## 38

# ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Излагаемая здесь теория является наиболее радикальным обобщением общеизвестной в настоящее время «теории относительности»; последнюю в отличие от первой я буду называть «специальной теорией относительности», предполагая, что с нею читатель знаком. Обобщение теории относительности существенно облегчалось благодаря работам математика Минковского, который впервые вскрыл формальное равноправие пространственных координат и временной координаты в специальной теории относительности и использовал это равноправие для построения теории. Необходимый для общей теории относительности вспомогательный математический аппарат уже существовал в форме «абсолютного дифференциального исчисления», основы которого были заложены в исследованиях Гаусса, Римана и Кристоффеля, посвященных неэвклидовым пространствам; это исчисление, приведенное в систему Риччи и Леви-Чивитой, уже применялось для решения задач теоретической физики. В разделе Б настоящей работы изложен весь необходимый нам, но, очевидно, не известный физикам, вспомогательный математический аппарат по возможности самым простым и прозрачным способом, так что для понимания этой работы не требуется изучать математическую литературу. Наконец, хочу поблагодарить здесь своего друга, математика М. Гроссмана, который не только избавил меня от изучения специальной математической литературы, но и поддерживал при поисках уравнений гравитационного поля.

---

* *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* Ann. Phys., 1916, 49, 769—822. (Работа выходила в Германии несколько раз отдельным изданием; в 1929 г. вышло 5-е издание (Barth Verlag). Русский перевод был опубликован в сб. «Принцип относительности». (ГТТИ, 1935).— *Прим. ред.*)

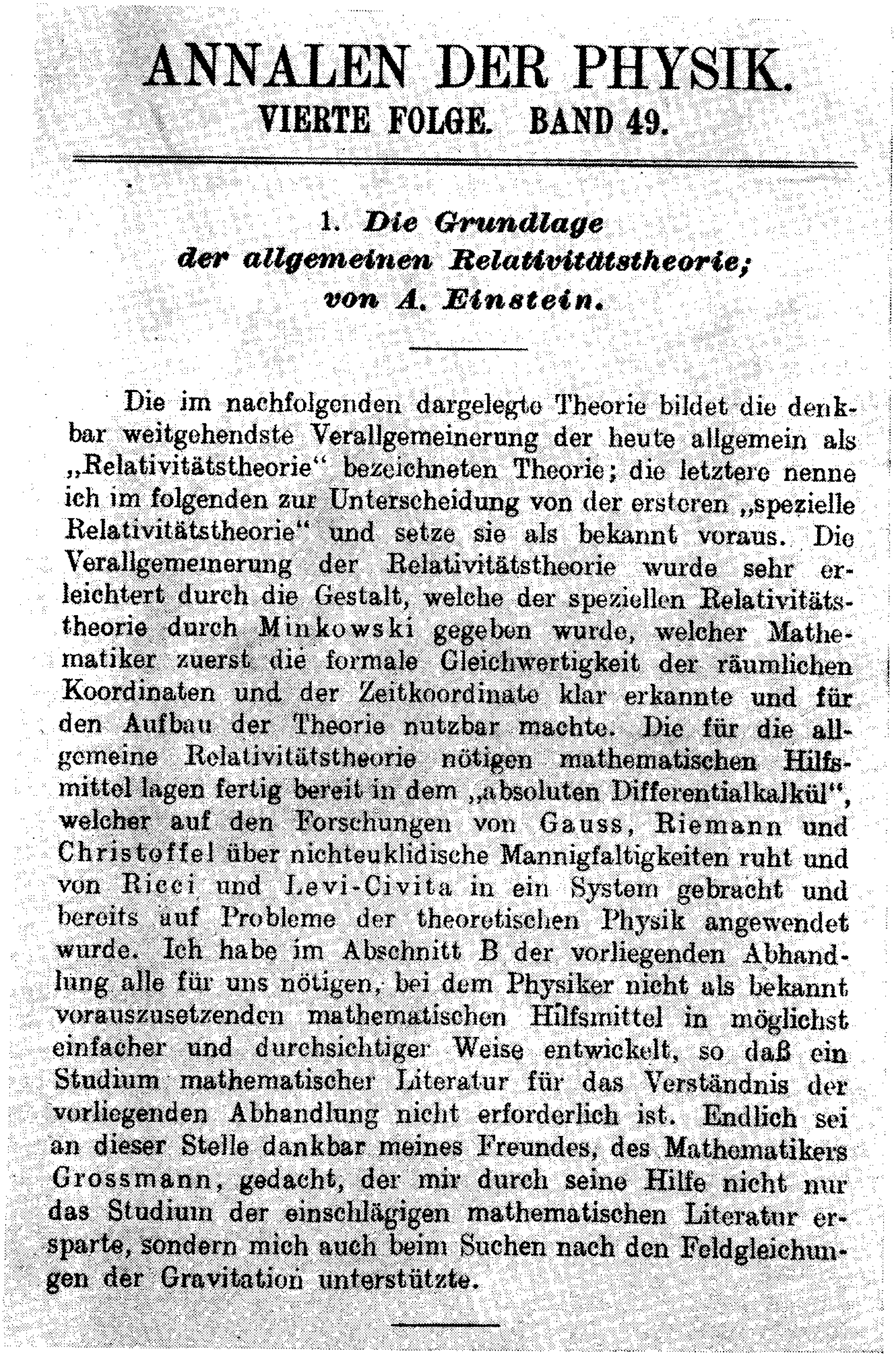
## А. ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О ПОСТУЛАТЕ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### § 1. Замечания к специальной теории относительности

В основе специальной теории относительности лежит следующий постулат, которому удовлетворяет также и механика Галилея — Ньютона. Если координатная система $K$ выбрана так, что физические законы в ней справедливы в своей простейшей форме, то *те же самые* законы справедливы во всякой другой координатной системе $K'$, которая движется равномерно и прямолинейно относительно $K$. Мы называем этот постулат «специальным принципом относительности». Словом «специальный» подчеркивается то обстоятельство, что этот принцип ограничивается случаем. когда система $K'$ совершает относительно системы $K$ *равномерное и прямолинейное движение*, и что равноценность систем $K'$ и $K$ не распространяется на случай *неравномерного* движения системы $K$ относительно $K$.

Итак, специальная теория относительности отличается от классической механики не только постулатом относительности, но и в основном постулатом постоянства скорости света в пустоте, из которого при объединении его со специальным принципом относительности известным образом вытекает относительность одновременности, преобразование Лоренца и связанные с последним законы, касающиеся поведения движущихся твердых тел и часов.

Хотя теория пространства и времени и испытала под влиянием специальной теории относительности весьма глубокое изменение, однако *один* важный пункт остался незатронутым. Согласно специальной теории относительности высказывания геометрии имеют значение законов, касающихся возможных относительных положений (покоящихся) твердых тел, а общие положения кинематики — значение законов, описывающих поведение измерительных приборов и часов. При этом двум выбранным материальным точкам покоящегося (твердого) тела всегда соответствует некоторый отрезок вполне определенной длины, независимо как от положения и ориентации тела, так и от времени. Двум отмеченным показаниям стрелки часов, покоящихся относительно некоторой (допустимой) координатной системы, всегда соответствует интервал времени определенной величины, независимо от места и времени. Вскоре мы увидим, что общая теория относительности не может придерживаться этого простого физического толкования пространства и времени.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 49.

1. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie;* *von A. Einstein.*

Die im nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als „Relativitätstheorie" bezeichneten Theorie; die letztere nenne ich im folgenden zur Unterscheidung von der ersteren „spezielle Relativitätstheorie" und setze sie als bekannt voraus. Die Verallgemeinerung der Relativitätstheorie wurde sehr erleichtert durch die Gestalt, welche der speziellen Relativitätstheorie durch Minkowski gegeben wurde, welcher Mathematiker zuerst die formale Gleichwertigkeit der räumlichen Koordinaten und der Zeitkoordinate klar erkannte und für den Aufbau der Theorie nutzbar machte. Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem „absoluten Differentialkalkül", welcher auf den Forschungen von Gauss, Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten ruht und von Ricci und Levi-Civita in ein System gebracht und bereits auf Probleme der theoretischen Physik angewendet wurde. Ich habe im Abschnitt B der vorliegenden Abhandlung alle für uns nötigen, bei dem Physiker nicht als bekannt vorauszusetzenden mathematischen Hilfsmittel in möglichst einfacher und durchsichtiger Weise entwickelt, so daß ein Studium mathematischer Literatur für das Verständnis der vorliegenden Abhandlung nicht erforderlich ist. Endlich sei an dieser Stelle dankbar meines Freundes, des Mathematikers Grossmann, gedacht, der mir durch seine Hilfe nicht nur das Studium der einschlägigen mathematischen Literatur ersparte, sondern mich auch beim Suchen nach den Feldgleichungen der Gravitation unterstützte.

Первая страница статьи А. Эйнштейна «Основы общей теории относительности»

## § 2. Об основаниях, которые подсказывают расширение постулата относительности

Классической механике и в неменьшей степени специальной теории относительности присущ некоторый теоретико-познавательный недостаток, который, пожалуй, впервые был ясно отмечен Э. Махом. Мы поясним его на следующем примере. Пусть два жидких тела одинаковой величины и состава свободно парят в пространстве на таком большом расстоянии друг от друга (и от всех прочих масс), что должны приниматься во внимание только те гравитационные силы, с которыми действуют друг на друга части *одного и того же тела*. Пусть расстояние между этими телами остается неизменным. Пусть также не происходит перемещения друг относительно друга частей одного и того же тела. Но пусть каждая масса, рассматриваемая наблюдателем, покоящимся относительно другой массы, вращается вокруг линии, соединяющей массы с постоянной угловой скоростью (это относительное движение обеих масс всегда возможно установить). Теперь представим себе, что поверхности обоих тел ($S_1$ и $S_2$) измерены с помощью масштабов (покоящихся относительно этих тел); пусть в результате измерения оказалось, что поверхность $S_1$ представляет собой сферу, а поверхность $S_2$ — эллипсоид вращения.

Теперь возникает вопрос: по какой причине тела $S_1$ и $S_2$ ведут себя по-разному? Ответ на этот вопрос может быть только тогда признан удовлетворительным[1] с теоретико-познавательной точки зрения, когда обстоятельство, указанное в качестве причины, является *наблюдаемым опытным фактом*; ибо принцип причинности только тогда имеет смысл суждения о явлениях в мире опыта, когда в качестве причин и следствий в конечном итоге оказываются лишь *наблюдаемые факты*.

Механика Ньютона не дает удовлетворительного ответа на этот вопрос. Она говорит следующее. Законы механики справедливы для пространства $R_1$, относительно которого тело $S_1$ находится в покое, но несправедливы для пространства $R_2$, относительно которого находится в покое тело $S_2$. Однако галилеево пространство $R_1$ (и движение по отношению к нему), которое при этом вводится, является *фиктивной* причиной, а не наблюдаемым фактом. Таким образом, ясно, что механика Ньютона в рассматриваемом случае удовлетворяет требованию причинности не по существу, но лишь кажущимся образом, возлагая ответственность за наблюдаемое различное поведение тел $S_1$ и $S_2$ на фиктивную причину — пространство $R_1$.

---

[1] Удовлетворительный с теоретико-познавательной точки зрения ответ может, конечно, еще оказаться физически неверным в том случае, когда он не согласуется с другими опытными данными.

Удовлетворительным ответом на поставленный выше вопрос может быть только следующий: физическая система, состоящая из тел $S_1$ и $S_2$, сама по себе не дает возможности указать причину, с помощью которой можно было бы объяснить различное поведение тел $S_1$ и $S_2$. Причина должна, следовательно, лежать *вне* этой системы. Отсюда следует вывод, что общие законы движения, которые, в частности, определяют форму тел $S_1$ и $S_2$, должны быть таковы, чтобы механические свойства тел $S_1$ и $S_2$ в значительной степени обусловливались отдаленными массами, которые мы не включили в рассматриваемую систему. Эти отдаленные массы (и их относительные движения по отношению к рассматриваемым телам) должны тогда рассматриваться как носители принципиально наблюдаемых причин различного поведения рассматриваемых тел $S_1$ и $S_2$; они становятся на место фиктивной причины $R_1$. Из всех мыслимых пространств $R_1$, $R_2$ и т. д., движущихся любым образом относительно друг друга, ни одному из них априори не должно отдаваться предпочтение, если только мы хотим устранить указанный теоретико-познавательный недостаток. *Законы физики должны быть составлены так, чтобы они были справедливы для произвольно движущихся координатных систем.* Таким образом мы приходим к расширению постулата относительности.

Кроме этого весьма важного теоретико-познавательного аргумента, в пользу расширения теории относительности говорит еще один хорошо известный физический факт. Пусть $K$ — галилеева координатная система, т. е. такая, относительно которой (по крайней мере, в рассматриваемой четырехмерной области) некоторая масса, достаточно удаленная от других, движется прямолинейно и равномерно. Пусть $K'$ — вторая координатная система, которая относительно $K$ движется *равномерно ускоренно*. Тогда достаточно изолированная от других масса совершает относительно $K'$ ускоренное движение, причем ни ускорение, ни направление этого ускорения не зависят от химического состава и физического состояния этой массы.

