вращены из расчетных величин в объекты непосредственного опыта, т. е. в знаки определенных связей между чувственными ощущениями и восприятиями вещей.

542. В первом методе силу определяют при помощи масс и движений системы, которой эта сила производится.

Физически этот метод называется измерением силы по ее происхождению. Он применяется, например, при предположении, что одинаково напряженные пружины, одинаковое количество взрывчатого вещества и т. д. при прочих равных условиях производят равные силы.

543. Во втором методе сила определяется при помощи масс и движений системы, на которую она действует. В физике этот метод обозначается как динамическое измерение силы. Он применялся, например, Ньютоном, когда он выводил силы, действующие на планеты, из их движения.

544. В третьем методе сила определяется тем, что ее приводят в равновесие с известными силами.

Этот метод называется статическим. На нем базируются, например, все измерения силы при помощи весов.

545. Примененные для определения одной и той же силы, при соблюдении выведенных нами отношений, эти три различных метода должны при всех условиях привести к одинаковым результатам, если, впрочем, основной закон, на который опираются наши соображения, действительно правильно охватывает весь возможный механический опыт.

Раздел 5.

СИСТЕМЫ СО СКРЫТЫМИ МАССАМИ

I. ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

546. Определение 1. Циклическими координатами системы называют свободные координаты системы, когда длина бесконечно малого перемещения системы не зависит от значения координат, а зависит лишь от их изменений.

Примечание 1. Циклические координаты существуют, ибо 547.
достаточно, например, взять прямоугольную координату системы, если она является свободной. Циклические координаты всегда могут быть введены, когда возможны такие бесконечно малые перемещения системы, которые не влекут за собой изменения распределения масс в пространстве, но только лишь циклические перестановки масс между собой. Отсюда и происходит их название. Однако циклические координаты могут появляться также в других случаях, как это показывает пример прямоугольных координат.

Примечание 2. Энергия системы не зависит от значения ее 548.
циклических координат, но лишь от скорости изменения их со временем.

Определение 1. Материальная система называется цикли- 549.
ческой системой, если ее энергия является с достаточным приближением однородной квадратичной функцией скоростей изменения ее циклических координат [31].

Циклическая система называется моноциклической, дициклической и т. д., смотря по тому, имеет ли она одну, две и т. д. циклических координат.

В циклической системе не циклические координаты называются также параметрами; скорость изменения циклической координаты называется также циклической интенсивностью.

Примечание 1. Условие, которое нужно приблизительно 550.
выполнить для циклических систем, не может быть вообще строго выполнено за исключением случая, когда система обладает лишь циклическими координатами.

Ибо если некоторая величина является координатой системы, то ее изменение выражает перемещение по крайней мере одной материальной точки системы; энергия этой точки, следовательно, будет квадратичной функцией скорости изменения этой координаты; соответственно этому и для энергии системы имеет силу то же самое положение. Поэтому энергия любой системы со строгой необходимостью содержит скорости изменения всех величин, которые вообще являются координатами системы. Таким образом, энергия циклической системы содержит также скорости изменения ее параметров.

551. Примечание 2. Это условие для существования циклической системы может быть выполнено с любой произвольной степенью приближения, поскольку система вообще обладает циклическими координатами. А именно, оно выполняется в том случае, когда части энергии, которые содержат скорости изменения параметров, исчезающе малы по сравнению с частями, которые зависят от циклических интенсивностей, и это всегда может быть достигнуто тем, что скорости изменения параметров принимаются достаточно малыми или что циклические интенсивности принимаются достаточно большими.

Насколько малыми должны приниматься первые и насколько большими вторые, чтобы была достигнута определенная ступень приближения, зависит от частных значений коэффициентов в выражении энергии. В последующем всегда предполагается, что условие циклической системы выполнено с таким большим приближением, что мы можем сказать, что оно выполнено точно.

552. Обозначение. Обозначим циклические координаты системы через $\mathfrak{p}_\rho$, их число через $\mathfrak{r}$ и импульс системы по $\mathfrak{p}_\rho$ через $\mathfrak{q}_\rho$. Обозначим далее r нециклических координат через p_ρ и количество движения вдоль них через q_ρ. Массу циклической системы обозначим $\mathfrak{m}$.

Обозначим компоненты внешних сил, которые действуют на систему по P_ρ через p_ρ, а по $\mathfrak{P}_\rho$ — через $\mathfrak{p}_\rho$. Силы, которые производит сама система, имеют тогда компоненты вдоль координат p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$, в соответствии с (467), P'_ρ и $\mathfrak{P}'_\rho$.

553. Следствие. Энергию $\mathfrak{E}$ циклической системы можно записать в формах (286):

$$\mathfrak{E}=\frac{1}{2}\mathfrak{m}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}_{\rho\sigma}\dot{\mathfrak{p}}_{\rho\sigma}\dot{\mathfrak{p}}=\frac{1}{2\mathfrak{m}}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\mathfrak{b}_{\rho\sigma}\mathfrak{q}_\rho\mathfrak{q}_\sigma,$$

в которых $\mathfrak{a}_{\rho\sigma}$ и $\mathfrak{b}_{\rho\sigma}$ — функции только p_ρ, но не $\mathfrak{p}_\rho$ (548), в остальном, однако, они имеют те же свойства и соотношения, как $a_{\rho\sigma}$ и $b_{\rho\sigma}$ ((59) и дальше).

Если мы рассматриваем $\mathfrak{E}$ как функцию p_ρ и $\dot{\mathfrak{p}}_\rho$ (как это представляется первой формой уравнения), частная производная должна быть обозначена через $\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}$; если же мы рассматриваем $\mathfrak{E}$ как функцию p_ρ и $\mathfrak{q}_\rho$ (как это представляется второй формой), то частная производная энергии обозначается нами через $\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}$ (ср. (288)).

Следствие 2. Для всех значений ρ имеют место уравнения 554.

$$\frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial\dot{p}_\rho}=q_\rho=0, \qquad (289)\quad (a)$$

$$\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial q_\rho}=\dot{p}_\rho=0, \qquad (290)\quad (b)$$

$$\frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial\mathfrak{p}_\rho}=0, \qquad (c)$$

$$\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial\mathfrak{p}_\rho}=0. \qquad (d)$$

Эти уравнения содержат характеристические признаки циклических систем и на них основаны особые свойства последних.

Уравнение (b), по существу говоря, повторяет замечание (550) о том, что существует противоречие между допущением этой формы для энергии и тем фактом, что p_ρ есть величины, изменяющиеся со временем. Мы должны понимать это уравнение, сообразно с (551), в том смысле, что если $\mathfrak{E}$ весьма приближенно имеет выбранную форму, то p_ρ должны рассматриваться как медленно изменяющиеся величины.

