показал Гельмгольц, так же неразрушимо, как и уверенность наша в неразрушимости каждой частицы материи.

Если подобного рода теория верна или даже если она правдоподобна, то наша идея материи может войти в наше сознание через опыты и с такими системами вихрей, которые мы называем телами и которые, однако, являются не субстанциями, а движениями субстанций; более того, полученное таким образом представление о материи как субстанции, обладающей инерцией, в действительности можно применить к этой жидкости, вихри в которой представляют движение, хотя никаких доказательств существования этой жидкости, кроме вихревого движения в некоторых ее частях, наш опыт не дает.

Утверждали, что метафизические спекуляции отошли уже в прошлое и что физическая наука уничтожила их. Однако и в наше время нет оснований опасаться прекращения обсуждения категорий бытия, и спекулятивные упражнения так же продолжают увлекать смелые умы, как увлекали их еще в дни Фалеса.

О математической классификации физических величин

Первый этап развития физической науки состоит в отыскании системы величин, относительно которых можно предположить, что от них зависят явления, рассматриваемые данной наукой. Второй ступенью является отыскание математической формы соотношений между этими величинами. После этого можно рассматривать эту науку как науку математическую. Проверка же ее законов осуществляется путем теоретического исследования условий, при которых могут быть возможно более точно измерены некоторые величины, а также путем последующего экспериментального осуществления этих условий и действительного измерения этих величин.

Лишь благодаря имевшим место за последнее время успехам науки мы познакомились с таким большим количеством физических величин, что стала желательна их классификация.

Одна весьма очевидная классификация величин основана на классификации тех наук, в которых они встречаются. Так, температура, давление, плотность, удельная теплота, скрытая теплота и т. д. суть величины, встречающиеся в теории воздействия теплоты на тела.

Но та классификация, о которой я сейчас говорю, основана на математической или формальной аналогии между различными величинами, а не предмете, к которому они относятся. Так, отрезок прямой линии, сила, скорость вращения и т. д. суть величины, различные по своей физической природе, но сходные по своей математической форме. Мы можем различать эти два способа классификации, называя первую физической, а вторую математической классификацией величин.

Знакомство с математической классификацией величин чрезвычайно полезно как человеку, ведущему оригинальные исследования, так и человеку, просто изучающему науку. Наиболее показателен тот случай, при котором мы узнаем, что величины определенной системы находятся в новой науке в тех же математических соотношениях друг с другом, что и величины некоторой другой системы в старой науке, в которой эта система была уже сведена к математической форме и проблемы которой были уже разрешены математиками.

Так, когда Моссоти заметил, что Фарадей доказал аналогичность некоторых величин, относящихся к электростатической индукции в диэлектриках, и некоторых величин, относящихся к магнитной индукции в железе и других телах, он смог воспользоваться математическими исследованиями Пуассона, относящимися к магнитной индукции, переведя лишь их с магнитного языка на язык электричества и с французского на итальянский.

Другой пример, далеко не столь очевидный, — это пример аналогии, существующей между вопросами притяжения и вопросами установившейся теплопередачи, впервые отмеченный сэром Вильямом Томсоном. Пользуясь ею, мы можем применить многие результаты, полученные Фурье для теплоты, при объяснении электрического распределения и все результаты, полученные Пуассоном для электричества, для объяснения проблем теории теплоты.

Но ясно, что все аналогии такого рода основаны на значительно более глубоких принципах и что если бы мы имели настоящую математическую классификацию величин, то мы могли бы сразу открыть аналогию между любой представленной нам системой и другими системами величин в уже известных нам науках. Таким образом мы не теряли бы времени, так как пользовались бы математическими трудами тех, кто уже в основном разрешил проблемы того же рода.

Все величины могут быть объединены в одном отношении, а именно: в том, что их можно определить при помощи двух факторов. Первый фактор есть числовая величина, а второй — единица того же рода, как и определяемая.

