ИЗ ПРИМЕЧАНИЙ Л. БОЛЬЦМАНА К РАБОТЕ МАКСВЕЛЛА «О ФИЗИЧЕСКИХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ»*)

Приведенный здесь ряд опубликованных в 1861 и 1862 гг. отдельных связанных друг с другом работ содержит все уравнения Максвелла по электромагнетизму, включая уравнения для движущихся тел.

Я мог бы сказать, что последователи Максвелла в этих уравнениях, пожалуй, ничего кроме букв не переменили. Однако это было бы слишком. Конечно, не тому следует удивляться, что к этим уравнениям вообще что-то могло бы быть добавлено, а гораздо более тому, как мало к ним было добавлено. Все же вы найдете (говоря вслед за Герцем), что здесь отсутствуют некоторые из рудиментарных, затрудняющих последовательное построение понятий, которые были введены Максвеллом впервые только в его «Трактате» для того, чтобы увязать свою теорию со старыми представлениями.

Переворот, который вообще сделали эти максвелловы уравнения не только во всем учении об электричестве и оптике, но также и в наших воззрениях на существо и задачи физической теории **), слишком известен для того, чтобы было необходимо о нем специально говорить. Результаты переведенного здесь цикла работ, следовательно, должны быть причислены к важнейшим достижениям физической теории. В удивительном противоречии с этим находится то, что к относительно сложным и самим Максвеллом иногда скорее только намеченным, чем строго проработанным, механическим проблемам, составляющим главное содержание этого цикла работ, отнеслись невнимательно даже самые ярые защитники максвелловской теории (по крайней мере в Германии).

Иначе как мог утверждать даже сам Герц, что Максвелл при обосновании своей теории исходит из концепции непосредственно действующих на расстоянии сил, которая в данной работе так резко отрицается и обсуждается только в «Трактате»? Герц вначале даже проглядел и уравнения, которые Максвелл здесь приводит для электромагнитных действий в движущихся средах...

Никто не усмотрит доказательства правильности максвелловых уравнений в механических представлениях этого цикла исследований, никто в настоящее время не отдаст предпочтения выводу максвелловых уравнений из этих механических представлений перед позднее усвоенным самим Максвеллом выводом последних из более общих механических идей или перед методом Герца, который уравнения вовсе не выводит, а рассматривает их просто как феноменологическое описание фактов. Открытие, однако, произошло при посредстве механических представлений. Максвелл нашел свои уравнения в результате стремления доказать при помощи механических моделей возможность объяснения электромагнитных явлений, исходя из концепций близкодействия, и только эти модели впервые указали путь к тем экспериментам, которые окончательно и решительно установили факт близкодействия и в настоящее время образуют наиболее простой и наиболее достоверный фундамент найденных другими путями уравнений.

Поэтому мне кажется, что этот цикл исследований, в которых Максвелл впервые пришел к своим уравнениям, принадлежит к наиболее интересному, что только знает история физики, и именно как раз по причине своей оригинальности, по причине отличия его метода от всех применявшихся ранее и позднее, а также вследствие той скромной простоты, с которой Максвелл показывает, с каким трудом он постепенно продвигался вперед и достиг наиболее абстрактной и наиболее своеобразной теории, которую только знает физика, пользуясь совершенно специальными и конкретными представлениями, связанными с тривиальными задачами обычной механики.

Трудности при переводе технических терминов были меньшими, чем при переводе первой работы Максвелла об электромагнетизме*), так как здесь Максвелл уже в большей степени переходит к применяемой в настоящее время терминологии. Перевод тех выражений, которые Максвелл переносит из своего первого труда, естественно, оставлен таким же, каким был там. Некоторые

*) «Примечания» Больцмана являются приложением к немецкому изданию перевода труда Максвелла (Лейпциг, 1898, стр. 85—146). Перевод на немецкий язык труда Дж. К. Максвелла «О физических силовых линиях» сделан самим Л. Больцманом, поэтому когда он в примечаниях говорит о «переводчике», то имеет в виду самого себя. (*Ред.*)

**) На теоретико-познавательное значение своего исследования указывает сам Максвелл на стр. 158 и 159.

*) См. стр. 11 этого издания. (*Ред.*)

совершенно короткие примечания, которые, как мне казалось, требуются для ясности, я внес прямо в текст, где они выделены путем заключения в прямые скобки.

---

1. (Стр. 107.) В качестве тела, на которое производится действие (Aufpunkt), при построении силовых линий поля тяготения следует мыслить себе материальную точку единичной массы, при построении магнитных силовых линий—точечный северный полюс единичной силы, для электрических силовых линий—концентрированное в одной точке единичное количество электричества.

Действующая на такой полюс магнитная или на такое же количество электричества электрическая сила тогда часто упрощенно называется магнитной или электрической силой (напряженностью поля).

2. (Стр. 109.) Здесь Максвелл уже определенно имеет в виду возможность опытов, которые смогут решить вопрос о выборе между теорией близкодействия и теорией дальнодействия.

3. (Стр. 110.) Последнее имеет силу, пожалуй, только тогда, когда мы пренебрегаем членами, имеющими порядок величин квадрата амплитуды.

4. (Стр. 113.) В английской системе координат или в системе координат виноградных гроздьев *) вихри вращаются в том направлении, в котором, обходя вокруг начала координат, можно по кратчайшему пути перейти от оси x к оси y, если эти вихри соответствуют силовой линии, которая имеет направление z, т. е. представляет магнитную силу, которая движет в этом направлении северный полюс.

В настоящем цикле исследований Максвелл всегда применяет английскую систему координат, которую я сохраняю также в своих примечаниях, в то время как в других работах он применял французскую систему координат **). По этой причине уравнения (9) этой работы имели там вид:

$$a_2=\frac{d\beta_1}{dz}-\frac{d\gamma_1}{dy} \text{ и т. д.},$$

что после введения новых обозначений перешло бы в

$$4\pi p=\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy},$$

---

*) См. примечание 30 на стр. 101 настоящего издания.

**) См. «О фарадеевых силовых линиях», стр. 11 настоящего издания. (*Ред.*)

так как там через α_1, β_1, γ_1 обозначались величины, которые теперь обозначаются α, β, γ, а величина a_2 соответствовала той, которую сейчас мы должны обозначить через $4\pi p$. Относительно множителя 4π сравни примечание 31 к работе «О фарадеевых силовых линиях».

5. (Стр. 114.) То-есть, чтобы движение происходило так, что жидкие массы, находящиеся в соответствующих частях объема, через соответствующий промежуток времени каждый раз снова находились бы в соответствующих частях объема, необходимо, и при соответствующих начальных скоростях и пограничных условиях достаточно, чтобы разности давлений в соответствующих точках находились в отношении $m^2n:1$. Это вытекает также непосредственно из того, что гидродинамические уравнения остаются неизменными, когда все длины умножаются на l, все времена — на $\frac{l}{m}$, все плотности — на n и все действующие на единицу площади давления—на m^2n. Внешние силы, действующие на внутренние части жидкости, при этом во внимание не принимаются. Если таковые учитывать, то действующая на единицу жидкой массы внешняя сила должна была бы быть помножена на $\frac{m^2}{l}$.

6. (Стр. 115.) Пусть дана какая-либо жидкость, в которой около параллельных осей вращаются расположенные рядом друг с другом вихри. Средняя плотность и скорость на окружности каждого вихря пусть равны единице. Давление на периферии вихря равно p_1', среднее давление в направлении осей вихрей $p_2'=p_1'+C$. Пусть теперь все линейные размеры увеличены в отношении $1:l$. Плотности в соответствующих точках будем считать увеличенными в ρ раз, а последовательность состояний во времени так измененной, что скорости при сохранении их направлений будут увеличены в v раз; l, ρ и v—произвольные величины, но каждая из них, само собой разумеется, во всей системе имеет одинаковое значение. В новой системе, следовательно, ρ есть средняя плотность, а v—скорость на окружности вихря. Если тогда в новой системе p_1 есть давление на периферии вихря, p_2—среднее давление на оси, то согласно доказанному в предложении I $p_1=p_2+C\rho v^2$, причем Максвелл вместо C пишет $\frac{\mu}{4\pi}$.

Приведем для лучшего усвоения сказанного некоторые примеры. Для простоты будем считать сечение вихрей круговым, жидкость несжимаемой и во всей своей массе имеющей одинаковую плотность. Вообразим себе, прежде всего, вихрь какой-нибудь длины, сечение которого является кругом радиуса a и ось которого перпендикулярна к сечению.

Каждая частица жидкости пусть описывает с постоянной скоростью окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси и центр которой лежит на оси. Скорость на периферии вихря пусть будет v; внутри же вихря пусть она будет для всех точек, которые находятся на равном расстоянии r от оси, одной и той же, равной $vf\left(\frac{r}{a}\right)$, причем f может быть любой функцией, которая исчезает при $r=0$, а для значения $r=a$ имеет величину, равную единице. Можно ввести систему неподвижных координат, ось z которой является осью вихря, и рассчитывать составляющие скорости каждой частицы жидкости в направлениях x и y. Тогда нетрудно убедиться, что гидродинамические уравнения Эйлера для не имеющей трения несжимаемой жидкости для каждой такой функции f выполняются и что давление на расстоянии r от оси равно:

$$(1)\qquad p=p_0+\rho v^2\int_0^r\left[f\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2\frac{dr}{r},$$

причем p_0 есть давление на оси, ρ — плотность жидкости.

Давление на периферии вихря будет:

$$(2)\qquad p_1=p_0+\rho v^2\int_0^1[f(x)]^2\frac{dx}{x}=p+\rho v^2\int_0^a\left[f\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2\frac{dr}{r}.$$

Представим себе теперь цилиндрический объем жидкости V, имеющий сечение q, в котором рядом друг с другом находятся n вихрей, обладающих только что описанными свойствами, оси которых параллельны оси цилиндра V. Жидкость, находящаяся между вихрями, должна находиться в покое, а следовательно, в ней будет господствовать то же самое давление p_1, как и на периферии вихрей. Среднее осевое давление мы находим следующим путем. Не пересекаемая вихрями часть сечения q имеет площадь $q-\pi na^2$ и в ней господствует давление p_1. Каждый вихрь пересекает сечение q по кругу радиуса a, на площади которого давление переменно. Если из каждого такого круга вырезать концентрическое круговое кольцо, которое ограничено окружностями с радиусами r и $r+dr$, то в каждом таком круговом кольце господствует давление p, данное формулой (1), и совокупная площадь всех таких лежащих в сечении q круговых колец есть $2\pi nr\,dr$. Если мы теперь каждый элемент поверхности сечения q помножим на господствующее там давление и все таким образом полученные произведения сложим, то из этого будет следовать:

$$(q-\pi na^2)\,p_1+2\pi n\int_0^a pr\,dr=qp_1-2\pi n\rho v^2\int_0^a r\,dr\int_r^a\left[f\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2\frac{dr}{r}.$$

Интегрируя по частям (между нулем и a) последний член получим:

$$qp_1-\pi n\rho v^2\int_0^a r\,dr\left[f\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2=qp_1-n\pi a^2\rho v^2\int_0^1[f(x)]^2x\,dx;$$

разделив на q, найдем для среднего осевого давления величину

$$(3)\qquad p_2=p_1-\frac{n\pi a^2}{q}\rho v^2\int_0^1[f(x)]^2x\,dx.$$

Если, следовательно, каждый такой вырезанный из максвелловой среды маленький цилиндр, имеющий ось, параллельную силовым линиям, приблизительно имел бы свойство только что рассмотренного цилиндра, то тогда максвеллова величина была бы равна:

$$\mu=4\pi\frac{n\pi a^2}{q}\rho\int_0^1[f(x)]^2x\,dx.$$

Здесь πa^2 есть сечение вихря, $\frac{q}{n}$ в некотором смысле представляет часть поперечного сечения цилиндра, на которую в среднем приходится один вихрь.

Полная живая сила содержащейся в цилиндре объема V части одного вихря есть:

$$(4)\qquad \pi l\rho v^2\int_0^a\left[f\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2r\,dr=\pi a^2l\rho v^2\int_0^1[f(x)]^2x\,dx,$$

если l — длина цилиндра, и поэтому $V=ql$. Вся содержащаяся в цилиндре живая сила вихрей есть, следовательно:

$$(5)\qquad V\frac{n\pi a^2}{q}\rho v^2\int_0^1[f(x)]^2x\,dx=\frac{\mu v^2}{4\pi}V.$$

Если, как выражается Максвелл, каждый вихрь вращается с равномерной угловой скоростью, т. е. без относительных смещений своих частиц так, как если бы вращающаяся масса жидкости была бы твердым телом, тогда скорость пропорциональна r, а следовательно, $f(x)=x$, а отсюда согласно уравнению (4)

$$(6)\qquad \mu=\frac{n\pi^2a^2\rho}{q}.$$

Если к тому же вихри расположены так, что точки пересечения их осей с плоскостью q образуют вершины квадрата с длиной сторон, равной $2a$, то можно это сечение q разложить на одни квадраты с длиной сторон $2a$, каждый из которых описан вокруг окружности, по которой сечение q пересекается вихрем. Такой квадрат представлял бы часть $\frac{q}{n}$ общего поперечного сечения, которая в среднем выпадает на один вихрь; следовательно, мы имели бы $\frac{q}{n}=4a^2$ и отсюда согласно уравнению (6)

$$\mu=\frac{\pi^2\rho}{4}, \quad p_1-p_2=\frac{\pi}{16}\rho v^2=0{,}1963\rho v^2.$$

Это было бы, однако, не наиболее плотным распределением вихрей. Наиболее плотное расположение вихрей можно получить, если сечение q разложить на правильные шестиугольники, из которых каждый описан вокруг окружности, по которой вихрь пересекает поперечное сечение q. Площадь каждого такого шестиугольника представляла бы тогда ту часть общего поперечного сечения, которая выпадает на один вихрь, а следовательно, была бы равна $\frac{q}{n}$. Так как сторона каждого из таких шестиугольников имела бы длину $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, то, следовательно, $\frac{q}{n}=2\sqrt{3}a^2$, а отсюда

$$\mu=\frac{\pi^2\rho}{2\sqrt{3}}, \quad p_1-p_2=\frac{\pi}{8\sqrt{3}}\rho v^2=0{,}2267\rho v^2.$$

Это наибольшее значение, которое может иметь μ, если жидкость однородна и несжимаема и вихри вращаются с равномерной угловой скоростью в виде прямолинейных круговых цилиндров. Величина, даваемая Максвеллом (см. его уравнение [1a]):

$$p_1-p_2=0{,}25\,\rho v^2,$$

соответствовала бы тому случаю, что между вихрями не находилось бы никаких промежутков, заполненных невращающейся жидкостью. Это представление будет полезно позднее при введении движущихся между вихрями промежуточных частиц. Однако в этом случае вихри не могут иметь круговых сечений. Частицы, находящиеся на их периферии, должны тогда описывать многоугольные пути (например, правильные шестиугольники), а для таких случаев интегрирование гидродинамических уравнений значительно более сложно.

7. (Стр. 116.) Обозначения l, m, n, естественно, сейчас имеют другое значение, чем раньше. На стр. 128 буква l применяется в третьем значении, а буква ρ опять имеет другое значение, которое на стр. 134 еще раз изменяется. Так же часто меняет свое значение и буква p.

