} может распространяться не по всем направлениям, а при $|v| > c$ в почти всех возможных направлениях распространения имеет две возможные скорости; во-вторых, этот вариант не понадобится нам в дальнейшем.

абсолютной. Поэтому пространственно - временные координаты точек в системах S и \tilde{S} связаны преобразованием Галилея [5, с.547]

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - vt & \text{при } \forall t \\ \tilde{y} = y \\ \tilde{z} = z. \end{cases} \quad (3.1)$$

Далее удобно считать, что в каждой точке системы S и \tilde{S} закреплены часы, показывающие абсолютное время, т.е. t -время.

3.2 Приступим к пошаговому выполнению относящейся к классической физике части программы, намеченной в начале раздела 3. Сначала будем проследивать в основном лишь движение света вдоль лучей, исходящих из точки \tilde{O} .

Подходящим образом изменяя в \tilde{S} масштаб времени, синхронизацию часов и пространственную метрику построим новую систему отсчёта \tilde{S}' , в которой на исходящих из точки \tilde{O} лучах свет будет иметь скорость c . Затем покажем, что в \tilde{S}' скорость равна c и для произвольных лучей, а не только вдоль лучей, исходящих из точки \tilde{O} , из чего, в частности, будет следовать, что все часы системы \tilde{S}' синхронизированы по Эйнштейну.

Наконец, при специальном выборе свободного параметра k (вводимого в п. 3.2.1.), введём множество ИСО $\tilde{S}' \stackrel{def}{=} \{\tilde{S}' \text{ при } \forall v : |v| < c\}$ (система S входит в \tilde{S}' , она получается при $v = 0$) и покажем, что все ИСО, входящие в \tilde{S}' , связаны преобразованием Лоренца.

3.2.1 Рассмотрим луч (полупрямую), исходящий из произвольной точки \tilde{A} системы \tilde{S} под углом $\varphi \in [0, \pi]$ к положительному направлению оси \tilde{x} .

Скорость света (здесь и далее всегда в вакууме) в системе \tilde{S} вдоль этого луча в направлении φ (т.е. от точки \tilde{A}) \tilde{c}_φ легко вычислить (см., например, [14, гл.9, §102]):

$$\tilde{c}_\varphi = c \left(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} - \beta \cos \varphi \right), \text{ где } \beta = v/c. \quad (3.2)$$

Скорость света по лучу противоположного направления

$$\tilde{c}_{\pi+\varphi} \stackrel{(3.2)}{=} c \left(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} + \beta \cos \varphi \right). \quad (3.3)$$

Как видим ((3.2),(3.3)), в \tilde{S} скорость света зависит от направления, причём скорости в противоположных направлениях, вообще говоря, не совпадают.

Внесём во временную метрику системы \tilde{S} изменения, полезные в дальнейшем и обеспечивающие равенство скоростей света в противоположных направлениях.

Шаг 1. Часы системы \tilde{S} , закреплённые в точке \tilde{O} , обозначим \tilde{C} . Фиксируем произвольное число $k > 0$. Сохраняя требования, чтобы часы \tilde{C} в момент $t = 0$, когда точки O и \tilde{O} совпадают (событие \mathbf{B}), показывали время 0, изменим скорость

их хода так, чтобы новая единица времени, отсчитываемого ими, $сек'$ была в k раз больше прежней секунды. То есть

$$сек' = k \text{ сек} .^{10} \quad (3.4)$$

Обозначим: t' – новое время в точке \tilde{O} ; $t'_A(\tilde{C})$ – новое время, показываемое часами \tilde{C} в момент, когда в точке их расположения произошло точечное событие **A**; t_A – абсолютное время в момент, когда произошло событие **A**, т.е. время, которое показали бы часы \tilde{C} в этот момент, если бы их ход не был изменён.

Ясно, что для любого точечного события **A**, произошедшего в точке \tilde{O} , справедливо

$$t'_A(\tilde{C}) = \frac{1}{k} t_A . \quad (3.5)$$

Действительно, в случае, когда событие **A** произошло позже события **B**, то учитывая, что $t'_B(\tilde{C}) = t_B = 0$, $t'_A(\tilde{C}) = t'_A(\tilde{C}) - t'_B(\tilde{C})$ – количество $сек'$, отсчитанное часами \tilde{C} между событиями **B** и **A**, а $t_A = t_A - t_B$ – количество $сек$, которое отсчитали бы часы \tilde{C} между этими событиями, если бы ход \tilde{C} не был изменён. В случае, когда **A** произошло раньше **B**, результат – тот же.

Шаг 2. Итак на часах \tilde{C} установлено новое t' -время. Чтобы уравнивать скорости света в противоположных направлениях, как и в разделе 1, синхронизируем по Эйнштейну остальные часы системы \tilde{S} с часами \tilde{C} и установим таким образом новое t' -время во всей \tilde{S} .

В точке \tilde{O} соотношение между t' и абсолютным временем t известно

$$t' = t/k . \quad (3.5')$$

Выясним связь между t' и t в остальных точках \tilde{S} . Фиксируем произвольную точку $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ и произвольный момент времени в ней t и t' по t - и t' -времени соответственно. И пусть световой сигнал, отправленный из точки \tilde{O} в момент t_0 (t'_0 - по t' -времени), пришёл в точку \tilde{M} как раз в момент t и в тот же момент из \tilde{M} в \tilde{O} был отправлен световой сигнал, прибывший в \tilde{O} в момент t_1 (t'_1 - по t' -времени).

Обозначим: $\tilde{\rho}$ – расстояние в \tilde{S} между \tilde{O} и \tilde{M} , φ – угол между $\vec{\tilde{O}\tilde{M}}$ и осью \tilde{x} . Т.к. скорость света на отрезке $[\tilde{O}, \tilde{M}]$ в направлении φ и обратном равна \tilde{c}_φ и $\tilde{c}_{\pi+\varphi}$ соответственно, то

$$t_0 = t - \tilde{\rho}/\tilde{c}_\varphi, \quad t_1 = t + \tilde{\rho}/\tilde{c}_{\pi+\varphi}, \quad (3.6)$$

и, следовательно,

$$t'_0 = t_0/k, \quad t'_1 = t_1/k . \quad (3.7)$$

¹⁰Равенство (3.4) означает, что за то время, за которое при новой настройке показания часов \tilde{C} изменились на 1 $сек'$, при прежней настройке их показания изменились бы на $k \text{ сек}$. Другими словами, (3.4) означает, что если за некоторый промежуток времени показания \tilde{C} изменились на 1 $сек'$, то разница показаний часов системы S , с которыми \tilde{C} совмещались в конце и начале этого промежутка времени, равна $k \text{ сек}$.

