

Уравнения Максвелла как свойство вихревой губки¹

Э. Келли

I. Из истории вопроса

Вихревая губка была введена Иоганном Бернулли в 1736 г. при попытке объяснить распространение света. Он предположил, что пространство заполнено несжимаемой жидкостью, содержащей бесчисленные малые водовороты, ориентированные во всевозможных направлениях; взаимодействие этих водоворотов наделяло среду способностью распространять гидродинамические возмущения, что, по представлению Бернулли, могло считаться эквивалентным распространению света. Эта среда содержала также твердые частички, которые передвигались вместе с жидкостью, но не отходили далеко от своих первоначальных положений.

Вихри рассматривались и во многих более поздних попытках найти связь между механикой и электромагнетизмом. Сюда относятся такие модели, как вихревая модель Максвелла (1861), которая, хотя и была аннулирована позже, оказала существенную помощь в выводе вихревых уравнений, а также вихревая губка в варианте, принятом Кельвином в 1880 г. и Фицджеральдом в 1885 г.² В 1887 г. Кельвин предложил аналогию между распространением света в пространстве и распространением ламинарных возмущений в вихревой губке. Согласно Уиттекеру, это ознаменовало собой большой успех в разработке таких моделей.

Другое представление, интересующее нас здесь, это вращательная упругая среда Мак-Келлога³. Предполагая, что потенциальная энергия этой среды пропорциональна квадрату вихря смещения,

¹ Из журнала «American Journal of Physics», 1963, 31, № 10, стр. 785—791.

² Уиттекер «История теорий эфира и электричества», т. I, стр. 95—96 и 295—303. См. также труды Кельвина и Фицджеральда.

³ Уиттекер, стр. 142—145.

Мак-Келлог сумел построить теорию, о которой Уиттекер говорит: «Не может быть сомнения, что Мак-Келлог действительно решил задачу построения среды, колебания которой, рассчитанные в согласии с правильными законами динамики, должны обладать теми же самыми свойствами, что и колебания света».

В то время (1839) было неприемлемо допущение вращательной упругости, так что модель Мак-Келлога не вызвала большого энтузиазма. Модель Максвелла, частично принятая для того, чтобы получить поперечность колебаний, обладала аналогичным недостатком, так как в ней допускались холостые колесики и упругие элементы. Мы покажем ниже, что как свойство поперечности волн Максвелла, так и вращательные свойства модели Мак-Келлога естественно возникают из свойств вихревой губки, и что уравнения для крупномасштабных движений вихревой губки тождественны по форме с уравнениями Максвелла для свободного пространства.

II. Крупномасштабные свойства вихревой губки

Описание модели. Среда, которую мы здесь рассмотрим, опуская только твердые частицы, это среда Бернулли, т. е. бесструктурная, несжимаемая, не вязкая жидкость, в которой не действуют никакие силы за исключением сил, возникающих от гидравлического давления и переноса количества движения. Ньютоновы законы полагаются справедливыми. Эта жидкость переплетается с очень тонкими дискретными вихревыми трубками, ориентированными во всевозможных направлениях. Для целей нашей статьи мы будем рассматривать эти трубки либо как классические вихревые нити, либо как пустотелые вихревые сердечники. Предполагается, что кратчайшее расстояние между трубками велико по сравнению с размерами сечения трубки.

В качестве удобного способа сделать видимым элемент объема этой среды, вообразим ящик, пронизанный насквозь во всех направлениях иглками так, что ни одна из них не слишком близка к другой. Если теперь наполнить ящик вязкой жидкостью и заставить все иглки вращаться вокруг собственных осей, то вокруг каждой иглки возникнет вихревое движение. Это движение, раз начавшись, будет сохраняться и при уничтожении вязкости. Дальше можно представить себе, что все эти иглки либо убираются, либо превращаются в жидкость. В первом случае среда обладает пустотелыми вихрями с сердечниками, а во втором — она имеет классические вихревые трубки. Жидкость, находящаяся вне вихревых сердечников или трубок, находится в циклическом невращательном движении. Теперь трубки оказываются гибкими, и так как для них невозможно оставаться прямолинейными в таком окружении без внутренней опоры, то они приобретают вращательное движение, которое и сохраняется, как свойство среды. В невозмущенном состоянии среда не обладает никакими преимущественными направлениями. Это состояние, которое предполагается устойчивым, называется нейтральным.

В качестве завершающего этапа процесса визуализации представим себе, что число трубок, пронизывающих ящик, увеличивается, а диаметры трубок уменьшаются так, чтобы сохранялось малое

отношение диаметров трубок к расстояниям между трубками до тех пор, пока индивидуальные трубки станут неразличимыми. Теперь эта система выглядит, как континуум, в котором неразличимы вариации скорости, ускорения и давления от трубки к трубке. Эта среда, в которой отдельные эффекты законов гидродинамики теряются в осредняющих эффектах большого числа трубок, и есть вихревая губка в форме, задуманной Кельвином и Фицджеральдом.