Силы и силовая функция

Задача 1. Определить силу P'_ρ, которую производит цикли- 555.
ческая система по ее параметру p_ρ. На основании уравнений (493c и d) и (554a) мы получим

$$P'_\rho=\frac{\partial\mathfrak{p}\mathfrak{E}}{\partial p_\rho}=-\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial p_\rho}, \qquad (a)$$

или, в развернутой форме

$$P'_\rho=\frac{1}{2}\mathfrak{m}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}}\frac{\partial\mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma\dot{\mathfrak{p}}_\tau=-\frac{1}{2\mathfrak{m}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}}\frac{\partial\mathfrak{b}_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\mathfrak{q}_\sigma\mathfrak{q}_\tau. \qquad (b)$$

556. Следствие. Силы циклической системы по ее параметрам не зависят от скоростей изменения этих параметров. Предполагают, однако, что эти скорости не превышают той величины, которая позволяет рассматривать систему как циклическую.

Таким образом, в электродинамике притяжения двух магнитов не зависят от скоростей их движений, однако только до тех пор, пока эти скорости значительно меньше величины скорости света.

557. Задача 2. Определить силу $\mathfrak{P}'_\rho$, которую производит циклическая система по ее циклическим координатам $\mathfrak{p}_\rho$.

На основании уравнений (493c) и (554c) получается:

$$\mathfrak{P}'_\rho = -\dot{\mathfrak{q}}_\rho, \tag{a}$$

или в развернутом виде, вследствие (270), имеем

$$\mathfrak{q}_\rho = \mathfrak{m}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{a}_{\rho\sigma}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma, \tag{b}$$

$$\mathfrak{P}'_\rho = -\mathfrak{m}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{a}_{\rho\sigma}\ddot{\mathfrak{p}}_\sigma - \mathfrak{m}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \frac{\partial \mathfrak{a}_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{p}_\tau. \tag{c}$$

558. Следствие. Если на циклическую систему действует внешняя сила, компоненты которой по $\mathfrak{p}_\rho$ есть $\mathfrak{P}_\rho$, то циклические количества движения изменяются согласно уравнениям

$$\dot{\mathfrak{q}}_\rho = \mathfrak{P}_\rho.$$

559. Теорема. Если на циклические координаты циклической системы силы не действуют, то все циклические количества движения системы будут постоянны во времени. Ибо если $\mathfrak{P}_\rho$ равно нулю, то из предыдущего уравнения получается интегрированием

$$\mathfrak{q}_\rho = \text{const}.$$

560. Определение. Движение циклической системы, при котором циклическое количество движения остается постоянным, называется адиабатическим движением.

Движение циклической системы, при котором циклические интенсивности ее остаются постоянными, называется изоциклическим движением.

Адиабатической или, соответственно, изоциклической называется сама циклическая система в том случае, если она принуждена выполнять только адиабатическое или изоциклическое движение.

Примечание 1. Аналитическое условие адиабатического 561.
движения состоит в том, что для всех ρ

$$\dot{\mathfrak{q}}_\rho = 0, \quad \mathfrak{q}_\rho = \text{const}.$$

Аналитическое условие изоциклического движения состоит в том, что для всех ρ

$$\ddot{\mathfrak{p}}_\rho = 0, \quad \dot{\mathfrak{p}}_\rho = \text{const}.$$

Примечание 2. Движение циклической системы есть адиа- 562.
батическое, когда на циклические координаты продолжительно не действуют силы.

Движение циклической системы есть изоциклическое, когда она соединена по циклическим координатам с другими системами, которые обладают постоянными скоростями изменения соединенных координат.

Следовательно, для того чтобы движение было изоциклическим, нужно, чтобы соответствующие силы действовали на циклические координаты.

Определение. Если силы циклической системы вдоль ее 563.
параметров можно представить как частные производные некоторой функции этих параметров и постоянных величин, соответствующих этим параметрам, то эта функция называется силовой функцией циклической системы.

Теорема. Как для адиабатического, так и для изоцикличе- 564.
ского движения существует силовая функция.

Для адиабатического движения из (555c) вытекает уравнение

$$P'_\rho = -\frac{\partial}{\partial p_\rho}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{b}_{\sigma\tau}\frac{\mathfrak{q}_\sigma\mathfrak{q}_\tau}{2\mathfrak{m}}. \tag{a}$$

В этом уравнении величины $\mathfrak{q}_\sigma\mathfrak{q}_\tau/\mathfrak{m}$ есть постоянные, $\mathfrak{b}_{\sigma\tau}$ функции только параметров. Соответственно получаем для изоциклических движения из (555b):

$$P'_\rho = \frac{\partial}{\partial p_\rho}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{a}_{\sigma\tau}\frac{\mathfrak{m}}{2}\mathfrak{p}_\sigma\mathfrak{p}_\tau. \tag{b}$$

Здесь снова величины $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_\sigma\mathfrak{p}_\tau$ есть постоянные, а $\mathfrak{a}_{\sigma\tau}$ функции только параметров.

565. Примечание. Силовую функцию для адиабатического и изоциклического движения мы различаем соответственно как адиабатическую и изоциклическую силовую функцию.

Существуют также другие формы движений, для которых имеются силовые функции, однако последние существуют не для любого движения.

566. Добавление 1. Силовая функция адиабатической системы равна уменьшению энергии системы, вычисленному из произвольно выбранного начального состояния. Поэтому она также равна произвольной, т. е. неопределимой, константе, уменьшенной на энергию системы.

567. Добавление 2. Силовая функция изоциклической системы равна приращению энергии системы, вычисленному от произвольно выбранного состояния. Поэтому она также равна энергии системы, уменьшенной на произвольную константу [32].

Взаимные соотношения

568. Теорема 1a. Если в адиабатической системе возрастание параметра p_μ увеличивает компоненту силы по другому параметру p_λ, то и наоборот, возрастание параметра p_λ увеличивает силу по p_μ.

А именно, при бесконечно малом возрастании параметра количественное отношение между причиной и действием в обоих случаях одинаково. Ибо в адиабатической системе мы можем рассматривать p в качестве достаточных независимых элементов

определения P'_ρ, и следовательно, уравнение (564a), имеющее силу для адиабатической системы, дает

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda},$$

что и доказывает утверждаемое.

Теорема 1b. Если в изоциклической системе возрастание параметра p_μ увеличивает компоненту силы по другому параметру p_λ, то и наоборот, возрастание параметра p_λ увеличивает силу по p_μ. А именно, при бесконечно малом возрастании параметра, количественное отношение между причиной и действием в обоих случаях одинаково. Ибо и в изоциклической системе мы можем рассматривать p_ρ в качестве достаточных независимых элементов определения P'_ρ, и следовательно, уравнение (564b), имеющее силу для изоциклической системы, дает 569.

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda},$$

что и требовалось доказать.

Надо заметить, что это уравнение отличается от предыдущего по смыслу, хотя по форме оно идентично.

Примечание. Чтобы обе предыдущие теоремы получили физическое применение, достаточно, чтобы в циклической системе два параметра и силы по ним были доступны для непосредственного наблюдения. 570.

Теорема 2a. Если в циклической системе увеличение циклического количества движения $\mathfrak{q}_\mu$ при закрепленных параметрах имеет следствием увеличение силы по параметру p_λ, то адиабатическое увеличение параметра p_λ вызывает уменьшение циклической интенсивности $\mathfrak{p}_\mu$, и наоборот. А именно, при бесконечно-малом изменении параметра количественные отношения между причиной и действием в обоих случаях будут одинаковы. Ибо мы имеем 571.

$$P'_\lambda = -\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial p_\lambda}, \tag{555a}$$

$$\mathfrak{p}_\mu = \frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{q}_\mu}; \tag{290}$$

следовательно,

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \mathfrak{q}_\mu} = -\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}{\partial p_\lambda}. \tag{a}$$

В этом уравнении теорема находит правильное выражение.