Может ли наблюдатель, покоящийся относительно координатной системы $K'$, отсюда заключить, что он находится в «действительно» ускоренной координатной системе? Ответ на этот вопрос должен быть отрицательным, ибо только что указанное поведение масс, свободно движущихся относительно $K'$, может быть столь же хорошо объяснено следующим образом. Координатная система $K'$ не имеет ускорения, но в рассматриваемой пространственно-временной области имеется гравитационное поле, вызывающее ускоренное движение тел относительно системы $K'$.

Такого рода объяснение становится возможным благодаря тому, что из опыта нам известно о существовании силового поля (а именно: гравитационного поля), обладающего замечательным свойством сообщать всем телам одно и то же ускорение [2]. Механическое поведение тел относительно координатной системы $K'$ будет таким же, какое обнаруживается на опыте по отношению к системам, которые мы привыкли рассматривать как «покоящиеся» или как «законные»; поэтому и с физической точки зрения естественно считать, что обе системы $K$ и $K'$ с одинаковым правом могут рассматриваться как «покоящиеся»; иначе говоря, обе системы равноправны в качестве координатных систем для физического описания процессов.

Из этих соображений видно, что построение общей теории относительности должно одновременно привести и к теории тяготения, ибо гравитационное поле можно «создать» простым изменением координатной системы. Далее, сразу видно, что принцип постоянства скорости света в пустоте должен быть изменен, ибо легко убедиться в том, что траектория луча света относительно системы $K'$ в общем случае должна быть кривой, если свет относительно системы $K$ распространяется прямолинейно и с определенной постоянной скоростью.

## § 3. Пространственно-временной континуум. Требование общей ковариантности уравнений, выражающих общие законы природы

В классической механике, так же как и в специальной теории относительности, пространственные и временные координаты имеют непосредственный физический смысл. Когда мы говорим, что точечное событие имеет координату $x_1$, то это означает следующее: построенную по правилам эвклидовой геометрии при помощи твердых стержней проекцию точечного события на ось $X_1$, получают, откладывая определенную линейку — единичный масштаб — $x_1$ раз от начала координат по (положительной) оси $X_1$. Когда мы говорим, что точка имеет координату $x_4 = t$, то это означает следующее: по часам (эталону времени), покоящимся относительно координатной системы, пространственно (практически) совпадающим с точечным событием и выверенным по определенным правилам, прошло $x_4 = t$ периодов, когда наступило точечное событие [3].

Такое понимание пространства и времени всегда представлялось взору физиков, хотя быть может большей частью и бессознательно; это ясно видно из той роли, какую играют эти понятия в физических измерениях.

[2] Этвеш экспериментально доказал, что гравитационное поле обладает этим свойством с большой степенью точности.

[3] Мы допускаем возможность констатирования «одновременности» для пространственно смежных событий или, точнее выражаясь, для пространственно-временно́го соприкосновения (совпадения), не давая определения этому фундаментальному понятию.

Такое толкование читатель должен был положить также в основу второго рассуждения последнего параграфа для того, чтобы придать ему некоторый смысл. Однако мы покажем теперь, что это толкование нужно отбросить и заменить более общим, чтобы последовательно провести общий постулат относительности, при условии, что специальная теория относительности сохраняется в предельном случае отсутствия гравитационного поля.

Мы введем в пространстве, свободном от гравитационных полей, галилееву координатную систему $K(x, y, z, t)$ и, кроме того, координатную систему $K'(x', y', z', t')$, которая равномерно вращается относительно $K$. Пусть начала координат обеих систем, так же как и их оси $Z$, все время совпадают друг с другом. Покажем, что вышеприведенные определения, касающиеся физического смысла длин и времен, не пригодны для изучения пространства и времени в системе $K'$. На основании симметрии ясно, что окружность в координатной плоскости $XY$ системы $K$ с центром в начале координат может в то же время рассматриваться как окружность в координатной плоскости $X'Y'$ системы $K'$. Теперь представим себе, что длина и диаметр этой окружности измерены при помощи единичного масштаба (бесконечно малого по сравнению с радиусом) и затем взято отношение обоих результатов измерения. Если выполнить этот эксперимент с масштабом, покоящимся относительно галилеевой системы $K$, то в качестве частного получится число $\pi$. Результатом измерения, выполненного с масштабом, покоящимся относительно системы $K'$, будет число, большее $\pi$. В этом легко убедиться, если судить о процессе измерения из «покоящейся» системы $K$ и принять во внимание, что масштаб, приложенный по касательной к окружности, претерпевает лоренцово сокращение, а радиально приложенный масштаб не изменяется. Поэтому относительно системы $K'$ оказывается несправедливой геометрия Эвклида; выше установленное представление о координатах, которое предполагает применимость эвклидовой геометрии, оказывается непригодным в системе $K'$. Столь же невозможным оказывается введение в $K'$ удовлетворяющего физическим требованиям времени, которое показывали бы одинаковые часы,покоящиеся относительно $K'$. Чтобы в этом убедиться, представим себе, что в начале координат и где-нибудь на окружности установлено двое одинаковых часов, наблюдаемых из «покоящейся» системы $K$. Согласно известному выводу специальной теории относительности, наблюдение по часам в системе $K$ дает, что часы, установленные на окружности, идут медленнее часов, помещенных в начале координат, поскольку первые движутся, а последние нет. Наблюдатель, который находится в общем начале координат и который способен, пользуясь светом, наблюдать часы, находящиеся на окружности, обнаружит тогда, что часы, установленные на окружности, идут медленнее, чем часы, установленные рядом с ним. Так как наблюдатель не решится считать скорость света на пройденном светом пути явной функцией времени, то он объяснит свое наблюдение тем, что часы на окружности «действительно» идут медленнее часов, установленных в начале координат. Таким образом, он будет вынужден дать времени такое определение, которое указывало бы, что скорость хода часов зависит от места.

Итак, мы приходим к следующему выводу: в общей теории относительности пространственные и временные величины не могут быть определены так, чтобы разности пространственных координат могли быть измерены непосредственно единичным масштабом, а разности временных — посредством стандартных часов.

Итак, прежний способ, заключавшийся в определенном построении системы координат в пространственно-временно́м континууме, оказывается неприменимым; представляется, что не существует пути, который позволил бы приспособить к четырехмерному миру такие координатные системы, чтобы с помощью их можно было бы ожидать особенно простой формулировки законов природы. Поэтому не остается ничего другого, как признать все мыслимые[4] координатные системы принципиально равноправными для описания природы. Это равносильно требованию:

*Общие законы природы должны быть выражены через уравнения, справедливые во всех координатных системах, т. е. эти уравнения должны быть ковариантными относительно любых подстановок (общековариантными).*

Ясно, что физика, удовлетворяющая этому постулату, удовлетворит и общему постулату относительности. Ибо в совокупности *всех* подстановок во всяком случае есть те подстановки, которые соответствуют всем относительным движениям (трехмерных) координатных систем. То, что это требование общей ковариантности, отнимающее у пространства и времени последний остаток физической предметности, является естественным, видно из следующего соображения. Все наши пространственно-временны́е констатации всегда сводятся к установлению пространственно-временны́х совпадений. Если бы, например, события состояли только в движении материальных точек, то в конце концов наблюдались бы только встречи двух или нескольких таких точек. Результаты наших измерений также являются не чем иным, как констатацией подобных встреч между материальными точками наших масштабов с другими материальными точками, и соответственно совпадений между часовыми стрелками, точками циферблата и рассматриваемыми точечными событиями, происходящими в том же месте и в то же время.

Введение координатной системы служит только для более простого описания совокупности совпадений. Четыре пространственно-временны́е

[4] Мы не будем здесь касаться некоторых ограничений, вытекающих из требования однозначности и непрерывности.

переменные $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ сопоставляются с миром таким образом, чтобы каждому точечному событию соответствовала некоторая система значений переменных $x_1$, ..., $x_4$. Двум совпадающим точечным событиям соответствует одна и та же система значений переменных $x_1$, ..., $x_4$, т. е. совпадение характеризуется равенством координат. Если ввести вместо переменных $x_1$,..., $x_4$ любые четыре функции от $x_1'$, ... $x_4'$ как новую координатную систему так, чтобы эти системы значений однозначно соответствовали друг другу, то равенство соответствующих координат в новой системе тоже является выражением пространственно-временно́го совпадения двух точечных событий. Так как все наши физические опытные данные можно в конце концов свести к таким совпадениям, то заранее нет никакого основания отдавать предпочтение какой-либо одной координатной системе перед другими, т. е. мы приходим к требованию общей ковариантности.

## § 4. Связь четырех координат с результатами пространственных и временных измерений. Аналитическое выражение для гравитационного поля

В настоящей статье я не старался представить общую теорию относительности в виде наиболее простой логической системы при минимуме аксиом. Моя главная цель — изложить эту теорию так, чтобы читатель ощутил психологическую естественность выбранного пути и чтобы предпосылки, положенные в ее основу, представлялись бы как можно лучше согласованными с опытом. В этом смысле введем теперь следующую предпосылку.

Для бесконечно малых четырехмерных областей при подходящем выборе системы координат справедлива теория относительности в более узком смысле.

Ускоренное движение бесконечно малой («местной») координатной системы должно быть при этом выбрано так, чтобы отсутствовало гравитационное поле; для бесконечно малой области это возможно. Пусть $X_1$, $X_2$, $X_3$ — пространственные координаты; $X_4$ — координата времени, измеренная надлежащим масштабом[5]. Если представить себе, что дана твердая линейка небольших размеров в качестве единичного масштаба, то эти координаты при данной ориентации координатной системы имеют непосредственный физический смысл в рамках специальной теории относительности. В этом случае выражение

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \qquad (1)$$

[5] Единицу времени следует выбрать так, чтобы скорость света в пустоте, измеренная в «местной» координатной системе, равнялась единице.

имеет в специальной теории относительности некоторое численное значение, независимое от ориентации местной координатной системы и определяемое путем пространственно-временнóго измерения. Назовем величину $ds$ линейным элементом, принадлежащим двум бесконечно близким друг к другу точкам четырехмерного пространства. Если величина $ds^2$, соответствующая элементу $(dX_1, \ldots, dX_4)$, положительна, то мы вместе с Минковским будем называть последний временноподобным, в противном случае — пространственноподобным.

Рассмотренному линейному элементу, или, соответственно, обоим бесконечно близким точечным событиям, соответствуют также дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_4$ четырехмерных координат некоторой выбранной системы. Если для рассматриваемого места выбрана такая система координат и «местная» система вышеуказанного типа, то величины $dX_\nu$ можно представить в виде некоторых выражений, линейных и однородных относительно $dx_\sigma$:

$$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} dx_\sigma. \tag{2}$$

Подставив эти выражения в равенство (1), получим

$$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau, \tag{3}$$

где величины $g_{\sigma\tau}$ — функции $x_\sigma$, которые уже не могут более зависеть от ориентации и состояния движения «местной» координатной системы, поскольку $ds^2$ является величиной, определенной независимо от того или иного выбора системы координат, относящейся к бесконечно близким в пространстве и во времени точечным событиям и получаемой посредством измерения, выполненного с масштабом и часами. При этом величины $g_{\sigma\tau}$ должны быть выбраны так, чтобы $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$; суммирование должно быть распространено на все значения $\sigma$ и $\tau$, так что сумма состоит из $4 \times 4$ слагаемых, из которых 12 попарно равны.

Обычная теория относительности получается как частный случай из рассмотренного здесь, когда в силу особого поведения $g_{\sigma\tau}$ в некоторой конечной области оказывается возможным выбрать в ней координатную систему так, чтобы $g_{\sigma\tau}$ приняли постоянные значения:

$$\left.\begin{array}{rrrr} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Мы увидим ниже, что выбор таких координат для конечных областей в общем случае невозможен.

Из рассуждений § 2 и 3 следует, что величины $g_{\sigma\tau}$ с физической точки зрения должны рассматриваться как величины, описывающие гравитационное поле относительно выбранной системы координат. В самом деле, допустим сначала, что специальная теория относительности справедлива для определенной рассматриваемой четырехмерной области при подходящем выборе системы координат. Тогда величины $g_{\sigma\tau}$ имеют указанные в (4) значения. В этом случае свободная материальная точка движется относительно этой системы прямолинейно и равномерно. Если теперь ввести путем произвольного преобразования новые пространственно-временные координаты $x_1, \ldots, x_4$, то в этой новой системе величины $g_{\sigma\tau}$ будут уже не постоянными, но функциями. пространственно-временных координат. В то же время движение свободной материальной точки в новой системе окажется криволинейным и неравномерным, причем закон движения не будет зависеть от природы движущейся материальной точки. Поэтому мы будем истолковывать это движение как движение, происходящее под влиянием гравитационного поля. Мы видим, что появление гравитационного поля связано с зависимостью $g_{\mu\nu}$ от пространственно-временных координат. Но и в общем случае, когда мы не сможем соответствующим выбором координат сделать специальную теорию относительности применимой в конечной области пространства, мы сохраним представление о том, что величины $g_{\sigma\tau}$ описывают гравитационные поля.

Таким образом, согласно общей теории относительности, гравитационные силы играют исключительную роль по сравнению с остальными силами, особенно, электромагнитными; 10 функций $g_{\sigma\tau}$, представляющих гравитационное поле, определяют в то же время метрические свойства четырехмерного пространства.