Значит (см. (1.1)),

$$t' = \frac{t'_0 + t'_1}{2} \stackrel{(3.7),(3.6)}{=} \frac{1}{k} \left[t + \frac{\tilde{\rho}}{2} \left(\frac{1}{\tilde{c}_{\pi+\varphi}} - \frac{1}{\tilde{c}_\varphi} \right) \right].$$

С учётом (3.2) и (3.3) выражение в круглой скобке равно

$$\frac{1}{c \left(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} + \beta \cos \varphi \right)} - \frac{1}{c \left(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} - \beta \cos \varphi \right)} = \frac{-2\beta \cos \varphi}{c(1 - \beta^2)}.$$

Подставляя его в предыдущее равенство, получаем

$$t' = \frac{1}{k} \left(t - \frac{\beta \tilde{\rho} \cos \varphi}{c(1 - \beta^2)} \right). \quad (3.8)$$

Для любого φ обозначим через \tilde{c}'_φ t' -скорость света в \tilde{S} в направлении φ . Вычислим \tilde{c}'_φ на луче направления φ , исходящем из точки \tilde{O} .

Рассмотрим луч света, движущийся по этой полупрямой в направлении φ . Через $\tilde{\rho}(t')$ обозначим расстояние от точки \tilde{O} до точки полупрямой, которую луч света достиг в момент t' . Тогда

$$\tilde{c}'_\varphi = \frac{d\tilde{\rho}}{dt'} = \frac{d\tilde{\rho}}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'}. \quad (3.9)$$

$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \tilde{c}_\varphi$, $t \stackrel{(3.8)}{=} kt' + \frac{\beta \cos \varphi}{c(1 - \beta^2)} \tilde{\rho}$, следовательно, $\frac{dt}{dt'} = k + \frac{\beta \cos \varphi}{c(1 - \beta^2)} \tilde{c}'_\varphi$. Подставляя это

в (3.9), получаем $\tilde{c}'_\varphi = \tilde{c}_\varphi \left(k + \frac{\beta \cos \varphi}{c(1 - \beta^2)} \tilde{c}'_\varphi \right)$ и, значит, $\tilde{c}'_\varphi = \frac{ck(1 - \beta^2)\tilde{c}_\varphi}{c(1 - \beta^2) - \tilde{c}_\varphi \beta \cos \varphi}$.

С учётом (3.2) знаменатель последней дроби равен

$$c(1 - \beta^2) - c(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} - \beta \cos \varphi)\beta \cos \varphi = c \left[(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi) - \beta \cos \varphi \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} \right] = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} c (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} - \beta \cos \varphi) = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} \tilde{c}_\varphi.$$

Поэтому на лучах направления φ , исходящих из точки \tilde{O} ,

$$\tilde{c}'_\varphi = \frac{ck(1 - \beta^2)}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (3.10)$$

Из (3.10) видно, что t' - скорость света вдоль лучей, исходящих из точки \tilde{O} в направлении φ и противоположном $\pi + \varphi$, совпадают.

3.2.2 Шаг 3. Согласно (3.14) \tilde{c}'_φ не является константой по φ , поэтому невозможно за счёт выбора конкретного значения k сделать её равной c одновременно для

всех значений φ . Чтобы добиться этого необходимо изменить эталон длины, причём в каждом направлении, вообще говоря, по-своему.

Т.е. на каждом луче надо ввести свою единицу длины – φ -метр (m_φ). Определим его длину по сравнению с прежним метром (m).

В соответствии с (3.10) за одну cek' луч света, выпущенный из точки \tilde{O} в направлении φ , проходит расстояние равное \tilde{c}'_φ метрам. Следовательно, для того, чтобы при новой единице длины численное значение скорости света в этом направлении равнялось c , надо, чтобы в новых единицах это расстояние равнялось c φ -метрам, т.е. \tilde{c}'_φ (метров) = c (φ -метрам). Таким образом $m_\varphi = \tilde{c}'_\varphi/c$ m , что с учётом (3.10) даёт

$$m_\varphi = k \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi}} m. \quad (3.11)$$

Итак, если в \tilde{S} вместо исходных секунд (cek) и метров (m) использовать новые секунды (cek') и φ -метры (m_φ), то численное значение скорости света вдоль лучей, исходящих из точки \tilde{O} , во всех направлениях будет одинаково и равно c , т.е. при любых φ скорость света в \tilde{S} вдоль этих лучей равна $c \frac{m_\varphi}{cek'}$.

Систему отсчёта, полученную из \tilde{S} таким изменением временной и пространственной метрики, обозначим \tilde{S}' . Эту новую пространственную метрику, поскольку $1 m_\varphi$ – расстояние, проходимое светом в направлении φ за $\frac{1}{c} cek'$, назовём световой или коротко c - метрикой.

3.2.3 Введённая в \tilde{S}' пространственная c -метрика выглядит достаточно причудливо. Длина единичного вектора направления φ в \tilde{S}' в привычной метрике элементарного евклидова пространства, реализованной в \tilde{S} , меняется в зависимости от φ (см. (3.11)).

Введём в \tilde{S}' систему координат с началом в точке \tilde{O} и осями $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'$, сонаправленными с осями $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ соответственно. Углы φ с осью \tilde{x} для осей $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'$ равны $0, \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ соответственно. Поэтому единичные вектора этих осей $\tilde{i}', \tilde{j}', \tilde{k}'$ в \tilde{S}' имеют длины $1_{m_0}, 1_{m_{\pi/2}}$, и $1_{m_{\pi/2}}$. Единичные вектора осей $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ в \tilde{S} обозначим $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$, их длины равны $1 m$.

Согласно (3.11) введённые векторы связаны соотношениями

$$\tilde{i}' = k(1 - \beta^2)\tilde{i}, \quad \tilde{j}' = k\sqrt{1 - \beta^2}\tilde{j}, \quad \tilde{k}' = k\sqrt{1 - \beta^2}\tilde{k}. \quad (3.12)$$

Следовательно, связь между координатами произвольной точки в \tilde{S} и \tilde{S}' задаётся формулами

$$\tilde{x} = k(1 - \beta^2)\tilde{x}', \quad \tilde{y} = k\sqrt{1 - \beta^2}\tilde{y}', \quad \tilde{z} = k\sqrt{1 - \beta^2}\tilde{z}'. \quad (3.13)$$

Возьмём произвольную точку \tilde{M} в \tilde{S} , её координаты в \tilde{S} и \tilde{S}' обозначим $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ и $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ соответственно. Обозначим: φ – угол между осью \tilde{x} и вектором $\overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}}$, $\tilde{\rho}$ и

$\tilde{\rho}'_c$ – расстояние между \tilde{O} и \tilde{M} в \tilde{S} и \tilde{S}' соответственно. Поскольку $\tilde{\rho}$ выражается в метрах, а $\tilde{\rho}'_c$ – в φ -метрах, то согласно (3.11)

$$\tilde{\rho}'_c = \frac{\tilde{\rho}}{k(1 - \beta^2)} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} .$$

Выразим $\tilde{\rho}'_c$ через координаты $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'$ точки \tilde{M} в \tilde{S}' . Вычисление удобнее вести для $\tilde{\rho}'_c{}^2$. Обозначим

$$k\sqrt{1 - \beta^2} = l , \quad (3.14)$$

тогда

$$\tilde{\rho}'_c{}^2 = \frac{\tilde{\rho}^2}{l^2(1 - \beta^2)} (1 - \beta^2 \sin^2 \varphi) . \quad (3.15)$$