Таким образом, можно сказать, что число управляет всем миром количеств, и четыре действия арифметики можно рассматривать как полное снаряжение математика.

Положение и форму, считавшиеся ранее в исключительном распоряжении геометров, остроумным построением координатных осей, положенных им в основу своих операций, Декарт заставил подчиниться законам арифметики.

Со времени этого большого шага, сделанного математикой, все величины рассматривались одинаковым образом и представлялись при помощи чисел или символов, означающих числа. Таким образом, как только какая-нибудь наука полностью приводилась к математической форме, предполагалось (по крайней мере в мире неспециалистов), что решение проблем в этой науке как умственный процесс производится без помощи каких бы то ни было физических идей этой науки.

Мне не приходится говорить, что это неправильно и что при решении физических проблем математикам оказывает большую помощь знание науки, в которой эта проблема встречается.

В то же время я думаю, что для успеха науки как в области открытий, так и в области распространения ее было бы весьма полезно, если бы обращали больше внимания непосредственно на классификацию величин.

Чрезвычайно важное различие было проведено Гамильтоном, разделившим величины, с которыми он имел дело, на скаляры, полностью изображаемые одной числовой величиной, и векторы, требующие для своего определения трех числовых величин.

Изобретение исчисления кватернионов есть шаг вперед к познанию величин, связанных с пространством, сравнимое по своему значению лишь с изобретенной Декартом системой координат. Идеи этого исчисления, отвлеченные от его действий и символов, могут быть чрезвычайно полезны во всех областях науки.

Можно предположить, что другим важным шагом вперед в развитии науки явилось бы изобретение метода, столь же подходящего для представления динамических величин. Подобно тому как наши представления о физической науке становятся более жизненными при замене чисто числовых идей картезианской математики геометрическими идеями гамильтоновской математики, так в более высоких науках идеи могли бы получить еще более высокое развитие, если бы их можно было выразить на языке, столь же соответствующем динамике, насколько гамильтоновский соответствует геометрии.

Другим преимуществом этой классификации является то, что она руководит нами в применении четырех правил арифметики. Мы знаем, что можно применять законы сложения и вычитания только в том случае, если мы имеем дело с величинами одного и того же рода. В некоторых случаях мы можем перемножать или делить одну величину на другую, но в других случаях результат этого действия не имеет никакого рационального значения.

Профессор Ранкин указал, что физическая величина, называемая энергией или работой, может быть представлена в виде произведения двух множителей многими различными способами.

Размерность этой величины $\frac{ML^2}{T^2}$, где L, M, и T представляют собой конкретные единицы длины, массы и времени. Если мы разложим энергию на два множителя, из которых один будет заключать L^2, то оба множителя будут скалярами. С другой стороны, если каждый из них будет заключать L, то они оба будут векторами. Сама энергия всегда скалярная величина.

Так, если мы возьмем в качестве множителей массу и квадрат скорости, как это делается в обычных определениях живой силы или кинетической энергии, то оба множителя — скаляры, хотя один из них, квадрат скорости, не имеет своего определенного физического значения.

Другим разложением на, по-видимому, скалярные множители является разложение на объем и гидростатическое давление, хотя мы должны рассматривать здесь объем не сам по себе, но как величину, подверженную возрастанию и уменьшению. Это изменение объема может происходить лишь на поверхности и вызывается изменениями поверхности в направлении нормали, так что оно есть не скалярная, а векторная величина. Также и давление — хотя в абстрактном представлении гидростатическое давление и скалярно — нужно представить себе приложенным к поверхности. Таким образом оно становится направленной величиной, или вектором.

Разложение энергии на векторные множители дает результаты, всегда допускающие удовлетворительную интерпретацию их. Один из сомножителей представляют себе

как тенденцию к какому-то изменению, а другой как само изменение.