572. Следствие. Если в некоторой моноциклической системе увеличение циклической интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}$ при фиксированных параметрах имеет следствием увеличение силы по параметру p_λ, то адиабатическое увеличение параметра p_λ вызывает уменьшение циклической интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}$, и наоборот. Ибо в моноциклической системе увеличение циклической интенсивности и циклического количества движения непосредственно связаны и при постоянных параметрах существуют одновременно. Именно, для моноциклической системы имеем

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{m}\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{p}},$$

где $\mathfrak{a}$ есть существенно положительная (62) функция параметров системы.

573. Теорема 2b. Если в циклической системе увеличение циклической интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ при заданных параметрах влечет за собой увеличение силы по параметру p_λ, то изоциклическое увеличение параметра p_λ вызывает увеличение циклического количества движения $\mathfrak{q}_\mu$, и наоборот. А именно, при бесконечно малом изменении параметра количественное отношение между причиной и действием в обоих случаях одинаково. Ибо мы имеем

$$P'_\lambda = \frac{\partial_{\mathfrak{p}} \mathfrak{E}}{\partial p_\lambda}, \quad (555a) \qquad \mathfrak{q}_\mu = \frac{\partial_{\mathfrak{p}} \mathfrak{E}}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}; \tag{289}$$

следовательно,

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} = \frac{\partial \mathfrak{q}_\mu}{\partial p_\lambda}. \tag{a}$$

Это уравнение и выражает теорему.

574. Следствие. Если в моноциклической системе увеличение циклического количества движения $\mathfrak{q}$ при фиксированных параметрах вызывает увеличение силы по параметру p_λ, то изоциклическое увеличение параметра вызывает увеличение циклического количества движения $\mathfrak{q}$, и наоборот.

Основание то же самое, что и в (572).

Примечание. Предыдущие теоремы 2a и 2b имеют физиче- 575.
ское применение тогда, когда можно наряду с циклической интенсивностью определить непосредственно и соответствующее циклическое количество движения, т. е. без знания коэффициентов $\mathfrak{a}_{\rho\sigma}$. Этот случай имеет место в электростатике.

Например, разность потенциалов проводников соответствует циклической интенсивности, а количество электричества в проводниках — циклическому импульсу, и обе величины могут быть определены независимо одна от другой.

Следствие требует лишь непосредственной определимости либо циклической интенсивности, либо циклического импульса.

Теорема 3a. Если в циклической системе действующая на 576.
циклическую координату $\mathfrak{p}_\mu$ сила имеет следствием временное возрастание силы по параметру p_λ, то адиабатическое увеличение параметра p_λ вызывает уменьшение циклической интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$, и наоборот. А именно, при бесконечно малом изменении параметра количественное отношение между причиной и действием в обоих случаях будет одинаковым.

Ибо если мы представим себе, что в левой части уравнения (571a) изменения $\partial P'_\lambda$ и $\partial \mathfrak{q}_\mu$ возникли за время dt, и если мы разделим величины в числителе и в знаменателе на это время dt и примем во внимание (558), рассматривая изменение $\partial \mathfrak{q}_\mu$ как действие силы $\mathfrak{P}_\mu$, то получим

$$\frac{\dot{P}'_\lambda}{\mathfrak{P}_\mu} = -\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}{\partial p_\lambda}.$$

Это уравнение и выражает теорему.

Теорема 3. Если в циклической системе увеличение цикли- 577
ческой интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ при фиксированных параметрах имеет следствием увеличение силы по параметру p_λ, то изоциклическое увеличение параметра p_λ вызывает уменьшение силы системы по циклической координате $\mathfrak{p}_\mu$, и наоборот.

А именно, при бесконечно малом изменении параметра количественное отношение между причиной и действием в обоих случаях одинаково.

Ибо если мы представляем в правой части уравнения (573a) изменения $\partial \mathfrak{q}_\mu$ и ∂p_λ возникшими за время dt, то можем написать:

$$\partial \mathfrak{q}_\mu = \frac{d}{dt}\,\partial \mathfrak{q}_\mu \cdot dt = \partial \dot{\mathfrak{q}}_\mu dt = -\partial \mathfrak{p}'_\mu dt, \tag{557a}$$

$$\partial p_\lambda = \frac{d}{dt}\,\partial p_\lambda dt = \partial \dot{p}_\lambda dt.$$

Следовательно, это уравнение получает вид

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} = -\frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \dot{p}_\lambda},$$

что и выражает нашу теорему.

578. Примечание. Теоремы 3a и 3b имеют физическое применение тогда, когда наряду с циклической интенсивностью доступна непосредственному наблюдению также соответствующая циклическая компонента силы.

Этот случай имеет место, например, в электродинамике, в которой теоремы 3a и 3b получают особую ясность и наглядность.

Энергия и работа

579. Теорема 1. При изоциклических движениях циклической системы работа, которую она воспринимает через соединение своих циклических координат, равняется удвоенной работе, которую она отдает через связи своих параметров. При изоциклическом движении $\dot{\mathfrak{p}}_\rho$ для всех ρ равны нулю.

Следовательно, по (514) и (557) работа, которую производят в единицу времени действующие на циклические координаты внешние силы, равна

$$-\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{P}'_\rho \dot{\mathfrak{p}}_\rho = \mathfrak{m} \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial \mathfrak{a}_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{p}_\tau \dot{\mathfrak{p}}_\rho.$$

Однако отнесенная к единице времени работа, которую производит система своими силами по параметрам, находится при помощи (555) равной

$$\sum_{\rho=1}^{r} P'_\rho \dot{p}_\rho = \frac{1}{2}\,\mathfrak{m} \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau \dot{p}_\rho.$$

Суммы обоих уравнений тождественны с точностью до обозначений, и члены первого уравнения поэтому в два раза больше, чем члены последнего.

Следствие. Если изоциклическая система производит работу при помощи сил по своим параметрам, то энергия системы возрастает как раз на величину произведенной работы. 580.

Если изоциклическая система воспринимает работу при помощи сил по ее параметрам, то энергия системы при этом уменьшается как раз на величину воспринятой работы.

Ибо приращение энергии системы равно разности работы, воспринимаемой через циклические координаты и отдаваемой через параметры.

Примечание. Если адиабатическая система совершает работу при помощи сил, отнесенных к ее параметрам, то при этом энергия системы уменьшается как раз на величину совершенной работы. 581.

Если адиабатическая система воспринимает работу при помощи сил, отнесенных к ее параметрам, то при этом энергия системы возрастает как раз на величину воспринятой работы. Ибо в адиабатической системе через циклические координаты работа не воспринимается (562).

Теорема 2. При адиабатическом перемещении циклической системы циклические интенсивности всегда претерпевают изменения в том смысле, что силы по параметрам, вызванные этими изменениями, совершают отрицательную работу. 582.