Преобразуем выражение в последней круглой скобке в (3.15). Учитывая, что $\sin \varphi = \frac{\sqrt{\tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2}}{\tilde{\rho}} \stackrel{(3.13)}{=} \frac{l\sqrt{\tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2}}{\tilde{\rho}}$ и $\tilde{\rho}^2 = \tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2 \stackrel{(3.13)}{=} l^2(1 - \beta^2)\tilde{x}'^2 + l^2(\tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2)$, имеем

$$\begin{aligned} 1 - \beta^2 \sin^2 \varphi &= 1 - \beta^2 l^2 \frac{\tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2}{\tilde{\rho}^2} = \frac{l^2(1 - \beta^2)\tilde{x}'^2 + l^2(\tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2) - \beta^2 l^2(\tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2)}{\tilde{\rho}^2} = \\ &= l^2(1 - \beta^2) \frac{\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2}{\tilde{\rho}^2} . \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3.15), получим $\tilde{\rho}'_c{}^2 = \tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2$, т.е.

$$\tilde{\rho}'_c = \sqrt{\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2} . \quad (3.16)$$

Таким образом замысловатая световая метрика в \tilde{S}' совпадает с евклидовой метрикой в координатах $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'$, но не с элементарной евклидовой метрикой, действующей в S и \tilde{S} . Ведь длины единичных векторов осей $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'$ в \tilde{S}' (см. (3.12)) в элементарной евклидовой метрике не совпадают.

3.2.4. Шаг 4 Покажем, что в \tilde{S}' скорость света равна c не только вдоль лучей, исходящих из \tilde{O} , но и во всех точках в любых направлениях.

Предварительно, используя (3.8) с учётом равенств $\tilde{\rho} \cos \varphi = \tilde{x}$, (3.1), (3.13), (3.14), и для однообразия меняя обозначения t' на \tilde{t}' , получим преобразование про-

странственно-временных координат для S и \tilde{S}' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t}' = \frac{1}{l\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ \tilde{x}' = \frac{1}{l\sqrt{1-\beta^2}} (x - vt) \\ \tilde{y}' = \frac{1}{l} y \\ \tilde{z}' = \frac{1}{l} z . \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Рассмотрим два произвольных события с координатами (x_i, y_i, z_i, t_i) и $(\tilde{x}'_i, \tilde{y}'_i, \tilde{z}'_i, \tilde{t}'_i)$, $i = 1, 2$ в S и \tilde{S}' соответственно. Выразим, используя (3.17), величину

$$(\tilde{x}'_2 - \tilde{x}'_1)^2 + (\tilde{y}'_2 - \tilde{y}'_1)^2 + (\tilde{z}'_2 - \tilde{z}'_1)^2 - c^2(\tilde{t}'_2 - \tilde{t}'_1)^2$$

через координаты событий в S .

Правые части равенств в (3.17) отличаются от правых частей преобразования Лоренца лишь наличием множителя $1/l$. Значит, в нашем случае искомое выражение в $1/l^2$ раз больше известного выражения (см., например, [7, гл.4, с.65], [13, гл.4, с.110]), получаемого для преобразования Лоренца.

Таким образом имеем

$$\begin{aligned} & (\tilde{x}'_2 - \tilde{x}'_1)^2 + (\tilde{y}'_2 - \tilde{y}'_1)^2 + (\tilde{z}'_2 - \tilde{z}'_1)^2 - c^2(\tilde{t}'_2 - \tilde{t}'_1)^2 = \\ & = 1/l^2 \left\{ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \right\} . \end{aligned}$$

Из этого равенства сразу же следует, что поскольку скорость света в S во всех точках и направлениях равна c , то она обладает этим же свойством в \tilde{S}' . Из этого, в свою очередь, следует, что все часы в \tilde{S}' синхронизированы друг с другом по Эйнштейну.

Шаг 5 Параметр k , введённый в п. 3.2.1, до сих пор оставался свободным. Выберем его так, чтобы входящая в преобразование (3.17) величина l , определяемая формулой (3.14), равнялась 1, т.е. так, чтобы преобразование (3.17) стало преобразованием Лоренца. Итак, k должно обеспечить равенство $l = k\sqrt{1-\beta^2} = 1$, т.е.

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \stackrel{(1.7)}{=} \gamma . \quad (3.18)$$

Все построенные в рамках классической физики ИСО, входящие в \tilde{S}' (определённое в начале п. 3.2), связаны с выделенной ИСО S преобразованием (3.17). При

выбранном значении k эти ИСО оказываются связанными с S преобразованием Лоренца.

$$\begin{cases} \tilde{t}' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ \tilde{x}' = \gamma(x - vt) \\ \tilde{y}' = y \\ \tilde{z}' = z, \text{ где } \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Но так как преобразования Лоренца образуют группу, то без дальнейших вычислений можем заключить, что

Все ИСО, входящие в \tilde{S}' , связаны друг с другом преобразованием Лоренца.

3.3 Физический смысл преобразования Лоренца в СТО

Пусть теперь S – пространственно трёхмерная ИСО специальной ТО, t – время в S .

Трёхмерное пространство S , согласно СТО, является элементарным евклидовым пространством. Пусть в S фиксирована декартова прямоугольная система координат с началом в точке O и осями x, y, z ¹¹.

3.3.1 Докажем, что время t системы S совпадает с абсолютным временем классической физики.

Для этого рассмотрим начало координат O и любую другую точку M системы S . Часы системы S , закреплённые в этих точках, обозначим C_O и C_M соответственно. Часы C_M являются часами той же ИСО теории относительности, что и C_O , и поэтому синхронизированы с C_O по Эйнштейну световым сигналом.

Теперь достаточно показать, что одновременно часы C_M синхронизированы с C_O и „классически“, т.е. так, как это подразумевается в классической физике – бесконечно быстрым сигналом (достаточно и как угодно быстрых сигналов).

Но в СТО под сигналом из одной точки в другую понимают (см., например, [12, Лекция 9], [17, §1.1, §8.1]) сигнал-взаимодействие, переносящий некоторое количество энергии из точки отправления в точку прибытия; а такие сигналы, согласно СТО, не могут иметь скорость, превосходящую c .

Однако, когда речь идёт о синхронизации часов по сигналу, существенным является не то, что он переносит энергию от точки расположения одних часов к точке расположения других, а то, что моменты отправления его от одной из этих точек и прибытия в другую можно точно фиксировать по часам, находящимся в точке, где соответствующие события происходят. Сигналы, удовлетворяющие этим требованиям, будем называть модельными, или коротко m -сигналами.

¹¹Для удобства использованы те же обозначения, что и в 3.1, хотя соответствующие объекты там и здесь не являются тождественными априори.

Легко показать, что как угодно быстрые m -сигналы в рамках СТО существуют. Сначала напомним, что означает для сигналов „туда и обратно“ любого типа (канонических для СТО, или модельных) в случае, когда часы в точке отправления и прибытия необязательно синхронизированы, утверждение, что сигнал бесконечно или как угодно быстрый.

Пусть сигнал, отправленный из точки O в момент t_0 (по часам C_o), прибыл в точку M и мгновенно отразился (или из M в момент прибытия в неё сигнала был послан сигнал в точку O) и вернулся в O в момент t_1 (по часам C_o).

Сигнал этот называется бесконечно быстрым, если $t_1 = t_0$, и говорят, что существует как угодно быстрый сигнал из точки O в точку M и обратно, если для любого числа $\delta > 0$ существует сигнал с $0 \leq t_1 - t_0 < \delta$.