Упругость и дрейф. Основное свойство вихревой губки Бернулли, как механической модели распространения света, это то, что каждый вихрь давит на соседние, так что возмущение, например изменение положения вихря, распространяется сквозь среду. Можно убедиться, что упругость этой среды более похожа на упругость обычных тел, чем могло показаться с первого взгляда.

Рассмотрим изменение из нейтрального состояния, в котором ицик и жидкость удлинены в одном направлении x и сокращены вдоль y и z для того, чтобы сохранить объем, причем концы трубок, как предполагается, следуют движению стенок. Стенки, перпендикулярные x , содержат больше концов трубок на единицу площади, чем в нейтральном состоянии; а так как давление близ сердечников низко, то среднее давление на эти стенки менее, чем раньше — состояние, которое можно рассматривать, как растяжение по сравнению с нейтральным состоянием. Наоборот, остальные четыре стенки находятся под давлением.

Наличие сдвигающих напряжений можно вывести из этого примера на основании соображений равновесия, но полезно рассмотреть сдвиг, исходя из первичных принципов. Рассмотрим единичную трубку, которая пересекает поверхность S , ограничивающую объем V , под углом, отличным от 90° . Перенос количества движения через эту поверхность в объем V имеет и нормальную и касательную к S составляющие, так что существуют нормальная и касательная силы, действующие на S . Из соображений симметрии легко показать, что направление касательной силы совпадает с проекцией части трубки, внешней по отношению к V , на S . Эта сила имеет то же самое происхождение, что и вихревая вязкость в теории турбулентности, но отличается от нее, потому что отсутствие вязкости позволяет касательной силе существовать неопределенно долго. Таким образом, истинная прочность на сдвиг является результатом вихревого движения.

В нейтральном состоянии сдвигающие усилия, действующие на поверхность от многих трубок, взаимно уничтожаются, но в напряженных состояниях это не всегда так. На рис. 1 представлены несколько трубок в элементе объема: а) в нейтральном состоянии, б) в состоянии растяжения нормального к поверхности и в) при растяжении вращением.

Очевидно, что в случае в имеется результирующая сдвигающая сила вправо, действующая на среду ниже S . Для такого действия необходима как деформация, так и вращение от нормального положения; в случае а вращение не произведет сдвига вследствие изотропии.

Деформации, которые мы здесь рассмотрим, достаточно малы, так что при разложении в ряд функций напряжения нам понадобятся только первые члены деформации, и мы считаем справедливым закон Гука. Ради простоты, мы пренебрегаем изменениями массовой плотности, которые могут быть результатом растяжения

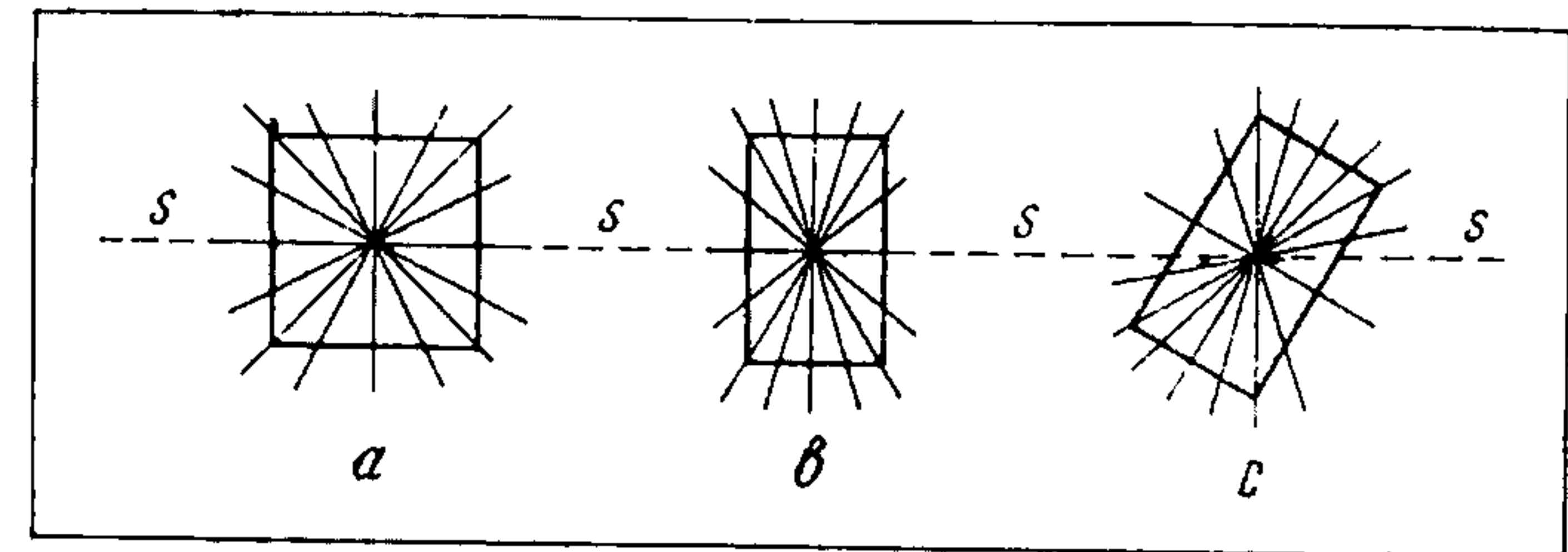


Рис. 1. Элемент объема, показанный символически:

а — в нейтральном состоянии; б — деформированный при растяжении, нормальном к поверхности и с — деформированный при растяжении и повернутый

пустотелых вихревых сердечников и изменениями плотности трубок (длины трубки на единицу объема). Эти условия требуют, чтобы расходимость смещений среды была равна нулю.

Наличие обычных соотношений напряжения — деформация позволяет воспользоваться некоторыми результатами теории упругости. Для упругой среды со смещением D , для которого расходимость $\text{div } D$ равна нулю.

$$G \text{curl curl } D + \rho \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где G и ρ , соответственно¹, — модуль сдвига и плотность.

Равновесие имеет место, когда $\text{curl } D$ невращателен. Примером может служить цилиндрическое смещение:

$$D_x = (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad D_y = D_z = 0.$$

Так как $\text{curl curl } D$ равно нулю, это — одно из состояний равновесия. Интересным в этом примере является то, что при таком смещении трубки искривляются.

Изолированная изогнутая трубка не остается стационарной, потому что кривизна приводит к тому, что скорость на вогнутой стороне трубки оказывается большей, чем на выпуклой, а потому она создает соответственно пониженное давление на вогнутой стороне. Эта скорость сначала ускоряет первоначально стационарную трубку по направлению к вогнутой стороне, но как только трубка приобретает скорость, возникает подъемная сила, которая ускоряет трубку в боковом направлении в сторону движения жидкости на вогнутой стороне. Эта подъемная сила оказывается достаточно большой, чтобы преодолеть градиент давления поперек трубки. В результате получится боковое смещение в положении трубки. Это движение имеет трансляционный компонент и налагающийся

¹ S. Timoshenko and J. N. Goodier. Theory of Elasticity. N. Y., 2nd ed., p. 452.

на него вращательный компонент¹. Последний не создает направляющего эффекта в среднем, и мы его игнорируем. Трансляционный компонент этого движения называется дрейфом. Для малых искривлений дрейф пропорционален кривизне (см. приложение 2).

В цилиндрическом смещении жидкость находится в равновесии, так что трубки также должны быть в равновесии. Кривизна трубок, которая приводила бы к дрейфу, если бы трубки были изолированными, должна поэтому компенсироваться структурными изменениями. Форма трубок в деформированном состоянии создает микроскопические течения и градиенты давления, которые и нейтрализуют действие кривизны. Это имеет место для любого смещения, для которого как $\text{div } D$, так и $\text{curl curl } D$ равны нулю.

Кривизна трубки, которая не сопровождается структурными изменениями и, следовательно, остается некомпенсированной, создает дрейф. Некомпенсированная кривизна вызывается только дифференциальными вращениями, так как только в случаях движений твердого тела получается кривизна, не сопровождаемая структурными изменениями. До тех пор, пока трубки следуют движению жидкости, поведение среды является упругим в классическом смысле; но когда трубки дрейфуют относительно жидкости, уравнение (1) неполно, так как в нем нет учета дрейфа.

III. Уравнения Максвелла

Теперь мы можем сделать наш описательный анализ среды более определенным. Обозначим прочность на вращение каждой трубки через κ , где $2\pi\kappa$ — циркуляция вокруг трубки. Для указания направления циркуляции введем вектор \mathbf{x} и выберем это направление так, чтобы оно совпадало с пальцами правой руки, охватывающей трубку, а большой палец был бы направлен по \mathbf{x} . Величина κ предполагается одинаковой для всех трубок. Дрейф трубки пропорционален ее кривизне; коэффициент пропорциональности (коэффициент дрейфа) обозначим через α . Трубка в нейтральной среде занимает среднее положение; боковое смещение от этого положения обозначим через ξ . Тогда дрейф можно записать в виде $d\xi/dt$. Единица длины дрейфующей трубки оказывает на жидкость тягу $2\pi\kappa r \xi$, причем эта величина является также подъемной силой. Плотность трубки обозначим через L . В приложении I показано, что для некоторых целей трубки можно разлагать как векторы; этим упрощением мы теперь и воспользуемся.

Когда трубки разлагаются на их векторные компоненты, то плотность трубки вдоль каждого направления есть $1/2 L$, так как среднее значение направляющегося косинуса для сферически симметричного распределения равно $1/2$. На рис. 2 элемент среды, первоначально прямолинейный, изогнут смещением D . Вращения элементов 1 и 2, определенные в этих местах, равны $1/2 \text{curl } D$, как показано стрелками.