Так, в элементарном определении работы ее рассматривают как произведение силы на путь, по которому движется точка приложения силы, взятый в виде проекции на направление силы. На языке кватернионов она есть скалярная часть произведения силы на перемещение.

Можно рассматривать эти два вектора, силу и перемещение, как типичную пару векторов, произведение которых представляет своей скалярной частью некоторую из форм энергии.

Так, вместо разложения кинетической энергии на множители: «масса» и «квадрат скорости»,— из которых последний не имеет смысла, мы можем разложить ее на «момент» и «скорость» — два вектора, которые в динамике материальной частицы имеют одинаковое направление, но в обобщенной динамике могут иметь различные направления, так что, беря их произведение, нужно помнить правило нахождения его скалярной части.

Но общий принцип разложения энергии на два множителя особенно ясно виден, когда мы имеем дело со сплошными телами и величинами, распределенными в пространстве.

Когда мы рассматриваем энергию как нечто существенно присущее телу, мы можем измерять интенсивность количеством, заключенным в единице объема. Это, конечно,— величина скалярная.

Из двух составляющих ее множителей один относится к единице длины, а другой — к единице площади. Это дает, с моей точки зрения, чрезвычайно существенное различие между векторными величинами.

Векторы, относимые к единице длины, я буду называть силами, употребляя, как мы увидим, это выражение в несколько обобщенном смысле. Операция интегрирования составляющей силы в направлении некоторой линии для каждого элемента этой линии всегда имеет физическое значение. В некоторых случаях результат интегрирования независим от пути между ее начальной и конечной точками. Результат называется тогда потенциалом.

Векторы, относимые к единице площади, я буду называть потоками. Операция интегрирования составляющей потока, перпендикулярной к поверхности, для каждого элемента поверхности всегда имеет физический смысл.

В некоторых случаях результат интегрирования по замкнутой поверхности не зависит, с некоторыми ограничениями, от положения поверхности. Результат выражает тогда количество некоторого рода вещества, либо существующего внутри поверхности, либо вытекающего из нее, соответственно физической природе потока.

В физике во многих случаях сила и поток всегда имеют одно и то же направление и пропорциональны друг другу. Поэтому одним часто пользуются для измерения другого; их обозначения часто вырождаются в одно, и оба эти представления смешиваются. Один из самых важных математических результатов открытия веществ, обладающих различными физическими свойствами в различных направлениях, заключался в том, что он позволил провести различие между силой и потоками, показывая нам, что их направления могут быть различны.

Так, в обычной теории жидкостей, в которой рассматривается лишь движение, которое можно непосредственно обнаружить, мы можем с одинаковым успехом определить ее через единицы длины — как число единиц длины, пройденных частицей за единицу времени. Или мы можем определить ее через единицы площади как объем жидкости, проходящей через единицу площади за единицу времени. Определенная первым способом, она принадлежит к категории сил; определенная вторым — к категории потоков.

Но если мы попытаемся развить более полную теорию жидкостей, учитывающую наличие диффузии, при которой в одном и том же месте две жидкости обладают различными скоростями, или если мы примем учение о том, что в силу теплоты молекулы жидкости находятся в состоянии движения, то, хотя мы и можем дать определение скорости отдельной молекулы, выражая ее через единицу длины, мы не можем этого сделать для самой жидкости; и единственный способ определения движения жидкости — это рассмотрение ее как потока и измерение последнего количеством жидкости, протекающей сквозь единицу площади.

Это различие еще более необходимо, когда мы обращаемся к теплоте и электричеству. Тепловой или электрический поток нельзя себе даже представить иначе, как в виде количества, протекающего в заданное время сквозь заданную площадь. Для того чтобы составить представление о скорости, в смысле, соответствующем каждому из этих

агентов, нам нужно было бы представить себе тепло и электричество как непрерывную материю, имеющую известную плотность.

Мы должны поэтому рассматривать эти количества как потоки. Соответствующие им силы: в случае теплоты — степень изменения температуры, в случае электричества — степень изменения потенциала.