Упругие силы определяются так: через точку среды мы проводим три малых плоских элемента поверхности площади ω, нормальных к трем направлениям осей координат. Тогда частицы среды, прилегающие к одной стороне элемента поверхности, например, нормального к оси абсцисс, действуют на частицы, прилегающие к другой стороне этой поверхности с некоторой силой*), которая в направлении осей координат имеет составляющие ωp_{xx}, ωp_{xy}, ωp_{xz}. Эти составляющие действуют в положительных направлениях осей координат, если рассматривать силу, как исходящую от частиц, расположенных на стороне элемента поверхности, обращенной к положительному направлению осей координат, и которая действует на частицы, расположенные на стороне, обращенной к отрицательному направлению осей координат. Таким образом, если p_{xx}, p_{yy} и p_{zz} положительны, то они обозначают силу тяги.

8. (Стр. 116.) Выберем направление силовых линий в данном месте в качестве направления оси абсцисс новой прямоугольной системы координат и обозначим новые направления осей координат греческими буквами. Тогда

$$(1)\qquad \begin{cases} p_{\xi\xi}=\frac{1}{4\pi}\mu v^2-p_1, \quad p_{\eta\eta}=p_{\zeta\zeta}=-p_1, \\ p_{\xi\eta}=p_{\eta\zeta}=p_{\xi\zeta}=0. \end{cases}$$

Сила упругости, действующая на единицу площади, перпендикулярную к старой оси абсцисс, должна в новых координатах иметь составляющие Ξ, H, Z. Тогда будем иметь согласно известным формулам для упругой силы, действующей на наклонную по отношению к осям координат (в данном случае по отношению к новым осям координат) площадь:

$$\Xi=p_{\xi\xi}\cos(x\xi)+p_{\xi\eta}\cos(x\eta)+p_{\xi\zeta}\cos(x\zeta)=$$
$$=\left(\frac{1}{4\pi}\mu v^2-p_1\right)\cos(x\xi),$$
$$\mathrm{H}=p_{\xi\eta}\cos(x\xi)+p_{\eta\eta}\cos(x\eta)+p_{\eta\zeta}\cos(x\zeta)=-p_1\cos(x\eta),$$
$$\mathrm{Z}=p_{\xi\zeta}\cos(x\xi)+p_{\eta\zeta}\cos(x\eta)+p_{\zeta\zeta}\cos(x\zeta)=-p_1\cos(x\zeta).$$

Так как, с другой стороны, p_{xx}, p_{xy} и p_{xz} являются составляю-

*) Эта сила, будучи разделена на ω, должна называться упругой силой на единицу площади, действующей на поверхность, нормальную к оси абсцисс.

щими той же самой силы в направлениях старых осей координат, то мы имеем:

$$p_{xx}=\Xi\cos(x\xi)+\mathrm{H}\cos(x\eta)+\mathrm{Z}\cos(x\zeta)=\frac{1}{4\pi}\mu v^2\cos^2(x\xi)-p_1,$$

$$p_{xy}=\Xi\cos(y\xi)+\mathrm{H}\cos(y\eta)+\mathrm{Z}\cos(y\zeta)=\frac{1}{4\pi}\mu v^2\cos(x\xi)\cos(y\xi),$$

$$p_{xz}=\Xi\cos(z\xi)+\mathrm{H}\cos(z\eta)+\mathrm{Z}\cos(z\zeta)=\frac{1}{4\pi}\mu v^2\cos(x\xi)\cos(z\xi),$$

что сейчас же дает уравнения Максвелла, так как новая ось абсцисс имеет направление силовых линий, а следовательно,

$$\cos(x\xi)=l,\quad \cos(y\xi)=m,\quad \cos(z\xi)=n.$$

Если внутри наполненной вихрями среды построить элемент поверхности, наклоненной по отношению к осям вихрей, то в этом случае нельзя, как это делают для упругого тела, устранить частицы, прилегающие к одной стороне поверхности и заменить их действие на частицы, прилегающие к другой стороне, действием внешних упругих сил. Этим было бы нарушено движение в непосредственной близости элемента поверхности, так как частицы непрерывно перемещаются в результате вращения с одной стороны поверхности на другую. Можно было бы поставить вопрос, не вытекают ли отсюда возражения против применения в неизменном виде уравнений теории упругости к такого рода среде.

9. (Стр. 118.) То, что здесь называется количеством магнитной индукции через поверхность с площадью, равной единице, есть то же самое, что в работе «О фарадеевых силовых линиях» называлось количеством i намагничения в одной точке и что в старой теории называется составляющей магнитного момента на единицу объема, перпендикулярной к этой поверхности *). Общее количество направленной наружу магнитной индукции через замкнутую поверхность есть число линий магнитной индукции, которые возникают внутри последней; оно в 4π раз больше содержащегося в ней количества магнетизма. То, что здесь называется в согласии с обычной терминологией магнитной силой (на единицу магнетизма, напряженность поля) было в работе «О фарадеевых силовых линиях» названо магнитной интенсивностью. Число линий индукции, параллельных осям координат в параллелепипеде с ребрами

*) С точки зрения современной терминологии это истолкование противоречит максвелловской формуле (20), показывающей, что μ—это коэффициент магнитной проницаемости, а не восприимчивости. Однако из дальнейшего текста Больцмана (см., например, стр. 217) видно, что он понятие магнитной индукции употребляет во вполне современном нам смысле. (*Прим. перев.*)

dx, dy, dz, выходящих через обе боковые стороны параллелепипеда, перпендикулярные к направлению оси абсцисс, есть $\mu\alpha\,dy\,dz$ и $\left[\mu\alpha+\frac{d(\mu\alpha)}{dx}\,dx\right]dy\,dz$. Если аналогичное вычисление провести для других боковых сторон, то из этого получится максвеллово уравнение (6).

Ход мыслей Максвелла согласно нижеследующему, повидимому, таков: законы действия магнетизма и электрических токов считаются предварительно известными из опыта; действия сил в среде, которая содержит вихри, расположенные вдоль силовых линий, также находятся путем вычислений. Отсюда прежде всего ставится вопрос, что в такой среде должно соответствовать количеству магнетизма, коэффициенту магнитной проницаемости, электрическому току и так далее, для того чтобы найденные здесь законы совпадали с теми, которые найдены опытным путем. Только во второй части дается ответ на вопрос о том, при помощи какого механизма вихри удерживаются в указанном расположении и каким образом могут быть объяснены наблюдаемые изменения этого расположения во времени.

10. (Стр. 118.) Если мы расположим вихри в среде так, что их оси повсюду будут иметь направление силовых линий магнитного поля и их скорость на периферии будет равна силе поля, если, далее, плотность среды всюду определяется уравнением (4) примечания 6, то выражение Максвелла (6) равно 4π-кратному в каждом элементе объема содержащемуся количеству магнетизма и выражение Максвелла (8) дает магнитную силу, действующую на находящуюся в единице объема магнитную массу.

11. (Стр. 121.) Силовая линия при этом на всем своем протяжении изображает равную силу (единицу силы), так что силовые линии являются тем более плотно расположенными, чем интенсивнее поле. Отсюда, однако, никоим образом не следует, что и количество вихрей, находящихся рядом друг с другом на единице площади сечения, проведенного перпендикулярно к их осям через среду, возрастает в той же мере. Это было бы так только в том случае, если бы при малой и большой напряженности поля скорость на периферии оставалась неизменной.

Тот способ, которым Максвелл пишет уравнения, однако, приводит как раз к противоположному выводу, а именно: он рассматривает зависящую от расположения вихрей величину μ как неизменную для одного и того же тела и считает зависящими от магнитного состояния только величины α, β, γ, так что вихри при слабой и сильной напряженности поля одинаково плотно расположены и лишь их скорости вращения возрастают с возрастанием напряженности поля.

Впрочем, основные результаты Максвелла, повидимому, останутся неизменными даже в том случае, если допустить изменяемость расположения вихрей при различном намагничении (ср. конец примечания 15 и примечание 70).

12. (Стр. 121.) При этом предполагается, что μ есть константа и что не имеется в наличии ни свободного магнетизма, ни электрического тока. Тогда $\frac{d\beta}{dx}=\frac{d\alpha}{dy}$. Если начало координат поместить на одну из силовых линий рис. 5, ось y в их направлении, а ось x в том направлении, в котором приращение магнитной силы является наибольшим, то на оси абсцисс $\alpha=0$, $\frac{d\beta}{dx}$ положительно, а отсюда и $\frac{d\alpha}{dy}$ тоже положительно. Отсюда α на небольшом расстоянии от оси абсцисс на стороне положительных y положительно, на противоположной стороне—отрицательно, а проходящая через начало координат силовая линия так искривлена, что на каждой из этих сторон она отклоняется от оси y в направлении той полуплоскости, в которой абсциссы положительны.

13. (Стр. 122.) Доказательство аналогично доказательству, приведенному в работе «О фарадеевых силовых линиях» (стр. 11 настоящего издания), но только с той разницей, что там применяется французская, а здесь английская система координат. Там $\frac{a_2}{4\pi}$, $\frac{b_2}{4\pi}$ и $\frac{c_2}{4\pi}$ магнитно измеренные составляющие плотности тока, в то время как сейчас p, q и r магнитно измеренные составляющие плотности тока, если составляющие магнитной силы α, β, γ измерены магнитно. Пусть $dx\,dy$ есть элементарный прямоугольник, стороны которого параллельны осям x и y. Северный полюс, сила которого равна единице, пробегающий периферию прямоугольника в положительном направлении, дает на сторонах длины dx этого прямоугольника работу $\alpha\,dx$ и соответственно $-\left(\alpha+\frac{d\alpha}{dy}dy\right)dx$, а на сторонах dy работу—$\beta\,dy$ и соответственно $\left(\beta+\frac{d\beta}{dx}dx\right)dy$. Отсюда полная работа будет $\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)dx\,dy$. С другой стороны, из закона Био-Савара легко доказать, что магнитный полюс, имеющий силу, равную единице, дает работу, равную $4\pi i$, если он в положительном направлении обходит бесконечный прямолинейный ток, и, напротив, работа равна нулю, если общий ток протекает вне описываемой магнитным полюсом замкнутой кривой, i при этом является магнитно измеренной силой тока. Вблизи прямоугольника $dx\,dy$ линии тока могут рассматриваться как бесконечные прямые. Работа будет той же самой, как будто бы имелась составляющая силы тока только в направлении оси z. Тогда полный ток, проходящий через прямоугольник, будет $r\,dx\,dy$, отсюда работа пробегающего периферию прямоугольника полюса равна $4\pi r\,dx\,dy$. Приравнивание обоих найденных для этой работы выражений дает:

$$r=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right).$$

14. (Стр. 124.) Если речь идет об электромагнитных явлениях в какой-либо жидкости, то p_1 это обычное гидростатическое давление в весомой массе жидкости. Если тело твердое, то p_1 есть сила упругости, которая в точности по законам гидростатического давления действует равномерно во всех направлениях; p_1 может быть также и отрицательным, т. е. обозначать растяжение. В чистом эфире эта сила p_1 также должна существовать. Повидимому, здесь, как позднее в теории электромагнитных действий в движущихся телах, Максвелл принимает, что в весомых телах эфир неизменным образом связан с весомой материей, так как он принимает, что обусловленные вихрями силы давления в полной мере действуют на ощутимую материю и приводят ее в движение.

Давление p_1 обозначает также то действие, которое испытывает магнитное тело в намагничивающейся жидкости под влиянием магнитных сил и о котором при обсуждении члена [8a] шла речь.

Пусть однородная магнитная или диамагнитная жидкость находится в неоднородном магнитном поле и пусть она со всех сторон окружена неподвижными стенками. Повсюду в жидкости

$$\frac{d(\mu\alpha)}{dx}+\frac{d(\mu\beta)}{dy}+\frac{d(\mu\gamma)}{dz}=0,$$

$$\frac{d\beta}{dz}=\frac{d\gamma}{dy}, \quad \frac{d\gamma}{dx}=\frac{d\alpha}{dy}, \quad \frac{d\alpha}{dy}=\frac{d\beta}{dx}.$$

Пусть, следовательно, внутри жидкости нет ни истинного магнетизма, ни электрических токов. Тогда согласно (5)

$$\frac{dp_1}{dx}=\frac{\mu}{8\pi}\frac{d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dx}-X \tag{1}$$

с двумя аналогичными равенствами для осей y и z. Если, кроме того, внутри жидкости не действуют никакие внешние силы, т. е. если, например, отвлечься от силы тяготения, тогда $X=Y=Z=0$, откуда

$$p_1=\frac{\mu}{8\pi}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\text{постоянная}.$$

Жидкость, следовательно, находится в состоянии равновесия, но давление в различных местах жидкости различно.

Формула (1) настоящего примечания имела бы место также и в том случае, если бы среда не содержала никаких вихрей, но если бы на каждый элемент объема dV по какой-либо чисто механической причине в трех направлениях координат действовали бы силы (кажущиеся силы дальнодействия)

$$\frac{\mu\, dV}{8\pi}\frac{d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dx}, \quad \frac{\mu\, dV}{8\pi}\frac{d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dz},$$

$$\frac{\mu\, dV}{8\pi}\frac{d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dz}.$$

Как распределение давления, так и действие на погруженное тело были бы тогда такими же, как в намагничивающейся жидкости в неоднородном магнитном поле.

Для ясности рассмотрим в качестве более общего примера в каком-либо магнитном поле жидкость, в которой могут находиться также истинный магнетизм и электрические токи.

Величины X, Y, Z, данные максвелловым уравнением (5) и аналогичными уравнениями для других осей координат, представляют внешние силы, которые должны действовать для того, чтобы каждый элемент объема жидкости находился в равновесии; $X\,dV$, $Y\,dV$, $Z\,dV$ тогда являются силами, которые должны действовать на элемент объема dV для того, чтобы в соединении с силами давления и растяжения, обусловленными вихрями и вообще окружающим эфиром и действующими на эфир, заключенный в этом элементе объема, удерживать последний в состоянии равновесия. Относительно этих сил давления и растяжения Максвелл допускает, что они неизменным образом переносятся на весомую материю элемента объема; p_1 есть общее давление, которое действует в весомой материи и в эфире, который мыслится с нею жестко связанным.

Мы сейчас переходим к тому случаю, когда весомая материя предполагается движущейся; p_1 пусть имеет то же самое значение, как и ранее; $X\,dV$, $Y\,dV$, $Z\,dV$, однако, пусть будут теперь те силы, которые помимо сил, обусловленных окружающим эфиром, еще действуют извне (например, вследствие тяготения) на элемент объема dV жидкости. В рассматриваемом сейчас случае какого-нибудь движения снова имеет силу максвеллово уравнение (5) с аналогичными уравнениями для двух остальных осей координат с той только разницей, что в нем согласно принципу Даламбера вместо трех величин X, Y, Z выступают три величины:

$$X-\rho\frac{du}{dt}, \quad Y-\rho\frac{dv}{dt}, \quad Z-\rho\frac{dw}{dt},$$

в которых u, v, w являются составляющими скорости находящихся в dV частиц жидкости (не в данном месте пространства) и ρ — плотность весомой жидкости. Отсюда для направления оси абсцисс получаются уравнения движения:

$$X-\rho\frac{du}{dt}=\alpha m+\frac{\mu}{8\pi}\frac{d(v^2)}{dx}+\frac{\mu}{4\pi}(\gamma q-\beta r)-\frac{dp_1}{dx}.$$

Естественно при этом предполагается, что движение происходит так медленно, что можно пренебречь индукционными токами, возникающими в результате индукции, диэлектрическими поляризациями и т. д., для которых были бы действительны уравнения (77).