Кривизна элемента вдоль прямой, перпендикулярной к оси вращения, есть разность во вращениях элементов 1 и 2, деленная

¹ L. M. Milne-Thomson. Theoretical Hydrodynamics. N. Y., 1951, 2nd ed., p. 230.

на расстояние между ними и, следовательно, она имеет величину $1/2 \text{curl curl } D$. Трубка, лежащая внутри куска, с таким вращением, как на рис. 2, смещается в плоскость рисунка и вправо со скоростью ξ , превышающей кривизну в α раз. Дрейфующая трубка единичной длины оказывает на жидкость тягу $2\pi\kappa r \xi$ в направлении

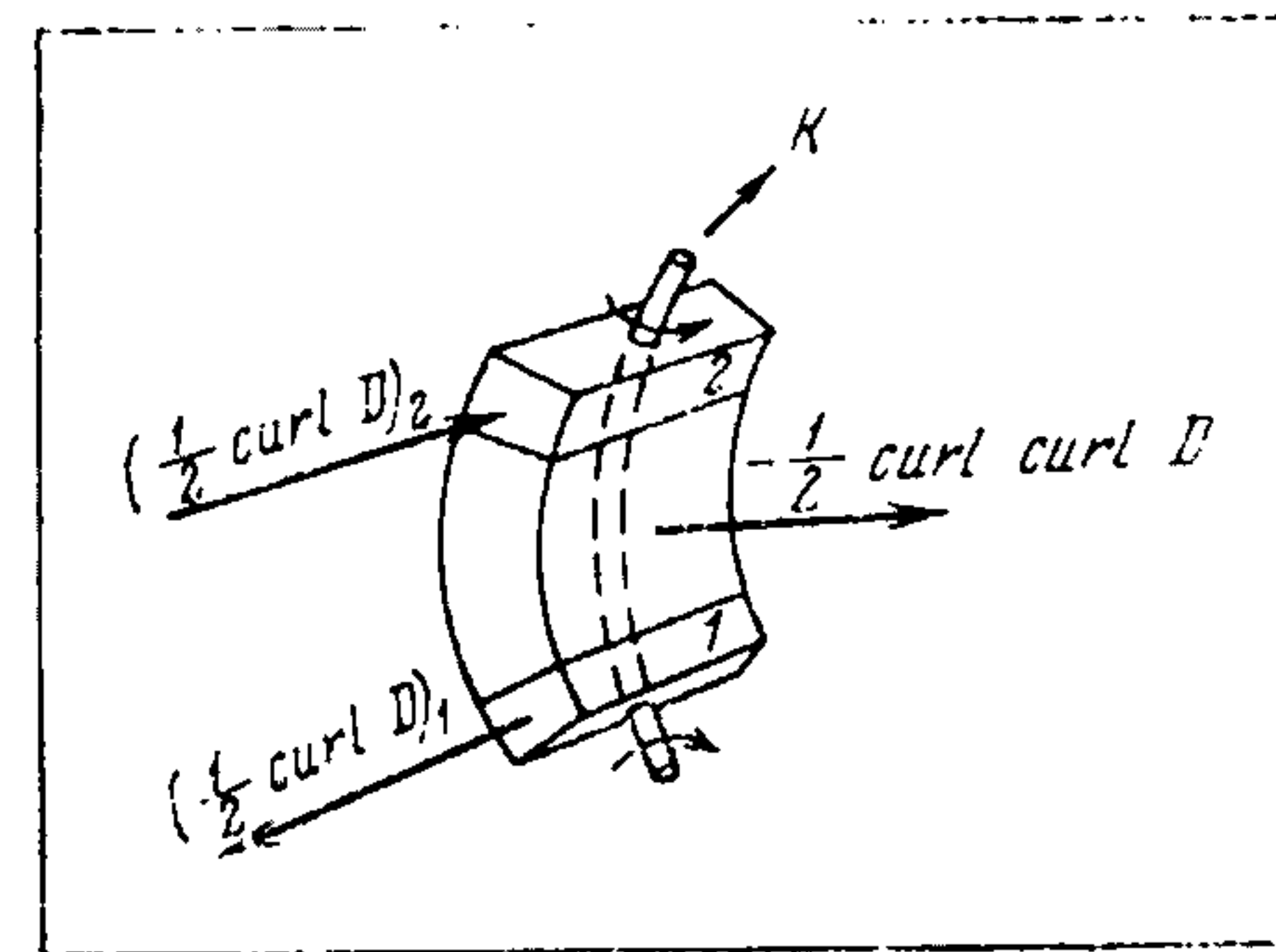


Рис. 2. Элемент объема, искривленный при дифференциальном вращении

$d\xi/dt \times \mathbf{x}$, так что эту тягу можно выразить как $2\pi r d\xi/dt \times \mathbf{x}$ на единицу длины. Если разложить трубки вдоль $\text{curl } DD$, curl curl и нормально к этим направлениям, то только последняя часть приобретет некомпенсированную кривизну. Их плотность равна $1/2 L$ на единицу объема. Тяга на единицу объема, создаваемая дрейфом, равна

$$F = -2\pi\kappa r \left(\alpha \frac{1}{2} \text{curl curl } D \right) \left(\frac{1}{2} L \right) = -\frac{1}{2} \pi\kappa r \alpha L \text{curl curl } D. \quad (2)$$