Фиксируем какую-нибудь плоскость, проходящую через точки O, M ; через середину отрезка OM проведём перпендикулярную к нему прямую p , лежащую в этой плоскости; возьмем произвольную точку $N \in p$, расстояние от N до O обозначим r (рис.1).

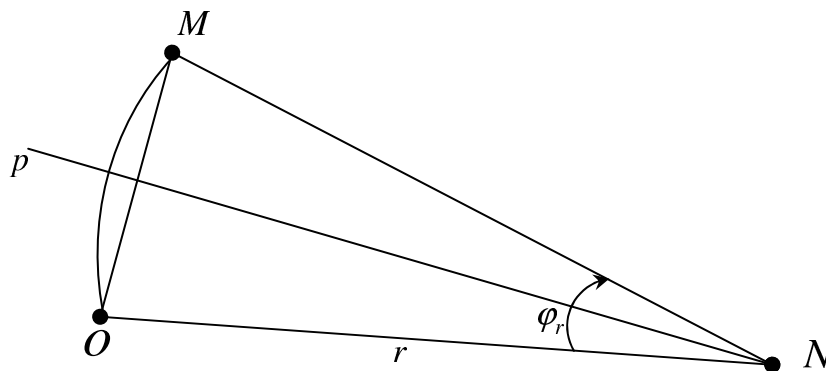


Рис.1

Пусть: в точке N расположен прожектор, вращающийся в рассматриваемой плоскости в указанном направлении с постоянной угловой скоростью, не зависящей от выбора точки N ; C_N – часы системы S , расположенные в точке N . Время, за которое прожектор поворачивается на угол φ_r , обозначим $\Delta_r t$. Поскольку при $r \rightarrow +\infty$ $\varphi_r \rightarrow 0$, то

$$\Delta_r t \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow +\infty . \quad (3.20)$$

Вычислим за какое время в ИСО S световое пятно от луча прожектора – „зайчик“ пробегает по дуге OM путь от O до M . Допустим, что прожектор направлен на точку O в момент t (по часам C_N), тогда на точку M он будет направлен в момент $t + \Delta_r t$ (по часам C_N). В таком случае световой зайчик будет в точке O в момент $t_0 = t + r/c$

(по часам C_O), а в точку M прибудет в момент $t' = t + \Delta_r t + r/c$ (по часам C_M), следовательно, путь от O до M по дуге OM зайчик преодолевает за время

$$t' - t_0 = \Delta_r t , \quad (3.21)$$

т.е. за такое же время, за которое прожектор поворачивается на угол φ_r .

Поместим в точке N ещё один прожектор, вращающийся с такой же угловой скоростью, что и первый, но в обратном направлении. Теперь нетрудно построить m -сигнал из точки O в точку M и обратно, в котором от точки O до точки M движется зайчик от первого прожектора, а в обратном направлении – зайчик от второго.

Фиксируем произвольное число t_0 и какое-нибудь $r \geq |OM|/2$. Движение прожекторов можно согласовать так, чтобы:

световой зайчик от первого прожектора попал в точку O в момент t_0 , тогда, согласно (3.21), в точку M он прибудет в момент

$$t' = t_0 + \Delta_r t \text{ (по часам } C_M \text{)} ; \quad (3.22)$$

световой зайчик от второго прожектора попал в точку M как раз в момент t' , в точку O он придёт в момент

$$t_1 = t' + \Delta_r t . \quad (3.23)$$

Следовательно, учитывая (3.22), имеем $t_1 = t_0 + 2\Delta_r t$.

Таким образом при $\forall t_0$ и произвольном $r \geq |OM|/2$ существует m -сигнал „туда и обратно“ из точки O в точку M такой, что его время отправления t_0 и время возвращения t_1 связаны соотношением $t_1 - t_0 = 2\Delta_r t$. Так что, учитывая (3.20) и возможность выбора как угодно больших значений r , как угодно быстрые m -сигналы „туда и обратно“ из точки O в точку M действительно существуют.

Часы, расположенные в точке M , называются классически синхронизированными с часами C_O , если для любого m -сигнала из точки O в точку M и обратно показания часов в точке M в момент прибытия сигнала –

$$t' \in [t_0, t_1] . \quad (3.24)$$

Иными словами, требуется, чтобы, согласно показаниям часов в точке M , сигнал прибыл в точку M не раньше, чем он был отправлен из точки O , и не позже, чем он возвратился в точку O .

Условие классической синхронизации (3.24) однозначно определяет показания часов в точке M , классически синхронизированных с часами C_O . Действительно, пусть часы $C_{M,1}$ и $C_{M,2}$, находящиеся в точке M , классически синхронизированы с C_O . Тогда скорости хода $C_{M,1}$ и $C_{M,2}$ совпадают, т. к. в противном случае через некоторое время абсолютная величина разности показаний этих часов станет больше некоторой положительной величины, и показания обоих часов не будут одновременно удовлетворять условию (3.24) для достаточно быстрого сигнала (такого, что $t_1 - t_0$ меньше

этой величины). Но если скорости хода $C_{M,1}$ и $C_{M,2}$ совпадают, то их показания отличаются на некоторую константу, и эта константа равна нулю, т.к. в противном случае при достаточно быстром сигнале показания обоих часов не могут одновременно удовлетворять условию (3.24). Таким образом показания часов $C_{M,1}$ и $C_{M,2}$ после того, как они были классически синхронизированы с C_O , всегда совпадают.

Перейдём к доказательству утверждения, что часы C_M системы S классически синхронизированы с часами C_O .

Допустим, что это утверждение неверно. Тогда существует m -сигнал „туда и обратно“ – Sg из точки O в точку M , для которого t' – время прибытия сигнала в точку M (по часам C_M) не удовлетворяет условию (3.23), т.е. либо $t' < t_0$, либо $t' > t_1$.

В первом случае сконструируем m -сигнал – Sg_1 , в котором движение „туда“ (от точки O до точки M) осуществляет исходный сигнал Sg , а движение „обратно“ осуществляет зайчик от второго прожектора, вращающегося так, что в точку M зайчик попадает как раз в момент t' (по часам C_M). Тогда (см. (3.23)) в точку O зайчик попадёт в момент $t_{1,1} = t' + \Delta_r t$.

За счёт выбора достаточно большого r можно обеспечить выполнение $\Delta_r t < t_0 - t'$, и тогда окажется, что $t_{1,1} < t_0$. Т.е. по часам C_O m -сигнал Sg_1 возвращается в точку O раньше, чем был отправлен, что нелепо. Таким образом первый случай невозможен.