Пусть при перемещении координаты p_ρ претерпевают изменение δp, а интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}_\rho$ претерпевают изменения $\delta \dot{\mathfrak{p}}_\rho$. Если бы имели место только последние изменения, то силы P'_ρ изменились бы на значение (555b):

$$\delta P'_\rho = \mathfrak{m}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$$

и именно эти $\delta P'_\rho$ являются теми силами, которые в нашей теореме обозначены как возникшие вследствие действия $\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$.

Производимая ими работа равна

$$\sum_{\rho=1}^{r}\delta P'_\rho \delta p_\rho = \mathfrak{m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}}\frac{\partial\mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau\delta p_\rho = \mathfrak{m}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}}\delta\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau.$$

Теперь надо доказать, что эта работа необходимо является отрицательной.

Для адиабатического движения имеем

$$\mathfrak{q}_\tau = \mathfrak{m}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma = \text{const},$$

следовательно,

$$\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\delta\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma = -\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\delta\dot{\mathfrak{p}}_\sigma.$$

Если мы образуем эти уравнения для всех τ и умножим их соответственно на $\mathfrak{m}\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$ и сложим, то получим в левой части предыдущее выражение для рассматриваемой работы, а в правой — необходимо отрицательную величину (62), что и требовалось доказать.

583. Следствие. При адиабатическом перемещении циклической системы циклические интенсивности претерпевают всегда изменения в том смысле, что вызываемые этими изменениями силы стремятся затормозить образующееся движение. Фактически это только другая форма выражения предыдущей теоремы. Она соответствует в электродинамике формулировке закона Ленца.

584. Замечание. При каждом бесконечно малом движении моноциклической системы работа, воспринятая через циклические координаты, относится к энергии системы, как относится удвоенное приращение циклического количества движения к самому количеству движения. Ибо работа $d\mathfrak{Q}$, воспринятая в течение времени dt через циклическую координату $\mathfrak{p}$, равна

$$d\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}\dot{\mathfrak{p}}dt = \dot{\mathfrak{p}}d\mathfrak{q}.$$

Энергию $\mathfrak{E}$ же системы можно записать так:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{p}}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}} = 2\frac{d\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. При любом движении моноциклической системы 585.
выражение

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

есть полный дифференциал некоторой функции параметров и циклической интенсивности системы, и именно функции

$$2\log\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_0},$$

где $\mathfrak{q}_0$ означает циклическое количество движения в произвольно выбранном начальном положении. Эта функция называется также энтропией моноциклической системы.

Следствие 2. Значение интеграла, образованного для любого 586.
конечного движения моноциклической системы,

$$\int\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

зависит только от состояния системы в начальном и конечном положении движения, но не от состояний в промежуточных положениях. Значение этого интеграла становится равным нулю для каждого движения, которое приводит систему к ее начальному состоянию. Ибо значение этого интеграла равно разности энтропий в начальном и конечном состоянии движения.

587. Следствие 3. При адиабатическом движении моноциклической системы энтропия остается постоянной. Ибо для адиабатического движения $\mathfrak{P}$, а также $d\mathfrak{Q}$ равны нулю. Адиабатическое движение моноциклической системы называется поэтому также изэнтропическим.

Временной интеграл энергии

588. Замечание 1. Если при адиабатическом движении циклической системы циклические координаты $\mathfrak{p}_\rho$ изменяются в известное конечное время на значение $\bar{\mathfrak{p}}_\rho$, то временной интеграл энергии системы за этот промежуток времени равняется

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{q}_\rho \bar{\mathfrak{p}}_\rho,$$

ибо энергия системы может быть записана в форме (286)

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{q}_\rho \dot{\mathfrak{p}}_\rho.$$

Здесь для адиабатического движения $\mathfrak{q}_\rho$ являются постоянными.

589. Замечание 2. Вариация временного интеграла энергии адиабатической системы при измененном движении системы зависит, во-первых, от вариации параметров в течение всего времени, за которое берется интеграл, и, во-вторых, от постоянных во времени вариаций, которые испытывают постоянные во времени циклические количества движения.

590. Обозначения. Примем следующие обозначения: δ — вариация, при которой циклические количества движения подвергаются произвольным изменениям; $\delta_\mathfrak{q}$ — вариация, при которой циклические количества движения не варьируются; наконец, $\delta_\mathfrak{p}$ — вариация, при которой циклические количества движения имеют такую вариацию, что начальное и конечное значение циклических координат остаются неизменными.

Следствие. Из обозначений следует для всех ρ 591.

$$\delta_\mathfrak{q}\mathfrak{q}_\rho = 0, \quad \delta_\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}_\rho = 0.$$

Таким образом по (588) для произвольных вариаций параметров получим

$$\delta_\mathfrak{q}\int \mathfrak{E}\,dt = \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{q}_\rho \delta_\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{p}}_\rho, \tag{a}$$

$$\delta_\mathfrak{p}\int \mathfrak{E}\,dt = \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \bar{\mathfrak{p}}_\rho \delta_\mathfrak{p}\mathfrak{p}_\rho. \tag{b}$$

Примечание. В адиабатической системе всегда возможно, 592. и, вообще говоря, только одним способом, сообщить циклическим количествам движения при любой вариации параметров такие вариации, чтобы начальное и конечное значения циклических координат оставались постоянными. Ибо из общего соотношения

$$\dot{\mathfrak{p}}_\rho = \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{b}_{\rho\sigma}\mathfrak{q}_\sigma$$

следует для адиабатической системы, в которой $\mathfrak{p}_\rho$ изменяется от значения $\mathfrak{p}_{\rho 0}$ до значения $\mathfrak{p}_{\rho 1}$:

$$\mathfrak{p}_{\rho 1} - \mathfrak{p}_{\rho 0} = \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{q}_\sigma \int_0^1 \mathfrak{b}_{\rho\sigma}\,dt.$$

Следовательно, при любой вариации параметров и циклических количеств движения

$$\delta\mathfrak{p}_{\rho 1} - \delta\mathfrak{p}_{\rho 0} = \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{q}_\sigma \delta\int_0^1 \mathfrak{b}_{\rho\sigma}\,dt + \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \delta\mathfrak{q}_\sigma \int_0^1 \mathfrak{b}_{\rho\sigma}\,dt.$$

Эти уравнения образуют $\mathfrak{r}$ неоднородных линейных уравнений для $\mathfrak{r}$ величин $\delta\mathfrak{q}_\sigma$, которые, следовательно, всегда допускают одно и только одно решение, в частности и тогда, когда расположенные в левой части вариации исчезают.

Вариации, которые мы обозначаем через $\delta_{\mathfrak{p}}$, следовательно, всегда возможны при любой вариации параметров.

593. Теорема. При равных, в остальном произвольных, вариациях параметров в течение известного времени вариации временного интеграла энергии в адиабатической системе противоположны и равны, если один раз оставляют неизменными циклические количества движения системы, а другой раз их варьируют таким образом, что начальные и конечные значения циклических координат остаются неизменными.