Я достаточно сказал для установления различия между силами и потоками. В статическом электричестве результирующая сила в точке есть степень изменения потенциала, а поток — величина, которую до сих пор смешивали с силой и которую я назвал электрическим смещением.

В магнетизме результирующая сила также является степенью изменения потенциала, а поток есть то, что Фарадей называет магнитной индукцией и что измеряется, как это показал Томсон, силой, приходящейся на единичный полюс, помещенный в узкой щели, прорезанной перпендикулярно к направлению намагничения магнита. Я не буду задерживать Общество разъяснением этих величин, но должен коротко установить природу отношения силы и потока в его самой общей форме.

Когда один вектор является функцией другого вектора, отношение первого ко второму является вообще кватернионом, представляющим собой функцию второго вектора.

Когда второй вектор изменяется лишь по величине, а первый все время ему пропорционален и остается постоянным по направлению, мы имеем важный случай *линейной* функции. Первый вектор тогда называется линейной векторной функцией второго.

Если α, β, γ — декартовы компоненты первого вектора, а a, b, c, — компоненты второго, то

$$\alpha = r_1 a + q_s b + p_2 c,$$
$$\beta = p_3 a + r_2 b + q_1 c,$$
$$\gamma = q_2 a + p_1 b + r_3 c,$$

где коэффициенты p, q, r, постоянны. Когда все p равны соответствующим q, функция называется самосопряженной. Она может быть тогда представлена геометрически как соотношение между радиусом-вектором из центра эллипсоида и перпендикуляром на касательную плоскость.

Можно заметить, что даже здесь, где мы, казалось бы, достигли чистых сфер науки, не запятнанных физическими приложениями, один из векторов необходимо есть линия, тогда как другой определяется как нормаль к плоскости, как и во всех других, уже упомянутых парах векторов *.

Другое различие между физическими векторами основано на ином принципе и разделяет их на векторы, определяемые по отношению к вращению. На замечательные аналогии между этими двумя классами векторов указал Пуансо в своем труде о движении твердого тела. Но наиболее замечательная иллюстрация этих аналогий основана на двух различных точках зрения, с которых можно рассматривать связь между электричеством и магнетизмом.

Гельмгольц показал нам в своей знаменитой работе о вихревом движении, как провести аналогию между электромагнитными и гидро-кинетическими явлениями, в которых магнитная сила представлена скоростью жидкости, родом поступательного движения, а электрический ток представлен вращением элементов жидкости. Он не предлагает этого в качестве объяснения электромагнетизма, так как хотя эта аналогия и совершенна по форме, но динамика обеих систем чрезвычайно различна.

Согласно Амперу и его исследованиям, электрические токи рассматриваются, однако, как род поступательного движения, а магнитная сила — как сила, зависящая от вращения. Я вынужден согласиться с этой точкой зрения, так как электрический ток связывается с электролизом и другими явлениями, в которых, несомненно, мы имеем поступательное движение, тогда как магнетизм связан с вращением плоскости поляризации света, которое, как показал Томсон, заключает в себе действительное вращательное движение.

Гамильтоновский оператор ∇, примененный к любой векторной функции, превращает ее из поступательного движения во вращение или из вращения в поступательное движение, в зависимости от рода вектора, к которому он применяется.

В заключение я предложу на рассмотрение некоторые математические термины, служащие для обозначения результатов гамильтоновского оператора ∇. Я буду очень признателен тому, кто даст мне какой-нибудь совет по этому вопросу, так как я чувствую, что моя способность к установлению наименований очень слаба и что она может с успехом осуществляться лишь в сотрудничестве с другими.

$$\nabla \text{ есть операция } i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z},$$

где i, j, k — единичные векторы, параллельные соответственно x, y, z. Результатом двукратного повторения на любом объекте этой операции является хорошо известный оператор (Лапласа):

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Нахождением квадратного корня этой операции мы обязаны Гамильтону; но большинство данных здесь приложений и развитие теории этого оператора дано профессором Тэтом и напечатано в ряде статей, из которых первая помещена в «Proceedings of the Royal Society of Edinburgh» от 28 апреля 1862 г., а наиболее полная «О теоремах Грина и других, связанных с ними» — в «Transactions of the Royal Society of Edinburgh», 1869—1870 г.