Во втором случае фиксируем какое-нибудь число $t_{0,2}$, удовлетворяющее условию $t_1 < t_{0,2} < t'$ и достаточно близкое к t' (это условие будет уточнено ниже). Сконструируем m -сигнал Sg_2 , в котором движение „обратно“ (т.е. от точки M до точки O) осуществляет исходный сигнал Sg , а движение „туда“ – зайчик от первого прожектора, вращающегося так, что в точку O зайчик попадает в момент $t_{0,2}$. Тогда в точку M он попадает (см. (3.22)) в момент

$$t'_2 = t_{0,2} + \Delta_r t \quad (\text{по часам } C_M). \quad (3.25)$$

$\Delta_r t$ – положительная непрерывная функция от r в промежутке $[|OM|/2, +\infty)$, и поскольку справедливо (3.20), то все достаточно малые положительные числа принадлежат её области значений. Будем считать, что $t_{0,2}$ выбрано достаточно близким к t' , чтобы $t' - t_{0,2}$ принадлежала области значений $\Delta_r t$. Тогда можно r в (3.25) взять таким, чтобы $\Delta_r t = t' - t_{0,2}$, т.е. таким, что $t'_2 = t'$.

Итак сигнал Sg_2 отправляется из точки O в момент $t_{0,2}$ (по часам C_O), прибывает в точку M в момент t' (по часам C_M) и возвращается в точку O в момент t_1 (по часам C_O), т.е. раньше, чем был отправлен. Это опять-таки нелепо и следовательно второй случай тоже невозможен.

Таким образом утверждение о том, что часы C_M системы S классически синхронизированы с часами C_O , доказано, и, значит, время системы S является абсолютным.

3.3.2 1^0 . Теперь можем перейти к выяснению физического смысла преобразования Лоренца в СТО.

Из заключения п. 3.3.1 следует, что S одновременно является и ИСО специальной ТО, и классической ИСО.

Фиксируем произвольное число $0 \neq v \in (-c, c)$, и рассмотрим ИСО специальной ТО S' , перемещающуюся вдоль оси x со скоростью v относительно S . Пусть: в S' выбрана система координат с осями x', y', z' , сонаправленными с осями x, y, z соответственно, и началом O' ; ось x' скользит по оси x ; и в момент, когда O и O' совмещаются, время системы $S' - t' = t = 0$.

Пространственно-временные координаты точек S и S' связаны преобразованием Лоренца:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z, \text{ где } \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Пользуясь тем, что S является и классической ИСО, рассмотрим наряду с S' ещё и введённую в 3.2.2 систему отсчёта \tilde{S}' , движущуюся относительно S с той же, что и S' скоростью. Как показано в п. 3.2.4 при значении параметра k , определяемом формулой (3.18), пространственно-временные координаты точек S и \tilde{S}' связаны преобразованием (3.19).

Выясним связь между координатами точечных событий в системах S' и \tilde{S}' . Поскольку обе эти системы движутся относительно S с одинаковой скоростью, то относительно друг друга они неподвижны.

Рассмотрим произвольную пространственную точку \tilde{M}' , неподвижную относительно \tilde{S}' , а значит и относительно S' . Координаты точки \tilde{M}' в системах \tilde{S}' и S' – $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'$ и x', y', z' соответственно являются константами, не зависящими от времени.

Фиксируем теперь ещё и произвольный момент времени \tilde{t}' по часам системы \tilde{S}' в точке \tilde{M}' . Пусть в этот момент: t' – время по часам системы S' в точке \tilde{M}' ; M – точка системы S , совпадающая с \tilde{M}' ; t – время по часам системы S , расположенным в точке M ; x, y, z – пространственные координаты точки M в системе S .

Тогда имеем пространственно-временные координаты события „в точке \tilde{M}' часы системы \tilde{S}' показывают время \tilde{t}' “ в системах \tilde{S}' , S' и S равны соответственно $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}', \tilde{t}'$, x', y', z', t' и x, y, z, t . Следовательно, первый из этих трёх наборов координат связан с третьим соотношениями (3.19), а второй с третьим – (3.26). Но правые части соотношений (3.19) и (3.26) совпадают, и значит

$$x' \equiv \tilde{x}', y' \equiv \tilde{y}', z' \equiv \tilde{z}', t' \equiv \tilde{t}' \quad \text{при} \quad \forall \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}', \tilde{t}' .$$

Это в свою очередь означает, что в ИСО S' и \tilde{S}' совпадают как системы пространственных координат x', y', z' (коротко K') и $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'$ (\tilde{K}'), так и время t' и \tilde{t}' , т.е. как системы отсчёта, S' и \tilde{S}' тождественны.

2°. Таким образом для выяснения физического смысла преобразования Лоренца (3.26) достаточно уяснить смысл системы координат K' и времени t' или, что то же, системы координат \tilde{K}' и времени \tilde{t}' . Последнее практически выполнено в п.3.2, надо только упорядочить полученную там информацию.

Рассмотренная в п. 3.1 подвижная (относительно S) система отсчёта \tilde{S} является трёхмерным элементарным евклидовым пространством с тем же, что и в S , единичным масштабom длины, и использует абсолютное время t системы S . В \tilde{S} выбрана декартова прямоугольная система координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ (\tilde{K}) с координатными векторами $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$.

Расстояние между произвольными пространственными точками \tilde{M}_i , $i = 1, 2$ системы \tilde{S} с координатами $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$ можно найти непосредственно, прикладывая единичный масштаб к отрезку $\tilde{M}_1\tilde{M}_2$, или вычислить по формуле

$$\tilde{\rho}(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) = \sqrt{(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)^2 + (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)^2 + (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)^2}. \quad (3.27)$$

В п. 3.2 показано, что при использовании этого расстояния и абсолютного времени скорость света в \tilde{S} не только не является константой, равной c , но, вообще говоря, в различных направлениях различна. Показано так же, как в \tilde{S} можно ввести новое время \tilde{t}' и новую пространственную метрику $\tilde{\rho}'_c$ (световую метрику), обеспечивающие при их использовании равенство численного значения скорости света константе c .

Система отсчёта, полученная введением этой новой пространственно-временной метрики, была обозначена \tilde{S}' . В \tilde{S}' была введена прямоугольная система координат \tilde{K}' с координатными осями $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'$, геометрически совпадающими с одноимёнными осями \tilde{K} , и единичными координатными векторами $\tilde{i}', \tilde{j}', \tilde{k}'$, определяемыми формулами (3.12) и (3.18), т.е. такими, что

$$\tilde{i}' = \frac{1}{\gamma} \tilde{i}, \quad \tilde{j}' = \tilde{j}, \quad \tilde{k}' = \tilde{k}. \quad (3.28)$$

Оказалось, что световая метрика в \tilde{S}' совпадает с евклидовой метрикой

$$\tilde{\rho}'(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) \stackrel{def}{=} \sqrt{(\tilde{x}'_1 - \tilde{x}'_2)^2 + (\tilde{y}'_1 - \tilde{y}'_2)^2 + (\tilde{z}'_1 - \tilde{z}'_2)^2}, \quad (3.29)$$

где $(\tilde{x}'_i, \tilde{y}'_i, \tilde{z}'_i)$ – координаты точки \tilde{M}_i в системе координат \tilde{K}' . Таким образом \tilde{S}' является евклидовым пространством, но, в отличие от \tilde{S} и S , неэлементарным, поскольку длины единичных координатных векторов системы \tilde{K}' в элементарной евклидовой метрике не совпадают (см. (3.28)).

Наглядное представление о различии между элементарной евклидовой метрикой (расстояние вычисляется по формуле (3.27)) и евклидовой метрикой (расстояние определяется по формуле (3.29)), рассматриваемыми на одном и том же множестве пространственных точек (множества пространственных точек \tilde{S} и \tilde{S}' совпадают), даёт Рис.2.