Знак минус получается от того, что $\text{curl curl } D$ противоположно кривизне по направлению. Сравнение с (1) дает соотношение $F = 1/2 \pi\kappa r \alpha L$. Так как тяга на единицу длины трубки равна $2\pi r d\xi/dt \times \mathbf{x}$, то тягу на единицу объема F можно записать в виде

$$F = 2\pi (d\xi/dt \times \mathbf{x}) \left(\frac{1}{2} L \right) = \pi r L d\xi/dt \times \mathbf{x}. \quad (3)$$

Подставляя это выражение для F в (2), получим

$$d\xi/dt \times \mathbf{x} = -\frac{1}{2} \alpha \text{curl curl } D. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим криволинейный интеграл от F по замкнутой плоской кривой C (рис. 3). Трубки, перпендикулярные к плоскости

рисунка, показаны в сечении кривыми стрелками для обозначения направления циркуляции, причем за положительное направление принято направление против часовой стрелки. Из предыдущих рассуждений ясно, что если некомпенсированная кривизна такова, что трубка 1 дрейфует в C , то трубка 2 имея противоположную циркуляцию, будет дрейфовать из C . Подъемная сила на каждую трубку направлена вдоль $-F$, а тяга на жидкость направлена вдоль F .

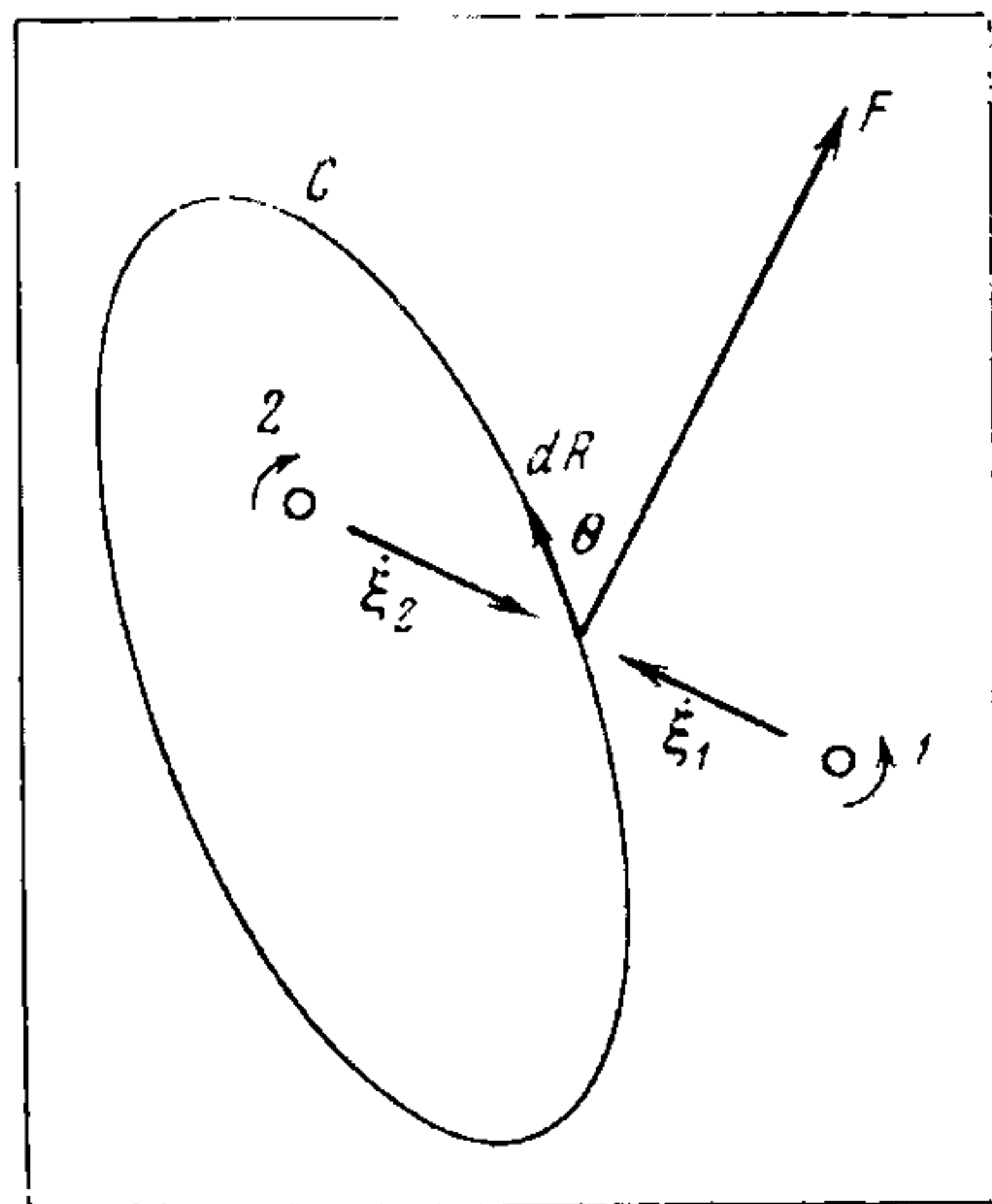


Рис. 3. Трубки, дрейфующие через кривую C .