Прежде всего я предлагаю назвать результат ∇^2 (оператор Лапласа) с обратным знаком *концентрацией* величины, к которой она применена.

Действительно, если Q есть скалярная либо векторная величина, являющаяся функцией положения точки, и если мы возьмем интеграл Q по объему шара радиуса r, то, разделив его на объем шара, мы получим $\overline{Q}$, *среднее* значение Q внутри шара. Если Q_0 есть значение Q в центре шара, то при малом r

$$Q_0-\overline{Q}=Cr^2\,\nabla^2 Q,$$

т. е. значение Q в центре шара превышает среднее значение Q внутри шара на величину, зависящую от радиуса и от $\nabla^2 Q$. Поэтому раз $\nabla^2 Q$ означает избыток значения Q в центре над его средней величиной внутри шара, то я назову его концентрацией Q.

Если Q — величина скалярная, то и концентрация ее — скаляр. Так, если Q — электрический потенциал, то $\nabla^2 Q$ есть плотность вещества, создающего потенциал.

Если Q — векторная величина, то Q_0 и $\overline{Q}$ — векторы и $\nabla^2 Q$ — также вектор, выражающий собой избыток равномерно распределенной силы Q_0, приложенной ко всему

* Вопрос о линейных уравнениях в кватернионах был развит проф. Тэтом в нескольких сообщениях Эдинбургскому Королевскому обществу.

веществу шара, над результирующей действительной силы Q, действующей на все части шара.

Рассмотрим затем гамильтоновский оператор ∇. Применим его сначала к скалярной функции P. Величина ∇P есть вектор, указывающий направление, в котором P наиболее быстро уменьшается, и измеряющий степень этого уменьшения. Я решаюсь, с большой осторожностью, называть это падением (*slope*) P. Ламе называет *величину* выражения ΔP «первым дифференциальным параметром» P, но *направлением* вектора ΔP он не интересуется. Нам нужен термин, имеющий векторный характер и который, одновременно указывая направление и величину, в то же время не употреблялся бы еще в другом математическом смысле. Я взял на себя смелость, распространить обычный смысл слова падение (*slope*), взятого из топографии, где по отношению к трехмерному пространству употребляются лишь две независимые переменные.

Если σ изображает векторную функцию, то $\Delta\sigma$ может одновременно заключать скалярную и векторную части, которые могут быть написаны как $S\nabla\sigma$ и $V\nabla\sigma$.

Я предлагаю назвать скалярную часть *конвергенцией*[1] σ потому, что если описать вокруг любой точки замкнутую поверхность, то поверхностный интеграл σ, выражающий действие вектора σ, рассматриваемого как втекание потока через поверхность, равен объемному интегралу $S\nabla\sigma$ по заключенному в этой замкнутой поверхности пространству. Поэтому я считаю, что конвергенция векторной функции является очень подходящим названием для действия этой векторной функции, заключающегося в продвижении представляемого им объекта внутрь, к одной точке.

Но $\nabla\sigma$ имеет обычно еще и векторную часть, и я, с величайшей осторожностью, предлагаю назвать этот вектор *кэрлом* (curl) или *версией* (version) первоначальной векторной функции[1].

Он изображает направление и величину вращения вещества, представляемого вектором σ. Я искал термин, который не подразумевал бы движения, как слова «вращение», «вихрь», «кружение», или же указывал бы, как слово «скручивание», на спиральное или винтообразное строение, которое совершенно несвойственно природе вектора.