Движение жидкости происходит именно так, как если бы действия эфира не существовало, но в дополнение к действующим извне на dV силам выступали бы еще на каждую единицу объема рассмотренные Максвеллом силы, представленные выражениями (7), [8a], [8b] и (10) текста Максвелла. Эти силы, следовательно, по праву могут быть обозначены как обусловленные эфиром кажущиеся силы дальнодействия. Если, например, X было бы равно отрицательной сумме четырех выражений (7), [8a], [8b] и (10), если бы аналогичное имело место и для Y и Z и если бы весомая жидкость находилась в покое, то мы получили бы:

$$\frac{dp_1}{dx}=\frac{dp_1}{dy}=\frac{dp_1}{dz}=0,$$

а следовательно, p_1 было бы постоянной. Это были бы, следовательно, внешние силы, которые уравновешивали бы кажущиеся силы дальнодействия, а также устраняли все различия в давлении, которые могли бы быть вызваны ими. Указанные различия в давлении являются допущением наличия так называемой магнитострикции.

15. (Стр. 126.) Так как прочие части (конечно, не влияющие) магнитного стержня расположены, начиная от полюса в определенном направлении, то, безусловно, нельзя считать заранее очевидным, что единственный полюс одинаково сильно действует по всем направлениям пространства. Однако Максвелл здесь явно рассматривает это как опытный факт. Тогда φ может быть только функцией r, и из уравнения (19), как известно, следует:

$$\varphi=-\frac{a}{r}, \tag{1}$$

где a является величиной постоянной; другая же аддитивная постоянная несущественна.

Построим вокруг полюса как центра маленький, но по сравнению с размерами самого полюса значительный шар радиуса r. По формуле (18) текста Максвелла общее количество магнетизма, находящееся внутри шара, а следовательно, сконцентрированное в полюсе количество магнетизма равно:

$$\frac{\mu}{4\pi}\int\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)dV,$$

причем интегрирование может быть произведено по всем элементам объема dV внутри шара, так как там, где нет магнетизма, интеграл все равно исчезает. При помощи интегрирования по частям, которое производится совершенно так же, как при доказательстве теоремы Грина, мы находим, что это выражение равно:

$$\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{d\varphi}{dn}\,dS,$$

где интегрировать следует по всем элементам поверхности dS, причем n является нормалью, проведенной наружу от поверхности шара. Для поверхности шара φ уже дано уравнением (1), поэтому последний интеграл имеет значение μa. Величина m в максвелловом уравнении (20) есть, следовательно, полное сконцентрированное в полюсе количество магнетизма, в то время как та же самая буква в формуле (18) обозначала пространственную плотность магнетизма; μ есть произведение плотности ρ среды (эфира), из которой образованы вихри, на численный коэффициент $4\pi C$ (ср. формулу Максвелла [1b]). Для идеального, рассмотренного Максвеллом случая C равно 0,25, для обоих рассмотренных в примечании 6 случаев распределения вихрей оно равно соответственно 0,1963 и 0,2267. Было бы, разумеется, ошибкой считать, что в стандартной среде, для которой предполагается $\mu=1$, плотность эфира должна быть $\frac{1}{4\pi C}$ -кратной плотности воды. Напротив, для стандартной среды именно потому $\mu=1$, что Максвелл считает составляющие силы магнитного поля не пропорциональными, но равными α, β, γ. Уравнение $\mu=1$ имеет, следовательно, следующее значение: если из обеих единиц длины и массы выбрать одну произвольно, а другую, например единицу массы, так, чтобы в стандартной среде плотность эфира была бы равна единице, тогда скорость на периферии вихря будет выражаться тем же самым числом, что и сила магнитного поля. Магнитный полюс 1 при этом опять-таки является тем, который в стандартной среде действует на равный ему полюс с силой 1. Единица силы магнитного поля—это та, при которой на стандартный полюс действует сила, равная 1. Сила же 1 есть та, которая сообщает ускорение 1 не грамму, а принятой единице массы.

Для того чтобы найти уравнение, которое действительно при использовании обычной системы мер, представим себе в стандартной среде два магнитных полюса, обладающих совершенно

одинаковыми свойствами, находящимися на расстоянии r. Функция φ, производные которой по координатам дают значения α, β и γ для каждого полюса, дается выражением (1) этого примечания. В каждом полюсе, следовательно, находится количество магнетизма $m=a\mu$ и сила, с которой они действуют друг на друга, есть $am=\frac{a^2\mu}{r^2}=v^2r^2\mu$, где v есть скорость на периферии вихря, произведенного одним из полюсов, в том месте пространства, где находится другой полюс*). Если интенсивность m обоих полюсов мы измерим в магнитных единицах, то сила, с которой они действуют друг на друга, равна единице силы, помноженной на $\frac{m^2}{r^2}$, т. е. равна

$$\frac{m^2}{r^2}\,\frac{г\cdot см}{сек^2}.$$

Следовательно,

$$v^2\mu=\frac{m^2}{r^4}\,\frac{г}{см\cdot сек^2}.$$

Обозначим через ω периферийную скорость вихрей в поле с измеренной в магнитных единицах напряженностью 1, тогда $v=\frac{\omega m}{r^2}$, откуда

(2) $$\omega^2\mu=4\pi\omega^2C\rho=1\ г\cdot см^{-1}\cdot сек^{-2}.$$

Это—единственное соотношение между абсолютными значениями ω и μ для стандартной среды, которое может быть выведено из всего предыдущего. Однако из всех чисто электромагнитных явлений можно вывести лишь произведение $\omega^2\mu$. Уравнения для последних остаются, следовательно, неизменными, если мы примем для стандартной среды $\mu=1$, а v просто равным измеренной в магнитных единицах напряженности поля. Если бы для стандартной среды была бы дана плотность эфира $\rho=A\ г\cdot см^{-3}$ в обычных единицах и число C, то согласно (2) $\omega=\frac{1\ см}{сек\cdot\sqrt{4\pi CA}}$ при измеренной в магнитных единицах силе поля $1=E=1\ г^{\frac{1}{2}}\times\times см^{-\frac{1}{2}}\cdot сек^{-1}$. Поэтому следовало бы v — скорость на периферии вихрей, измеренную в сантиметрах в секунду, помножить на

*) Скорость v на периферии вихря численно равна силе поля на расстоянии r, т. е. $v=\frac{a}{r^2}$, откуда $\frac{a^2}{r^2}=v^2r^2$. (*Ред.*)

$\sqrt{4\pi CA}\,г^{\frac{1}{2}}\cdot см^{-\frac{3}{2}}$, для того чтобы получить измеренную в магнитных единицах силу поля F, так как величины ω, E, v и F образуют пропорцию (ср. уравнение Максвелла (161)). Напротив, следовало бы измеренную в грамм-сантиметр-секундах величину

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d(\mu\alpha)}{dx}+\frac{d(\mu\gamma)}{dy}+\frac{d(\mu\gamma)}{dz}\right]=m$$

разделить на $\sqrt{4\pi CA}\,г^{\frac{1}{2}}\cdot см^{-\frac{3}{2}}$, для того чтобы получить объемную плотность истинного магнетизма, так как произведение am всегда должно давать обычную механическую силу, действующую на единицу объема.

Так как коэффициент C зависит от того, как плотно расположены вихри, то отнюдь не является безусловно необходимым, чтобы, как это всегда принимает Максвелл, в одном и том же веществе μ было бы всегда постоянным и изменялись бы только v и направление осей вихрей (ср. примечания 70 и 11).

16. (Стр. 128.) Представленное уравнениями (22), (23) и (24) распределение магнитной силы внутри и вне цилиндра может быть получено также непосредственно, если рассчитать по закону Био-Савара проходящие через каждый элемент плоскости сечения цилиндра линии тока (ср. примечание 13). Предполагается, что поток равномерно протекает по всему сечению цилиндра и что его интенсивность измеряется в магнитных единицах, если α, β, γ также измеряются в этих же единицах.

В уравнении (12) первый член исчезает, потому что нигде нет в наличии истинного магнетизма. Второй член компенсируется движением окружающего второй проводник воздуха, которое представлено последним членом, причем принимается, что коэффициент μ в воздухе таков же, как и в проводнике. Предпоследний член исчезает, так как в направлении оси y нет тока. Следовательно, остается только член $-\mu\beta r$.

Так как второй проводник не может сам по себе перемещаться, то произведенное им β не влияет на его собственное движение. Выходит, что под β можно понимать значение произведенной первичным током магнитной силы поля в том месте, где находится второй проводник. Сечения обоих проводников предполагаются малыми, так что можно допустить, что линии тока в первом проводнике имеют абсциссу, равную нулю, во втором токе — абсциссу, равную ρ, а все имеют координату y, равную нулю. Вторая из формул (25) дает отсюда $\beta=\frac{2C}{\rho}$, откуда получаем максвеллово уравнение (26).

17. (Стр. 131.) Здесь Максвелл подробно излагает свои соображения, которые привели его к предложенным им образам и понятиям, а при посредстве последних — к его общим уравнениям.

18. (Стр. 132.) Первые называются планетарными колесами, а вторые — роликами качения или соответственно шариками качения. Первые встречаются, например, в счетной машине Зеллинга; вторые — во всех шарикоподшипниках, например в поворотных кранах, велосипедах и т. д.

19. (Стр. 132.) Скорость полностью находящихся на поверхности частиц вихря, о которых идет речь, равна именно $v=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, в то время как направление их движения перпендикулярно как к прямой с направляющими косинусами l, m, n, так и к оси вихря, направляющие косинусы которой $\frac{\alpha}{v}$, $\frac{\beta}{v}$, $\frac{\gamma}{v}$. Косинус угла между этим направлением движения и осью абсцисс согласно известной формуле аналитической геометрии равен:

$$\frac{n\beta-m\gamma}{v}. \tag{1}$$

Когда ось вихря проходит через начало координат, ее положительная сторона совпадает с положительной осью y, а положительная ось z пересекает элемент поверхности перпендикулярно, так что $\frac{\beta}{v}=n=+1$. Тогда прилегающие частицы вихря движутся в положительном направлении x, так как положительная сторона оси вихря относится к направлению вращения вихря, как положительная ось y относится к вращению по кратчайшему пути от положительного направления z к положительному направлению x. Следовательно, знак в (1) правилен.

20. (Стр. 133.) Это предполагает, что боковые поверхности вихрей повсюду непосредственно прилегают друг к другу, что возможно только тогда, когда сечения вихрей являются многоугольниками (квадратами, правильными шестиугольниками и так далее). Последнему случаю соответствует также и производимый Максвеллом рис. 8.

21. (Стр. 133.) Оси вихрей, следовательно, теперь уже не должны представляться неограниченными, как это допускалось до сих пор, но любая нить вихрей, имеющая произвольную длину, должна быть разделена перпендикулярными к оси поперечными сечениями на ряд отдельных вихрей, имеющих ограниченный объем и определенный центр. Если в этих сечениях вообще находятся промежуточные частицы, то эти последние в лучшем случае движутся круговым движением, но никогда не в определенном направлении. Следовательно, можно представить себе вихри похожими на игральные кости или правильные призмы с шестиугольным сечением, которые заполняют пространство без промежутков и оси которых параллельны осям вращения вихрей. Частицы на периферии должны тогда описывать ломаные под прямыми углами пути. Несмотря на это, Максвелл допускает, что скорость на периферии во всех местах одного и того же вихря повсюду одинакова; это связано с весьма важной для дальнейшего предпосылкой, что расстояние между центрами двух промежуточных частиц всегда неизменно, если только нет деформации тел вихрей, о которых речь будет позднее.

Трудности становятся еще большими, если в том же самом месте вихревого тела вообразить другое магнитное поле, направление которого в какой-то степени наклонено к первоначальному полю. Будет ли теперь всё деление на ячейки изменено или содержимое вихря должно вращаться около оси, которая в какой-то мере наклонена к оси геометрической фигуры вихря? Как может быть совмещено с этим последним представлением постоянство скорости на периферии каждого вихря? Как нам кажется, можно утешаться лишь тем, что при точном расчете средние цифры качественно не слишком будут отличаться друг от друга.

22. (Стр. 133.) Под этим следует понимать какую-то величину, пропорциональную числу промежуточных частиц и измеряющую их количество. Под количеством движения (моментом) комплекса промежуточных частиц следует затем понимать произведение их количества на их скорость.

Примененное Максвеллом слово quantity можно было бы вместо «количество» перевести также словом «масса», но это последнее необходимо было бы понимать в том смысле, в каком говорят о магнитных или электрических массах, а не в механическом смысле сопротивления инерции, которое промежуточным частицам не приписывается; можно даже было бы им приписать массу в механическом смысле, однако по сравнению с массой материи, находящейся в вихревом движении, эта масса при всех обстоятельствах рассматривалась бы как исчезающе малая.

23. (Стр. 133.) Здесь $\rho\, dS$ есть количество промежуточных частиц, которое находится на элементе поверхности dS, разделяющем два вихря. Если распространить сумму $\Sigma \rho\, dS$ на все элементы поверхности объема $\overline{V}$, то получим полное количество промежуточных частиц в $\overline{V}$. Это полное количество равно $\rho' \overline{V}$, если ρ' есть количество промежуточных частиц, содержащихся в единице объема.

Среднюю составляющую скорости u' находящихся в $\overline{V}$ промежуточных частиц в направлении оси абсцисс получают следующим образом: находящееся на dS количество $\rho\, dS$ частиц помножают на составляющую скорости u в направлении оси абсцисс и образуют сумму $\Sigma u \rho\, dS$ полученных таким путем произведений для всех находящихся в $\overline{V}$ элементов поверхности. Сумму $\Sigma u\rho\, dS$ Максвелл обозначает как количество движения (момент) в направлении оси абсцисс промежуточных частиц, содержащихся в $\overline{V}$. Если теперь эту сумму разделить на общее количество $\rho' \overline{V}$ промежуточных частиц, то получают среднюю составляющую скорости u' в направлении оси абсцисс. Следовательно:

$$u' = \frac{\Sigma u \rho\, dS}{\rho' \overline{V}} \tag{1}$$

$u' \rho' \overline{V}$ есть произведение полного количества содержащихся в $\overline{V}$ промежуточных частиц на среднюю составляющую скорости в направлении оси абсцис, почему это и было обозначено, как количество движения этих частиц в направлении оси абсцисс. Если представить теперь в пространстве плоский отрезок поверхности, имеющий площадь, равную единице, и построенный перпендикулярно к направлению оси абсцисс, то легко можно видеть, что количество промежуточных частиц, проходящих через указанную единицу площади в течение времени dt, в среднем равно $\rho' u' dt$, так как ρ' есть объемная плотность и u' — их средняя составляющая скорости в направлении оси абсцисс. Следовательно, количество p промежуточных частиц, проходящих в единицу времени через поставленную нормально к направлению абсцисс единицу площади, в среднем также равно $\rho' u'$, и уравнение (1) дает нам

$$p\overline{V} = \Sigma u \rho\, dS.$$

24. (Стр. 134.) Значения α_1, β_1, γ_1 относятся к первому вихрю, значения α_2, β_2, γ_2 — ко второму из рассматриваемых вихрей. Величина u в разделяющей их поверхности dS будет, следовательно, также найдена, если в уравнении Максвелла (27) подставить:

$$\beta = \beta_1; \quad \gamma = \gamma_1; \quad \beta' = \beta_2; \quad \gamma' = \gamma_2;$$
$$m = m_1 = -m_2; \quad n = n_1 = -n_2.$$

25. (Стр. 134.) Так как $l\, dS = \pm\, dy\, dz$, причем положительный или отрицательный знак ставится в зависимости от того, на какой стороне ограничивающей поверхности находятся dS, на стороне ли, обращенной к положительному направлению оси абсцисс, или наоборот. В $\int lx\, dS$, $\int ly\, dS$ и $\int lz\, dS$ взаимно

уничтожаются по два члена, которые относятся к dS одной части поверхности и к dS соответствующей тем же y и z другой части. Если обозначить абсциссу первого dS через x_1, а абсциссу последнего dS через x_2, то тогда распространенный на замкнутую поверхность интеграл будет:

$$\int lx\,dS = \int\int (x_1 - x_2)\,dy\,dz = \int\int\int dx\,dy\,dz,$$

следовательно, интеграл равен объему, ограниченному замкнутой поверхностью. Вместо максвеллова знака $\sum$ здесь поставлен более для нас привычный знак $\int$.