Из рис. 3 ясно, что если F должно сохранять преобладающее направление против часовой стрелки, то трубки с положительной циркуляцией будут дрейфовать внутрь C , а трубки с отрицательной циркуляцией будут покидать C , увеличивая таким образом результирующую положительную циркуляцию. Следовательно, криволинейный интеграл F вокруг C связан со скоростью изменения результирующей циркуляции вокруг C . На рис. 3 элемент длины дуги dr обозначен через F и представлена плоскость (плоскость рисунка), по отношению к которой дрейфующие трубки имеют нормальные составляющие. Число положительных трубок, пересекающих dr влево в единицу времени, в $\xi dr \cos \theta$ раз больше числа положительных трубок на единицу площади. Число отрицательных трубок, покидающих C , такое же самое. Отрицательная трубка, покидающая C , есть та же самая в отношении циркуляции C , что и положительная входящая трубка. Компоненты трубки в плоскости рисунка не вносят никакой доли в циркуляцию C . Каждая трубка внутри C вносит 2π единиц циркуляции в C , а так как плотность разлагаемых трубок в направлении, нормальном к рисунку, есть $1/2 L$, то скорость изменения циркуляции вокруг C

равна

$$\partial/\partial t (\text{circ } C) = \oint 2\pi \left(\frac{1}{2} L\right) (\xi dr \cos \theta).$$

На основании (3), учитывая, что $d\xi/dt$ нормально к κ , можно записать

$$F dr = \pi \kappa L \xi dr \cos \theta,$$

так что

$$\partial/\partial t (\text{circ } C) = 1/\rho \oint F dr.$$

По мере того как размеры контура C становятся малыми (однако недостаточно малыми, для того чтобы были различимы индивидуальные трубки), эти члены, разделенные на площадь, охватываемую C , приближаются к компоненту, нормальному плоскости рисунка

$$\partial/\partial t (\text{curl } q) = 1/\rho \text{curl } F, \quad (5)$$

где q — макроскопическая скорость среды (в отличие от микроскопической скорости жидкости).

Теперь напомним q в виде dD/dt и перегруппируем члены в (5). Принимая во внимание (2), получаем

$$\begin{aligned} \text{curl } F &= \rho \text{curl } \partial^2 D/\partial t^2, \\ F &= -G \text{curl } \text{curl } D. \end{aligned} \quad (6)$$

За исключением некоторых деталей, относящихся к дрейфу, эти уравнения представляют расчлененную форму (1). Теперь определим два новых вектора для того, чтобы ввести дрейф явным образом (выбор символов предусматривает возможность аналогии с электромагнитными полями, как это следует из дальнейшего); пусть из уравнения (3)

$$\partial E/\partial t = k_1 (\pi \rho L d\xi/dt \times \kappa) = k_1 F$$

и $B = k_2 \text{curl } D$, где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Теперь уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \text{curl } \partial E/\partial t &= -(k_1 \rho/k_2) \partial^2 B/\partial t^2, \\ \text{curl } B &= (k_2/k_1 G) \partial E/\partial t. \end{aligned}$$

Если предположить, что установившиеся поля отсутствуют, то интегрирование по времени первого из этих уравнений и приравнение к нулю дает аналог вихревых уравнений Максвелла для свободного пространства

$$\begin{aligned} \text{curl } E &= -(k_1 \rho/k_2) \partial B/\partial t, \\ \text{curl } B &= (k_2/k_1 G) \partial E/\partial t \end{aligned} \quad (7)$$

Так как k_2 и k_1 произвольны, то можно выбрать $k_2 = \rho k_1$, и тогда получим

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, \\ \text{curl } \mathbf{B} &= (1/c^2) \partial \mathbf{E} / \partial t, \end{aligned} \quad (8)$$

где $c^2 = G/\rho$ — квадрат волновой скорости.