Ибо для произвольной вариации имеем

$$\delta\int \mathfrak{E}dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int \mathfrak{E}dt + \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \int \frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{q}_\rho}\,\delta\mathfrak{q}_\rho dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int \mathfrak{E}dt + \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \bar{\mathfrak{p}}_\rho \delta\mathfrak{q}_\rho.$$

В частности, для вариации, при которой начальные и конечные значения $\mathfrak{p}_\rho$ остаются неизменными,

$$\delta_{\mathfrak{p}}\int \mathfrak{E}dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int \mathfrak{E}dt + \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \bar{\mathfrak{p}}_\rho \delta_{\mathfrak{p}}\mathfrak{q}_\rho.$$

Если вычтем удвоенное уравнение (591b), то получим

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int \mathfrak{E}dt = -\delta_{\mathfrak{p}}\int \mathfrak{E}dt,$$

что и требовалось доказать.

Это положение родственно положениям (96) и (293).

II. СКРЫТЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

Объяснения и определения

594. 1. Мы говорим, что система содержит скрытые массы, если при помощи доступных наблюдению координат системы определяются положения не всех масс системы, а лишь части их.

595. 2. Те массы, положения которых при полном задании наблюдаемых координат системы остаются неизвестными, называются скрытыми массами, их движения — скрытыми движениями, а их координаты — скрытыми координатами.

В противоположность этому, остальные массы системы называются видимыми массами, их движения — видимыми движениями, а их координаты — видимыми координатами.

3. Задача, которую механика должна решить в отношении 596.
системы со скрытыми массами, состоит в следующем: определить движения видимых масс системы, а также изменения видимых координат системы, несмотря на отсутствие знания положения скрытых масс.

4. Система, которая содержит скрытые массы, отличается от 597.
системы без скрытых масс только в отношении нашего знания системы.

Все предыдущие положения нашей механики остаются поэтому применимыми к системам и со скрытыми движениями, если под массами, координатами и т. д. мы будем понимать совокупные массы, координаты и т. д.

Изменение этих положений становится необходимым только тогда, когда мы ограничиваем наши исследования лишь видимыми величинами.

Поставленная задача может поэтому быть сформулирована еще и так: какие изменения должны претерпеть изложенные положения нашей механики, если под массами, координатами и т. д. понимать лишь видимые массы, координаты и т. д.

Ясно, что задача, поставленная в той или другой форме, 598.
неразрешима без определенных данных о влиянии, которое оказывают скрытые массы на движение видимых масс. Однако получить такие данные возможно. Ведомая система, или система, подверженная действию сил, уже может рассматриваться как система со скрытыми массами, так как неизвестные массы ведомой системы, или системы, подвергающейся действию, рассматривают как скрытые.

Однако вообще в этих случаях возможно физически различить массы ведомой или производящей силы системы, и тогда понимание их именно как скрытых будет зависеть от нас.

Между тем, теперь мы рассматриваем и такие случаи, в которых познание скрытых масс на самом деле невозможно ни при каком физическом наблюдении.

599. 6. Повторяющиеся движения, т. е. циклические движения, являются часто скрытыми движениями, так как они не вызывают изменения в распределении масс, т. е. в картине мира.

Таким образом, движение однородной жидкости в замкнутом сосуде является для наблюдения скрытым; оно делается видимым только тогда, когда от него отнимается свойство строго циклического движения введением в жидкость пыли или другим аналогичным способом.

Наоборот, скрытые движения почти всегда являются циклическими движениями. Неповторяющиеся движения влекут за собой всегда рано или поздно более или менее значительные изменения в распределении массы, т. е. в картине мира, и становятся в результате этого видимыми.

600. 7. Циклические движения также не могут долго оставаться скрытыми, поскольку мы получаем возможность оказывать влияние на отдельные циклические координаты и произвольно изменять циклические интенсивности. Многообразие нашего влияния на систему в этом случае столь же велико, как и действительное многообразие системы, и мы можем делать заключение в отношении одних, базируясь на других. Дело обстоит иначе, если свободное непосредственное действие на циклические координаты продолжительно исключено. Это может иметь место в адиабатических циклических системах (560), и поэтому в них мы должны главным образом искать движения, продолжительное время скрытые для нашего наблюдения. Такими случаями, прежде всего, мы и ограничиваем рассмотрение скрытого движения.

Наш метод исследования приводит к тому, что мы и в этих случаях рассматриваем скрытые движения так, как если бы они были видимыми, и затем дополнительно исследуем, какие из наших утверждений остаются по-прежнему применимыми, несмотря на предположение существования скрытых масс.

Консервативные системы

О п р е д е л е н и е 1. Материальная система, которая не содержит никаких других скрытых масс, кроме тех, которые образуют адиабатическую циклическую систему, называется консервативной системой. 601.

Это наименование возникло благодаря одному свойству таких систем, которое выявится позднее. Оно достаточно оправдывается уже потому, что примыкает к существующему способу выражения механики.

П р и м е ч а н и е. Каждая консервативная система может рассматриваться как состоящая из двух частичных систем, из которых одна содержит лишь видимые, а другая лишь скрытые массы совокупной системы. Координаты частичной видимой системы, т. е. видимые координаты полной системы, являются одновременно параметрами скрытой частичной системы. Обозначим массу видимой частичной системы m, ее координаты p_ρ и количество движения по p_ρ через q_ρ. Массы скрытой частичной системы обозначим $\mathfrak{m}$, ее координаты через $\mathfrak{p}_\rho$ и количества движения через $\mathfrak{q}_\rho$. 602.

О п р е д е л е н и е 2. Под силовой функцией консервативной системы мы понимаем силовую функцию ее скрытой частичной системы (563). Следовательно, силовая функция консервативной системы вообще задана как функция видимых координат и постоянных величин, без того чтобы была явно определена связь этих постоянных величин с количеством движения частичной циклической системы. При этом на вид этой функции в нашем анализе не налагается никаких ограничений. Обозначим силовую функцию системы через U. 603.

З а м е ч а н и е. Следовательно, движение видимых масс консервативной системы вполне определяется, если силовая функция ее задана как функция ее видимых координат, и это задание делает ненужными какие бы то ни было сведения о скрытых массах системы. Ибо из заданной формы силовой функции вытекают полностью силы, которые производит скрытая частичная система 604.

на видимую, и эти силы вполне представляют влияние первой на последнюю ((457) и дальше).

605. Определение 2. Та часть энергии, которая вызвана движением видимых масс консервативной системы, называется кинетической энергией полной системы.

Наоборот, энергия скрытых масс называется потенциальной энергией всей системы.

Кинетическая энергия обозначается так же, как живая сила, которая по более старому способу выражения обозначала удвоенную кинетическую энергию.

606. Обозначения. Обозначим кинетическую энергию через T. T является соответственно этому однородной квадратичной функцией p_ρ, и с равным правом q_ρ; коэффициенты этой функции суть функции p_ρ; через $\partial_p T$ обозначим частную производную T, если p_ρ и $\dot{p}_\rho$ рассматривать как независимые друг от друга переменные; при помощи $\partial_q T$ обозначаем частную производную только тогда, когда p_ρ и q_ρ мы рассматриваем как независимые друг от друга переменные.

Энергию скрытой циклической частичной системы, т. е. потенциальную энергию полной системы, обозначим, принимая во внимание уже принятые обозначения (553), через $\mathfrak{E}$.