Интеграл, обозначенный Максвеллом через $\sum u\rho\,dS$, который мы для краткости назовем I_1, может быть найден и таким способом: его следует распространить на все находящиеся внутри пространства $\overline{V}$ разделяющие поверхности вихрей. Если мы снова устраним в выражении (31) все члены, которые содержат координаты x, y, z без индексов, то I_1 может быть написан так:

$$(1)\qquad I_1 = -\frac{1}{2}\int \rho\,dS\left[\frac{d\gamma}{dx}m_1x_1 + \frac{d\gamma}{dy}m_1y_1 + \frac{d\gamma}{dz}m_1z_1 - \right.$$
$$\left. - \frac{d\beta}{dx}n_1x_1 - \frac{d\beta}{dy}n_1y_1 - \frac{d\beta}{dz}n_1z_1\right].$$

При этом x, y, z — координаты центра какого-либо вихря; l, m, n — направляющие косинусы нормалей, проведенных от какого-либо элемента поверхности этого вихря наружу. Суммирование распространяется на все находящиеся в $\overline{V}$ вихри. Однако при интегрировании должны быть исключены те элементы поверхности, которые не находятся внутри пространства $\overline{V}$, а ограничивают это пространство. Аналогичный интеграл, распространенный на все такие ограничивающие элементы поверхности, назовем I_2. Тогда получают сумму $I_1 + I_2$, а интеграл (1) просто распространяют на все элементы поверхностей всех вихрей. При интегрировании по каждому отдельному вихрю можно поставить перед знаком интеграла ρ и координаты x, y, z его центра, а также производные от β и γ по координатам. Тогда остаются только интегралы формы $\int m_1\,dS$ и т. д., которые все исчезают. Отсюда, следовательно, $I_1 + I_2 = 0$. В интеграле I_2, который должен распространяться на все поверхностные элементы пространства $\overline{V}$, перед знаками интеграла могут быть также поставлены ρ и производные от β и γ. Для x, y, z, однако, могут быть взяты координаты

поверхностного элемента dS, расстояние которого от центра соответствующего вихря, очевидно, мало по сравнению с размерами объема $\overline{V}$, так что $\int m_1y_1\,dS = \int n_1z_1\,dS = \overline{V}$, тогда как остальные поверхностные интегралы снова исчезают. Следовательно, согласно (1)

$$I_2 = -\frac{1}{2}\rho\overline{V}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right),$$

$$I_1 = -I_2 = \frac{1}{2}\rho\overline{V}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right),$$

как это находит и Максвелл.

Быть может, еще желательно краткое указание на ход решения. Пусть в специальном случае вихри имеют форму игральных костей с длиной сторон s, ребра которых параллельны осям координат. Они должны просто вращаться вокруг осей, которые параллельны оси z. Скорость на периферии γ должна быть функцией координат. Пусть $\overline{V}$ будет игральной костью со стороной, имеющей длину Ns, ребра которой параллельны ребрам маленьких кубиков. Этот большой куб должен, несмотря на то, что N велико по сравнению с единицей, все же быть столь малым, что γ в нем очень мало изменяется. На боковых поверхностях вихрей, которые перпендикулярны к оси y и прилегают к одной из сторон (а именно к стороне, обращенной в сторону отрицательного y), частицы вихря имеют скорость $-\gamma$; прилегающих к другой стороне — скорость $\gamma + \frac{d\gamma}{dy}s$. Отсюда промежуточные частицы имеют скорость $u' = \frac{s}{2}\frac{d\gamma}{dy}$, которая является средним арифметическим обеих скоростей в направлении x. Боковые поверхности всех вихрей, перпендикулярных к оси y и находящихся внутри большого куба $\overline{V}$, образуют $N-1$ квадратов с длиной стороны Ns, которые разрезают каждое поперечное сечение, проведенное через $\overline{V}$ вертикально к направлению абсцисс, на $N-1$ прямых, имеющих длину Ns. Через каждую из этих прямых выходят промежуточные частицы со скоростью u'. Следовательно, через каждую из этих прямых в единицу времени выходят те промежуточные частицы, которые находятся на поверхности, имеющей площадь $u'Ns$, и количество которых равно $\rho u'Ns$. Если мы пренебрежем единицей по сравнению с N, то мы можем сказать, что перпендикулярное по отношению к направлению абсцисс сечение куба $\overline{V}$ в целом содержит N таких прямых; так что, следовательно, через него проходит количество $\rho u'N^2s = \frac{\rho\,d\gamma}{2dy}N^2s^2$ промежуточных частиц, а через построенную на нем поверхность с площадью единица проходит $\frac{\rho\, d\gamma}{2dy}$ промежуточных частиц. Равным образом находят, что через единицу площади перпендикулярного к направлению y сечения проходит количество $-\frac{\rho\, d\gamma}{2dx}$; напротив, через поверхность, перпендикулярную к оси z, — количество проходящих частиц равно нулю. Если таким же образом рассчитать эффект вращения α вокруг оси x и вращения β вокруг оси y и наложить эти эффекты, то мы получаем максвеллово уравнение (33) с соответствующими уравнениями для направлений y и z.

26. (Стр. 134.) Так как количество или масса промежуточных частиц никогда не играет роли механического сопротивления инерции (следовательно, их единица измерения полностью независима от выбора всех прочих единиц), то можно сказать, что количество находящихся на площади 2π промежуточных частиц выбирается в качестве единицы измерения.

27. (Стр. 135.) Под этим может пониматься молекула в смысле молекулярной теории, или также объемный элемент, т. е. такая маленькая часть пространства, в которой доступные опыту величины (плотность, магнитные или электрические силы и т. д.) только исчезающе мало изменяются.

28. (Стр. 138.) Цитированное положение — это известная теорема Грина. Согласно последней, когда φ_1 и φ_2 исчезают в бесконечности и известные условия непрерывности соблюдены:

$$\int \mu \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d\varphi_2}{dz} \right) dV =$$

$$(1) \qquad = -\int \varphi_1 \left[\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{d\varphi_2}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mu \frac{d\varphi_2}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu \frac{d\varphi_2}{dz}\right) \right] dV =$$

$$= -\int \varphi_2 \left[\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{d\varphi_1}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mu \frac{d\varphi_1}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu \frac{d\varphi_1}{dz}\right) \right] dV.$$

Посредством этого уравнения и двух, вытекающих из него, когда один раз вместо φ_2 пишется также φ_1, а другой раз вместо φ_1 также φ_2, получают непосредственно из уравнений Максвелла (35), (36) и (38) его же уравнение (40) без обходного пути через уравнение (39), которое получают через сравнение двух последних выражений (1). При этом совсем не требуется, как делает Максвелл, считать μ константой.

Пусть, например, A_1 и A_2 будут две произвольные, находящиеся друг от друга на расстоянии D точки пространства, r_1 и r_2 — расстояния некоторой другой точки от A_1 и соответственно от A_2. Пусть повсюду $\varphi_1 = -\frac{m_1}{\mu r_1}$ до малого окружающего A_1 пространства, где φ_1 может быть любым, но непрерывным; аналогично пусть $\varphi_2 = -\frac{m_2}{\mu r_2}$. Тогда (ср. примечание 15)

$$\int \mu \left(\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} \right) dV$$

будет повсюду равно нулю, за исключением малого окружающего A_1 пространства, где интеграл равен $4\pi m_1$; аналогичное имеем и в отношении φ_2. Величина μ пусть будет далее всюду постоянной. Пусть α, β и γ являются производными от $\varphi_1 + \varphi_2$, пусть полная энергия вихрей во всем бесконечном пространстве будет на E_{12} больше суммы энергии, которую получают тогда, когда α, β, γ один раз выражены только через производные от φ_1, а в другой раз через производные от φ_2. Тогда

$$(2) \qquad E_{12} = 2C\mu \int \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d\varphi_2}{dz} \right) dV.$$

Посредством интегрирования по частям по методу Максвелла находят:

$$E_{12} = \frac{8\pi C m_1 m_2}{\mu D} = -8\pi C m_2 \varphi_1 \big|_{r_1 = D},$$

что впрочем можно проверить также и без интегрирования по частям при помощи прямой подстановки φ_1 и φ_2 в уравнение (2) и выполнения интегрирования по бесконечному пространству с применением полярных координат. В стандартной среде $\mu = 1$. Если энергия, обнаруживаемая в видимой форме, когда D возрастает на δD в силу кажущегося отталкивания на расстоянии обоих магнитных полюсов, должна равняться убыли невидимой энергии среды, то C должно иметь значение $\frac{1}{8\pi}$.

29. (Стр. 139.) Эта величина составляет ровно половину той, которая найдена в формуле (5) примечания 6 для специального случая путем прямого подсчета. Если этим и не отвергается возможность других специальных случаев, где живая сила обладает данным ей Максвеллом значением, то все же очевидна неправильность заключения Максвелла, которое, если бы оно было правильным, должно было быть справедливым в каждом специальном случае. Принцип сохранения энергии мог бы быть следующим образом сохранен в тех случаях, в которых живая сила вихрей вдвое больше находимой Максвеллом: при сближении двух вихревых систем, которые представляют собой одноименные магнетизмы, количество последних не осталось бы неизменным, а уменьшалось бы в такой степени, чтобы прирост живой силы среды составил только половину того, который получился бы при таком же сближении, но без изменения этих количеств. Однако формулировка закона для этого уменьшения была бы трудной, так как при этом сближении двух магнитных систем изменился бы также и их собственный потенциал.

Кроме этого в теории Максвелла в той форме, в которой он разработал ее позднее, свободный магнетизм вообще невозможен и магнетизмы постоянных магнитов должны всегда заменяться соленоидами (ср. примечание 33). Естественно, что от коэффициентов выражения для живой силы зависели бы также и числовые коэффициенты выведенных из него уравнений Максвелла (54), (62), (76), (77) и т. д.

30. (Стр. 139.) Действуя на одну промежуточ ую частицу оба вихря, которые касаются этой частицы, вызывают на обоих концах ее диаметра по тангенциальной силе. Эти обе тангенциальные силы могут по нашему допущению бесконечно мало отличаться друг от друга, так как промежуточная частица не имеет момента инерции, а следовательно, действующий на нее момент сил в отношении каждой проходящей через центр оси должен быть равен нулю. Их результирующую можно представить приложенной к центру промежуточной частицы. Все подобные результирующие, которые действуют на единицу количества промежуточных частиц, имеют все вместе в направлении осей координат составляющие P, Q, R. Так как промежуточные частицы не обладают массой, то эти силы в проводниках уравновешиваются силой сопротивления, которая действует на самую промежуточную частицу, будучи пропорциональной составляющим ее скорости p, q, r; в качестве точки приложения силы опять-таки естественно взять центр соответствующей промежуточной частицы. В абсолютных изоляторах центры промежуточных частиц неподвижны, и силы, которые их удерживают, уравновешивают силы P, Q, R. В картине, которую мы обсуждаем в § 8 примечания 52, силы P, Q, R в проводящих диэлектриках уравновешиваются сопротивлением, которое встречают промежуточные частицы, скользя по стенкам ячеек, и которое в свою очередь обусловлено упругостью стенок ячеек. В абсолютных изоляторах последнего рода упругость находится в непосредственном равновесии с силами P, Q, R.

Те силы, которые, возможно, действуют на промежуточные частицы в направлении диаметра, соединяющего обе точки соприкосновения с соседними вихрями, Максвелл во внимание не принимает, так как они не влияют ни на движение вихрей, ни на промежуточные частицы.

31. (Стр. 140.) Теперь именно u, v, w являются составляющими скорости объемных элементов вихря, которые находятся совсем близко к поверхности вихря, т. е. это величины, представленные в уравнении [26a], а не определенные уравнением (27) составляющие скорости промежуточных частиц. В формуле (48) принимается, что x, y, z невелики и что, следовательно, начало координат находится в центре вихря или же очень близко от последнего. Ведь специально для получения этого решения можно использовать любую систему координат, так как в окончательном результате система координат больше не встречается.

В отношении формул [48a] и [48b] сравни примечания 19 и 25.

Каждый вихрь при этом должен рассматриваться, как и в предложении V, ограниченным в направлении своей оси. Промежуточные частицы, лежащие на одной из этих ограничивающих поверхностей, перпендикулярных к оси, должны двигаться по маленьким замкнутым путям и при этом не испытывать никакого сопротивления, или эти ограничивающие поверхности должны быть малыми по отношению к прочей поверхности вихрей. Однако в последнем случае распределение ячеек для каждого специального направления поля должно быть различным (ср. примечание 52, § 2).

32. (Стр. 141.) При этом кроме всего прочего предполагается, что уравнения для $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$ и $\frac{d\gamma}{dt}$ не содержат недифференцированных величин α, β, γ, так что значения производных α, β, γ по времени зависят не от абсолютных величин последних, а только от распределения P, Q, R*) как аналогично этому, например, в механике часто принимается, что ускорения зависят не от скоростей, а только от конфигурации. Обоснование всей совокупности максвелловых уравнений, свободное от такого попутного допущения, я укажу в примечании 52, § 9.

33. (Стр. 142.) Уже здесь при помощи уравнения (56) высказано условие, что плотность истинного магнетизма повсюду равна нулю (ср. примечание 41 и конец примечания 29).

34. (Стр. 146.) Если направление скорости каждой точки в каждый момент определено и скорость каждой точки является однозначной (линейной) функцией скорости приводной точки,

---

*) Аналогичным образом Максвелл полагает в «Трактате», II, 561, без особого побочного допущения, что он может получить целый ряд уравнений из одного уравнения живой силы, на что уже указал Дж. Дж. Томсон в примечании к цитированному месту в третьем издании.

то любая точка может быть избрана как приводная. Если бы определенная сила действовала только на точку, избранную в качестве приводной точки, и если бы ни на какую другую точку машины не действовала еще какая-нибудь сила, то машина пришла бы определенным образом в движение. Масса, которой должна была бы обладать приводная точка, если бы вся остальная машина массой не обладала, и должна была бы в результате приложения той же силы придти в то же движение, есть ее момент, приведенный к этой точке.

При помощи общих механических рассуждений, подобных тем, которые здесь проводит Максвелл, он пришел к теории, которую он развивает в своем трактате о динамической теории электромагнитного поля.

35. (Стр. 146.) Ориентация (по-английски—position) должна быть здесь уточнена так: рассмотрим частицы, которые лежат на какой-нибудь прямой, параллельной главному направлению расширения. Каждое изменение направления, образованной этими частицами прямой, в пространстве называется изменением ориентации. Это изменение ориентации влияет на вращение вихрей совершенно так же, как поворот подставки или кожуха гироскопа влияет на вращение находящегося внутри него волчка.

36. (Стр. 147.) Здесь можно было бы снова выставить то возражение, могут ли в действительности α, β, γ рассматриваться как независимые (ср. примечание 32). Это возражение касается только доказательства. В этом случае вместо уравнения (62) было бы получено следующее:

$$\delta\alpha = \frac{\alpha\,\delta x}{2x} \text{ и т. д.,} \tag{1}$$

вследствие чего и следующие расчеты Максвелла до формулы (77) включительно не были бы правильными, если применять значение живой силы, указанное в формуле (5) примечания 6, и вместе с Максвеллом считать μ постоянной. Важность этого предмета заставляет нас обратиться еще к двум примерам.