Чтобы разгрузить чертёж, геометрически совпадающие системы координат \tilde{K} и \tilde{K}' разнесены. В плоскости $\tilde{z} = 0$ (или, что то же, $\tilde{z}' = 0$) на каждом из рисунков *a)* и *b)* изображены окружность единичного радиуса и три прямых угла, на первом – в элементарной евклидовой метрике $\tilde{\rho}$, на втором – в евклидовой метрике $\tilde{\rho}'$. Равные в соответствующей метрике углы отмечены одной и той же цифрой.

Смысл времени \tilde{t}' , введённого в п. 3.2 в системе \tilde{S}' , прост. В начале $\tilde{O}' \equiv \tilde{O}$ системы координат \tilde{K}' это время, которое показывают часы \tilde{C} после изменения скорости их хода так, что (см. (3.4), (3.18)) новая единица времени, отсчитываемого ими,

$$sek' = \gamma sek, \quad (3.30)$$

где sek – единица абсолютного времени t системы S . В остальных пространственных точках \tilde{S}' время определяется по размещённым в них часам, синхронизированным с часами \tilde{C} по Эйнштейну.

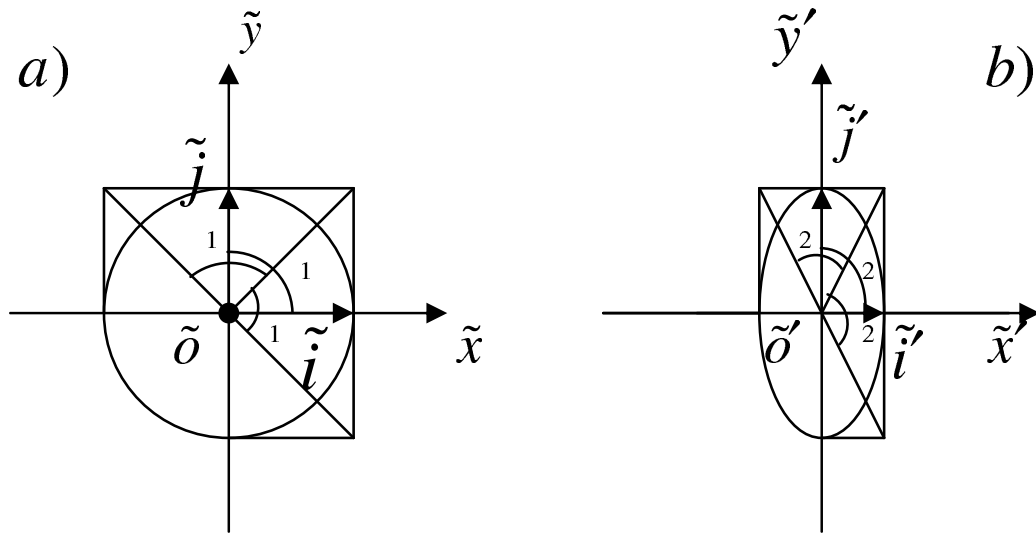


Рис.2

В результате получается, что время \tilde{t}' выражается через абсолютное время t : в точке \tilde{O}' (см. (3.5')) с учётом того, что в начале п. 3.2 \tilde{t}' обозначалось t') – формулой $t' = t/\gamma$, а в остальных пространственных точках системы \tilde{S}' (используя (3.8), равенство $\tilde{\rho} \cos \varphi = \tilde{x}$, (3.13) и (3.18)) – формулой

$$t' = \frac{t}{\gamma} - \frac{v}{c^2} \tilde{x}'. \quad (3.31)$$

Второе слагаемое в последней формуле определяет возникающий из-за синхронизации часов в \tilde{S}' по Эйнштейну сдвиг времени t' , благодаря которому скорость света в

пространственной метрике системы \tilde{S}' , вообще говоря, различная в противоположных направлениях при вычислении её относительно времени t , становится одинаковой при вычислении относительно времени t' .

Как видим, и пространственная, и временная метрики в любой подвижной (относительно S) ИСО \tilde{S}' подверглись изменению (см. (3.28), (3.30) и (3.31)) по сравнению с пространственной и временной метрикой ИСО S (метрики в S и \tilde{S} совпадают).

При этом ИСО S играет особую роль – в ней действует метрика элементарного евклидова пространства и абсолютная временная метрика. Во всех же остальных ИСО \tilde{S}' осуществляется метрика неэлементарного евклидова пространства и временная метрика с изменённой по отношению к абсолютному времени единицей длительности. Поэтому систему S уместно называть неподвижной.

Таким образом физический смысл преобразования Лоренца в том, что оно связывает пространственно-временные координаты точечных событий в ИСО с пространственной и временной метрикой, согласованными указанным способом с элементарной метрикой евклидова пространства и абсолютной временной метрикой неподвижной ИСО S .

Отметим, наконец, физический смысл зависящего от скорости v коэффициента γ , входящего в преобразование Лоренца. Когда приходится рассматривать различные скорости (u , v и т.д.), будем использовать символ, обозначающий скорость, в качестве нижнего индекса при коэффициенте γ , относящемся к этой скорости.

В случае преобразования Лоренца из неподвижной ИСО в движущуюся относительно неё со скоростью v подвижную ИСО \tilde{S}' , γ_v (см. (3.30) и (3.28₁)) является коэффициентом увеличения единицы времени и одновременно – коэффициентом уменьшения единицы длины вдоль оси x в подвижной системе относительно неподвижной.

В общем случае, когда обе связанные преобразованием Лоренца ИСО, вообще говоря, подвижные, выражение для этого коэффициента сложнее и уже не определяется лишь скоростью относительного движения v одной из них, например \tilde{S}'_2 , относительно другой, например \tilde{S}'_1 .

В этом случае коэффициент увеличения единицы времени, он же – коэффициент уменьшения единицы длины вдоль оси x , в системе \tilde{S}'_2 относительно системы \tilde{S}'_1 равен

$$\gamma_v \left(1 + \frac{uv}{c^2} \right), \quad (3.32)$$

где u – скорость движения \tilde{S}'_1 относительно неподвижной системы S .

Как видим, искомый коэффициент зависит ещё и от скорости одной из систем относительно неподвижной. Выражение (3.32) легко получается, если воспользоваться формулой для коэффициента γ композиции преобразования Лоренца [17, гл. 3, §3.5, с. 94] и смыслом γ_v в первом случае.

Множество возможных значений выражения (3.32) – промежуток $(0, +\infty)$ и в общем случае название „коэффициент увеличения (уменьшения)“ не надо воспринимать буквально, оно лишь означает, что значение соответствующей единицы масштаба в \tilde{S}'_1 умножается (делится) на этот коэффициент. Так что, когда коэффициент меньше единицы, единица масштаба в действительности уменьшается (увеличивается).

Сравним представление об изменении длины движущегося стержня согласно теории Лоренца, СТО (как считалось до сих пор) и СТО (как получается в соответствии с приведенным в работе анализом).