## Б. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ВЫВОДА ОБЩЕКОВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Показав выше, что общий постулат относительности приводит к требованию ковариантности систем уравнений физики по отношению к любым преобразованиям координат $x_1, \ldots, x_4$, мы должны теперь подумать над тем, как можно получить подобные общековариантные уравнения. Обратимся теперь к этой чисто математической задаче; при этом выяснится, что заданный равенством (3) инвариант $ds$, названный нами в соответствии с гауссовской теорией поверхностей «линейным элементом», играет основную роль при решении этой задачи.

Основная мысль этой общей теории ковариантных величин заключается в следующем. Пусть некоторые объекты («тензоры») определены относительно координатной системы посредством некоторого числа пространственных функций, которые называются «компонентами» тензора. Тогда имеются определенные правила, по которым эти компоненты вычисляются для новой координатной системы, если они известны для первоначальной системы и если известно преобразование, связывающее обе системы. Эти объекты, названные ниже тензорами, характеризуются еще и тем, что уравнения преобразования для их компонент линейны и однородны. Поэтому все компоненты в новой системе обращаются в нуль, если они все равны нулю в первоначальной системе. В соответствии с этим, если какой-нибудь закон природы формулируется как равенство нулю всех компонент некоторого тензора, то он общековариантен; исследуя законы образования тензоров, мы тем самым получаем средство для установления общековариантных законов.

## § 5. Контравариантный и ковариантный четырехмерный вектор

*Контравариантный четырехмерный вектор* (4-вектор). Линейный элемент определяется с помощью четырех «компонент» $dx_\nu$, закон преобразования которых имеет вид:

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu. \tag{5}$$

Величины $dx'_\sigma$ выражаются линейно и однородно через $dx_\nu$; поэтому мы можем рассматривать эти дифференциалы координат как компоненты «тензора», которому дадим специальное название контравариантного 4-вектора. Каждый объект, определяемый по отношению к координатной системе посредством четырех величин $A^\nu$, которые преобразуются по тому же закону

$$A^{\sigma'} = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu, \tag{5a}$$

мы также называем контравариантным 4-вектором. Из соотношения (5a) непосредственно следует, что суммы $(A^\sigma \pm B^\sigma)$ будут компонентами 4-вектора, если $A^\sigma$ и $B^\sigma$ в отдельности являются таковыми. Аналогичное положение возникает для всех систем, введенных ниже в качестве «тензоров» (правило сложения и вычитания тензоров).

*Ковариантный четырехмерный вектор*. Мы называем четыре величины $A_\nu$ компонентами ковариантного 4-вектора, если для любого произвольно выбранного контравариантного 4-вектора $B_\nu$:

$$\sum_\nu A_\nu B^\nu = \text{инвариант}. \tag{6}$$

Из этого определения следует закон преобразования ковариантного 4-вектора. Заменив в правой части равенства

$$\sum_{\sigma} A'_{\sigma} B^{\sigma'} = \sum_{\nu} A_{\nu} B^{\nu}$$

величину $B^{\nu}$ выражением

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} B^{\sigma'},$$

полученным из равенства (5a), найдем

$$\sum_{\sigma} B^{\sigma'} \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu} = \sum_{\sigma} B^{\sigma'} A'_{\sigma}.$$

Но отсюда, в силу того, что в этом равенстве каждый из 4-векторов $B^{\sigma'}$ может быть выбран произвольно и независимо от других, следует закон преобразования

$$A'_{\sigma} = \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu}. \tag{7}$$

Замечание об упрощении записи выражений. Рассматривая уравнения этого параграфа, мы сразу видим, что суммирование всегда производится по тем и *только* по тем значкам, которые дважды появляются под знаком суммы [например, значок $\nu$ в правой части равенства (5)]. Поэтому можно без ущерба для ясности отбросить знак суммы. Для этого мы введем следующее правило: если член некоторого выражения содержит какой-нибудь индекс дважды, то по этому значку должно быть произведено суммирование, если только специально не оговорено противное.

Различие между ковариантным и контравариантным 4-векторами заключается в законе преобразования [соотношения (7) и (5)]. Обе величины представляют собой тензоры в том смысле, в каком о них говорилось выше. Следуя Риччи и Леви-Чивите, будем отмечать контравариантный характер, помещая значок вверх, а ковариантный — вниз.

## § 6. Тензоры второго и более высоких рангов

*Контравариантный тензор*. Если мы составим все 16 произведений $A^{\mu\nu}$ компонент $A^{\mu}$ и $B^{\nu}$ двух контравариантных 4-векторов

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu}, \tag{8}$$

то, в силу соотношений (8) и (5a), компоненты $A^{\mu\nu}$ удовлетворяют закону преобразования

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu}. \tag{9}$$

Мы называем объект, который по отношению ко всякой координатной системе описывается посредством 16 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (9), контравариантным тензором второго ранга. Не все тензоры этого рода можно составить по формуле (8) из двух 4-векторов. Но легко доказать, что 16 произвольно заданных компонент $A^{\mu\nu}$ можно представить в виде суммы четырех слагаемых типа $A^\mu B^\nu$, составленных из компонент четырех пар надлежащим образом выбранных четырехмерных векторов. Поэтому почти все положения, справедливые для тензора второго ранга, определенного соотношением (9), можно проверить, доказывая их для специальных тензоров типа (8).

*Контравариантный тензор любого ранга*. Очевидно, что по аналогии с (8) и (9) можно определить также контравариантные тензоры третьего и высших рангов с $4^3$ и т. д. компонентами. Из соотношений (8) и (9) вытекает также, что в этом смысле можно рассматривать контравариантный 4-вектор как контравариантный тензор первого ранга.

*Ковариантный тензор*. Если, с другой стороны, составить 16 произведений $A_{\mu\nu}$ из компонент двух *ковариантных* 4-векторов $A_\mu$ и $B_\nu$

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu, \tag{10}$$

то для них справедлив закон преобразования

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} \cdot A_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Этим законом преобразования дается определение ковариантного тензора второго ранга. Все замечания, которые прежде были сделаны по поводу контравариантных тензоров, остаются в силе и для ковариантных тензоров.

*Замечание*. Скаляр (инвариант) удобно рассматривать как контравариантный или как ковариантный тензор нулевого ранга.

*Смешанный тензор*. Можно также составить тензор второго ранга типа

$$A_\mu^\nu = A_\mu B^\nu, \tag{12}$$

который ковариантен относительно индекса $\mu$ и контравариантен относительно индекса $\nu$. Его закон преобразования имеет вид

$$A_\sigma^{\tau'} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} \cdot A_\alpha^\beta. \tag{13}$$

Имеются, конечно, смешанные тензоры с произвольным числом индексов ковариантного и произвольным числом индексов контравариантного характера. Ковариантный и контравариантный тензоры можно рассматривать как частные случаи смешанного тензора.

*Симметричные тензоры.* Контравариантный (или ковариантный) тензор второго или высшего ранга называется *симметричным*, если две компоненты, получающиеся друг из друга путем перестановки каких-нибудь двух значков, равны между собою. Тензор $A^{\mu\nu}$ (или $A_{\mu\nu}$) симметричен, если для любой комбинации значков имеем

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}, \tag{14}$$

или

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \tag{14a}$$

Докажем, что определенная таким образом симметрия представляет собой свойство, не зависящее от системы координат. В самом деле, на основании равенств (14) из (9) следует

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\tau'}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} = \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\tau'}{\partial x_\nu} A^{\nu\mu} = \frac{\partial x_\tau'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} = A^{\tau\sigma'}.$$

Предпоследнее из этих равенств основывается на перестановке значков суммирования $\mu$ и $\nu$ (т. е. на простом изменении способа обозначения).

*Антисимметричные тензоры.* Контравариантный или ковариантный тензор второго, третьего или четвертого ранга называется антисимметричным, если две компоненты, получающиеся друг из друга путем перестановки каких-нибудь двух значков, *равны по величине и противоположны по знаку*. Следовательно, тензор $A^{\mu\nu}$ (или $A_{\mu\nu}$) антисимметричен, если

$$A^{\mu\nu} = - A^{\nu\mu} \tag{15}$$

или

$$A_{\mu\nu} = - A_{\nu\mu}. \tag{15a}$$

Из 16 компонент $A^{\mu\nu}$ четыре компоненты $A^{\mu\mu}$ равны нулю; остальные компоненты попарно равны по величине и имеют противоположные знаки, так что имеются только 6 численно отличных компонент (6-вектор). Таким же образом можно убедиться в том, что антисимметричный тензор $A^{\mu\nu\sigma}$ (третьего ранга) имеет только четыре численно различных компоненты, антисимметричный тензор $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ — только одну. В четырехмерном континууме нет антисимметричных тензоров выше четвертого ранга.

## § 7. Умножение тензоров

*Внешнее умножение тензоров.* Из компонент двух тензоров рангов $z$ и $z'$ получаются компоненты тензора ранга $z + z'$, если все компоненты первого тензора попарно перемножить со всеми компонентами второго тензора. Так, например, из различного типа тензоров $A$ и $B$ получаются тензоры $T$:

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu}B_{\sigma},$$

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta}B^{\gamma\delta},$$

$$T_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = A_{\alpha\beta}B^{\gamma\delta}.$$

Доказательство тензорного характера $T$ следует непосредственно из соотношений (8), (10), (12) или из формул преобразования (9), (11), (13). Равенства (8), (10), (12) сами служат примерами внешнего умножения (тензоров первого ранга).

*«Свертывание»* [6] *смешанного тензора.* Из каждого смешанного тензора можно образовать тензор, ранг которого на две единицы меньше, если один значок ковариантного характера приравнять одному значку контравариантного характера и по этому значку произвести суммирование («свертывание»). Таким образом, например, из смешанного тензора четвертого ранга $A_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ получают смешанный тензор второго ранга:

$$A_{\beta}^{\delta} = A_{\alpha\beta}^{\alpha\delta}\left(= \sum_{\alpha} A_{\alpha\beta}^{\alpha\delta}\right),$$

и из него повторным свертыванием получают тензор нулевого ранга:

$$A = A_{\beta}^{\beta} = A_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}.$$

Доказательство того, что результат свертки действительно обладает тензорным характером, следует из обобщения представления тензоров (12) вместе с соотношением (6) или из обобщения соотношения (13).

*Внутреннее и смешанное умножение тензоров.* Оно заключается в комбинации внешнего умножения со сверткой.

Примеры. Из ковариантного тензора второго ранга $A_{\mu\nu}$ и контравариантного тензора первого ранга $B^{\sigma}$ образуем посредством внешнего умножения смешанный тензор

$$D_{\mu\nu}^{\sigma} = A_{\mu\nu}B^{\sigma}.$$

---

[6] В переводе употребляется современный термин «свертка». Эйнштейн писал «komposition» или «Verjüngung».— *Прим. ред.*

В результате свертки по индексам $\nu$ и $\sigma$ возникает ковариантный четырехмерный вектор

$$D_\mu = D_{\mu\nu}^{\nu} = A_{\mu\nu} B^\nu.$$

Этот вектор будем называть внутренним произведением тензоров $A_{\mu\nu}$ и $B^\sigma$. Аналогичным образом из тензоров $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ посредством внешнего умножения и двукратной свертки можно образовать внутреннее произведение $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$. Образовав внешнее произведение из $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ и выполнив свертку, получим смешанный тензор второго ранга $D_\mu^\tau = A_{\mu\nu} B^{\nu\tau}$. Эту операцию удобно назвать смешанной, ибо она является внешней по отношению к значкам $\mu$ и $\tau$ и внутренней по отношению к значкам $\nu$ и $\sigma$.

Теперь докажем утверждение, которое часто используется при установлении тензорного характера. На основании только что изложенного, $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ есть скаляр, если $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ тензоры. Но утверждается также, что если $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ для *произвольного тензора* $B^{\mu\nu}$ есть инвариант, то $A_{\mu\nu}$ имеет тензорный характер.

Доказательство. По предположению, при любом преобразовании координат должно быть

$$A'_{\sigma\tau} B^{\sigma\tau\,\prime} = A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}.$$

Но в результате обращения соотношения (9) имеем

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} B^{\sigma\tau\,\prime}.$$

Подставляя это выражение для $B^{\mu\nu}$ в верхнее соотношение, получаем:

$$\left(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} A_{\mu\nu}\right) B^{\sigma\tau\,\prime} = 0.$$

При любом выборе $B^{\sigma\tau\,\prime}$ это соотношение может выполняться только тогда, когда выражение в скобке равно нулю, откуда, в силу соотношения (11), и следует наше утверждение.

Эта теорема верна в соответствующей форме для тензоров любого ранга и типа; доказательство всегда проводится аналогичным путем.

Указанное утверждение можно также доказать и в такой форме: если $B^\mu$ и $C^\nu$ — произвольные векторы и если при любом их выборе внутреннее произведение

$$A_{\mu\nu} B^\mu C^\nu$$

является скаляром, то $A_{\mu\nu}$ есть ковариантный тензор. Последнее положение справедливо еще и в том более частном случае, когда утверждается лишь то, что при любом выборе 4-вектора $B^\mu$ скалярное произведение $A_{\mu\nu}B^\mu B^\nu$ является скаляром, и если, кроме того, еще известно, что $A_{\mu\nu}$ удовлетворяет условию симметрии $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. В самом деле, следуя вышеуказанным путем, сначала доказывают тензорный характер величины $(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$, откуда на основании свойства симметрии непосредственно следует тензорный характер $A_{\mu\nu}$. Это утверждение легко обобщить и на случай ковариантных и контравариантных тензоров любого ранга.