607. Примечание. Кинетическая и потенциальная энергии консервативной системы различаются не их природой, а лишь нашей точкой зрения или ограниченностью нашего знания о массах системы.

Та энергия, которая при известном состоянии нашего понимания и знания обозначается как потенциальная, при изменении нашего понимания и знания может оказаться кинетической.

608. Следствие 1. Энергия консервативной системы равна сумме ее кинетической и потенциальной энергий.

Мы обозначим совокупную энергию консервативной системы через E, и имеем тогда

$$E = T + \mathfrak{E}$$

Следствие 2. В свободной консервативной системе сумма кинетической и потенциальной энергии есть величина постоянная во времени; кинетическая энергия возрастает только за счет потенциальной, и наоборот (340). 609.

Следствие 3. В свободной консервативной системе разность между кинетической энергией и силовой функцией постоянна во времени. Кинетическая энергия и силовая функция увеличиваются и уменьшаются одновременно и притом на равные величины (566). 610.

Следствие 4. Разность между кинетической энергией и силовой функцией консервативной системы мы называем математической или аналитической энергией системы. 611.

Мы обозначим математическую энергию через h. Она отличается от энергии системы только на постоянную, независимую от времени и положения системы, но вообще говоря, неизвестную.

Для математического применения она может вполне заменить энергию, однако она лишена физического смысла, которым обладает энергия.

Примечание. Выше данные определения можно выразить при помощи уравнения 612.

$$T - U = h \tag{a}$$

или, при другом написании,

$$U + h = T. \tag{b}$$

Если консервативная система — свободная, то в этом уравнении величина h является не зависящей от времени постоянной, и в этом случае уравнение обозначается как уравнение энергии для консервативной системы.

Из (b) и (608) можно произвести еще следующую связь:

$$U + h = E - \mathfrak{E}.$$

Определение 5. Временной интеграл кинетической энергии системы, взятый между двумя определенными моментами времени как пределами интегрирования называется действием или расхо- 613.

дом силы в течение данного промежутка времени. Действие при движении консервативной системы в течение заданного времени выражается интегралом

$$\int T dt,$$

взятым между начальным и конечным значениями данного промежутка времени.

614. Примечание. Если обозначим через ds элемент пути видимой частичной системы, v — скорость последней на ее пути, то действие можно также представить в форме интеграла

$$\frac{1}{2} m \int v ds,$$

взятого между положениями, в которых система находится в начале и конце рассматриваемого промежутка времени.

615. Примечание. Термин «действие» для интеграла, о котором идет речь, часто осуждался как неподходящий.

Однако непонятно, почему предложенный Якоби [33] термин «расход силы» был бы лучше, или какое имеет преимущество перед этими терминами первоначально выбранное Мопертюи [34] выражение «action». Все эти названия вызывают представление, не имеющее ничего общего с названным предметом.

Так же трудно понять, каким образом суммирование энергии, существовавшей в различные времена, могло бы дать нечто другое, кроме вычислительной величины, и поэтому не только трудно, но и невозможно найти для рассматриваемого интеграла подходящее обозначение в простом смысле.

Также и другие термины и обозначения, вводимые в этом разделе, оправданы внутренней целесообразностью в меньшей степени, чем небходимостью примкнуть возможно ближе к существующему способу выражения механики.

Дифференциальные уравнения движения

616. Задача. Найти дифференциальные уравнения движения консервативной системы.

Решение задачи состоит лишь в задании уравнений движения видимой частичной системы. Пусть масса этой частичной системы будет m, ее координаты p_ρ и пусть k уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho} dp_\rho = 0 \qquad \text{(a)}$$

будут ее уравнениями условий. Так как p_ρ одновременно есть параметры скрытой частичной системы, то компоненты сил, которые эта последняя производит на видимую частичную систему, равны $\partial U/\partial p_\rho$ (563). Если на видимую частичную систему действуют через связи с другими видимыми системами еще другие силы, то компоненты их пусть будут P_ρ. Тогда, по (481), уравнения движения системы есть

$$m f_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial p_\rho} + P_\rho \qquad \text{(b)}$$

и эти r уравнений вместе с k уравнениями (a) достаточны для определения $r+k$ величин $\ddot{p}_\rho$ и $P_\varkappa$.

Примечание 1. Если консервативная система свободная, т. е. если на нее не действуют внешние силы, то P_ρ равны нулю, и уравнения движения получают форму 617.

$$m f_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial p_\rho}.$$

Примечание 2. Если, в частности, координата p_ρ является свободной координатой видимой частичной системы, то уравнения движения, которые принадлежат индексу ρ, принимают вид 618.

$$m f_\rho = \frac{\partial U}{\partial p_\rho},$$

так как в этом случае все $p_{\varkappa\rho}$ исчезают.

Примечание 3. Подставляя в уравнения от (616) до (618) для ускорений по p_ρ их различные выражения по (291), мы получаем для этих уравнений ряд различных форм, соответствующих 619.

тем формам, которые были получены для вполне известной системы в (368) и дальше.

620. Следствие 1. Если в голономной консервативной системе все p_ρ являются свободными координатами и если положим для краткости

$$T+U=L,$$

то уравнения движения системы можно представить в форме $2r$ уравнений:

$$q_\rho=\frac{\partial_p L}{\partial \dot{p}_\rho}, \tag{a}$$

$$\dot{q}_\rho=\frac{\partial_p L}{\partial p_\rho}, \tag{b}$$

которые могут быть понимаемы как дифференциальные уравнения первого порядка для $2r$ величин p_ρ и q_ρ и которые вместе с определенными начальными значениями однозначно определяют изменение этих величин.

Ибо если мы подставим значение L, развернем частные производные и примем во внимание, что U не содержит $\dot{p}_\rho$, что, следовательно,

$$\frac{\partial_p U}{\partial \dot{p}_\rho}=0, \qquad \frac{\partial_p U}{\partial p_\rho}=\frac{\partial U}{\partial p_\rho},$$

то мы увидим, что уравнения (a) совпадают с вытекающим из определения соотношением между q_ρ и $\dot{p}_\rho$, а уравнения (b) — с уравнениями движения в форме (618) ((289) и (291)).

621. Примечание. Функция L, при помощи которой дифференциальные уравнения движения принимают простую форму уравнений (620a и b), мы называли до сих пор Лагранжевой функцией системы.

Следовательно эта функция существует только для голономной системы и в этом случае она равна разности кинетической и потенциальной энергий, если не принимать во внимание остающуюся произвольную константу.

Следствие. Если в голономной консервативной системе p_ρ являются свободными координатами и если положим для краткости 622.

$$T-U=H,$$

то уравнения движения системы можно представить в форме $2r$ уравнений

$$\dot{p}_\rho=\frac{\partial_q H}{\partial q_\rho}, \tag{a}$$

$$\dot{q}_\rho=-\frac{\partial_q H}{\partial p_\rho}, \tag{b}$$

которые могут быть рассматриваемы как дифференциальные уравнения первого порядка для $2r$ величин p_ρ и q_ρ и которые вместе с начальными значениями однозначно определяют изменение этих величин.