Пример 1. В многочисленных одинаковых вихрях с параллельными осями, имеющих форму прямых круговых цилиндров, пусть вращается жидкость с постоянной угловой скоростью ω. Пусть длина осей вихрей будет x, радиус их поперечного сечения a, так что их скорость на периферии будет равна:

$$\alpha = \omega a, \tag{2}$$

p_0 пусть будет давление на оси вихря, p—давление на расстоянии r от оси, тогда, как известно, $p = p_0 + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}$.

Рассмотрим ту имеющую форму полого цилиндра часть вихря, для которой величина r лежит между r_1 и r_2. На его внутреннюю поверхность действует давление

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho\omega^2 r_1^2}{2},$$

а на его внешнюю поверхность

$$p_2 = p_0 + \frac{\rho\omega^2 r_2^2}{2}.$$

Полное (не рассчитанное на единицу площади) давление на основание или опорную поверхность полого цилиндра есть:

$$P = \int_{r_1}^{r_2} p\, 2\pi r\, dr = \pi p_0 (r_2^2 - r_1^2) + \frac{\pi\rho\omega^2}{4}(r_2^4 - r_1^4).$$

Живая сила находящейся в полом цилиндре жидкости

$$E = \int_{r_4}^{r_2} \pi^2 \rho\omega^2 x r^3\, dr = \frac{\pi\rho x\omega^2}{4}\,(r_2^4 - r_1^4).$$

Пусть теперь x увеличивается на δx. Вследствие несжимаемости жидкости

$$\frac{\delta x}{x} = -\frac{2\delta a}{a} = -\frac{2\delta r_1}{r_1} = -\frac{2\delta r_2}{r_2}, \tag{3}$$

откуда

$$\delta E = -\frac{\pi\rho\omega^2}{4}(r_2^4 - r_1^4)\,\delta x + \frac{\pi\rho\omega\delta\omega}{2}(r_2^4 - r_1^4).$$

Совершенная против давления работа равна:

$$\delta W = \pi r_2^2\, p_2\, \delta r_2 - \pi r_1^2\, p_1\, \delta r_1 + P\,\delta x = -\frac{\pi\rho\omega^2\,\delta x}{4}(r_2^4 - r_1^4).$$

Уравнение $\delta E + \delta W = 0$, следовательно, дает:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\delta x}{x}. \tag{4}$$

Таким образом, угловая скорость вихря изменяется в точности пропорционально длине оси вихря. Так как это действительно для любого значения r_1 и r_2, то из этого следует, что после деформации вихрь продолжает вращаться как твердое тело с постоянной угловой скоростью, даже и в том случае, если он не обладает никакой твердостью. Скорость на периферии α изменяется, однако, по другому закону, чем угловая скорость ω, а именно, согласно уравнению (2) она будет:

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha}=\frac{\delta\omega}{\omega}+\frac{\delta a}{a}.$$

Отсюда согласно уравнениям (3) и (4)

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha}=\frac{\delta c}{2x},$$

что согласуется с формулой (1) настоящего примечания и находится в противоречии с максвелловым уравнением (62). Жидкость между вихрями, которая предполагается находящейся в покое, не содержит никакой живой силы, но зато не производит никакой работы, так как давление там повсюду одинаково и объем постоянен. Таким образом, наличие этой жидкости никак не влияет на баланс энергии.

Пример 2. Для того чтобы доказать, что и в том случае, когда существует потенциал скоростей, действительно уравнение (1), приведенное в этом примечании, а не максвеллово уравнение (62), рассмотрим вихри, имеющие форму прямых полых цилиндров. Их сечения дают круги — внутренний радиуса b и внешний радиуса a. Пусть внутри вихрей и между ними жидкость находится в покое. Жидкость должна так вращаться в вихрях, чтобы существовал потенциал скорости. Скорость на расстоянии r от оси вихря будет тогда равна $\frac{c}{r}$. Давление в этом месте будет равно $p=p_\infty-\frac{\rho c^2}{2r^2}$, причем p_∞ есть постоянная интегрирования. Поэтому давление, рассчитанное на единицу поверхности, для внутренней и внешней поверхностей оболочки будет:

$$p_b=p_\infty-\frac{\rho c^2}{2b^2}\quad \text{и}\quad p_a=p_\infty-\frac{\rho c^2}{2a^2}.$$

Полное давление на кольцеобразное основание или опорную поверхность (не отнесенное к единице поверхности) равно:

$$P=\int_a^b 2\pi r\,dr\left(p_\infty-\frac{\rho c^2}{2r^2}\right)=\pi(a^2-b^2)\,p_\infty-\pi\rho c^2\ln\frac{a}{b}.$$

Живая сила вихря будет:

$$E=\int_b^a 2\pi x r\,dr\,\frac{\rho c^2}{2r^2}=\pi x\rho c^2\ln\frac{a}{b}.$$

Если x возрастает на δx, то опять-таки вследствие несжимаемости жидкости как самого полого цилиндра, так и внутри последнего соответствующие δx приращения a и b будут:

$$\delta a=-\frac{a\,\delta x}{2x},\quad \delta b=-\frac{b\,\delta x}{2x}.$$

Полная работа действующих на полый цилиндр сил давления есть:

$$\delta W=2\pi a x p_a\delta a-2\pi b x p_b\,\delta b+P\,\delta x=-\pi\rho c^2\,\delta x\ln\frac{a}{b}.$$

Если δc есть приращение c, то E увеличивается на

$$\delta E=2\pi a^2 x\rho\frac{c}{a}\,\delta\left(\frac{c}{a}\right)\ln\frac{a}{b}=2\pi a^2 x\alpha\,\delta\alpha\,\ln\frac{a}{b}.$$

Следовательно, опять $\delta\alpha=\frac{\alpha\,\delta x}{2x}$. Здесь также не может быть сомнения в том, что и после деформации движение жидкости снова имеет потенциал скоростей.

Пусть q есть поперечное сечение находящейся между вихрями покоящейся жидкости, соответствующей одному вихрю. В жидкости господствует давление

$$p_1=p_\infty-\frac{\rho c^2}{2a^2}=p_\infty-\frac{\rho\alpha^2}{2}.$$

Полное поперечное сечение одного вихря вместе с относящейся к нему и находящейся в покое жидкостью есть πa^2+q. Полное давление на находящийся внутри вихря круг площади πb^2 будет $\pi b^2\left(p_\infty-\frac{\rho c^2}{2b^2}\right)$, давление на кольцеобразное сечение вихря равно P, а давление на площадь q будет $q\left(p_\infty-\frac{\rho c^2}{2b^2}\right)$. Отсюда среднее давление в направлении оси вихря

$$p_2=p_\infty-\frac{\rho\alpha^2}{2}-\frac{\pi a^2}{\pi a^2+q}\,\rho\alpha^2\ln\frac{a}{b}=p_1-\frac{\pi a^2}{\pi a^2+q}\,\rho\alpha\ln^2\frac{a}{b}.$$

Следовательно,

$$p=\frac{4\pi^2a^2}{\pi a^2+q}\ln\frac{a}{b}.$$

37. (Стр. 147.) Здесь Максвелл допускает, что три оси, вокруг которых происходят три вращения α, β, γ и которые вначале были параллельны осям координат, вращаются вместе с объемным элементом xyz. Следовательно, после поворота последнего ось, вокруг которой происходит вращение β, образует с положительной осью абсцисс угол $90°+\theta_3$, косинус которого равен $-\theta_3$, с положительной осью z, однако, образует угол $90°-\theta_1$, косинус которого есть θ_1. Вращение имеет, следовательно, после поворота объемного элемента xyz в направлении x, составляющую $-\theta_3\beta$, в направлении z — составляющую $\theta_1\beta$. То обстоятельство, что и β здесь бесконечно мало изменилось, дает лишь бесконечно малые высшего порядка. Ту же самую идею, которая лежит в основе максвеллова допущения, что оси вращений α, β, γ вращаются вместе с объемным элементом xyz, Герц выражает, говоря, что силовые линии увлекаются движением весомой материи (см. примечание 39).

38. (Стр. 148.) Здесь x, y, z суть ребра любого объемного элемента, x', y', z' — ребра объемного элемента, который расположен так, что ребра параллельны главным направлениям расширения (см. следующее примечание), $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ — это удлинения трех ребер x', y', z'. Таким же образом δx, δy, δz являются удлинениями ребер, обозначенных буквами x, y, z. Там же, однако, где, как в формуле (68) или в выражениях, к которым относится это примечание, вариации координат появляются еще раз дифференцированными по координатам, значение букв вдруг становится совершенно другим. В этом случае x, y, z являются координатами вершины угла элементарного параллелепипеда, а dx, dy, dz — его ребрами; δx, δy, δz — смещения в направлениях координат, которые испытывает при деформации вершина с координатами x, y, z; $\delta x+\dfrac{d\,\delta x}{dx}dx$, $\delta y+\dfrac{d\,\delta y}{dx}dx$, $\delta z+\dfrac{d\,\delta z}{dx}dx$ — такие же смещения для вершины угла, которая первоначально имела координаты $x+dx$, y, z и т. д., так что теперь величина, которая называлась раньше просто δx, должна была бы быть обозначена через $\dfrac{d\,\delta x}{dx}dx$. Величина, которая в первом случае выражается через $\dfrac{\delta x}{x}$, во втором есть $\dfrac{d\,\delta x}{dx}$.

39. (Стр. 149.) Эта формула очень просто истолковывается Герцем в его работе «Основные уравнения электродинамики для движущихся тел» в том смысле, что движущиеся тела увлекают с собой силовые линии, вместо которых в случае, если бы μ было переменным, следовало бы подставить линии индукции. До деформации через боковую поверхность $dy\,dz$ элементарного параллелепипеда $dx\,dy\,dz$ проходят $\alpha\,dy\,dz$ силовых линий. Так как эти последние при деформации увлекаются, они после деформации проходят через элемент поверхности, который получился в результате деформации из $dy\,dz$ и должен иметь площадь $dy'\,dz'$. Следовательно, через единицу

площади сейчас проходят $\dfrac{\alpha\,dy\,dz}{dy'\,dz'}$ силовых линий и увеличение, которое испытало их число по этой причине, есть:

$$\delta_1\alpha=\alpha\left(\frac{dy\,dz}{dy'\,dz'}-1\right).$$

Ребро dx параллелепипеда вследствие деформации получило длину $dx'=\left(1+\dfrac{d\delta x}{dx}dx\right)$. Вследствие несжимаемости жидкости $dx'\,dy'\,dz'=dx\,dy\,dz$, а отсюда

$$\frac{dy\,dz}{dy'\,dz'}=\frac{dx'}{dx}=1+\frac{d\delta x}{dx},\quad \delta_1\alpha=\alpha\,\frac{d\delta x}{dx}.$$

Далее при деформации один конец ребра dy параллелепипеда $dx\,dy\,dz$ удаляется на расстояние δx от плоскости, в которой первоначально находился элемент поверхности $dy\,dz$, а другой конец ребра удаляется на расстояние $\delta x+\dfrac{d\delta x}{dy}dy$. Отсюда после деформации ребро dy образует с плоскостью yz угол $\dfrac{d\delta x}{dy}$. Так как соответствующие магнитной силе β силовые линии проделывают этот поворот вместе с элементом объема, то после деформации $\beta\dfrac{d\delta x}{dy}dy\,dz$ силовых линий пройдут через площадку $dy\,dz$, в то время как до деформации через нее не проходило ни одной. Следовательно, вызванное вращением увеличение количества силовых линий, проходящих через единицу площади, будет:

$$\delta_2\alpha=\beta\,\frac{d\delta x}{dy}.$$

Равным образом α испытывает вследствие вращения силовых линий, соответствующих магнитной силе γ, приращение

$$\delta_3\alpha=\gamma\,\frac{d\delta x}{dz}.$$

Сумма всех трех приращений дает максвеллову формулу (68). Эту формулу можно было бы получить также и путем того допущения, что вихри, сами не испытывая деформации, отдаляются друг от друга в результате увеличения $dy\,dz$ и, кроме того, увлекаются при вращении. Это, например, имело бы место, если бы вихревое движение происходило в маленьких шарообразных рассеянных в среде пустых пространствах, форма и величина которых оставались бы неизменными, но которые двигались бы и вращались вместе со средой. Таким путем, быть может, можно было бы устранить трудность, на которую указывалось в примечании 36. Согласно известным исследованиям Гельмгольца, тому же закону изменения следуют составляющие угловых скоростей в вихрях лишенной трения жидкости (ср. «Трактат» Максвелла, II, 822).

40. (Стр. 149.) Здесь $\delta\alpha$ есть изменение α в течение времени δt в точке, которая движется вместе с движущимся телом, $d\alpha$ — приращение α за время dt в неподвижной точке пространства, $\frac{d}{dx}$ и т. д. — производные при неизменном времени, $\frac{dx}{dt}$ и т. д. — составляющие скорости рассматриваемой точки тела, обычно обозначаемые в гидродинамике через u, v, w.

41. (Стр. 150.) Это уравнение в рассматриваемом Максвеллом случае отсутствия свободного магнетизма (ср. примечание 33 и конец примечания 29) идентично с первым из уравнений (1а) в «Основных уравнениях электродинамики движущихся тел» Герца. Максвелловы величины

$$P,\ Q,\ R,\ \mu\alpha,\ \mu\beta,\ \mu\gamma,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{\mu d\alpha}{dt}=\frac{d^2G}{dz\,dt}-\frac{d^2H}{dy\,dt}$$

Герц обозначает соответственно через X, Y, Z, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}$. Герц применяет французскую систему координат. В рассмотренном Максвеллом случае, когда нигде нет истинного магнетизма, Герц должен написать:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}=0.$$

Вместо этого Максвелл пишет:

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0,$$

так как он считает μ постоянной.

Аналогичные уравнения для намагничивающих сил, возникающих в результате движения в электрическом поле, Максвелл не разработал. Это, возможно, было частично обусловлено тем, что применение его метода к электрическим напряжениям не было столь простым, а частично также потому, что Максвелл выводит уравнения (76) и (77) в основном для расчета индукционного влияния на движущиеся в магнитном поле проводники тока. В противоположность этому намагничивающее действие на железо, движущееся в электрическом поле, мало привлекает его внимание. То впечатление, которое мы получаем, видя в первый раз имеющие для всего нашего естественно-научного мировоззрения революционизирующее значение уравнения, увеличивается еще тем, что Максвелл не говорит ни слова об этом их значении, которое он, наверное, предполагал, даже если он не так ясно его видел, как это видим сейчас мы.

42. (Стр. 151.) Согласно формуле, которую мы применяем также и в примечании 19, для косинуса угла между направлением оси абсцисс (направлением поля) и прямой, перпендикулярной к следующим двум прямым: прямой S с направляющими косинусами l, m, n и прямой, направляющие косинусы которой пропорциональны $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ (направлению движения).

43. (Стр. 151.) Так как $\mu\alpha$ есть число силовых линий (лучше сказать, индукционных линий), которые проходят через единицу площади, расположенную перпендикулярно к оси абсцисс, то уравнение (79) даст нам число силовых линий, которые проходят через площадь, образуемую при движении проводником S в единицу времени.

44. (Стр. 157.) К этому мы можем добавить, что наше познание природы было фактически обогащено этими работами Максвелла. Если в других местах Максвелл говорит о своих ячейках, как о чем-то несомненно существующем в природе (например, на стр. 186), то это происходит, повидимому, только потому, что он не хочет повторять слишком часто, что здесь речь идет лишь о механической аналогии.