Наконец, из доказанного следует утверждение, которое также можно обобщить на любые тензоры: если величины $A_{\mu\nu}B^\nu$ при любом выборе 4-вектора $B^\nu$ образуют тензор первого ранга, то $A_{\mu\nu}$ представляет собой тензор второго ранга. В самом деле, если $C^\mu$ — произвольный 4-вектор, то, в силу тензорного характера $A_{\mu\nu}B^\nu$, внутреннее произведение $A_{\mu\nu}C^\mu B^\nu$ при любом выборе обоих 4-векторов $C^\mu$ и $B^\nu$ является скаляром, откуда и следует наше утверждение.

## § 8. Некоторые свойства фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$

*Ковариантный фундаментальный тензор.* В инвариантном выражении квадрата линейного элемента

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

величина $dx_\mu$ играет роль произвольного контравариантного вектора. Так как, кроме того, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, то на основании сказанного в последнем параграфе заключаем, что $g_{\mu\nu}$ есть ковариантный тензор второго ранга. Мы назовем его «фундаментальным тензором». Ниже мы выведем некоторые свойства этого тензора, которыми, правда, обладает каждый тензор второго ранга, но особый физический смысл фундаментального тензора в нашей теории, связанный с гравитационным действием, делает доказанные выше соотношения особенно интересными в приложении к фундаментальному тензору.

*Контравариантный фундаментальный тензор.* Если взять миноры, соответствующие элементам $g_{\mu\nu}$ в определителе, составленном из $g_{\mu\nu}$, и разделить каждый из них на определитель $g = |g_{\mu\nu}|$, то получаются некоторые величины $g^{\mu\nu}$ $(= g^{\nu\mu})$, относительно которых мы докажем, что они составляют контравариантный тензор.

На основании известной теоремы из теории определителей имеем

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu, \tag{16}$$

где $\delta_\mu^\nu$ равен 1, если $\mu = \nu$, и 0, если $\mu \neq \nu$. Вместо приведенного выражения для $ds^2$ можно также написать

$$g_{\mu\sigma}\delta_\nu^\sigma\, dx_\mu dx_\nu,$$

или в силу равенства (16)

$$g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}g^{\sigma\tau}dx_\mu dx_\nu.$$

Но, согласно правилам умножения, изложенным в предыдущем параграфе, величины

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma}dx_\mu$$

образуют ковариантный 4-вектор и притом (в силу возможности произвольного выбора $dx_\mu$) произвольно выбранный 4-вектор. Подставив его в наше выражение, получим

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}d\xi_\sigma d\xi_\tau.$$

Так как это выражение при любом выборе вектора $d\xi_\sigma$ является скаляром и $g^{\sigma\tau}$, по определению, симметричен по индексам $\sigma$ и $\tau$, то на основании результатов предыдущего параграфа заключаем, что $g^{\sigma\tau}$ представляет собой контравариантный тензор. Из (16) следует еще, что $\delta_\mu^\nu$ есть тоже тензор, который можно назвать смешанным фундаментальным тензором.

*Определитель фундаментального тензора.* Согласно правилу умножения определителей, имеем

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}|\,|g^{\alpha\nu}|.$$

С другой стороны,

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |\delta_\mu^\nu| = 1.$$

Отсюда следует

$$|g_{\mu\nu}|\,|g^{\mu\nu}| = 1. \tag{17}$$

*Инвариантный объем.* Сначала найдем закон преобразования определителя $g = |g_{\mu\nu}|$. В силу соотношения (11) имеем

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\,\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}\,g_{\mu\nu}\right|.$$

Отсюда, после двукратного применения правила умножения определителей, следует

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|\,\left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma}\right|\,|g_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|^2 g,$$

или

$$\sqrt{g'} = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \sqrt{g}.$$

С другой стороны, закон преобразования элемента объема

$$d\tau' = \int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

по известной теореме Якоби имеет вид:

$$d\tau' = \left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| d\tau.$$

Перемножая последние равенства, получаем

$$\sqrt{g'}\, d\tau' = \sqrt{g}\, d\tau. \tag{18}$$

В дальнейшем вместо $\sqrt{g}$ вводится величина $\sqrt{-g}$, которая вследствие гиперболического характера пространственно-временнóго континуума всегда имеет вещественное значение. Инвариант $\sqrt{-g}\, d\tau$ равен величине элемента четырехмерного объема, измеренного в «местной координатной системе» посредством твердых масштабов и часов по принципам специальной теории относительности.

*Замечание о характере пространственно-временнóго континуума.* Наша предпосылка о справедливости в бесконечно малом специальной теории относительности приводит к тому, что $ds^2$ всегда можно выразить с помощью (1) через вещественные величины $dX_1, \ldots, dX_4$. Обозначив через $d\tau_0$ «естественный» элемент объема $dX_1 dX_2 dX_3 dX_4$, получим

$$d\tau_0 = \sqrt{-g} \cdot d\tau. \tag{18a}$$

Если окажется, что в каком-нибудь месте четырехмерного континуума $\sqrt{-g}$ обращается в нуль, то это будет означать, что в этом месте конечному координатному объему соответствует бесконечно малый «естественный» объем. Будем считать, что этого нигде нет. В таком случае $g$ не может менять свой знак; мы примем, в соответствии со специальной теорией относительности, что $g$ всегда имеет конечное и отрицательное значение. Это допущение является некоторой гипотезой о физической природе рассматриваемого континуума и в то же время правилом, касающимся выбора системы координат.

Но если $-g$ положительно и конечно, то естественно возникает мысль, что теперь следует выбрать координаты так, чтобы эта величина стала равной 1. Позже мы увидим, что посредством такого ограничения выбора системы координат может быть достигнуто значительное упрощение законов природы. В этом случае вместо равенства (18) имеем

$$d\tau' = d\tau,$$

откуда, приняв во внимание теорему Якоби, следует, что

$$\left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| = 1. \qquad (19)$$

Таким образом, при подобном выборе координатных систем допустимы преобразования координат только с определителем 1.

Но было бы ошибкой думать, что этот прием означает частичный отказ от общего принципа относительности. Мы не спрашиваем: «каковы будут законы природы, ковариантные по отношению ко всем преобразованиям с определителем 1?» Но мы задаем вопрос: «каковы будут *общековариантные* законы природы?» Лишь после того, как эти законы установлены, мы упрощаем их выражение посредством особого выбора координатной системы.

*Образование новых тензоров с помощью фундаментального тензора.* Путем внутреннего, внешнего и смешанного умножения какого-нибудь тензора на фундаментальный тензор возникают тензоры другого характера и ранга.

Примеры:

$$A^\mu = g^{\mu\sigma} A_\sigma,$$

$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}.$$

Особо отметим следующие комбинации:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta},$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta}$$

(«дополнения» к ковариантному и, соответственно, контравариантному тензору) и

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Мы называем $B_{\mu\nu}$ ‚редуцированным по отношению к $A_{\mu\nu}$ тензором. Аналогично имеем

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}.$$

Заметим, что $g^{\mu\nu}$ — не что иное, как «дополнение» по отношению к $g_{\mu\nu}$, ибо

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta^\nu_\alpha = g^{\mu\nu}.$$

## § 9. Уравнение геодезической (уравнение движения точки)

Так как «линейный элемент» $ds$ является величиной, определенной независимо от координатной системы, то и для линии, проведенной между двумя точками $P_1$ и $P_2$ четырехмерного континуума, величина $\int ds$ принимает экстремальное значение (геодезическая), независимое от выбора координат. Ее уравнение имеет вид

$$\delta\left\{\int\limits_{P_1}^{P_2} ds\right\} = 0. \tag{20}$$

Отсюда, выполняя вариацию, находят известным образом четыре обыкновенных дифференциальных уравнения, которые и определяют эту геодезическую линию. Ради полноты изложения мы приведем здесь этот вывод. Пусть $\lambda$ — некоторая функция координат $x_\nu$; эта функция определяет семейство поверхностей, пересекающих искомую геодезическую линию, равно как и все другие бесконечно близкие к ней кривые, проведенные через точки $P_1$ и $P_2$. В таком случае каждую из этих кривых можно себе представить заданной своими координатами $x_\nu$, выраженными через $\lambda$. Пусть символ $\delta$ соответствует переходу из какой-нибудь точки искомой геодезической линии в ту точку соседней кривой, которой соответствует то же значение $\lambda$. В таком случае уравнение (20) можно заменить на

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w \, d\lambda = 0, \\ &w^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

Так как

$$\delta w = \frac{1}{w}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}\delta x_\sigma + g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right)\right\},$$

и

$$\delta\left(\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right) = \frac{d\delta x_\nu}{d\lambda},$$

то после подстановки этих значений в (20a) и интегрирования по частям получаем

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \varkappa_\sigma \delta x_\sigma = 0, \\ &\varkappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{g_{\mu\sigma}}{w}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\right\} - \frac{1}{2w}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{20б}$$

Отсюда, вследствие произвольности выбора $\delta x_\sigma$, следует, что $\varkappa_\sigma$ равно нулю. Таким образом,

$$\varkappa_\sigma = 0 \tag{20в}$$

представляют собой уравнения геодезической линии. Если на рассматриваемой геодезической линии $ds \neq 0$, то в качестве параметра $\lambda$ можно выбрать «длину дуги» $s$, измеренную вдоль геодезической линии. Тогда $w = 1$ и вместо (20в) получаем

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{d\lambda}\frac{dx_\mu}{d\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda} = 0,$$

или, изменяя обозначения,

$$g_{\alpha\sigma}\frac{d^2x_\alpha}{ds^2} + \begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0, \tag{20г}$$

где, согласно Кристоффелю, мы положили

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{21}$$

Наконец, умножив уравнение (20г) на $g^{\sigma\tau}$ (внешнее умножение относительно $\tau$ и внутреннее — относительно $\sigma$), получим уравнение геодезической линии в окончательном виде:

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0. \tag{22}$$

При этом, согласно Кристоффелю, введено обозначение

$$\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix} = g^{\tau\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}. \tag{23}$$

## § 10. Образование тензоров посредством дифференцирования

Используя уравнение геодезической линии, можно теперь легко вывести правила, по которым из тензоров путем дифференцирования могут быть образованы новые тензоры. Эти правила позволяют получить общековариантные дифференциальные уравнения. Мы достигаем этой цели повторным применением следующих простых операций.

Если в нашем континууме дана кривая, точки которой характеризуются длиной дуги $s$, отсчитываемой от некоторой определенной точки на кривой, и если далее $\varphi$ — инвариантная функция координат, то и $\frac{d\varphi}{ds}$ является инвариантом. Доказательство заключается в том, что как $d\varphi$, так и $ds$ представляют собой инварианты.

Так как

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds},$$

то и

$$\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

будет инвариантом и притом для всех кривых, которые выходят из одной точки континуума, т. е. для любого вектора $dx_\mu$. Отсюда следует, что

$$A_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

есть ковариантный четырехмерный вектор (grad $\varphi$).

Согласно нашему правилу, инвариантом будет также и производная, взятая вдоль кривой:

$$\chi = \frac{d\psi}{ds}.$$

Подставляя значение $\psi$, получаем сначала

$$\chi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}.$$

Отсюда пока еще нельзя заключить о существовании какого-либо тензора. Но если мы теперь будем считать, что кривая, вдоль которой мы дифференцировали, является геодезической то, заменяя $\frac{d^2x_\nu}{ds^2}$ его выражением из формулы (22), получаем

$$\chi = \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu dx_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{dx_\tau}\right\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Из возможности изменения порядка дифференцирования по $\mu$ и $\nu$, а также из симметрии, в силу (23) и (21), символа $\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}$ относительно $\mu$ и $\nu$, следует, что выражение, стоящее в фигурных скобках, тоже симметрично относительно тех же индексов. Так как из любой точки континуума можно провести геодезическую линию в любом направлении, и, следовательно, $\frac{dx_\mu}{ds}$ представляет собой 4-вектор с компонентами, соотношения между которыми могут быть произвольными, то на основании выводов § 7 следует, что

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \tag{25}$$

есть ковариантный тензор второго ранга. Таким образом, из ковариантного тензора первого ранга

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu},$$

можно посредством дифференцирования образовать ковариантный тензор второго ранга

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_\tau. \tag{26}$$

Назовем тензор $A_{\mu\nu}$ ковариантной производной [7] тензора $A_\mu$. Прежде всего можно легко показать, что этот способ построения приводит к тензору даже в том случае, когда $A_\mu$ нельзя представить в виде градиента. Для того чтобы убедиться в этом, мы предварительно заметим, что

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

представляет собой ковариантный 4-вектор, если $\psi$ и $\varphi$ — скаляры. То же самое справедливо в отношении суммы, состоящей из четырех таких членов:

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_\mu} + \ldots + \psi^{(4)} \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

если $\psi^{(1)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \psi^{(4)}, \varphi^{(4)}$ — скаляры. Но ясно, что каждый ковариантный 4-вектор может быть представлен в виде $S_\mu$. Если $A_\mu$ является 4-вектором, компоненты которого представляют собой произвольно заданные функции от $x_\nu$, то достаточно положить (относительно выбранной координатной системы)

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= A_1 & \varphi^{(1)} &= x_1, \\ \psi^{(2)} &= A_2, & \varphi^{(2)} &= x_2, \\ \psi^{(3)} &= A_3, & \varphi^{(3)} &= x_3, \\ \psi^{(4)} &= A_4, & \varphi^{(4)} &= x_4 \end{aligned}$$

для того, чтобы $S_\mu$ стало равным $A_\mu$.