Ибо если мы подставим значение H и заметим, что U не содержит q_ρ, т. е., что

$$\frac{\partial_q U}{\partial q_\rho}=0, \qquad \frac{\partial_q U}{\partial p_\rho}=\frac{\partial U}{\partial p_\rho},$$

то увидим, что уравнения (a) представляют вытекающие из определения соотношения между q_ρ и $\dot{p}_\rho$, в то время как уравнения (b) совпадают с уравнениями движения (618) системы, введенными из опыта (290), (294).

Примечание. Функция H, при помощи которой обычные дифференциальные уравнения движения принимают простой вид уравнений (622a и b), называется Гамильтоновой функцией системы. 623.

Эта функция имеет место, следовательно, лишь для голономных систем, и для таковых она равна сумме кинетической и потенциальной энергии, причем не принимается во внимание остающаяся произвольная константа; следовательно она равна совокупной энергии системы, не рассматривая произвольной постоянной.

Вообще для системы с любым, не обязательно циклическим скрытым движением допустимо определить Гамильтонову функцию при помощи уравнений (622a и b), именно как функцию видимых p_ρ и q_ρ, в результате использования которых (предполагая, что функция существует) уравнения движения принимают именно эту простую форму.

При таком более общем определении Гамильтонова функция не всегда равна сумме кинетической и потенциальной энергии.

624. Замечание. Из уравнений (620) и (622) можно для системы со скрытыми циклами получить взаимные свойства движения последних, которые мы имели для вполне известных систем в (378) и (281). Однако этот новый вывод не требуется, так как в сущности этих соотношений уже заключено, что каждое из них имеет силу независимо от того, являются ли встречающиеся в них координаты, моменты и т. д. видимыми или скрытыми координатами, моментами и т. д.

Интегральные предложения для голономной системы

625. Замечание 1. Интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

при переходе свободной голономной системы со скрытыми адиабатическими циклами между двумя достаточно близкими положениями 0 и 1 будет меньше для естественного движения системы, чем для любого возможного движения, которое в равное время переводит как видимые, так и скрытые координаты от начальных значений к конечным.

Ибо, так как $T - U$ равно энергии системы, увеличенной на одинаковую для всех возможных движений постоянную (611), то это замечание есть не что иное, как приспособление теоремы (358) к рассматриваемым условиям.

626. Примечание 1. Если отбросить ограничения на достаточную близость концевых положений, то можно лишь утверждать, что вариация интеграла исчезает при переходе к какому-нибудь другому сравниваемому движению. При использовании обозначений (590) наше утверждение может быть выражено в следующей форме

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = 0,$$

т. е. вариация выполняется при переходе от естественного движения к любому возможному, в то время как вариация начального и конечного моментов времени, а также начального и конечного значения видимых координат исчезает (ср. (359)).

Примечание 2. Замечание 1 однозначно отличает естествен- 627.
ное движение от любого возможного движения, и оно может поэтому служить для того, чтобы определить естественное движение, поскольку возможно фактически образовать вариацию требуемую замечанием 1.

Если, однако, как мы предположили, циклические координаты скрытые, то образование вариации $\delta_{\mathfrak{p}}$ невозможно, и хотя теорема не теряет своей правильности, но теряет свою применимость.

Теорема 1. Интеграл 628.

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

при переходе свободной голономной системы со скрытыми адиабатическими циклами между двумя достаточно близкими положениями всех видимых масс будет меньше для естественного движения, чем для любого возможного движения, которое за то же время и с теми же самыми импульсами скрытых циклических движений, переводит видимые координаты из заданного начального значения к заданному конечному значению.

Мы проведем доказательство, основываясь на замечании (625). Именно, мы сопоставляем, насколько это возможно по (592), с каждым из движений, изменяющихся согласно теореме, второе движение, при котором видимые координаты претерпевают то же самое изменение, а циклические количества движения изменяются так, что начальные и конечные значения циклических координат остаются первоначальными. Вариацию при переходе к движению первого типа мы должны обозначить, согласно (590), через $\delta_{\mathfrak{q}}$, а вариацию при переходе к соответствующему движению второго типа через $\delta_{\mathfrak{p}}$.

Теперь мы имеем, во-первых, так как T зависит от видимых координат,

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int T dt = \delta_{\mathfrak{p}} \int T dt. \tag{a}$$

Во-вторых, так как промежуток времени движения не варьируется и $-U$ отличается от энергии циклического движения (566) лишь на постоянную величину, то из (593) следует:

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int U dt = -\delta_{\mathfrak{p}} \int U dt. \tag{b}$$

В результате сложения (a) и (b) получается

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int (T+U)\, dt = \delta_{\mathfrak{p}} \int (T-U)\, dt. \tag{c}$$

Вариация в правой части (c) имеет всегда (626), (625), для естественного движения значение, равное нулю, и отрицательное значение для достаточно близких концевых положений, следовательно, также и вариация левой части (c).

Интеграл в левой части сам имеет, следовательно, для естественного движения и достаточно близких концевых положений минимальное значение, что и требовалось доказать.

629. Примечание 1. Если ограничение в отношении достаточно близких положений отбросить, то можно лишь утверждать, что вариация интеграла исчезает.

Аналитическое выражение этого положения, в противоположность (626), выражается нами так

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int_{t_0}^{t_1} (T+U) dt = 0.$$

630. Примечание 2. Выраженное в этой теореме свойство естественного движения однозначно отличает его от каждого другого возможного движения.

Вариация $\delta_{\mathfrak{q}}$ может быть образована, хотя циклические движения рассматриваются как скрытые, ибо их образование требует лишь, чтобы постоянные, встречающиеся в силовой функции, оставались неизменными. Поэтому теорема может применяться для определения естественного движения консервативной системы; ее значение, однако, строго ограничено голономными системами.

Примечание 3. Предыдущая теорема, изложенная в смысле 631.
примечания 2, называется принципом Гамильтона. Ее физическое значение, в соответствии с нашей точкой зрения, не может быть иным, чем значение теоремы (358), из которой мы вывели этот принцип.

Сам принцип представляет собой преобразование, которому мы должны подвергнуть (358), чтобы оно, несмотря на наше незнание деталей циклического движения, оставалось применимым для определения движения видимой системы.

Замечание 2. Если мы обозначим через ds элемент пути видимых 632.
масс свободной голономной системы, которая содержит скрытые адиабатические циклы, то интеграл

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}$$

при переходе между достаточно близкими положениями 0 и 1 будет меньше для естественных путей системы, чем для любого возможного пути, который переводит значения как видимых, так и циклических координат из заданного начального значения к заданному конечному значению.

Величина h должна при этом рассматриваться как изменяющаяся при переходе от одного естественного движения к другому постоянная, имеющая, однако, одинаковое значение для всех возможных путей, сравниваемых с данным естественным путем.

Ибо, введя время как вспомогательную величину и сделав при этом произвольное, однако, допустимое предположение, что система пробегает рассматриваемый путь с постоянной скоростью, и именно с такой скоростью, что константа h имеет значение аналитической энергии, найдем

$$T = U + h = \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2}. \qquad (a)$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл равен

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} dt.$$

Следовательно, он равен, с точностью до множителя, промежутку времени перехода. Этот последний, являясь в соответствии с (352) следствием (347), имеет минимум для данного значения энергии, т. е. постоянной h. Наше замечание, следовательно, есть содержание теоремы (352), выраженной при помощи введенных обозначений.