45. (Стр. 157.) Это, пожалуй, осуществляется со всей строгостью у вихрей с круговым поперечным сечением, но едва ли имеет место у вихрей с шестиугольным или квадратным поперечным сечением (ср. примечания 6, 20 и 21).

46. (Стр. 159.) Вопрос, обсуждавшийся позднее Томсоном и Тэтом, Гельмгольцем, Целльнером и другими о совместимости закона Вебера с принципом сохранения энергии, как видно, уже здесь поднимается Максвеллом. (Сравни «О фарадеевых силовых линиях», «Трактат», гл. XXIII и примечания к нему.—*Ред.*)

47. (Стр. 165.) Это известные уравнения теории упругости. Содержимое ячейки (вихрь) рассматривается теперь как обычное упругое тело, внутри которого силы упругости p_{xx} и т. д. действуют по тем же законам, по которым ранее действовали обозначенные такими же буквами силы во всей среде. Относительно той возможности, что упругое тело может частично вести себя как жидкое тело, сравни примечание 52, § 3.

48. (Стр. 166.) Согласно формулам, цитированным в примечании 8, для сил упругости, действующих на элемент поверхности, наклоненной относительно осей координат. Важно отметить, что действующая извне на шар тангенциальная сила в том случае, когда T положительно, действует так, что ее составляющая, параллельная оси z, имеет отрицательное направление, а перпендикулярная к последней составляющая направлена наружу.

49. (Стр. 168.) Согласно предложению VII $\rho R\delta S$ есть сила, с которой частицы вихря действуют в положительном направлении z на промежуточные частицы, относящиеся к элементу поверхности δS ячейки, причем $\rho R\,\delta S \sin\theta$ есть составляющая, касательная к ячейке. Сила, с которой те же промежуточные частицы действуют на прилегающие к одной стороне элемента поверхности δS частицы вихря в том же самом касательном направлении, должна быть (также согласно предложению VII) вдвое меньшей и направленной в противоположную сторону. Последней же силой является тангенциальная сила, действующая извне на соответствующие частицы вихрей, т. е. произведение δS на обозначенную в уравнениях (88), (89) и (91) буквой T величину.

Так как из сказанного в конце предыдущего примечания вытекает, что эта последняя сила противоположна силе $\rho R\,\delta S \sin\theta$, то, следовательно, $\frac{1}{2}\rho R\,\delta S \sin\theta = T\,\delta S$. Другая половина силы $\rho R\,\delta S \sin\theta$ действует на вихрь, прилегающий к другой стороне элемента поверхности δS. Сверх того, Максвелл утешает себя тем, что он рассматривает как шары те вихри, которые он ранее рассматривал как призмы с шестиугольным сечением, и что эти обе формы настолько похожи, что в крайнем случае только численный коэффициент может оказаться немного отличным при пользовании каждой из них.

50. (Стр. 168.) Сумму произведений количества промежуточных частиц, прилегающих к каждому из элементов, содержащихся в каком-нибудь объеме поверхностей раздела двух вихрей, на составляющие их смещения в направлении z мы будем называть моментом смещения всех промежуточных частиц в направлении z. Величина, которую Максвелл обозначает буквой h, и будет тогда этим моментом смещения всех содержащихся в единице объема промежуточных частиц. С другой стороны, момент смещения промежуточных частиц, расположенных на всех стенках, ограничивающих один вихрь, равен удвоенной сумме (101), т. е. $\sum \delta S\rho t \sin\theta$.

Если последнюю сумму рассчитать для всех находящихся в любом объеме V вихрей, общее количество которых равно N,

и сложить все эти суммы, то получим:

$$N\sum \delta S\rho t \sin\theta, \tag{1}$$

пока V так мало, что все содержащиеся в нем вихри ведут себя почти одинаково. Однако при этом каждый элемент поверхности содержащихся в V стенок ячеек мы считали дважды, один раз как границу одного, второй раз как границу другого прилегающего вихря. Полный момент смещения H промежуточных частиц, содержащихся в V, рассчитанный в направлении z, следовательно, равен половине величины, данной в формуле (1). Указанное в этой формуле знаком Σ интегрирование произвести очень легко. Для δS можно выбрать шаровую зону, лежащую между двумя параллельными кругами, соответствующими углам θ и $\theta + d\theta$, поверхность которой равна $\delta S = 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$. Если теперь вместо t подставить значение формулы (97), то

$$\sum \delta S\rho t \sin\theta = 2\pi\rho a^4 e \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3} a^4 e,$$

отсюда

$$H = \frac{2}{3} N a^4 e. \tag{2}$$

Если теперь пренебречь пространством, находящимся между шарообразными ячейками, то пространство V будет иметь объем $V = \frac{4\pi}{3} Na^3$, и так как h есть рассчитанный на единицу объема момент смещения, то мы имеем $H = Vh$, что, будучи сравнено с величиной (2), дает рассчитанную Максвеллом величину (103) для h. При выводе этого уравнения Максвелл все время применяет к телам ячеек уравнения равновесия теории упругости, что допустимо, однако, только тогда, когда h изменяется так медленно, что кинетическая энергия, соответствующая движению объемных элементов тел ячеек во время их деформации, исчезающе мала.

51. (Стр. 169.) При этом Максвелл принимает, что отношение $\frac{(3\mu - m)}{(6\mu - m)}$ поперечного сокращения к продольному растяжению не может иметь меньшего значения, чем значение, указанное Навье-Пуассоном $\left(\text{равное } \frac{1}{4}\right)$. Если допустить также возможность и меньших значений, то во всяком случае $m < 3\mu$, а отсюда $\frac{\pi m}{2} < E^2 < 3\pi m$. Впрочем это для последующего существенного значения не имеет.

52. (Стр. 170.) Сложность представлений, которые лежат в основе этих уравнений Максвелла, требует несколько более подробного объяснения.

§ 1. Содержимое каждой ячейки, которое мы будем называть телом ячейки, имеет следующее свойство: оно может свободно вращаться во всех направлениях. Оно окружено твердыми стенками, таким образом, что согласно уравнению (96) оно должно постоянно иметь форму шара неизменного радиуса. Если на него на двух противоположных концах диаметра действуют направленные в противоположные стороны тангенциальные силы, то оно приходит во вращение, которое может происходить без сопротивления. Если, наоборот, на обоих концах того же самого диаметра будут действовать направленные в одну сторону тангенциальные силы, что всегда будет иметь место, когда промежуточные частицы в пространстве, содержащем очень большое количество вихрей, будут тянуться все с примерно одинаковой силой в примерно одинаковом направлении, то его объемные элементы смещаются друг относительно друга, как это имеет место в упругом шаре, однако так, что частицы его поверхности остаются на шаре той же самой поверхности. Этот процесс мы будем называть деформацией тела ячейки, хотя при этом его «форма» не меняется. Обусловленные этим моменты смещения промежуточных частиц, содержащихся в единице объема, суть величины, которые мы обозначаем буквами f, g, h.

§ 2. Описанное свойство тел ячеек объясняет то, что промежуточные частицы не испытывают никакого сопротивления, когда они движутся вдоль стенки ячейки по замкнутым путям (здесь стенки ячейки опять предполагаются плоскими) так, что они не покидают стенки той же самой ячейки. Это, например, могло бы быть в том случае, когда соответствующая стенка ячейки разделяет два вихря, оси которых располагаются вдоль одной и той же прямой, и стенка ячейки перпендикулярна к этой прямой. В равной мере промежуточная частица не испытывает никакого сопротивления, если она передвигается по замкнутым путям по нескольким стенкам одного и того же вихря, ориентированным в любом направлении относительно оси вращения (ср. примечание 21). Это, например, всегда имеет место, когда мы считаем ячейки кубиками, ребра которых параллельны осям координат, когда магнитное поле однородно или когда для него $\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$ есть полный дифференциал, но направление поля составляет угол с осями координат.

§ 3. Все свойства, приведенные в § 1, конечно, не так легко привести к взаимному соответствию. Условию шарообразности тел ячеек противоречит то требование, что промежуточная частица, проходя более или менее длинный путь, одновременно касается двух вихрей (для обеспечения чего поперечные разрезы вихрей раньше предполагались шестиугольными). При расчете давления, производимого центробежной силой, тело ячейки

предполагалось жидким, а сейчас оно рассматривается как твердое. Конечно, центробежная сила и в твердом теле (например, вращающемся Земном шаре) может развивать подобные давления, что и в жидком. Более того, мыслимы тела, которые при одних обстоятельствах ведут себя как твердые, а при других как жидкие (например, желатина, студень, лед, даже свинец, в одном случае при очень малых, а в другом — при очень больших давлениях). Однако для объяснения того, почему тела ячеек в одном случае ведут себя так, а в другом случае совершенно противоположным образом, была бы желательна более основательная мотивировка. Сила, которая предотвращает любое отклонение тела ячейки от шаровой формы, также находится в противоречии со свободным распространением центробежных сил по всем направлениям. Впрочем, если допустить радиальное смещение поверхностных элементов вихрей, то получились бы только незначительные изменения в числовых значениях коэффициентов, но не качественно отличные результаты.

§ 4. Прежде всего мы примем точно в том смысле, который ему придает Максвелл, сосуществование всех этих свойств. Тела ячеек не способны ни к какому другому изменению своей формы и положения, кроме как к вращению вокруг любой проходящей через их центры оси и деформации, которая в точности следует изложенным в предложении XII законам. Оба накладываются друг на друга; для последнего свойства направление наибольшего смещения может быть, естественно, любым, тогда как в предложении XII это направление выбрано как направление оси z. Согласно данному в примечании 51 определению момента смещения h содержащихся в единице объема промежуточных частиц, $\frac{dh}{dt}$ есть сумма всех содержащихся в единице объема промежуточных частиц, каждая из которых умножается на составляющую в направлении оси z скорости, обусловленной деформацией тела ячеек. Таким образом, $\frac{dh}{dt}$ есть число промежуточных частиц, которые по этой только причине прошли бы в единицу времени через перпендикулярную к направлению оси z единицу площади, если бы во всем соответствующем пространстве в течение этого времени их движение было бы приблизительно одинаковым (ср. примечание 23).

К этому добавляется еще смещение центров промежуточных частиц вследствие вращения вихрей. Полное количество промежуточных частиц, которые по этой причине прошли бы в единицу времени через единицу площади, перпендикулярную к направлению оси z, будет согласно уравнениям Максвелла (33) и (34)

$$\frac{\rho}{2}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right).$$

Так как оба действия накладываются друг на друга, то в проводящем диэлектрике полное число промежуточных частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади, перпендикулярную к направлению оси z, будет:

$$r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) + \frac{dh}{dt}. \tag{1}$$

Так как согласно уравнению Максвелла (105)

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{4\pi E^2}\frac{dR}{dt}$$

(ср. максвеллово уравнение (111)), то можно также написать:

$$r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} - \frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt}\right), \tag{2}$$

что совпадает с третьим из максвелловых уравнений (112).

§ 5. В диэлектрически не поляризуемых проводниках выпадает последний член, так как в них E можно считать в известном смысле бесконечно большим. Никаких деформаций тел ячеек не происходит, и перемещение промежуточных частиц происходит только вследствие вращения тел ячеек. В непроводящем диэлектрике, однако, $p = q = r = 0$. Согласно максвелловскому воззрению в диэлектрике центры промежуточных частиц абсолютно неподвижны, а вращение вихрей, при котором $\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz$ не является полным дифференциалом, может наступить только в результате одновременной деформации тел ячеек. Здесь p, q, r — составляющие плотности обычных гальванических электрических токов; $-\frac{df}{dt}$, $-\frac{dg}{dt}$, $-\frac{dh}{dt}$ — составляющие плотности токов смещения или диэлектрических поляризационных токов;

$$u = p - \frac{df}{dt}, \quad v = q - \frac{dg}{dt}, \quad w = r - \frac{dh}{dt} \tag{3}$$

—составляющие плотности полного тока. Из выражения (1) и аналогичных уравнений для других осей координат

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0. \tag{4}$$

Полные токи, следовательно, в силу механизма, связывающего вихри и промежуточные частицы, всегда замкнуты, без того чтобы промежуточные частицы должны были бы касаться друг друга или давить друг на друга. Плотность расположения промежуточных частиц согласно этой точке зрения остается неизменной в абсолютных изоляторах и в диэлектрически не поляризуемых

проводниках, но не на их границах или в проводящих диэлектриках, так как в последних только благодаря одному вращению вихрей равна нулю разность между полным и обусловленным деформацией тел ячеек уплотнениями расположения промежуточных частиц.

§ 6. p, q, r в позднейших работах Максвелла снова считаются пропорциональными составляющим P, Q, R силы, действующей на единицу количества промежуточных частиц, а именно:

$$p = CP, \quad q = CQ, \quad r = CR, \tag{5}$$

вследствие чего уравнение (1) настоящего примечания переходит в

$$4\pi CR + \frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt} = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}, \tag{6}$$

что является окончательной формой уравнения электрической силы в покоящихся проводящих диэлектриках во всех местах, где не действуют так называемые внешние электродвижущие силы (термоэлектродвижущие, гидроэлектродвижущие).

Уравнения (5), которые в настоящем труде Максвелла отсутствуют, могли бы быть истолкованы примерно следующим образом. Средние составляющие скорости центров промежуточных частиц пропорциональны величинам p, q, r. Уравнения (5) поэтому указывают, что эти составляющие скорости пропорциональны составляющим силы P, Q, R. Вследствие этого можно было бы себе представить, что эти центры испытывают пропорциональное их скорости сопротивление или стенок ячеек или при переходе от одной молекулы к другой. Составляющие сопротивления приходящегося таким образом на единицу количества частиц, именно $\frac{p}{C}$, $\frac{q}{C}$ и $\frac{r}{C}$, соответственно равны и противоположны силам P, Q, R, которые развиваются вихрями, действующими на промежуточные частицы, так как массы, а отсюда и ускорения последних исчезающе малы.

§ 7. Упомянутые в § 3 трудности могут быть частично обойдены при помощи следующего соображения, к которому сам Максвелл как будто склонялся впоследствии и которое было затем уточнено другими, например, Лоджем. Но при этом рациональное истолкование приведенных в § 2 допущений снова встречает большие трудности, и скорость распространения электромагнитных волн также не будет более равна скорости распространения поперечных колебаний в неограниченном твердом теле, субстанцией которого является вещество вихрей (см. примечание 58).