Из этого факта, что \mathbf{B} есть вихрь вектора, получаем

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (8a)$$

На основании (4) получаем $\text{div } d\mathbf{E}/dt = 0$ или $\text{div } \mathbf{E}$ не зависит от времени. Так как мы предположили, установившиеся поля отсутствуют, то для рассматриваемых частных случаев должно быть

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (9)$$

Если выбрать k_1 безразмерным, то $d\mathbf{E}/dt$ будет иметь размерность силы на единицу объема, а \mathbf{E} — размерность импульса на единицу объема. Так как $\text{curl } \mathbf{D}$ безразмерен, то \mathbf{B} имеет размерности k_2 , которые при специальном выборе, сделанном для получения уравнения (8), представляют размерность массовой плотности. Волновая скорость должна быть независимой от выбора k_1 и k_2 — факт, который подтверждается уравнениями (7).

IV. Заключение

Было показано, что поперечное движение трубок относительно жидкости получается как результат смещений, индуцирующих некомпенсированную кривизну. Это исключает необходимость в «холостых колесах» и «упругих ячейках» максвелловской модели¹. Вместе с тем поляризация, вращения и дифференциальные вращения получают естественным путем, заменяя гипотезу гидростатической устойчивости Мак-Келлога. Как было показано в настоящей статье, уравнения Максвелла также удовлетворяют модели Бернулли, свободной от большей части уродливых особенностей моделей Максвелла и Мак-Келлога.

Симметрию вихревых уравнений Максвелла в том виде, как они применяются к вихревой губке, легко истолковать физически. Первое из уравнений (8), аналог закона Фарадея, утверждает, что накопленная завихренность, создаваемая дрейфом, определяет скорость вращения среды; второе уравнение утверждает, что дифференциальное вращение определяет дрейф. Очевидно, дрейф и сопутствующие ему структурные изменения являются теми свойствами вихревой губки, которые резко отличают ее от упругих твердых тел. У последних члены, соответствующие \mathbf{E} $d\mathbf{E}/dt$, отсутствуют.

Так как эти представления не могут быть проверены наблюдением, то они не обладают физической реальностью. Цель на-

стоящей статьи не в том, чтобы предположить, что Вселенная наполнена эфиром со свойствами, описанными в этой статье. Однако эта статья трактует об эфире и, следовательно, относится к истории развития физики.

Для того чтобы рассматривать задачи математической физики, часто необходимо и почти всегда полезно использовать модель, основное значение которой именно в том, что она полезна в рассматриваемом случае. В этом отношении рассматриваемые понятия относятся к теоретической физике. Следует упомянуть, что польза этой модели не исчерпывается выводом уравнений Максвелла.

Приложение 1.

Векторная природа трубок

Для некоторых целей можно разлагать длины трубок подобно векторам — метод, полезный для наглядности.

Длинный круговой цилиндр с циркуляцией $2\pi\kappa$ и поперечной скоростью ξ в жидкости с плотностью ρ подвергается действию подъемной силы $2\pi\kappa\rho\xi$ на единицу длины. И, наоборот, этот цилиндр развивает тягу в противоположном направлении такой же величины на жидкость. Рассмотрим трубку длиной l , где $l = il_x + jl_y + kl_z$, причем направление совпадает с направлением κ . Пусть $d\xi/dt$ — скорость дрейфа. Только компонента $d\xi/dt$, нормальная к l , связана с тягой f , т. е. $f = 2\pi\kappa\rho d\xi/dt \times l$.

Рассмотрим теперь тягу, создаваемую трубкой длиной l_y вдоль оси y с вертикальным дрейфом ξ и другую трубку длиной l_z вдоль оси z с горизонтальным дрейфом. Комбинированная тяга параллельна оси x и по величине равна $2\pi\kappa\rho(\xi_y l_z - \xi_z l_y)$, т. е. точно равна компоненте x силы f . Поэтому отрезки трубок можно разлагать подобно векторам для расчетов тяги, создаваемой дрейфом.

Индукцированная скорость в точке P , создаваемая элементом объема dV в Q с завихренностью ζ_Q , равна $dq_P = (dV/4\pi r^3) \times \zeta r$, где r — вектор, направленный из Q в P . Для элемента длиной $d\mathbf{l}$ круговой вихревой трубки радиуса a и циркуляции $2\pi\kappa$ произведение $\zeta_Q dV$ можно записать в другой форме, заметив, что угловая скорость трубки равна $1/2 \zeta_Q$, так что скорость на поверхности трубки равна $1/2 \zeta_Q a$. Но эта скорость равна также κ/a , что учитывая, что $dV = \pi a^2 d\mathbf{l}$, дает

$$\zeta_Q = (2\kappa/a^2), \quad \zeta_Q dV = (2\kappa/a^2) \pi a^2 d\mathbf{l} = 2\pi\kappa d\mathbf{l}.$$

Так как $d\mathbf{l}$ можно разложить, то отсюда следует, что скорость, индуцируемая элементом вихревой трубки, такая же самая, как и скорость, индуцируемая ее компонентами.

Когда все элементы трубки в единице объема разложены вдоль x , y , z , то длина разложенной трубки вдоль каждой координаты составляет половину полной длины трубки в этом объеме. Это следует из того факта, что для сферически симметричного распределения единичных векторов среднее значение каждого направляющего косинуса равно $1/2$.