[7] В переводе введен современный термин вместо используемого Эйнштейном термина «расширение».— *Прим. ред.*

Поэтому, для доказательства того, что $A_{\mu\nu}$ будет тензором, если в правую часть равенства (26) подставить вместо $A_\mu$ произвольный ковариантный 4-вектор, достаточно только показать, что это справедливо по отношению 4-вектора $S_\mu$. Но из правой части равенства (26) сразу видно, что достаточно провести доказательство для случая

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

Правая часть равенства (25), умноженная на $\psi$, т. е.

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau},$$

имеет тензорный характер. Точно так же

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

есть тензор (внешнее произведение двух 4-векторов). Складывая, мы видим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}\right)$$

имеет тензорный характер. Тем самым дано, как видно из равенства (26), требуемое доказательство для 4-вектора

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

и, следовательно, по доказанному выше, для любого 4-вектора $A_\mu$.

Пользуясь ковариантной производной 4-вектора, нетрудно дать определение ковариантной производной ковариантного тензора любого ранга; это определение представляет собой обобщение ковариантной производной 4-вектора. Мы ограничимся получением ковариантной производной тензора второго ранга, так как этого достаточно, чтобы составить себе отчетливое представление об этой операции.

Как уже указывалось выше, каждый ковариантный тензор второго ранга может быть представлен[8] в виде суммы тензоров типа $A_\mu B_\nu$.

[8] Посредством внешнего умножения векторов с (любыми) компонентами $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$, $A_{14}$ и, соответственно, с компонентами 1, 0, 0, 0 получается тензор с компонентами

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Складывая четыре тензора этого рода, получаем тензор $A_{\mu\nu}$ с любыми наперед заданными компонентами.

Поэтому вполне достаточно ограничиться выводом формулы ковариантной производной для такого специального тензора. Выражения

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\mu \\ \tau \end{Bmatrix} A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\nu \\ \tau \end{Bmatrix} B_\tau$$

имеют, в силу (26), тензорный характер. Посредством внешнего умножения первого выражения на $B_\nu$ и второго на $A_\mu$ получаем по одному тензору третьего ранга; сумма полученных тензоров

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\mu \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\tau\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma\nu \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\mu\tau} \tag{27}$$

представляет собой тоже тензор третьего ранга, причем мы положили $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. Так как правая часть равенства (27) линейна и однородна относительно $A_{\mu\nu}$ и ее первых производных, то этот закон образования новых тензоров приводит к тензору не только в случае тензора типа $A_\mu B_\nu$, но и для суммы таких тензоров, т. е. любого ковариантного тензора второго ранга. Назовем $A_{\mu\nu\sigma}$ ковариантной производной тензора $A_{\mu\nu}$.

Ясно, что (26) и (24) являются только специальными случаями ковариантной производной (27) (ковариантными производными тензора первого и нулевого ранга). Вообще говоря, все специальные законы образования новых тензоров могут быть получены на основе соотношения (27) в соединении с умножением тензоров друг на друга.

## § 11. Некоторые частные случаи, имеющие особое значение

*Некоторые леммы о фундаментальном тензоре.* Выведем сначала некоторые полезные в дальнейшем вспомогательные соотношения. Согласно правилу дифференцирования определителей, имеем

$$dg = g^{\mu\nu} g\, dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g\, dg^{\mu\nu}. \tag{28}$$

Последнее выражение следует из предшествующего, если принять во внимание, что $g_{\mu\nu} g^{\mu'\nu} = \delta_\mu^{\mu'}$ и $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$ а, следовательно,

$$g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = 0.$$

Из соотношений (28) следует:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln(-g)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \tag{29}$$

Из равенства

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu$$

посредством дифференцирования получаем

$$g_{\mu\sigma}dg^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma}\,dg_{\mu\sigma},$$

или

$$g_{\mu\sigma}\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} = -g^{\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}. \tag{30}$$

Отсюда, в результате смешанного умножения на $g^{\mu\tau}$ и соответственно на $g_{\nu\lambda}$ получаем (изменяя обозначения индексов)

$$\left.\begin{aligned} dg^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}dg_{\alpha\beta},\\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma},\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

и соответственно

$$\left.\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}dg^{\alpha\beta},\\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Соотношение (31) можно преобразовать в другое, которым мы также часто будем пользоваться. В силу формулы (21),

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \begin{bmatrix}\alpha\sigma\\ \beta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\sigma\\ \alpha\end{bmatrix}. \tag{33}$$

Подставляя это во вторую формулу (31) и принимая во внимание соотношение (23), получаем

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\left(g^{\mu\tau}\begin{Bmatrix}\tau\sigma\\ \nu\end{Bmatrix} + g^{\nu\tau}\begin{Bmatrix}\tau\sigma\\ \mu\end{Bmatrix}\right). \tag{34}$$

В результате подстановки правой части равенства (34) в (29) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \mu\end{Bmatrix}. \tag{29a}$$

*Дивергенция контравариантного 4-вектора.* Если умножить соотношение (26) на контравариантный фундаментальный тензор $g^{\mu\nu}$ (внутреннее умножение), то его правая часть после преобразования первого члена примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\mu\nu}A_\mu) - A_\mu\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)g^{\mu\nu}A_\tau.$$

Последний член этого выражения на основании равенств (31) и (29) можно привести к виду

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu}A_\tau+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu}A_\tau+\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}g^{\tau\alpha}A_\tau.$$

Так как обозначение индексов, по которым производится суммирование, не имеет значения, то первые два члена последнего выражения взаимно уничтожаются со вторым членом стоящего выше выражения; последний же член можно объединить с первым членом стоящего выше выражения. Полагая

$$g^{\mu\nu}A_\mu=A^\nu,$$

где $A^\nu$, подобно $A_\mu$,— произвольный вектор, получаем, наконец,

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\,A^\nu). \tag{35}$$

Этот скаляр и представляет собой *дивергенцию* контравариантного 4-вектора $A^\nu$.

*«Ротор» (ковариантного) 4-вектора.* Второй член в формуле (26) симметричен по индексам $\mu$ и $\nu$. Поэтому $A_{\mu\nu}-A_{\nu\mu}$ оказывается особенно простым по своей структуре (антисимметричным) тензором. Мы имеем

$$B_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{36}$$

*Антисимметричная тензорная производная 6-вектора.* Если применить (27) к некоторому антисимметричному тензору 2-го ранга $A_{\mu\nu}$, затем образовать из полученного равенства путем циклической перестановки индексов $\mu$, $\nu$, $\sigma$ еще два аналогичных равенства и, наконец, сложить все эти три равенства, то получим тензор 3-го ранга

$$B_{\mu\nu\sigma}=A_{\mu\nu\sigma}+A_{\nu\sigma\mu}+A_{\sigma\mu\nu}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}; \tag{37}$$

легко доказать, что этот тензор антисимметричен.

*Дивергенция 6-вектора.* Если равенство (27) умножить на $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$ (смешанное умножение), то получим тоже тензор. Первый член правой части равенства (27) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu})-g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}-g^{\nu\beta}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}.$$

Если заменить $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu\sigma}$ через $A^{\alpha\beta}_\sigma$ и $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}$ через $A^{\alpha\beta}$ и подставить в преобразованный первый член вместо

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} \quad \text{и} \quad \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

соответствующие значения по формуле (34), то в правой части равенства (27) будет семь членов, из которых четыре члена взаимно уничтожаются. Остается только

$$A_\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \begin{Bmatrix}\sigma\varkappa\\ \alpha\end{Bmatrix} A^{\varkappa\beta} + \begin{Bmatrix}\sigma\varkappa\\ \beta\end{Bmatrix} A^{\alpha\varkappa}. \tag{38}$$

Это и есть выражение для ковариантной производной контравариантного тензора 2-го ранга. Оно может быть соответствующим образом составлено и для контравариантных тензоров более высокого и более низкого рангов.

Заметим, что аналогичным путем можно получить также ковариантную производную смешанного тензора $A_\mu^\alpha$:

$$A_{\mu\sigma}^\alpha = \frac{\partial A_\mu^\alpha}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix}\sigma\mu\\ \tau\end{Bmatrix} A_\tau^\alpha + \begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{Bmatrix} A_\mu^\tau. \tag{39}$$

Производя свертку в формуле (38) по индексам $\beta$ и $\sigma$ (внутреннее умножение на $\delta_\beta^\sigma$), получаем контравариантный 4-вектор:

$$A^\alpha = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \beta\end{Bmatrix} A^{\alpha\varkappa} + \begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \alpha\end{Bmatrix} A^{\varkappa\beta}.$$

Вследствие симметрии $\begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \alpha\end{Bmatrix}$ относительно индексов $\beta$ и $\varkappa$ третий член правой части обращается в нуль в том случае, когда $A^{\alpha\beta}$ есть антисимметричный тензор, что мы и будем считать в дальнейшем; второй член может быть преобразован на основании (29а). Таким образом, получается

$$A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, A^{\alpha\beta})}{\partial x_\beta}. \tag{40}$$

Это и есть выражение для дивергенции контравариантного 6-вектора.

*Дивергенция смешанного тензора второго ранга.* Если в выражении (39) произвести свертку по индексам $\alpha$ и $\sigma$ и принять во внимание формулу (29а), то получим

$$\sqrt{-g}\, A_\mu = \frac{\partial(\sqrt{-g}\, A_\mu^\sigma)}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix}\sigma\mu\\ \tau\end{Bmatrix} \sqrt{-g}\, A_\tau^\sigma. \tag{41}$$

Если в последний член этого равенства ввести контравариантный тензор $A^{\rho\sigma} = g^{\rho\tau}A^{\sigma}_{\tau}$, то он примет вид

$$-\begin{bmatrix}\sigma\mu\\ \rho\end{bmatrix}\sqrt{-g}\,A^{\rho\sigma}.$$

Далее, если тензор $A^{\rho\sigma}$ симметричен, то последнее выражение переходит в

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\,A^{\rho\sigma}.$$

Равным образом, если бы мы вместо $A^{\rho\sigma}$ ввели симметричный ковариантный тензор $A_{\rho\sigma}=g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta}A^{\alpha\beta}$, то последний член в силу (31) принял бы вид

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\,A_{\rho\sigma}.$$

Итак, в рассмотренном случае симметричного тензора выражение (41) может быть заменено следующими двумя равенствами:

$$\sqrt{-g}\,A_{\mu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}\,A^{\rho\sigma} \qquad (41а)$$

и

$$\sqrt{-g}\,A_{\mu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}\,A_{\rho\sigma}, \qquad (41б)$$

которыми мы в дальнейшем воспользуемся.

## § 12. Тензор Римана — Кристоффеля

Рассмотрим теперь те тензоры, которые могут быть получены из фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ *одним лишь* его дифференцированием. На первый взгляд может показаться, что ответ очень прост: достаточно подставить в (27) вместо произвольно взятого тензора $A_{\mu\nu}$ фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$, чтобы таким образом получить новый тензор, а именно, ковариантную производную фундаментального тензора. Однако легко убедиться в том, что эта ковариантная производная тождественно обращается в нуль. Цель все же достигается следующим образом. Подставим в соотношение (27) выражение для $A_{\mu\nu}$

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \rho\end{Bmatrix} A_{\rho},$$

которое представляет собою тензорную производную 4-вектора $A_\mu$. Тогда получается (при несколько измененном обозначении индексов) тензор третьего ранга:

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \begin{Bmatrix}\mu\,\sigma\\ \rho\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \begin{Bmatrix}\mu\,\tau\\ \rho\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix}\sigma\,\tau\\ \rho\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} +$$
$$+\left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\begin{Bmatrix}\mu\,\sigma\\ \rho\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\,\tau\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\,\sigma\\ \rho\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\sigma\,\tau\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\,\mu\\ \rho\end{Bmatrix}\right] A .$$

Это выражение приводит к мысли о составлении тензора $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$. Действительно, при этом следующие члены выражения для $A_{\mu\sigma\tau}$ взаимно уничтожаются с соответствующими членами из $A_{\mu\tau\sigma}$: первый, четвертый член, а также последний член внутри квадратной скобки, ибо все эти члены симметричны по $\sigma$ и $\tau$. То же самое справедливо и для суммы второго и третьего членов. Таким образом, мы получаем:

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^\rho_{\mu\sigma\tau} A_\rho, \tag{42}$$

$$B^\rho_{\mu\sigma\tau} = -\frac{\partial}{\partial x_\tau}\begin{Bmatrix}\mu\,\sigma\\ \rho\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\begin{Bmatrix}\mu\,\tau\\ \rho\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\,\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\,\tau\\ \rho\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\,\tau\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\,\sigma\\ \rho\end{Bmatrix}. \tag{43}$$

В этом результате важно то, что в правой части равенства (42) стоит только 4-вектор $A_\rho$ и отсутствуют его производные. Из тензорного характера $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$, а также из того, что $A_\rho$ представляет собой произвольный 4-вектор, в силу выводов § 7 следует, что $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ является тензором (тензор Римана — Кристоффеля).