Рассмотрим твёрдый стержень, расположенный вдоль оси x и первоначально неподвижный относительно S . Пусть затем он перенесён в систему S' и свободно помещён вдоль оси x' , неподвижной относительно S' . В таблице указано, как изменится численная длина стержня при измерении в элементарной евклидовой (эе) метрике системы \tilde{S} и в метрике системы S' по сравнению с его численной длиной, измеренной в эе-метрике в неподвижной системе S . В каждой системе длина стержня измеряется, когда он неподвижен относительно этой системы.

	Лоренц	СТО, как считалось	СТО, как получилось
в эе-метрике	уменьшилась в γ раз	—————	не меняется
в метрике S'	не меняется	не меняется	увеличилась в γ раз

3.4 Заключение

1). В СТО, как само собой разумеющееся, принято, что во всех её ИСО, рассматриваемых как трёхмерные множества пространственных точек, реализуется метрика эе-пространства с общим для всех ИСО единичным масштабом длины. Единичный масштаб времени тоже общий (см., например, [1, §1-2] и цитату из книги [8, гл. 6, §5, с. 245], помещённую ниже).

„ ... предполагается как самоочевидный тот факт, что измерительная линейка, применяемая сначала в системе отсчёта S , а потом в другой системе S' при одних и тех же физических условиях должна представлять одну и ту же длину в обеих системах Фиксированная линейка, покоящаяся в системе S и имеющая в ней длину 1 см, будет, разумеется, иметь длину в 1 см и в том случае, когда она покоится в системе S' Точно то же самое должно быть постулировано и относительно часов.

Это молчаливое допущение, принятое в теории Эйнштейна, мы могли бы назвать „принципом физической равноценности единиц измерения“.

Сформулированный М. Борном принцип для краткости будем называть „принципом эквивалентности мер“.

2). Однако, анализ, проведённый в 3.3.2, 2^0 , показал, что каждая движущаяся ИСО S' не является эе-пространством. Единичные масштабы длины и времени в ней

и S различны (см. (3.28), Рис.2 и (3.30)). Более того, единичные масштабы длины в S' для различных направлений, вообще говоря, различны (см. (3.11)) с точки зрения эе-метрики.

3). Случилось так, что М.Борн ещё в 1920г. проанализировал на модельном примере, что означали бы для СТО факты, указанные в п. 2).

Приведём цитату из [8, гл. 6, §5, с. 245].

„ ... если единицы длины и времени определены по эйнштейновским правилам через скорость звука, они будут, вне всякого сомнения, не равными единицам длины и времени, измеряемым с помощью физически идентичных линеек и часов: ведь *эйнштейновские единицы длины и времени* различаются не только на каждой движущейся лодке соответственно её скорости, но сама единица длины в направлении движения отличается от единицы длины в направлении перпендикулярном (или наискосок) к направлению движения.

Таким образом кинематика Эйнштейна была бы возможным способом определения, но в данном случае её нельзя было бы считать даже полезной. Обычные приёмы обращения с линейками и часами были бы, вне всякого сомнения, гораздо предпочтительнее.“¹²

Для удобства приведём соответствующую часть текста из [19, ch.6, §5, p. 210].

„For if the units of length and time are determined according to Einstein's rule with the help of the velocity of sound, they will, of course, by no means be equal to the units of length and time measured with fixed measuring rods and ordinary clocks ; for the former are not only different on every moving ship according to its velocity but, moreover, the unit of length in the direction of motion is different from that athwart the ship. Thus Einstein's kinematics would be a possible definition but in this case not even a useful one. The ordinary measuring rods and clocks would without doubt be superior to it.“

По существу здесь Борн сказал, что при несоблюдении принципа физической равноценности единиц измерения преобразование Лоренца представляет собой всего лишь допустимую, но бесполезную, замену переменных. По-видимому, только потому, что считал ситуацию чисто гипотетической, Борн не высказался более определённо.

4). Принцип относительности в механике и специальный принцип относительности в СТО были выдвинуты Г.Галилеем и А. Эйнштейном при непрременном условии, что средства измерения расстояний между пространственными точками и длительностей временных промежутков в сравниваемых ИСО тождественны (физически идентичны), т.е. при условии, что соблюден принцип эквивалентности мер (см. [10, т.1, с. 85], [1, §3, с. 13; 2, §1, с. 69 и §3, с. 70-71; 3, с. 175], Борн, цитата в п. 1)). При несоблюдении этого условия принцип относительности в механике и СТО вообще лишён смысла.

¹²В [8] при переводе допущена неточность: вместо выделенных курсивом слов в [8] – слово „линейки“.

Но, согласно п. 2), именно принцип эквивалентности мер в СТО не выполняется и, следовательно, в ней нельзя пользоваться принципом относительности, т.е. СТО внутренне противоречива.

5). Проследим схематически, за счёт чего при построении СТО появилась эта противоречивость.

В первой же своей работе по СТО [1, с.7] Эйнштейн сначала ввёл принцип относительности, а затем находящийся с ним в „кажущемся противоречии“ принцип постоянства скорости света. Противоречие это возникало из-за использования абсолютного времени [4, ч.1, с.418] и заключалось в том, что скорость света в движущихся друг относительно друга ИСО была различной. Используя в каждой ИСО синхронизацию часов по световому сигналу (по Эйнштейну) и выдвигая требования, чтобы скорость света во всех ИСО была одинаковой и равной c , Эйнштейн получил, что пространственно-временные координаты событий в различных ИСО связаны преобразованием Лоренца, а не Галилея.

Из преобразования Лоренца следовало, что введённое таким образом новое время уже не является абсолютным, а своё для каждой ИСО, и что численное значение скорости света во всех ИСО равно c .

Таким образом „кажущееся противоречие“ было устранено, но появилось новое (см. п. 2)). Оказалось, что в „движущихся“ ИСО нарушен принцип эквивалентности мер, требуемый специальным принципом относительности, а без выполнения этого принципа нет и СТО.

Получилось как в притче об обезьяней лапе, приведённой Н. Винером в [9, гл.9, с.28-29].

Фактически „математическому аппарату“ был задан вопрос – „каким должно быть преобразование, связывающее пространственно-временные координаты событий в одной ИСО с таковыми в другой, чтобы скорость света во всех ИСО равнялась c ?“ и он выдал ответ – „преобразованием Лоренца“.

Но при формулировке вопроса было упущено условие, чтобы в движущейся системе отсчёта S' использовалась элементарная евклидова геометрия. Вместо него (особо отчётливо это выражено в [2, §3, с.71-72]) требовалось лишь, чтобы в S' использовалось евклидово расстояние, определяемое формулой (3.29) (без знака „ \sim “), а это не обеспечивает выполнение требования, чтобы в S' использовалась элементарная евклидова метрика.

В результате оказалось, что пространственная метрика в S' евклидова, но не элементарная евклидова, временная метрика тоже исказилась.

Ответ, выданный математическим аппаратом и принятый СТО, оказался для неё разрушительным.

б). Сразу же возникает вопрос – как быть с тем, что (см., напр., [18, с.501-502]) СТО подтверждается как специальными экспериментами, так и при использовании основанных на ней теорий явлений, связанных с релятивистскими скоростями.