¹ E. Whittaker, см. сноску 1 на стр. 247.

Приложение 2.

Кинематика изогнутых трубок

Как было показано¹, изолированное вихревое кольцо кругового сечения с хорошим приближением перемещается со скоростью

$$v = \frac{1}{2} Kc \left[\ln(8/ac) - \frac{1}{4} \right],$$

где c — кривизна кольца, а a — радиус поперечного сечения в предположении, что этот радиус мал по сравнению с радиусом кольца. Направление v совпадает с направлением $\kappa \times c$, где c — векторная кривизна. Вторым членом в скобках можно пренебречь, так как и a , и c крайне малы по сравнению с единицей.

Рассмотрим теперь сечение трубки с кривизной c . Если c достаточно мало, то индуцированная скорость жидкости в этом сечении, происходящая от отдаленных частей трубки, будет оказывать пренебрежимо малое действие, так что скорость продвижения будет почти такой же, как и у кругового вихревого кольца той же кривизны. Ради простоты рассмотрим трубки, направленные вдоль оси y с малой кривизной c по отношению к положительной оси x . Эти трубки будут смещаться в направлении отрицательных z со скоростью v . Если добавить к c малое увеличение кривизны Δc также вдоль оси x , то скорость станет

$$v + \Delta v = \frac{1}{2} \kappa (c + \Delta c) \ln [8/a (c + \Delta c)].$$

Если Δc достаточно мало, то можно пренебречь степенями $\Delta c/c$ высшими, чем первая, и разложить правую часть в виде

$$\begin{aligned} v + \Delta v &= \frac{1}{2} \kappa c \ln(8/ac) + \left[\frac{1}{2} \kappa \ln(8/ac) \right] \Delta c = \\ &= v + \alpha' \Delta c, \text{ где } \alpha' = \frac{1}{2} \kappa \ln(8ac). \end{aligned}$$

В нейтральной среде v столь же часто отрицательна, как и положительна, так что макроскопические направляющие эффекты в среднем равны нулю. Кривизна c для различных трубок различна, а также различна для одного и того же элемента трубки в различные моменты времени, так что необходимо воспользоваться средним значением для α' , которое определяется как коэффициент дрейфа α . Если к каждой трубке добавляется кривизна Δc в том же самом направлении, то можно, после взаимного уничтожения членов v , написать

$$\Delta v = \alpha \Delta c.$$

Скорость Δv в направлении $-z$ определяется как дрейф. Поскольку тяга, создаваемая этой скоростью, одинаково направлена для всех трубок, она создает макроскопический направляющий эффект.

¹ H. Lamb. Hydrodynamics, 6th ed., p. 241 (обозначения несколько изменены).

Приложения

Джемс Клерк Максвелл

Наука захватывает нас только тогда, когда, заинтересовавшись жизнью великих исследователей, мы начинаем следить за историей развития их открытий.

Максвелл

Его отец, Джон Клерк, принявший фамилию Максвелл, принадлежал к знатному шотландскому роду Клерков из Пеникуика. Среди представителей этого рода были горнопромышленники, купцы, политические деятели, музыканты, поэты, судьи... Членом коллегии адвокатов числился и сэр Джон, но, по его словам, он «питал неприязнь к грязным адвокатским делишкам» и юриспруденцией не занимался. Молодость его прошла в Эдинбурге, бывшем тогда средоточием культурной жизни Шотландии, за что его несколько выпендренно именовали «Северными Афинами». Сэр Джон любил путешествовать, вел дневники наблюдений, был отличным метальщиком ядра. С необычным для человека его круга интересом следил он за развитием промышленности, за техническими новшествами (особенно в области паровых машин) и даже сам ставил эксперименты. Так, он пытался сконструировать воздуходушные мехи, дающие постоянный ток воздуха. Он посещал заседания Эдинбургского Королевского общества и опубликовал несколько научных статей на темы прикладного характера. После смерти матери сэр Джон женился на дочери судьи шотландского адмиралтейства Кей, находившегося в дружеских отношениях с самим Вальтером Скоттом. Франсеза была старше мужа на шесть лет. Женщина хозяйственная, предприимчивая, решительная, она была близка ему и по духу. В частности, она разделяла его тягу к деревенской жизни. После того как умерла их маленькая дочь, они решили покинуть Эдинбург. В свое время сэр Джон унаследовал старое поместье Миддлби — на западном побережье, в двух днях езды от столицы. Оно состояло из фермы и вересковой пустоши, каменистую землю покрывали мхи, но Максвеллы верили, что создадут здесь райский уголок. Часть земли обменяли, прикупили новой. Построенный по проекту хозяина двухэтажный, из темно-серого камня дом стоял на возвышенности, около того места, где ручей, вытекавший из торфяника, впадал в Ор. На склоне, у ручья, разбили сад. Так Миддлби превратилось в Гленлар — «берлога в узкой долине». Холмистые берега Ора были покрыты лесом; купы деревь-