Математический смысл этого тензора заключается в следующем. Если континуум обладает тем свойством, что существует такая координатная система, в которой $g_{\mu\nu}$ — постоянные величины, то все $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ обращаются в нуль. Если вместо первоначальной системы выбрать любую новую координатную систему, то $g_{\mu\nu}$ в этой последней уже не будут больше постоянными. Однако тензорный характер величин $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ влечет за собою обращение в нуль всех компонент в произвольно выбранной системе координат. Следовательно, обращение в нуль тензора Римана является необходимы условием того, чтобы посредством надлежащего выбора координатной системы можно было сделать $g_{\mu\nu}$ постоянным[9]. В нашей задаче это соответствует случаю, когда при соответствующем выборе координатной системы в конечных областях справедлива специальная теория относительности.

---

[9] Математики доказали, что это условие является также и *достаточным*.

Свертка по индексам $\tau$ и $\rho$ в выражении (43) для $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ дает ковариантный тензор 2-го ранга

$$B_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu},$$

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}, \qquad (44)$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}.$$

*Замечание о выборе системы координат.* Уже в § 8 в связи с соотношением (18а) было сделано замечание о том, что некоторые преимущества дает такой выбор координат, при котором $\sqrt{-g} = 1$. Взгляд на уравнения, полученные в двух последних параграфах, показывает, что благодаря такому выбору законы образования тензоров значительно упрощаются. В частности, это верно для только что выведенного тензора $B_{\mu\nu}$, который в излагаемой теории играет основную роль. Именно, указанный особый выбор координат влечет за собою обращение в нуль $S_{\mu\nu}$, так что тензор $B_{\mu\nu}$ сводится к $R_{\mu\nu}$.

Поэтому в дальнейшем я буду давать все соотношения в том упрощенном виде, который следует из указанного специального выбора координатной системы. *К общековариантным уравнениям* будет нетрудно вернуться, если в каком-нибудь частном случае это окажется желательным.

## B. ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

### § 13. Уравнение движения материальной точки в гравитационном поле. Выражение для компонент гравитационного поля

Согласно специальной теории относительности, свободное тело, неподверженное действию внешних сил, движется прямолинейно и равномерно. С точки зрения общей теории относительности это верно лишь в той части четырехмерного пространства, в которой координатная система $K_0$ может быть выбрана так, что $g_{\mu\nu}$ принимают специальные постоянные значения, указанные в (4).

Если мы рассматриваем это же движение относительно произвольно выбранной координатной системы $K_1$, то это тело, на основании соображений § 2, будет двигаться с точки зрения системы $K_1$ в некотором поле тяготения. Закон движения относительно системы $K_1$ легко получается из следующего рассуждения. По отношению к системе $K_0$ закон движения представляет собой четырехмерную прямую, т. е. геодезическую. Но так как геодезическая определяется независимо от координатной системы, то ее уравнение будет также уравнением движения материальной точки относительно системы $K_1$. Положив

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}, \tag{45}$$

найдем, что уравнение движения точки относительно $K_1$ запишется в виде

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}. \tag{46}$$

Сделаем теперь весьма естественное допущение, что эта общековариантная система уравнений определяет движение точки в гравитационном поле и в том случае, когда не существует системы $K_0$, относительно которой в конечных областях пространства справедлива специальная теория относительности. Мы тем более в праве делать такое допущение, что уравнение (46) содержит только первые производные от $g_{\mu\nu}$, между которыми — даже в частном случае существования системы $K_0$ — отсутствуют какие-либо соотношения [10].

Если все $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ равны нулю, то точка движется прямолинейно и равномерно; следовательно, эти величины обусловливают отклонение движения от прямолинейного и равномерного. Они являются компонентами гравитационного поля.

## § 14. Уравнения гравитационного поля в отсутствие материи

В дальнейшем мы будем различать «гравитационное поле» и «материю» в том смысле, что все, кроме гравитационного поля, обозначается как «материя»; это значит, что к последней относится не только «материя» в обычном смысле, но и электромагнитное поле.

Наша ближайшая задача заключается в отыскании уравнений гравитационного поля в отсутствие материи. Для этого опять воспользуемся тем же методом, какой применялся в предыдущем параграфе при выводе уравнения движения материальной точки. Первоначальная теория относительности, в которой $g_{\mu\nu}$ имеют известные постоянные значения, является тем частным случаем, для которого искомые уравнения заведомо

---

[10] Лишь между вторыми (вместе с первыми) производными, согласно § 12, существуют соотношения $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = 0$.

должны удовлетворяться. Пусть этот частный случай осуществляется в некоторой конечной области по отношению к определенной координатной системе $K_0$. В этой системе все компоненты $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ тензора Римана [формула (43)] обращаются в нуль. Но в таком случае они будут равны нулю и в любой другой системе координат в рассматриваемой области.

Таким образом, искомые уравнения свободного от материи гравитационного поля во всяком случае должны выполняться, если все $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ равны нулю. Но это условие заведомо требует слишком многого. В самом деле, гравитационное поле, создаваемое, например, материальной точкой, во всяком случае не может быть никаким выбором координатной системы «оттрансформировано», т. е. не может быть преобразовано к случаю постоянных $g_{\mu\nu}$.

Поэтому представляется естественным требование, чтобы в свободном от материи гравитационном поле обращался в нуль симметричный тензор $B_{\mu\nu}$, полученный из тензора $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$. Таким способом получаются 10 уравнений для 10 величин $g_{\mu\nu}$, которые выполняются в том частном случае, когда все $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ равны нулю. Эти уравнения для свободного от материи поля, в силу (44), при сделанном выборе координатной системы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} &= 0 \\ \sqrt{-g} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Следует отметить, что с выбором этих уравнений связан минимум произвола. Ведь, кроме $B_{\mu\nu}$, нет другого тензора 2-го ранга, который был бы составлен из $g_{\mu\nu}$ и их производных, не содержал бы производных более высокого порядка, чем второго, и был бы линейным относительно последних[11].

Тот факт, что эти уравнения, вытекающие из общего принципа относительности чисто математическим путем, в соединении с уравнениями движения (46) дают в первом приближении ньютоновский закон тяготения, а во втором приближении — объяснение открытого Леверье движения перигелия Меркурия (остающегося после внесения поправок на возмущение), должен, по нашему мнению, убедить в физической правильности теории.

---

[11] Собственно говоря, это можно утверждать только о тензоре $B_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta})$, где $\lambda$ — константа. Однако, приравняв его нулю, мы снова возвращаемся к уравнениям: $B_{\mu\nu} = 0$.

## § 15. Функция Гамильтона для гравитационного поля. Закон сохранения импульса и энергии

Чтобы показать соответствие уравнений поля законам сохранения импульса и энергии, удобнее всего написать их в следующей гамильтоновой форме:

$$\left.\begin{aligned} &\delta\left\{\int H\,d\tau\right\}=0,\\ &H=g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha},\\ &\sqrt{-g}=1. \end{aligned}\right\}\tag{47a}$$

При этом на границах рассматриваемой ограниченной четырехмерной области интегрирования вариации равны нулю.

Прежде всего, необходимо показать, что уравнения (47a) эквивалентны уравнениям (47). Для этой цели рассмотрим $H$ как функцию от $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(\equiv\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}\right)$. Сначала запишем

$$\delta H=\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+2g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+2\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right).$$

Но

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right)=-\frac{1}{2}\,\delta\left[g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_{\lambda}}\right)\right].$$

Выражения, получающиеся из двух последних членов в круглых скобках, имеют разные знаки и получаются друг из друга путем перестановки индексов $\mu$ и $\beta$ (так как обозначение индексов суммирования не имеет значения). В выражении для $\delta H$ они взаимно уничтожаются, будучи умножены на величину $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$, симметричную относительно индексов $\mu$ и $\beta$. Таким образом, следует учесть лишь первый член в круглых скобках, так что, принимая во внимание равенства (31), получаем

$$\delta H=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g^{\mu\beta}_{\alpha}.$$

Таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha},\\ &\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\}\tag{48}$$

Выполнив вариации в (47a), получим сначала систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)-\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=0,\tag{47б}$$

которая, в силу уравнений (48), совпадает с (47), что и требовалось доказать. Умножая (47б) на $g^{\mu\nu}_{\sigma}$ и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\sigma}}$$

и, следовательно,

$$g^{\mu\nu}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( g^{\mu\nu}_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} \frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\sigma}},$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( g^{\mu\nu}_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial H}{\partial x_{\sigma}} = 0,$$

или [12]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t^{\alpha}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} &= 0, \\ -2\varkappa t^{\alpha}_{\sigma} &= g^{\mu\nu}_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} - \delta^{\alpha}_{\sigma} H, \end{aligned} \right\} \qquad (49)$$

причем, на основании уравнений (48), второго уравнения (47) и формулы (34), должно выполняться соотношение

$$\varkappa t^{\alpha}_{\sigma} = \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{\sigma} g^{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\lambda} - g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}. \qquad (50)$$

Следует помнить, что $t^{\alpha}_{\sigma}$ не является тензором; уравнение же (49) справедливо для всех координатных систем, для которых $\sqrt{-g} = 1$. Это уравнение выражает законы сохранения импульса и энергии для гравитационного поля. В самом деле, интегрирование этого уравнения по трехмерному объему $V$ дает четыре уравнения:

$$\frac{d}{dx_4} \left\{ \int t^4_{\sigma}\, dV \right\} = \int (t^1_{\sigma} a_1 + t^2_{\sigma} a_2 + t^3_{\sigma} a_3)\, ds, \qquad (49a)$$

где $a_1$, $a_2$, $a_3$ — направляющие косинусы внутренней нормали к элементу граничной поверхности $dS$ (в смысле эвклидовой геометрии). В этом соотношении, как нетрудно видеть, содержатся оба закона сохранения в их обычной форме записи. Мы назовем величины $t^{\alpha}_{\sigma}$ «компонентами энергии» [13] гравитационного поля.

---

[12] Причина введения множителя $-2\varkappa$ выяснится позже.

[13] Их называют теперь компонентами псевдотензора энергии-импульса.— *Прим. ред.*

Представим теперь уравнения (47) еще в одной форме, особенно полезной для наглядного усвоения рассматриваемого вопроса. Посредством умножения уравнений поля (47) на $g^{\nu\sigma}$ эти уравнения получаются в «смешанном» виде. Нужно принять во внимание, что

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)-\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}.$$

Эта величина, на основании (34), равна

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)-g^{\nu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}-g^{\sigma\beta}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu},$$

или (после изменения обозначения индексов суммирования)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\right)-g^{mn}\Gamma^{\sigma}_{m\beta}\Gamma^{\beta}_{n\mu}-g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}.$$

Третий член этого выражения взаимно уничтожается с членом, получающимся из второго члена уравнений поля (47); вместо второго члена этого выражения можно, пользуясь соотношением (50), подставить

$$\varkappa\left(t^{\sigma}_{\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}t\right),$$

где $t=t^{\alpha}_{\alpha}$. Итак, вместо уравнений (47) получается

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\right)&=-\varkappa\left(t^{\sigma}_{\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}t\right),\\ \sqrt{-g}&=1.\end{aligned}\right\}\qquad(51)$$

## § 16. Уравнения гравитационного поля в общем виде

Уравнения поля для свободного от материи пространства, выведенные в предыдущем параграфе, нужно сравнить с уравнением поля

$$\Delta\varphi=0$$

теории Ньютона. Мы должны найти уравнение, которое соответствует уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi=4\pi\varkappa\rho,$$

где $\rho$ — плотность материи.

Специальная теория относительности привела к тому выводу, что инертная масса есть не что иное, как энергия, полное математическое выражение которой дается симметричным тензором 2-го ранга, тензором энергии. Поэтому и в общую теорию относительности придется ввести некоторый тензор энергии материи $T_\sigma^\alpha$, имеющий смешанный характер, как и компоненты $t_\sigma^\alpha$ [уравнения (49) и (50)] гравитационного поля, но в то же время соответствующий симметричному ковариантному тензору[14].

Система уравнений (51) показывает, как ввести этот тензор энергии (соответствующий плотности $\rho$ в уравнении Пуассона) в уравнения гравитационного поля. Если рассматривать замкнутую систему (например, Солнечную систему), то общая масса системы и, следовательно, ее общее гравитирующее действие будут зависеть от всей энергии системы, т. е. от совокупности энергии весомой материи и энергии поля тяготения. Это можно выразить тем, что в уравнениях (51) вместо одних только компонент энергии $t_\mu^\sigma$ гравитационного поля мы подставим сумму $t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma$ компонент тензора энергии материи и гравитационного поля. Таким образом, вместо (51) получается тензорное уравнение

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha) = -\varkappa\left[(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma) - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma(t+T)\right], \\ &\sqrt{-g} = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

где $T = T_\mu^\mu$ (скаляр Лауэ). Это и есть искомые общие уравнения гравитационного поля в смешанной форме. Отсюда обратно вместо (47) получается система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \\ &\sqrt{-g} = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Нужно признать, что указанное введение тензора энергии материи не может быть обосновано одним только постулатом относительности; поэтому выше мы исходили из требования, что энергия гравитационного поля должна действовать в смысле тяготения точно так же, как всякая энергия другого рода. Но самым сильным аргументом в пользу указанных уравнений является то, что из них следуют уравнения сохранения импульса и энергии для компонент полной энергии, в точности соответствующие уравнениям (49) и (49а). Это будет доказано ниже.