По-видимому, эти подтверждения не безапелляционны. Обратимся к опытам типа

Майкельсона – Морли. В этих опытах, исходя из представлений классической физики, рассчитывается величина Δt разности времён прохождения световым лучём пути (туда и обратно) по плечу прибора, направленному вдоль направления движения относительно эфира и по плечу, расположенному перпендикулярно к этому направлению.

Величина Δt является функцией от скорости v равномерного и прямолинейного движения прибора (движущегося вместе с Землёй) относительно эфира, и позволяет вычислить предсказываемый теорией сдвиг d (тоже являющийся функцией v) интерференционных полос при повороте прибора на 90° вокруг вертикальной оси. Сравнивая d с фактическим (полученным в результате эксперимента) сдвигом d_e находят v_{ce} – значение v , вычисленное по экспериментальным данным.

Поскольку в предположении неподвижного эфира предполагаемое значение v_s скорости v обычно бывает известным, то известно и предполагаемое значение d_s сдвига d .

Обстоятельный обзор опытов указанного типа, начиная с первого, осуществлённого в 1881г. А.Майкельсоном, дал в своей итоговой работе [20] Д.Миллер, посвятивший этим опытам более 30 лет.

Обычно окончательный результат эксперимента характеризуют величинами v_s , d_s , d_e (в долях ширины полосы) и v_{ce} . Попытаемся оценить их достоверность.

Предполагаемая скорость движения Земли относительно эфира (скорость эфирного ветра).

В предположении неподвижного эфира за v_s одни исследователи принимают орбитальную скорость Земли, другие – галактическую, на порядок большую.

Предполагаемый сдвиг полос при повороте интерферометра.

Значение d_s определяется с помощью функции $\Delta t(v)$, построенной на основе представлений классической физики о процессе преодоления световым лучём путей по плечам интерферометра. Майкельсон, изобретатель прибора, в статье об опыте 1881 года считал, что по плечу, перпендикулярному к направлению движения Земли, луч движется от распределительной пластинки до концевого зеркала по прямой, неподвижной относительно солнечной системы и перпендикулярной направлению движения, в обратном направлении – то же.

Однако уже в работе 1887 года Майкельсон учёл замечание Лоренца, что луч по направлению к концевому зеркалу должен двигаться относительно солнечной системы по прямой, наклонённой к направлению движения Земли под углом, обеспечивающим его приход в центр концевого зеркала, на обратном пути – аналогично. При этом функция $\Delta t(v)$ и вместе с ней d_s уменьшились вдвое.

Между тем, вариант Майкельсона вполне приемлем, надо только учесть, что в нём луч отражается не от центра концевого зеркала, а от точки, сдвинутой в направлении, противоположном движению прибора. Обратный луч попадает уже не в

центр распределительной пластинки, что в работе 1881г. не было учтено.

В действительности, по-видимому, осуществляются не только эти два варианта, но и все остальные, допускаемые конструкцией прибора, а наблюдаемый сдвиг полос d_e является суммарным результатом их осуществления.

Оценим точность, с которой функция $\Delta t(v)$ должна отражать действительное значение Δt . В зависимости от конструкции приборов величина d_s имеет порядок от 1 до 10^{-2} ширины полосы. Это значит, что ошибка в нахождении Δt должна быть порядка около $10^{-1} - 10^{-3}$ от периода колебаний, используемого в приборе света, т.е. порядка около $10^{-16} - 10^{-18}$ сек.

При таких требованиях, видимо, надо учитывать и время прохождения луча через пластины, и обратить внимание на то, что процессы преломления и отражения, по-видимому, не мгновенны и длительность их, возможно, зависит от скорости падения луча на преломляющую или отражающую поверхность.

Значение v , вычисленное по экспериментальным данным.

v_{ce} вычисляется по d_e с помощью функции $\Delta t(v)$, о надёжности которой уже говорилось.

Фактическая величина сдвига интерференционных полос.

Три рассмотренные характеристики достаточно „субъективны“, т.к. зависят от принимаемых предположений и точности представлений о процессах, определяющих сдвиг полос. В отличие от них величина d_e „объективна“, т.к. зависит лишь от прибора и условий проведения опыта.

На том основании, что d_e по сравнению с d_s (v_{ce} по сравнению с v_s) мало¹³, часто делался вывод о нулевом результате опыта, т.е. о том, что d_e и v_{ce} пренебрежимо малы.

Такой вывод из-за ненадёжности d_s вряд ли оправдан. Кроме того, по данным Миллера, при прочих равных условиях, d_e резко уменьшается при увеличении экранирования прибора (опыты Р.Кеннеди, К.Иллингворта, Г.Джуса (Joos)).

Видимо, до уточнения функции $\Delta t(v)$ надо отказаться от вычисления v_{ce} и сосредоточиться на выяснении наличия достоверных изменений d_e , связанных именно с поворотом прибора. Наличие таких изменений будет указывать на анизотропность скорости света относительно Земли. Миллер [20, р.207] на основании графиков d_e утверждает, что „имеется несомненный систематический эффект“, связанный с вращением интерферометра, т.е., что такие изменения есть. Следует добавить, что далеко не все физики с этим согласны. Похоже, единое мнение до сих пор не установилось.

По-видимому, изложенное здесь и другие подтверждения СТО ещё нуждаются в

¹³Сравнения эти фактически дублируют друг друга, т.к. при используемой методике $v_s/v_{ce} = \sqrt{d_s/d_e}$.

тщательном анализе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Эйнштейн, К электродинамике движущихся тел. 1905, в книге [6].
2. А. Эйнштейн, О принципе относительности и его следствиях. 1907, в книге [6].
3. А. Эйнштейн, Теория относительности. 1911, в книге [6].
4. А. Эйнштейн, Теория относительности. 1915, в книге [6].
5. А. Эйнштейн, О специальной и общей теории относительности. 1917, в книге [6].
6. А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т.1. Наука, 1965.
7. П. Бергман, Введение в теорию относительности. ИЛ, Москва, 1947.
8. М. Борн, Эйнштейновская теория относительности. Мир, 1972.
9. Н. Винер, Новые главы кибернетики. Сов. радио, Москва, 1963.
10. Г. Галилей, Послание к Фраческо Игноли. В книге [11].
11. Г. Галилей, Избранные труды, т.1. Наука, Москва, 1964.
12. Л.И. Мандельштам, Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. Наука, Москва, 1972.
13. А.Н. Матвеев, Механика и теория относительности, изд.3. Москва, 2003.
14. Д.В. Сивухин, Общий курс физики, т.4, Оптика. ФМЛ, Москва, 2005.
15. И.А. Соломец, Парадокс часов. Решение проблемы.
<http://ivanik3.narod.ru/linksTOSolom.html> .
16. И.А. Соломец, „Малый“ парадокс часов. Решение проблемы.
<http://ivanik3.narod.ru/linksTOSolom.html> .
17. В.А. Угаров, Специальная теория относительности. Наука, Москва, 1977.
18. А.М. Прохоров (гл.ред.), Физическая энциклопедия, т.3. Москва, 1992.
19. М. Born, Einstein's Theory of Relativity. New York, D. & C, 1922.
20. D. Miller, The Ether-Drift Experiment and the Determination of the Absolute Motion of the Earth. Rev. of Modern Physics, v.5, July, 1933.