[1] Теперь употребляют термины «дивергенция», «вихрь» (или «ротор»).– *Прим. ред.*

Если мы вычтем из общей величины векторной функции σ ее значение σ_0 в точке P, то оставшийся вектор $\sigma-\sigma_0$ будет направлен, в случае чистой конвергенции, к P; в случае чистого кэрла — по касательной вокруг P, а в том случае, когда имеется и конвергенция и кэрл, он будет направлен по спирали.

Справедливы следующие утверждения:

Падение скалярной функции не имеет кэрла.

Кэрл векторной функции не имеет конвергенции.

Конвергенция падения скалярной функции есть ее концентрация.

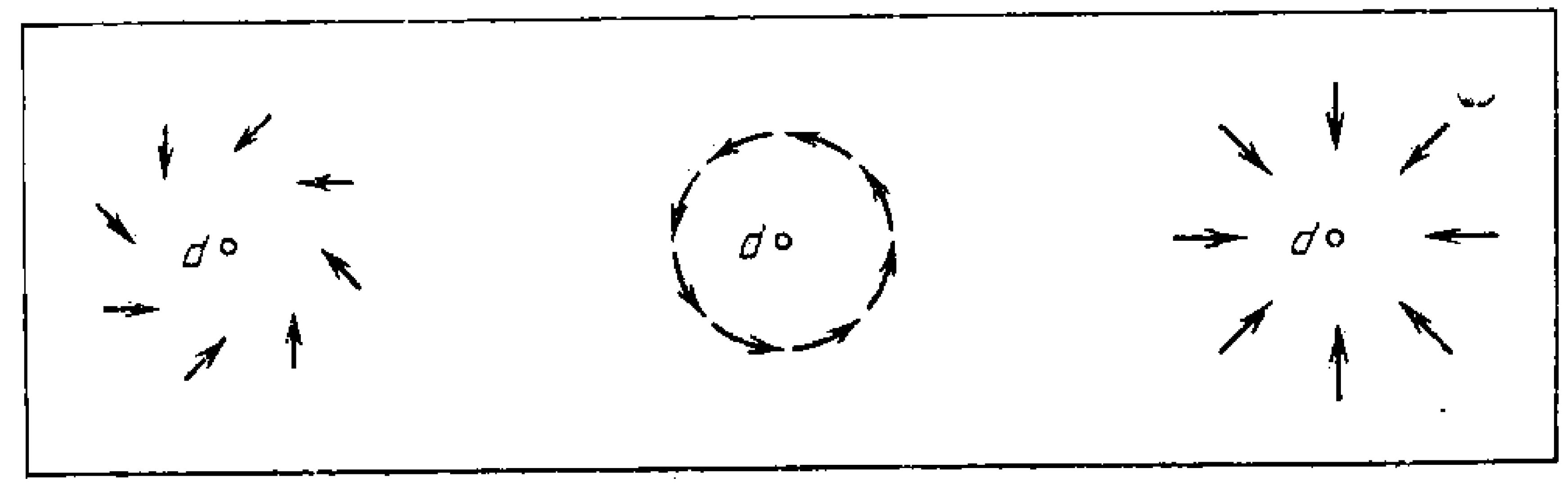

Рис. 1

Концентрация векторной функции есть падение ее конвергенции и кэрл ее кэрла.

Выражения в кватернионах, переводом которых являются все приведенные выше утверждения, были даны проф. Тэтом в его статье в «Proceedings of the Royal Society of Edinburgh» от 28 апреля 1862 г. Наиболее же полный математический разбор оператора ∇ можно найти в весьма содержательной статье проф. Тэта «О теории Грина и других, связанных с нею теоремах» («Transactions of the Royal Society of Edinburgh», 1870) и в другой статье в «Proceedings of the Royal Society of Edinburgh» за 1870—1871 гг., стр. 318.