## § 17. Законы сохранения в общем случае

Уравнение (52) нетрудно преобразовать так, чтобы второй член в правой части обратился в нуль. Для этого следует произвести свертку по индексам $\mu$ и $\sigma$ и вычесть полученное таким образом уравнение, пред-

14 $g_{\alpha\tau}T_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau}$ и $g^{\sigma\beta}T_\sigma^\alpha = T^{\alpha\beta}$ должны быть симметричными тензорами.

варительно умноженное на $^1/_2\delta^\sigma_\mu$, из уравнения (52). Тогда получается

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)=-\varkappa\,(t^\sigma_\mu+T^\sigma_\mu). \tag{52a}$$

Применяя к этому уравнению операцию $\frac{\partial}{\partial x_\sigma}$, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

Первый и третий члены в круглых скобках приводят ко взаимно уничтожающимся слагаемым, в чем легко убедиться, если в третьем члене переставить, с одной стороны, индексы суммирования $\alpha$ и $\sigma$ и, с другой стороны, индексы $\beta$ и $\lambda$. Второй член можно преобразовать согласно (31), так что имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\sigma}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})=\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\mu}. \tag{54}$$

Второй член в левой части (52a) сначала дает

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\mu}(g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}),$$

или

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right].$$

Член, получающийся от последнего члена в круглых скобках, обращается в нуль при сделанном нами выборе координат в силу (29). Два других члена можно объединить; тогда на основании соотношений (31) получим

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\mu},$$

так что, принимая во внимание равенство (54), получаем тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)\equiv 0. \tag{55}$$

Из (55) и (52a) следует

$$\frac{\partial\,(t^\sigma_\mu+T^\sigma_\mu)}{\partial x_\sigma}=0. \tag{56}$$

Таким образом, из наших уравнений гравитационного поля следует, что законы сохранения импульса и энергии выполняются. В этом проще всего убедиться при помощи рассуждения, которое ведет к уравнению (49а); нужно только вместо компонент энергии $t_\mu^\sigma$ гравитационного поля ввести компоненты полной энергии материи и гравитационного поля.

## § 18. Закон сохранения импульса и энергии для материи как следствие уравнений поля

Умножая уравнение (53) на $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$, пользуясь приемом, примененным в § 15, и принимая во внимание, что $g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ равно нулю, получаем уравнение:

$$\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu} = 0,$$

или, в силу равенства (56),

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu} = 0. \tag{57}$$

Сравнение с (41б) показывает, что это уравнение при сделанном выборе координатной системы выражает не что иное, как обращение в нуль дивергенции тензора энергии материи. Наличие второго члена в левой части с физической точки зрения означает, что для одной лишь материи законы сохранения импульса и энергии в их подлинном смысле не выполняются; точнее говоря, они выполняются лишь тогда, когда $g^{\mu\nu}$ постоянны, т. е. когда компоненты напряженности гравитационного поля равны нулю. Этот второй член представляет собой выражение для импульса, и, соответственно, для энергии, которые в единицу времени и в единице объема передаются материи от гравитационного поля. Все это становится еще более ясным, если вместо (57) записать в духе соотношения (41):

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} = -\Gamma_{\sigma\alpha}^\beta T_\beta^\alpha. \tag{57a}$$

Правая часть этого уравнения выражает энергетическое воздействие гравитационного поля на материю.

Таким образом, уравнения гравитационного поля содержат четыре условия, которым должны удовлетворять материальные процессы. Эти условия и представляют собой уравнения материального процесса, если последний может быть описан четырьмя независимыми друг от друга дифференциальными уравнениями[15].

## Г. «МАТЕРИАЛЬНЫЕ» ПРОЦЕССЫ

Математические вспомогательные средства, изложенные в разделе Б, дают нам возможность сразу обобщить физические законы (гидродинамику, электродинамику Максвелла), сформулированные в специальной теории относительности, так чтобы они удовлетворяли общей теории относительности. При этом общий принцип относительности, не налагая никаких новых ограничений, дает возможность точно описать влияние гравитационного поля на все процессы без привлечения каких-либо новых гипотез.

Из этого обстоятельства следует, что не нужно вводить никаких предположений относительно физической природы материи (в более узком смысле). В частности, может остаться открытым вопрос о том, смогут ли теория электромагнитного поля и теория гравитационного поля совместно служить базой для теории материи. Общий постулат относительности в принципе ничего не может сказать об этом. В процессе развития теории выяснится, смогут ли электродинамика и учение о тяготении вместе дать то, что не удавалось одной лишь первой теории.

## § 19. Уравнения Эйлера для адиабатических жидкостей в отсутствие трения

Пусть $p$ и $\rho$ — два скаляра, первый из которых назовем «давлением», а второй — «плотностью» жидкости; пусть они связаны некоторым уравнением. Пусть, далее, контравариантный симметричный тензор

$$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}p + \rho\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} \tag{58}$$

является контравариантным тензором энергии жидкости. Ему соответствует ковариантный тензор

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}p + g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}g_{\nu\beta}\frac{dx_\beta}{ds}\rho, \tag{58a}$$

[15] Cp. D. Hilbert. Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1915, 3.

а также смешанный тензор [16]

$$T_\sigma^\alpha = -\delta_\sigma^\alpha p + g_{\sigma\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds} \rho. \tag{58б}$$

Подставив правую часть равенства (58б) в уравнение (57а), получим гидродинамические уравнения Эйлера в общей теории относительности. В принципе эти уравнения полностью решают проблему движения, ибо четыре уравнения (57а) вместе с заданной зависимостью между $p$ и $\rho$ и соотношением

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 1$$

достаточны при данных $g_{\alpha\beta}$ для определения 6 неизвестных:

$$p, \ \rho, \ \frac{dx_1}{ds}, \ \frac{dx_2}{ds}, \ \frac{dx_3}{ds}, \ \frac{dx_4}{ds}.$$

Если неизвестны также и $g_{\mu\nu}$, то к прежним уравнениям присоединяются еще уравнения (53). Таким образом, для определения 10 функций $g_{\mu\nu}$ имеем 11 уравнений. Может показаться, что неизвестные функции переопределены. Между тем следует заметить, что уравнения (57а) уже содержатся в уравнениях (53), так что последние представляют не больше 7 независимых уравнений. Причина этой неопределенности заключается в широкой свободе выбора координатной системы, вследствие которой задача в математическом смысле остается неопределенной в такой степени, что три из пространственных функций могут быть выбраны произвольно [17].

## § 20. Максвелловы уравнения электромагнитного поля для вакуума

Пусть $\varphi_\nu$ — компоненты ковариантного 4-вектора электромагнитного потенциала. Образуем из них, согласно (36), компоненты $F_{\rho\sigma}$ ковариантного 6-вектора электромагнитного поля

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

---

[16] Для наблюдателя, который движется вместе с жидкостью и пользуется в бесконечно малой области координатной системой в смысле специальной теории относительности, плотность энергии $T_4^4$ равна $\rho - p$. Это и есть определение плотности $\rho$. Таким образом, для несжимаемой жидкости $\rho$ не является постоянной.

[17] При отказе от выбора координатной системы с $g = -1$ свободно выбираемыми остаются *четыре* пространственные функции, соответственно четырем произвольным функциям, которыми можно свободно распоряжаться при выборе координат.

Из соотношения (59) следует, что удовлетворяется следующая система уравнений:

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau}+\frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma}=0. \tag{60}$$

Левая часть этого равенства в силу (37) представляет собой антисимметричный тензор 3-го ранга. Таким образом, система (60) содержит по существу четыре уравнения, имеющие вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}&=0,\\
\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_4}&=0,\\
\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}&=0,\\
\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{60a}$$

Эта система уравнений соответствует второй системе уравнений Максвелла. В этом можно немедленно убедиться, если подставить

$$\left.\begin{aligned}
F_{23}&=\mathfrak{h}_x, & F_{14}&=\mathfrak{e}_x\\
F_{31}&=\mathfrak{h}_y, & F_{24}&=\mathfrak{e}_y,\\
F_{12}&=\mathfrak{h}_z, & F_{34}&=\mathfrak{e}_z.
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Тогда можно вместо (60а) написать в обычных обозначениях трехмерного векторного анализа

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t}+\operatorname{rot}\mathfrak{e}&=0,\\
\operatorname{div}\mathfrak{h}&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{60б}$$

Первую систему уравнений Максвелла мы получим, обобщая уравнения Максвелла в форме, данной Минковским. Введем контравариантный 6-вектор

$$F^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}, \tag{62}$$

соответствующий ковариантному $F_{\alpha\beta}$, и контравариантный 4-вектор $I_\mu$ — плотности электрического тока в пустоте. В таком случае можно, приняв во внимание соотношение (40), написать следующую, инвариантную по отношению к любым преобразованиям с определителем, равным 1 (согласно сделанному нами выбору координат), систему уравнений:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=I^\mu. \tag{63}$$

Положим:

$$\left.\begin{aligned} F^{23} &= \mathfrak{h}_x', & F^{14} &= -\mathfrak{e}_x', \\ F^{31} &= \mathfrak{h}_y', & F^{24} &= -\mathfrak{e}_y', \\ F^{12} &= \mathfrak{h}_z', & F^{34} &= -\mathfrak{e}_z'. \end{aligned}\right\} \qquad 64)$$

Эти величины в частном случае специальной теории относительности равны соответственно величинам $\mathfrak{h}_x, \ldots, \mathfrak{e}_z$. Далее, положим:

$$I^1 = \mathfrak{i}_x, \quad I^2 = \mathfrak{i}_y, \quad I^3 = \mathfrak{i}_z, \quad I^4 = \rho.$$

Тогда вместо (63) получим

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{h}' - \frac{\partial \mathfrak{e}'}{\partial t} &= \mathfrak{i}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{e}' &= \rho. \end{aligned}\right\} \qquad (63a)$$

Уравнения (60), (62), (63) представляют собой обобщение максвелловых уравнений поля в пустоте при сделанном допущении относительно выбора координат.

*Компоненты тензора энергии электромагнитного поля.* Образуем внутреннее произведение

$$\varkappa_\sigma = F_{\sigma\mu} I^\mu. \qquad (65)$$

Его компоненты, написанные согласно (61) в трехмерных обозначениях имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \rho \mathfrak{e}_x + [\mathfrak{i}, \mathfrak{h}]_x, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varkappa_4 &= -(\mathfrak{i}, \mathfrak{e}). \end{aligned}\right\} \qquad (65a)$$

Величина $\varkappa_\sigma$ представляет собой ковариантный 4-вектор, компоненты которого с обратным знаком равны импульсу, или, соответственно, энергии, которые переносятся с электрических зарядов на электромагнитное поле в единицу времени и в единице объема. Если электрические заряды свободны, т. е. если они находятся под влиянием одного только электромагнитного поля, то ковариантный 4-вектор $\varkappa_\sigma$ обращается в нуль.

Чтобы получить компоненты энергии $T_\sigma^\nu$ электромагнитного поля, достаточно уравнению $\varkappa_\sigma = 0$ придать вид уравнения (57). Тогда из (63) и (65) сначала получим

$$\varkappa_\sigma = F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu}) - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

Второй член в правой части, в силу (60), может быть преобразован следующим образом:

$$F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}.$$

Из соображений симметрии последнее выражение может быть записано также и в виде

$$-\frac{1}{4}\left[g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}F_{\mu\nu}\right].$$

Но вместо этого можно написать

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}) + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}).$$

Первый член этого выражения можно представить в виде

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}).$$

Второй член после выполнения дифференцирования и некоторого преобразования принимает форму

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\tau}F_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Объединяя все три вычисленные члена, получаем соотношение

$$\varkappa_\sigma = \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_\tau^\nu, \tag{66}$$

причем

$$T_\sigma^\nu = -F_{\sigma\alpha}F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{66a}$$

Равенство (66) при $\varkappa_\sigma$, равном нулю, в силу (30), эквивалентно (57) или, соответственно, (57a). Следовательно, $T_\sigma^\nu$ представляют собой компоненты энергии электромагнитного поля. При помощи равенств (61) и (64) легко показать, что эти компоненты энергии электромагнитного поля в случае специальной теории относительности составляют известные выражения Максвелла — Пойнтинга.

Итак, мы вывели самые общие законы, которым удовлетворяют гравитационное поле и материя, пользуясь при этом координатной системой, в которой $\sqrt{-g} = 1$. Благодаря этому мы значительно упростили формулы и расчеты, не отказываясь в то же время от требования общей ковариантности, ибо мы вывели наши уравнения из общековариантных уравнений, выбирая лишь специальным образом координатную систему.