Мы рассмотрим следующую механическую картину. Тело, лежащее на упругой натянутой каучуковой мембране, передвигается по ней под действием силы R. При этом каучуковая мембрана деформируется и, кроме того, оказывает еще сопротивление трения $\frac{r}{C}$, которое, отклоняясь от законов, которым в других случаях следует трение, пропорционально относительной скорости r тела по отношению к тому месту деформационной каучуковой мембраны, по которому оно в данный момент скользит. Скорость тела должна изменяться столь медленно или его масса должна быть столь мала, что произведение его массы на ускорение всегда мало по сравнению с силой R, а следовательно, последняя почти равна сопротивлению трения $\frac{r}{C}$, которое опять-таки равно той силе, с которой тело растягивает мембрану. Мы считаем, что смещение h того места мембраны, на котором тело как раз находится, пропорционально последней силе, а следовательно, полагаем эту сумму примерно равной $4\pi E^2 h$. Полная скорость тела будет тогда

(7) $$w = r + \frac{dh}{dt} = CR + \frac{1}{4\pi E^2}\frac{dR}{dt}.$$

§ 8. Теперь пусть отпадут совершенно деформации тел ячеек, а также и их принудительная шаровая форма. Пусть они будут жидкими и вращающимися в имеющих форму кубов (или какую-либо другую) ячейках. Около стенок ячеек должны быть, однако, расположены промежуточные частицы, которые совершенно так же, как и максвелловы, механически соединены с вихрями, так что скорость их центров является средней арифметической скоростей на периферии каждых двух вихрей, с которыми они соприкасаются, в тех именно местах, где происходит это соприкасание. Это взаимное соприкасание тел ячеек и промежуточных частиц происходит так, как если бы промежуточные частицы имели зубья, а периферия тел ячеек представляла бы собой нерастяжимую цепь, цепляющуюся за зубья промежуточных частиц... Из этого механизма взаимного проникновения тел ячеек и промежуточных частиц следуют уравнения Максвелла (33) и (34), а следовательно,

(8) $$r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right).$$

Из этого и двух аналогичных уравнений для других осей координат получаем:

(9) $$\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}=0.$$

Плотность промежуточных частиц, следовательно, в силу принятого механизма сцепления с вихрями не может изменяться ни в каком месте пространства без того, чтобы две соседние промежуточные частицы не соприкасались друг с другом и давили

одна на другую. Сила, с которой вихри благодаря этому действуют на единицу количества промежуточных частиц и которая должна иметь в направлении осей координат составляющие P, Q, R, соответствует силе R, которая действовала на описанное в предыдущем параграфе тело. Подобно тому как это тело ведет себя по отношению к описанной там каучуковой мембране, здесь центры промежуточных частиц ведут себя по отношению к стенкам ячеек. Они скользят вдоль стенок ячеек и испытывают при этом сопротивление, пропорциональное их скорости относительно стенки ячейки. Так как они не обладают массой, то движутся с такой скоростью, что это сопротивление равно силе, с которой вихри действуют на промежуточные частицы, силе, имеющей составляющими P, Q, R.

Реакция сопротивления скольжению на стенки ячеек имеет составляющие P, Q, R. Благодаря этой реакции затронутые места стенок ячеек смещаются (деформируются) пропорционально действующей силе. Пусть теперь вследствие деформации стенок ячеек через три перпендикулярные к направлениям координат и равные единице площадки проходят числа промежуточных частиц f, g, h; вследствие изменения деформации тогда в единицу времени пройдут $\frac{df}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$ частиц. Пусть вследствие скольжения по деформированным стенкам ячеек в единицу времени проходят количества u, v, w, а в силу обеих причин (скольжения и изменения деформации стенок ячеек) проходят количества p, q, r. Так как u, v, w пропорциональны скоростям скольжения, а эти скорости скольжения пропорциональны P, Q, R, можно положить:

(10) $$u = CP, \quad v = CQ, \quad w = CR.$$

Из аналогичных соображений

(11) $$f = \frac{1}{4\pi E^2}P, \quad g = \frac{1}{4\pi E^2}Q, \quad h = \frac{1}{4\pi E^2}R.$$

Наконец, как в предыдущем параграфе, накладываются друг на друга движение скольжения и движение, вызванное деформацией. Следовательно,

(12) $$p = u + \frac{df}{dt} = CP + \frac{1}{4\pi E^2}\frac{dP}{dt} \text{ и т. д.},$$

что, будучи подставлено в уравнение (8) и другие аналогичные уравнения, снова даст уравнение (6) и другие ему подобные. Теперь, следовательно, u, v, w соответствуют току гальванической проводимости, p, q, r — всему току, в то время как в первоначальном представлении Максвелла p, q, r соответствовали первому, а u, v, w — последнему. Составляющие тока смещения, выраженные через $\frac{df}{dt}$ и т. д., изменили свои знаки. Плотность расположения промежуточных частиц осталась неизменной.

§ 9. Я позволю себе испытать терпение читателей еще одним специальным разъясняющим примером. Проволочный проводник, имеющий повсюду круговое сечение, образует замкнутое кольцо. Пусть в каком-либо месте проводника находится электродвижущая сила, которая вызывает в проволоке длительный электрический ток. Тогда вдоль всех, одинаково со средней линией проволоки направленных «волокон» промежуточные частицы движутся с одинаковой постоянной скоростью. Чтобы это было возможно, вихри, находящиеся поблизости от средней линии, вращаются медленнее, а находящиеся вблизи поверхности — быстрее. Теперь представим себе, что пространство между двумя поперечными сечениями A и B проволоки, расстояние между которыми мало по сравнению с радиусом проволоки, вместо того чтобы быть заполненным веществом проволоки, заполнено непроводящим диэлектрическим веществом, представляющим собой нечто вроде включенного в цепь тока конденсатора. Так как вихри в диэлектрическом слое связаны с вихрями проволоки, то они первоначально вращаются в том же направлении вблизи от средней линии медленно, а дальше от нее — быстрее.

По этой, именно, причине, а не вследствие давления промежуточных частиц проволоки промежуточные частицы в диэлектрическом слое смещаются в том же направлении, что и в проволоке; пусть это направление будет от левого поперечного сечения A к правому поперечному сечению B. При этом они, если мы прежде всего будем следовать точке зрения предыдущего параграфа, смещают в диэлектрике стенки ячеек и испытывают сопротивление, пропорциональное этому смещению, что останавливает вихри в диэлектрике. Поскольку эти вихри связаны с вихрями в проволоке, эти последние, а с ними и движение промежуточных частиц проволоки прекращаются. Промежуточные частицы повсюду остаются на равных расстояниях и не давят друг на друга; стенки ячеек возвращаются в проволоке в прежнее положение, как только прекращается движение промежуточных частиц: в диэлектрическом же слое они остаются длительно смещенными в правую сторону. Следовательно, вещество упругих стенок ячеек около A растянуто, а около B уплотнено. Первое представляет собой положительный заряд A, так как относительно стенок промежуточные частицы уплотнены. В равной мере около B они разрежены.

Несколько иначе все это происходит, если положить в основу первое представление Максвелла. Согласно этому представлению центры промежуточных частиц в диэлектрическом слое находятся в состоянии покоя. Распределение промежуточных частиц, следовательно, испытывает у положительно заряженного сечения A уплотнение, а у отрицательно заряженного разреза B разрежение. Вращение вихрей в проводящей проволоке остается таким же, как и раньше. Теперь те вихри диэлектрика, которые прилегают непосредственно к A, связаны с прилегающими вихрями проводника, их часть, обращенная к A, будет, следовательно, вращаться в том же самом направлении, что и вихри проволоки, именно, это вращение будет медленным вблизи средней линии и более быстрым на периферии. Следовательно, промежуточные частицы будут толкаемы (слева направо), а поскольку их центры в диэлектрике неподвижны, то произойдет деформация вихрей. Для того чтобы при этой деформации различные поверхностные элементы вихря не были бы смещены друг относительно друга иначе, чем это предполагает Максвелл, мы должны заранее допустить, что все промежуточные частицы, которые относятся к одной и той же параллели вихря, перпендикулярной к средней линии проволоки, действуют одинаково. (Возможно, что давят только стенки ячеек как одно целое.) Так как далее на деформацию накладывается вращение, то противоположная сечению A сторона прилегающих к A вихрей движется в том же направлении, как будто это — вихри в проволоке. Таким образом, вращение и деформация передаются следующему слою вихрей, которые несколько более удалены от A. Теперь фактором, в результате которого ток в проволоке прекращается, является сопротивление деформации тел ячеек.

§ 10. Если мы захотим заменить не вполне свободный от недостатков способ вывода Максвеллом уравнений (54) получением их из принципа Гамильтона, при помощи которого получают также уравнения (12) этого примечания, и таким образом сделать то обоснование, которым мы пользовались до сих пор, необязательным, то следует поступать следующим образом. Мы принимаем представления § 8 и вводим кроме уже принятых до сих пор следующие обозначения: Α, Β, Γ пусть будут угловые вращения вихря, l, m, n — составляющие смещения центра промежуточной частицы относительно деформированной стенки ячейки, а штрих пусть выражает дифференцирование по времени, так что $\alpha = A'$, $u = l'$, $p = f' + l'$, и т. д.

Мы принимаем единственно имеющуюся в наличии кинетическую энергию, а именно кинетическую энергию вихрей, равной

$$T = \frac{\mu}{8\pi}(\mathrm{A}'^2 + \mathrm{B}'^2 + \Gamma'^2); \tag{13}$$

потенциальную энергию деформации стенок ячеек будем считать равной

$$V = \frac{1}{8\pi E^2}(f^2 + g^2 + h^2); \tag{14}$$

работу, произведенную скользящим трением, мы положим равной

$$\delta\Omega = C\,(l'\delta l + m'\delta m + n'\delta n). \tag{15}$$

Теперь уравнения Максвелла (33) и (34) могут быть написаны в форме

$$f+l=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy}\right) \text{ и т. д.} \tag{16}$$

Эти уравнения следует рассматривать как механические условия для системы, зависящие от взаимного сцепления вихрей и промежуточных частиц. Принцип Гамильтона дает:

$$\iiiint dx\,dy\,dz\,dt\,(\delta T-\delta V-d\Omega)=0. \tag{17}$$

Мы не будем подробно выписывать формулы, а только наметим ход решения. Оба члена, содержащие δf и δl, пишем в форме

$$Cu\,(\delta f+\delta l)+\left(\frac{f}{8\pi E^2}-Cu\right)\delta f. \tag{18}$$

Так как δf совершенно произвольно, то прежде всего из этого вытекает, что

$$\frac{f}{8\pi E^2}=Cu.$$

Мы обозначим эту величину через P, а аналогичные величины для осей y и z через Q и R. Теперь согласно соотношению (16) полагаем:

$$\delta f+\delta l=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\delta B}{dx}-\frac{d\delta A}{dy}\right).$$

Подставляя все это в уравнение (17), интегрируем по частям члены с δA, δB, $\delta \Gamma$ по времени, а члены, содержащие $\frac{d\delta A}{dx}$, по x и т. д.

В полученном таким путем выражении можно коэффициенты при δA, δB и $\delta \Gamma$ в отдельности считать равными нулю, откуда непосредственно получаются уравнения Максвелла (54).

§ 11. Из всех до сих пор полученных уравнений можно правильно рассчитать все электромагнитные возмущения в поле, но с их помощью можно также доказать, что такие возмущения никогда не могут образоваться, если только их нет в наличии с самого начала, поскольку мы не ввели никаких внешних электродвижущих сил. В тех местах пространства, где действуют такие силы (термоэлектрические, гидроэлектрические, а также электризация путем трения шелка об стекло и т. д.), уравнение (6) настоящего примечания требует дополнения. Простейшим образом, достаточным для установления совпадения с опытом, это дополнение получается по методу Герца, именно, к этому уравнению добавляет еще одно слагаемое $\mathfrak{r}$, которое зависит только от свойств внешней электродвижущей силы в данной точке пространства. Подобные же слагаемые $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ должны быть добавлены к уравнениям для направлений x и y. Об этих величинах $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ известно лишь то, что они (во всяком случае их средние значения) пропорциональны величине гидроэлектродвижущих, термоэлектродвижущих сил и т. д. Они получаются из принципа Гамильтона, если мы будем «считать» α, β, γ смещениями и f, g, h — скоростями *).

53. (Стр. 170.) Величина e, которую, впрочем, согласно введенной Герцем терминологии можно было бы обозначить как плотность истинного электричества, является фактически в первой из рассмотренных здесь механических моделей Максвелла излишком промежуточных частиц в единице объема по сравнению с нормальным состоянием. Эта величина должна быть равна нулю в идеальных изоляторах, так как в них центры промежуточных частиц вообще неподвижны, но также и в диэлектрических неполяризуемых проводниках, так как в них тела ячеек не могут быть деформированы. В проводящих диэлектриках или на границе проводника и непроводника **) центры промежуточных частиц могут, напротив, в результате деформации тел ячеек уплотниться. Напряжения этой деформации тогда производят электростатические силы.

Так как p, q, r суть полные числа промежуточных частиц, в единицу времени проходящих через три перпендикулярные к направлениям осей координат плоские поверхности с площадью, равной единице, то согласно гидродинамическому уравнению непрерывности для потока сжимаемой жидкости имеет силу максвеллово уравнение (113). Поскольку вследствие одного только вращения тел ячеек (если бы последние не могли быть деформированы) невозможно уплотнение промежуточных частиц, их общее уплотнение должно быть равно уплотнению, вызванному деформацией, а именно:

$$\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}=\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right),$$

что следует также непосредственно из уравнения (1) предыдущего примечания и соответствующих уравнений для других осей.

---

*) Ср. Boltzmann, Vorles. über Maxwell Theorie, II, стр. 7, изд. Barth, 1893.

**) В этом случае следует представить себе слой, в котором свойства одного вещества непрерывно переходят в свойства другого, которое, следовательно, должно быть проводящим диэлектриком. Вещества, которые и не проводят и не могут быть диэлектрически поляризуемы, должны быть исключены.

координат. Если поэтому u, v, w суть величины, определенные уравнениями (8), то

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

т. е. полные токи всегда замкнуты.

Согласно концепции, рассмотренной в § 8 предыдущего замечания, это выражается уравнением

$$\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}=0.$$

Согласно этой концепции, следовательно, какое-либо уплотнение в расположении промежуточных частиц исключается. Истинное электричество было бы там, где вследствие скольжения промежуточных частиц по стенкам ячеек, если бы только это скольжение имело место, собралось большое число промежуточных частиц. Однако равное число частиц было бы убрано деформацией стенок ячеек, упругие силы которой вызывают электростатическое напряжение.

54. (Стр. 172.) За пределами второго тела $e_2=0$; полное количество электричества во втором теле, однако, равно интегралу $\int e\,dV$, взятому по объему последнего. В этой формуле и в формуле (127) e_1 и e_2 суть полные количества электричества, в то время как раньше они были плотностями электричества.

Все это аналогично тому, что было в формулах (20) и (21) для магнетизма (ср. примечание 15).

55. (Стр. 172.) Так как плотности тока p, q, r ранее измерялись магнитными единицами, то и e получено как измеренное в магнитных единицах.

56. (Стр. 174.) Фигурирующая здесь величина ρ естественно есть обозначенная той же буквой в максвелловой формуле [1a] объемная плотность вещества вихрей или тел ячеек, но не обозначенная той же самой буквой в формуле (34) поверхностная плотность промежуточных частиц. Равным образом и μ есть теперь та величина, которая этой же буквой обозначена в максвелловой формуле (1), а не μ предложения XII (уравнения (80), (82) и т. д.). В предложении I уравнение (1) было: $\mu=4\pi C\rho$; далее, при тех ограничениях, при которых действительно уравнение [1a], $C=\frac{1}{4}$, а отсюда $\mu=\pi\rho$.

57. (Стр. 175.) Здесь Максвелл ни в коем случае не рассчитывает скорость распространения электромагнитных волн в придуманной им среде, а определяет скорость распространения, обыкновенных поперечных волн в неограниченной твердой среде,

которая имеет те же самые свойства, что и тела ячеек. Очевидно, что он еще не отказывается от идеи, что свет состоит из поперечных колебаний в смысле, придаваемом этому понятию старой волновой теорией. Однако электромагнитные волны в придуманной им среде, очевидно, существенно отличаются от обычных поперечных волн в неограниченных упругих телах.

Рассмотрим для простоты линейно поляризованные стоячие волны.

Пусть ось абсцисс будет направлением колебания, положительное и, соответственно, отрицательное направления z—направлениями распространения обеих волн, интерференцией которых образованы стячие волны; первое будем называть просто направлением распространения стоячих волн. В случае электромагнитных волн промежуточные частицы движутся около пучности электрической силы туда и обратно параллельно оси абсцисс. Однако производная по z их амплитуды равна нулю. Следовательно, движение с обеих сторон тела ячеек одно и то же; они не вращаются, а только деформируются, причем их поверхностные элементы, обращенные в сторону положительных и отрицательных z, всегда движутся одновременно в том же самом, в среднем параллельном оси абсцисс, направлении.