Все же не лишен формального интереса вопрос, остаются ли в силе законы сохранения (импульса и энергии), а также уравнения гравитационного поля, представленные в виде уравнений (56) и, соответственно, (52) или (52а), в которых слева стоит дивергенция (в обычном смысле), а справа — сумма компонент энергии материи и гравитационного поля, в том случае, когда при соответственно обобщенном определении компонент энергии гравитационного поля и материи не делается специального выбора координатной системы. Я нашел, что это действительно так. Однако я полагаю, что изложение довольно длинных рассуждений по данному вопросу нецелесообразно, поскольку при этом ничего существенно нового не получается[18].

## Д. § 21. Теория Ньютона как первое приближение

Как уже упоминалось много раз, специальная теория относительности, рассматриваемая как частный случай общей теории относительности, характеризуется тем, что $g_{\mu\nu}$ имеют постоянные значения (4). Согласно изложенному выше, это означает полное пренебрежение гравитационными действиями. Более близкое к действительности приближение мы получаем, рассматривая случай, когда все $g_{\mu\nu}$ отличаются от значений (4) лишь на малые (по сравнению с 1) величины; при этом мы пренебрегаем малыми величинами второго и более высоких порядков. (Первая предпосылка приближенного решения основных уравнений.)

Далее, допустим, что в рассматриваемой пространственно-временной области при надлежащем выборе системы координат величины $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности стремятся к значениям (4); это значит, что мы рассматриваем гравитационные поля, которые могут считаться созданными только материей, находящейся в конечной области пространства.

Можно было бы думать, что упомянутые пренебрежения должны привести к теории Ньютона. Однако для этого в основных уравнениях требуется сделать некоторые приближения еще и с другой точки зрения. Рассмотрим движение материальной точки, удовлетворяющее уравнениям (46). В случае специальной теории относительности компоненты

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

могут принимать любые значения; это означает, что могут встречаться любые скорости

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2},$$

[18] Ср. статью 51.— *Ред.*

меньшие скорости света в пустоте ($v < 1$). Если ограничиться случаем, который почти всегда встречается на опыте, когда $v$ мало по сравнению со скоростью света, то это будет означать, что компоненты

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

должны рассматриваться как малые величины, в то время как $\frac{dx_4}{ds}$, с точностью до величин второго порядка, равно 1. (Вторая предпосылка приближенного решения основных уравнений.)

Теперь примем во внимание, что, согласно первой предпосылке нашего приближения, все $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ представляют собой малые величины по крайней мере первого порядка. Но отсюда следует, что в выражении (46), согласно второму предположению, должны быть учтены только члены с $\mu = \nu = 4$. Ограничиваясь членами низшего порядка, мы вместо (46) получаем сначала следующие уравнения:

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \Gamma^{\tau}_{44},$$

причем $ds = dx_4 = dt$. Беря только члены первого порядка, получаем

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \begin{bmatrix} 44 \\ \tau \end{bmatrix} \qquad (\tau = 1, 2, 3),$$

$$\frac{d^2x_4}{dt^2} = -\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Если, кроме того, предположить, что гравитационное поле квазистатично, т. е. ограничиться тем случаем, когда материя, создающая гравитационное поле, движется медленно (по сравнению со скоростью распространения света), то в правой части можно пренебречь производными по времени по сравнению с производными по пространственным координатам; таким образом, получается

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, 3). \tag{67}$$

Это и есть уравнение движения материальной точки в теории Ньютона, причем $\frac{g_{44}}{2}$ играет роль гравитационного потенциала. Этот результат замечателен тем, что только одна компонента $g_{44}$ фундаментального тензора определяет в первом приближении движение материальной точки.

Обратимся теперь к уравнению поля (53). При этом должно быть принято во внимание, что тензор энергии «материи» определяется почти исключительно плотностью материи $\rho$ в более узком смысле этого слова, т. е. вторым членом правой части (58) [и, соответственно, (58а) или (58б)]. В интересующем нас приближении все компоненты, кроме $T_{44} = \rho = T$, обращаются в нуль. В левой части уравнения (53) второй член представляет собой величину второго порядка малости; первый же член в интересующем нас приближении принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ 1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ 2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ 3\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_4}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ 4\end{bmatrix}.$$

Это выражение при $\mu = \nu = 4$ и при отбрасывании производных по времени переходит в

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\Delta g_{44}.$$

Таким образом, последнее из уравнений (53) может быть записано в виде

$$\Delta g_{44} = \varkappa\rho. \tag{68}$$

Уравнения (67) и (68), вместе взятые, эквивалентны закону тяготения Ньютона.

Для гравитационного потенциала на основании уравнений (67) и (68) получается выражение

$$-\frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}, \tag{68a}$$

тогда как теория Ньютона при выбранной нами единице времени дает для этой величины выражение

$$-\frac{K}{c^2}\int\frac{\rho d\tau}{r},$$

где $K$ — обычная гравитационная постоянная, равная $6{,}7 \cdot 10^{-8}$. Из сравнения обоих выражений получается

$$\varkappa = \frac{8\pi K}{c^2} = 1{,}87 \cdot 10^{-27}. \tag{69}$$

## § 22. Свойства масштабов и часов в статическом гравитационном поле. Искривление лучей света. Движение перигелия планетных орбит

Чтобы получить теорию Ньютона как первое приближение, нам пришлось из 10 компонент гравитационного потенциала $g_{\mu\nu}$ вычислить только $g_{44}$, так как только эта компонента входит в полученное в первом приближении уравнение движения (67) материальной точки в гравитационном поле. Но и другие компоненты $g_{\mu\nu}$ должны в первом приближении отличаться от значений, данных в (4), так как все они связаны условием $g = -1$.

Для материальной точки, создающей поле и находящейся в начале координат, получается в первом приближении радиально симметричное решение:

$$\left.\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= -\delta_{\rho\sigma} - \alpha\frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} && (\rho \text{ и } \sigma \text{ принимают значения от 1 до 3}); \\ g_{\rho 4} &= g_{4\rho} = 0 && (\rho \text{ принимает значения от 1 до 3}), \\ g_{44} &= 1 - \frac{\alpha}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

где $\delta_{\rho\sigma}$ равно соответственно 1 или 0, в зависимости от того, будет ли $\rho = \sigma$ или $\rho \neq \sigma$, а

$$r = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

При этом, в силу выражения (68а), имеем

$$\alpha = \frac{\varkappa M}{4\pi}, \tag{70а}$$

где через $M$ обозначена масса, создающая поле. Легко проверить, что это решение удовлетворяет уравнениям поля (вне массы) в первом приближении.

Исследуем теперь воздействие, которое испытывают метрические свойства пространства от поля массы $M$. Между «локально» измеренными (см. § 4) длинами и промежутками времени $ds$, с одной стороны, и приращениями координат $dx_\nu$ — с другой, всегда имеется соотношение:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu.$$

Так, например, для единицы масштаба, расположенной «параллельно» оси $x$, следует написать:

$$ds^2 = -1, \qquad dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

т. е.

$$-1 = g_{11}dx_1^2.$$

Если единица масштаба, кроме того, лежит на самой оси $x$, то первое из уравнений (70) дает

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

Из обоих последних соотношений следует в первом приближении

$$dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}. \tag{71}$$

Итак, если единичный масштаб приложен в радиальном направлении, то в рассматриваемой координатной системе, благодаря наличию гравитационного поля, он представляется сокращенным в найденном отношении.

Аналогичным путем мы получим координатные длины масштаба в случае поперечного направления, если положим, например,

$$ds^2 = -1, \quad dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

$$x_1 = r, \qquad x_2 = x_3 = 0.$$

В таком случае имеем

$$-1 = g_{22}\, dx_2^2 = -dx_2^2. \tag{71a}$$

Итак, при поперечном положении масштаба гравитационное поле материальной точки не оказывает никакого влияния на длину стержня.

Следовательно, в гравитационном поле эвклидова геометрия не справедлива даже в первом приближении, если в качестве реализации одного и того же отрезка мы используем один и тот же стержень в разных местах и в разных положениях. Но соотношения (70a) и (69) все же показывают, что ожидаемые отклонения от геометрии Эвклида слишком незначительны, чтобы их можно было заметить при измерении поверхности Земли.

Пусть, далее, исследуется скорость хода эталонных часов, которые установлены неподвижно в статическом гравитационном поле. Для единичного интервала времени в этом случае имеем:

$$ds = 1, \quad dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0.$$

Следовательно,

$$1 = g_{44} dx_4^2,$$

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_{44} - 1)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2},$$

или

$$dx_4 = 1 + \frac{\varkappa}{8\pi} \int \frac{\rho\, d\tau}{r}. \tag{72}$$

Итак, часы идут медленнее, если они установлены вблизи весомых масс. Отсюда следует, что спектральные линии света, попадающего к нам с поверхности больших звезд, должны сместиться к красному концу спектра[19].

---

[19] В пользу существования подобного эффекта говорят, согласно Э. Фройндлиху, спектральные наблюдения над звездами определенных типов. Однако окончательная проверка этого следствия не была еще предпринята.

Далее исследуем ход лучей света в статическом гравитационном поле. Согласно специальной теории относительности, распространение света описывается уравнением

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0.$$

Следовательно, в общей теории относительности эта скорость определяется из уравнения

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0. \tag{73}$$

Если дано направление луча, т. е. отношения $dx_1 : dx_2 : dx_3$, то из уравнения (73) можно вычислить величины

$$\frac{dx_1}{dx_4}, \quad \frac{dx_2}{dx_4}, \quad \frac{dx_3}{dx_4}$$

и, таким образом, скорость

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma,$$

определяемую в смысле эвклидовой геометрии. Легко видеть, что лучи света должны искривляться относительно координатной системы в случае, если $g_{\mu\nu}$ не постоянны. Если $n$ — направление, перпендикулярное к направлению распространения света, то на основании принципа Гюйгенса следует, что луч света [рассматриваемый в плоскости $(\gamma, n)$] обладает кривизной $-\dfrac{\partial\gamma}{\partial n}$.

Исследуем искривление, которое испытывает луч света, проходящий на некотором расстоянии $\Delta$ от массы $M$ (рис. 1). Если выбрать координатную систему так, как показано на рисунке, то общее искривление $B$ луча света (положительное, если траектория луча обращена к началу координат своей вогнутой стороной) в достаточно хорошем приближении дается следующим выражением

$$B = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\gamma}{\partial x_1}\, dx_2,$$

причем из (73) и (70) получается

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Вычисление дает

$$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\varkappa M}{2\pi\Delta}. \tag{74}$$

Согласно этой формуле, луч света, проходящий мимо Солнца, испытывает отклонение в 1",7, а луч света, проходящий мимо планеты Юпитер, отклоняется приблизительно на 0",02.

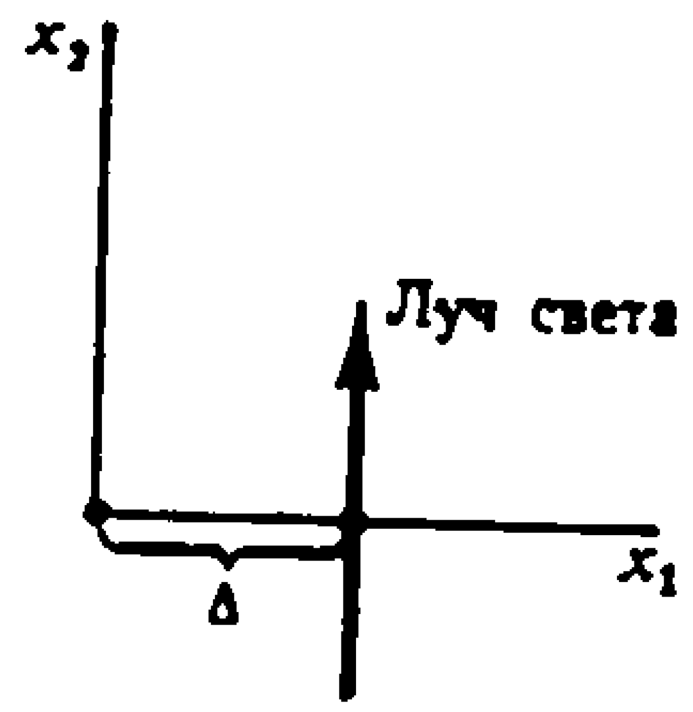



Рис. 1.

Если вычислить поле тяготения с точностью до величин более высокого порядка и с соответствующей точностью вычислить движение по орбите материальной точки с бесконечно малой массой, то получается следующее отклонение от законов движения планет Кеплера — Ньютона. Эллиптическая орбита планеты испытывает в направлении движения планеты медленное вращение, равное

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)} \tag{75}$$

за время одного полного обращения планеты. В этой формуле $a$ означает большую полуось, $c$ — скорость света в обычных единицах, $e$ — эксцентриситет орбиты, $T$ — период обращения планеты в секундах[20].

Для планеты Меркурий получается вращение орбиты, составляющее 43" в столетие, что точно соответствует величине, установленной астрономами (Леверье). Астрономы на самом деле нашли, что некоторая часть общего движения перигелия этой планеты не объясняется возмущающим действием других планет и равняется указанной величине.

Поступила 20 марта 1916 г.

В этой статье наиболее подробно изложена общая теория относительности. Во введении Эйнштейн впервые вводит в употребление термин «специальная теория относительности». В статье впервые появились эйнштейновское условие суммирования по дважды встречающимся индексам.

---

[20] Интересующихся вычислениями отсылаем к оригинальным работам: A. Einstein. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831. (Статья 36) K. Schwarzschild. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 189.