В узлах колебаний электрической силы колебательное движение в поперечном направлении промежуточных частиц исчезающе мало, но зато производная по z максимальна. Следовательно, там промежуточные частицы движутся на сторонах, обращенных к положительным и отрицательным z, одного вихря в противоположных направлениях. Тела ячеек не деформируются, но вращаются туда и обратно около осей, параллельных направлению y. Периодически меняются магнитные поляризации, осями которых является направление y (пучности магнитной силы). При этом тела ячеек всегда остаются заключенными в шаровые оболочки, в то время как при обычных поперечных волнах элементы объема сами перемещаются туда и обратно на конечные расстояния в пучностях волн. Напротив, движение тел ячеек около пучностей волн электрической силы, которые совпадают с узлами колебаний магнитной силы, имеют много общего с относительным движением частиц одного и того же объемного элемента в пучностях колебаний обычных поперечных волн. И там и здесь части упругого тела колеблются под действием тех же упругих сил, перпендикулярных к направлению распространения волн. Также и вращение тел ячеек в пучностях волн магнитной силы аналогично вращению объемных элементов около узлов поперечных волн. Поэтому можно ожидать в обоих случаях приблизительно равной скорости распространения.

Не следует придавать особого значения тому, что Максвелл находит их в точности численно совпадающими; поскольку, во-первых, он это находит только при предварительном условии существования отношения Навье-Пуассона между продольным растяжением и поперечным сжатием, а во-вторых, он при

этом в формулах [1а] и (102) не принимает во внимание лежащее
между вихрями пространство. Далее Максвелл при расчете
центробежной силы рассматривает вихри как жидкие, а при
их деформации как твердые, при определении скорости на пери-
ферии—как цилиндры с сечением, имеющим форму круга, а при
рассуждении о движении промежуточных частиц — как призмы
с шестиугольным сечением, и т. д.

С другой стороны, Максвелл, естественно, нашел бы бесспор-
но точное совпадение скорости распространения электрических
волн с отношением электростатически и электромагнитно изме-
ренной единицы электричества, совершенно независимо от лю-
бой механической модели, если бы он вывел скорость распро-
странения электромагнитных волн из своих уравнений для основ-
ных электрических и магнитных величин, что легко сделать уже
из данных здесь Максвеллом уравнений, а именно, для воздуха
$p=q=r=0$, $\mu=1$ и вследствие отсутствия свободного магнетизма
$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0$. Поэтому из уравнений (112) получаем, если мы
дифференцируем второе по z и вычитаем из результата диффе-
ренцированное по y третье уравнение:

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}=\frac{1}{E^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right),$$

в то время как по уравнению (53)

$$\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}=\frac{d\alpha}{dt},$$

откуда немедленно следует известное уравнение для волн, ско-
рость распространения которых равна E.

58. (Стр. 175.) Пусть ось абсцисс перпендикулярна к прово-
дящей пластинке конденсатора. Электричество мы представляем
себе сконцентрированным в тонком прилегающем к пластинке
конденсатора слое, имеющем толщину δ. Пусть dx будет диффе-
ренциал толщины этого слоя. Находящееся на единице площади
электричество содержится тогда в цилиндре, имеющем осно-
вание, равное единице, и высоту δ и выражается взятым по этому
цилиндру интегралом $\int e\,dx$.

В формуле (115) $Q=R=0$; отсюда

$$\int e\,dx=\frac{1}{4\pi E^2}(P_1-P_0).$$

Значение P_0 электрической силы на внутренней стороне слоя тол-
щины δ равно ее значению в металле, т. е. нулю, а значение на

внешней стороне P_1 равно $\frac{d\Psi}{dx}=\frac{(\Psi_2-\Psi_1)}{\theta}$, откуда

$$\int e\,dx=\frac{\Psi_2-\Psi_1}{4\pi E^2\theta}.$$

59. (Стр. 176.) Правильность теории Максвелла уже задолго
до классических опытов Герца представлялась весьма вероят-
ной, благодаря подтверждению этого вывода при измерениях
на кристаллах серы (Wien. Sitz.—Ber., II, т. 70, стр. 342, 1874 г.),
а также на основании сделавшейся исторической формулы (142).

60. (Стр. 177.) Для того чтобы найти эту формулу, нужно
разложить силу поля на две составляющие в направлениях наи-
большей и наименьшей диэлектрической постоянной для пло-
скости, которая перпендикулярна к оси вращения шара. Диэлек-
трическую поляризацию шара тогда рассчитывают через каждую
из этих составляющих совершенно так, как рассчитывают намаг-
ничение шара в однородном магнитном поле. Наконец, опреде-
ляют силу, с которой действует каждая составляющая на шар
в результате обусловленного другой составляющей диэлектри-
ческого момента. Здесь, пожалуй, впервые идет речь о пондеро-
моторном действии наэлектризованных тел на исключительно
диэлектрически поляризованные тела (так называемое диэлек-
трическое дальнодействие), причем в данном случае, конечно,
имеется в виду только действие при вращении.

61. (Стр. 184.) Как и при расчете скорости распространения
волн, Максвелл здесь опять совершенно оставляет в стороне
свою гипотезу, что эфир разделен на ячейки и что ни центры
тел ячеек не могут менять своего места, ни их поверхности—
своей формы. Он рассматривает обычные поперечные колебания
среды, содержащей вихри, которая, однако, во всем остальном
ведет себя совершенно подобно светоносному эфиру старой вол-
новой теории.

62. (Стр. 185.) Определение того, что Максвелл называет
угловым моментом, есть следующая сумма: массу каждой нахо-
дящейся в вихревом движении частицы умножают на проекцию
поверхности, которую в единицу времени описывает луч, про-
веденный к ней из фиксированной точки оси вращения, на пло-
скость, перпендикулярную к оси вращения, и складывают все
таким образом полученные произведения.

63. (Стр. 185.) Приведенное, не во всех случаях, правда,
верное правило. Верде Максвелл объясняет именно тем, что в объ-
емных элементах диамагнитных тел субстанция, обладающая
массой и инерцией, вращается в том направлении, в каком
течет положительное электричество в намагничивающем ее токе,

в парамагнитных же телах—в обратном направлении, и что свет есть колебательное движение частиц, также обладающих массой и инерцией. Промежуточные частицы должны, однако, перемещаться в молекулярных потоках электромагнита и в намагничивающем его токе в том же самом направлении, в каком вращаются вихри в электромагните.

64. (Стр. 186.) Само собой разумеется, что Максвеллу в то время было неизвестно, что металлическое железо вращает плоскость поляризации в том же направлении, как и большинство диамагнитных веществ.

65. (Стр. 187.) Совершенно точное определение приведено в примечании 62.

66. (Стр. 188.) Необходимо заметить, что x есть текущая координата положения частицы, в то время как z обозначает смещение этой частицы во время колебаний.

67. (Стр. 189.) Так как Максвелл рассматривает световой эфир как обычное твердое упругое тело, то для него имеет силу аналогичное уравнению (3) текста уравнение движения твердого упругого тела, на которое не действуют никакие внешние объемные силы:

$$\rho\,\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}. \tag{1}$$

Для изотропного упругого тела силы упругости P_{xx}, P_{xy} и т. д. выражены уравнениями (82) и (83) текста, как функции смещений ξ, η, ζ. Так как для рассматриваемых сейчас поперечных колебаний $\zeta=0$, а ξ и η являются только функциями z и t, то из этого можно немедленно видеть, что $p_{xx}=p_{yy}=$ $=p_{zz}=p_{xy}=0$, $p_{xz}=\frac{m\,d\xi}{2dz}$, $p_{yz}=\frac{m\,d\eta}{2dz}$.

Величины, которые Максвелл там обозначал через ξ, η, p_{xz} и p_{yz}, он обозначает теперь через x, y, X, Y. Следовательно, мы имели бы:

$$X=\frac{m}{2}\,\frac{dx}{dz},\quad Y=\frac{m}{2}\,\frac{dy}{dz}. \tag{2}$$

Он рассматривает затем движение света в кристаллах, а отсюда и эфир как анизотропное тело. Для него он принимает опять $p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p_{xy}=0$ и пишет вместо уравнений (2):

$$X=k_1\frac{dx}{dz},\quad Y=k_2\frac{dy}{dz}, \tag{3}$$

что мы считаем, без сомнения, допустимым только тогда, когда плоскости координат являются плоскостями симметрии. Уравнение (1), следовательно, будет при новом обозначении:

$$\rho\,\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dp_{yz}}{dz}, \tag{4}$$

где p_{yz} равно величине Y в уравнении (3) настоящего примечания в том случае, когда среда не содержит вихрей. Если же вихри имеются, то по представлению Максвелла вследствие деформации и вращения объемных элементов во время колебаний движение вихрей в среде постоянно изменяется в соответствии с установленными в предложении X законами, благодаря чему на объемные элементы снова начинают действовать силы. Поэтому к силам упругости должны быть присоединены также и силы, вызванные изменением вихрей.

Если мы обозначим через Y' составляющую последней силы, соответствующую составляющей Y силы упругости, тогда, следовательно, будет:

$$\rho\,\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dY}{dz}+\frac{dY'}{dz}. \tag{5}$$

Величину Y' Максвелл определяет при помощи следующего рассуждения: так как в каждой плоскости, параллельной плоскости xy, все точки и без того ведут себя одинаково, то он рассматривает образованный из светового эфира цилиндр, основание которого параллельно плоскости xy, площадь которого равна единице, а высота dz. Лежащие вне цилиндра частицы эфира, которые непосредственно прилегают к обращенному к отрицательным z основанию цилиндра, производят в отрицательном направлении оси y силу $p_{yz}=Y$, действующую на непосредственно прилегающие частицы цилиндра. Такая же сила Y действует на частицы эфира, прилегающие к противоположному основанию цилиндра, но в положительном направлении оси y. Эти обе силы образуют действующий на цилиндр вращательный момент $M=Y\,dz$ в отрицательном направлении около положительной оси x. Аналогично Y' дает момент $M'=Y'\,dz$ в отрицательном направлении оси x или, иначе говоря, момент $-Y'\,dz$ в положительном направлении. Последний момент должен согласно закону площадей равняться производной по времени «углового момента» вихрей относительно оси x, или, следовательно, по уравнению (144)

$$=\frac{\mu}{4\pi}\,r\,dz\,\frac{d\alpha}{dt},$$

откуда следует:

$$Y' = -\frac{\mu}{4\pi} r \frac{d\alpha}{dt}.$$

Подстановка этого значения и значения (3) настоящего примечания вместо Y в уравнение (5) дает второе из уравнений (146) текста.

В какой мере является оправданным предположение, что упругая сила Y, возбужденная при том же колебании, но в среде без вихрей, и необходимая для изменения движения вихрей сила Y' пропорциональны моментам M и M', может быть пояснено еще на одном простом примере. Пусть имеется прямолинейная цепочка из маленьких сферических оболочек, диаметр которых есть δ. Эти оболочки связаны по два натянутым упругим шнуром, который будем считать не имеющим массы. Начальная точка первого и конечная точка последнего шнура закреплены. Массу имеют только сферические оболочки. Пусть эта цепь подобно шнуру известного аппарата Мельда совершает стоячие поперечные колебания, так что центр каждой сферической оболочки описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к первоначальному прямолинейному направлению цепи G. Мы будем называть это круговыми поперечными колебаниями. Тогда шнуры образуют синусоидальную линию. Составляющая напряжения, перпендикулярная к G, является силой Y, которая поддерживает поперечные колебания. Оси сферических оболочек линии, соединяющие точки прикрепления шнуров, устанавливаются в направлении последних. На них, правда, не действует какой-либо вращательный момент, обусловленный общим напряжением шнуров, но одни только составляющие напряжения Y дали бы вращательный момент $M = Y\delta$.

Пусть теперь сферические оболочки содержат вращающиеся волчки, оси вращения которых совпадают с осями оболочек.

Все волчки, за исключением находящихся в пучностях, должны будут при ранее описанных стоячих круговых поперечных колебаниях всей цепи осуществлять прецессионное движение, причем их полюса описывают круги в том же направлении, что и цепь.

Для того чтобы получить эту прецессию, шнуры должны действовать на оболочки с вращательным моментом M'. Этот момент в том случае, если волчки вращаются в том же направлении, что и цепочки (случай A), должен стремиться увеличить наклон оси относительно прямой G, а в другом (случай B)—уменьшить.

В первом случае M' действует в том же направлении, следовательно, имеет одинаковый знак с M, а во втором случае—противоположный. Поэтому оси шаровых оболочек уже не устанавливаются в направлении шнуров; какой-нибудь шнур образует

угол ϑ'' с прямой G, который в случае A будет меньше, а в случае B—больше чем угол ϑ, который он раньше при равной амплитуде образовывал с прямой G (т. е. когда круги, описываемые центрами всех сферических оболочек, имели неизменную величину). Составляющая напряжения шнура, перпендикулярная к этой прямой, теперь будет силой, которая поддерживает поперечные колебания; назовем ее Y''. Если $M'' = Y''\delta$ есть вращательный момент, с которым составляющая Y'' действует на сферическую оболочку, то мы сейчас же видим, что $Y'' : Y = M'' : M$. С другой стороны, при равной амплитуде $M'' = M + M'$, так как в случае B, где M и M' имеют противоположные знаки, ϑ'' есть разность угла ϑ и того угла, который обусловил бы момент M. В этом случае $Y'' < Y$ и колебания цепи происходят медленнее. Изменение времени колебаний может быть рассчитано, когда даны все отношения. Вихри не могут быть математически бесконечно малыми, так как в этом случае они не оказывали бы никакого действия.

В упругой среде, следовательно, облегающие их объемы должны быть малыми, но конечными. Для этих объемов не должно быть $p_{yz} = p_{zy}$. Для расчета вращательного момента вокруг оси, который действует на эти объемы, Максвелл рассматривает только силу p_{yz}. Если бы мы допустили, что и сила p_{zy} также добавляет сюда половину, будучи иной, чем при равной деформации без вихрей, то возможно, что результат был бы несколько изменен.

Моделью для рассматриваемых Максвеллом в четвертой части этой работы механических процессов может служить маятник, свободно вращающийся вокруг точки, подобно маятнику Фуко, в котором установлен быстро вращающийся волчок, ось вращения которого совпадает со средней линией штанги маятника. Описываемая концом маятника кривая может быть сделана видимой при помощи высыпающегося песка или наконечника, пишущего на расположенной под маятником горизонтальной плоскости.

На рис. 12 Максвелла нижние стрелки представляют собой силы, с которыми верхние частицы действуют на нижние, а верхние стрелки, наоборот, силы, с которыми нижние частицы действуют на верхние. В том случае, когда система координат предполагается английской, ось y должна быть направлена назад.

68. (Стр. 189.) Здесь $\delta\alpha$ обозначает приращение, которое получает α в течение времени dt, а δx приращение, которое получает смещение x в течение времени dt. Если разделить все на dt, то тогда можно написать $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{dx}{dt}$ вместо $\delta\alpha$ и δx.

69. (Стр. 193.) При этом следует еще вместо μ согласно уравнению (1) Максвелла подставить значения $4\pi C\rho$ или $\pi\rho$, если, как в максвелловом уравнении [1а], мы полагаем $C = \frac{1}{4}$. Затруднение состоит здесь в том, что μ почти во всех веществах приблизительно одинаково, а ρ должно быть обратно пропорционально i^2. При этом следовало бы все-таки полагать, что для различных веществ количество вихрей, проходящих через единицу поперечного сечения, различно, иначе говоря, неодинакова плотность расположения вихрей, а следовательно, и величина C.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