633. Примечание 1. Если отбросим ограничение в отношении достаточной близости положений, то можно утверждать только об исчезновении вариации (353).

В нашем обозначении это можно представить в виде

$$\delta_p \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U + h}} = 0.$$

634. Примечание 2. При помощи свойств, рассмотренных в замечании 2, естественные пути, которые соответствуют различным значениям постоянной h, однозначно отличаются от любого возможного пути, и теорема может служить поэтому для определения естественных путей системы, если можно образовать вариации δ_p.

Если, однако, как мы предполагали, детали циклического движения скрыты, то это образование невозможно, и хотя замечание не теряет своей справедливости, однако теряет свою применимость для практических целей.

Теорема 2. При переходе свободной голономной системы, 635.
которая содержит скрытые адиабатические циклы, между двумя достаточно близкими положениями 0 и 1 видимых масс, интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{U + h}\, ds$$

будет меньше для естественных путей, чем для каких-либо других возможных путей, которые переводят с теми же значениями скрытых циклических количеств движения и постоянных h видимые координаты из заданных начальных значений в заданные конечные значения.

Мы снова приводим доказательство теоремы, относя его к замечанию (632). Пользуясь временем как вспомогательной величиной, делаем произвольное, однако допустимое предположение, что система проходит рассматриваемые пути с постоянной скоростью и притом такой, что постоянная h приобретает значение, равное математической энергии.

Тогда интеграл, о котором говорит теорема, можно записать в форме

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} (U + h)\, dt.$$

Далее мы снова сопоставляем, как это допустимо в соответствии с (592), каждому движению, изменяющемуся согласно условиям теоремы, второе, при котором видимые координаты претерпевают те же самые вариации, постоянная h, а также энергия E сохраняют свое значение, а циклическое количество движения варьируется и притом так, что начальные и конечные значения циклических координат остаются первоначальными. Вариацию в том виде, в котором она соответствует условиям теоремы, мы обозначаем снова через δ_q, а вариацию, соответствующую второму движению, через δ_p.

Для произвольных вариаций $\delta\mathfrak{q}_\rho$ циклических количеств движения $\mathfrak{q}_\rho$ (566)

$$\delta\int(U+h)\,dt=\delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt+\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\int\frac{\partial(U+h)}{\partial\mathfrak{q}_\rho}\,\delta\mathfrak{q}_\rho dt=$$

$$=\delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt-\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\bar{\mathfrak{p}}_\rho\delta\mathfrak{q}_\rho,$$

т. е., в частности, для вариации $\delta_{\mathfrak{p}}$

$$\delta_{\mathfrak{p}}\int(U+h)\,dt=\delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt-\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\bar{\mathfrak{p}}_\rho\delta_{\mathfrak{p}}\mathfrak{q}_\rho. \qquad \text{(a)}$$

Во-вторых, мы получаем из уравнения (612c), при учете соотношения (588) и неизменности E, уравнение

$$\int(U+h)\,dt=E\,(t_1-t_0)-\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\bar{\mathfrak{p}}_\rho\mathfrak{q}_\rho.$$

Следовательно, в результате вариации типа $\delta_{\mathfrak{p}}$

$$\delta_{\mathfrak{p}}\int(U+h)\,dt=E\delta_{\mathfrak{p}}\,(t_1-t_0)-\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\bar{\mathfrak{p}}_\rho\delta_{\mathfrak{p}}\mathfrak{q}_\rho. \qquad \text{(b)}$$

при вычитании (b) из (a) получится

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt=E\delta_{\mathfrak{p}}\,(t_1-t_0) \qquad \text{(c)}$$

или, исключив с помощью (632a) время

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds=E\delta_{\mathfrak{p}}\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{U+h}}\,. \qquad \text{(d)}$$

Вариация, стоящая справа, всегда имеет, по (632), для естественного движения исчезающее значение, а для достаточно близких концевых положений отрицательное значение. Так как E является необходимо положительной величиной, то стоящая слева вариация имеет то же значение. Стоящий в левой части интеграл для естественного движения имеет, следовательно, при достаточно близких концевых положениях минимальное значение, что и требовалось доказать.

636. Примечание 1. Если опускается ограничение относительно достаточной близости положений, то можно лишь утверждать, что вариация интеграла исчезает.

Аналитическое выражение этого утверждения при нашем способе обозначений, в противоположность (633), можно записать так:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int_0^1\sqrt{(U+h)}\,ds=0.$$

637. Примечание 2. Для каждого значения постоянной h наша теорема однозначным образом отличает естественный путь по сравнению с каждым возможным путем. Свойство естественных путей, которое рассматривается в теореме, таким образом, можно применить для определения этих путей; причем, оно может быть использовано, хотя циклические движения предполагаются скрытыми. Ибо образование вариации $\delta_{\mathfrak{q}}$ требует лишь, чтобы постоянные, встречающиеся в силовой функции, оставались неизменными. Следовательно, вариация может быть образована несмотря на незнание деталей циклического движения.

638. Примечание 3. Теорема 2, понимаемая в смысле примечания 2, есть принцип наименьшего действия в форме Якоби.

Ибо если мы назовем через m_ν массу ν-ой из видимых n точек системы, ds_ν — элемент пути этой точки, то

$$mds^2=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu ds_\nu^2,$$

и, следовательно, интеграл, для которого мы установили минимальное значение с точностью до множителя, будет

$$\int\sqrt{U+h}\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu ds_\nu^2},$$

что снова, с точностью до постоянного множителя, совпадает с интегралом Якоби.

Физическое значение принципа Якоби не может, по нашему представлению, быть другим, чем то, которое заключено в теореме (352) или (347), из которых он выведен. Он представляет собой преобразование, которое мы должны сделать с этими теоремами, чтобы они, несмотря на существующее незнание деталей циклического движения, были применимы для определения движения видимой системы. Теорема Якоби применима только к голономным системам.

639. Теорема 3. При перемещении свободной голономной консервативной системы между достаточно близкими соседними положениями, временной интеграл кинематической энергии меньше для естественного движения, чем для любого возможного движения, которое переводит систему от заданных начальных к конечным значениям видимых координат, и которое совершается с тем же постоянным во времени значением математической энергии.

Ибо если мы через h назовем заданное значение математической энергии, то для всех рассматриваемых путей (611)

$$T-U=h.$$

Следовательно, интеграл, о котором идет речь в теореме,

$$\int_{t_0}^{t_1} T dt,$$

совпадает с точностью до постоянного множителя с тем интегралом, о котором идет речь в теореме 2. Настоящая теорема является поэтому лишь другой формой изложения теоремы 2.

Следовательно, сделанные к теореме 2 примечания 1 и 2 находят и здесь применение, соответствующее их смыслу.

640. Примечание. Теорема (639) представляет первоначальную форму принципа наименьшего действия Мопертюи.

Эта форма имеет то преимущество перед формой Якоби, что ее можно выразить в простых словах, и поэтому она, очевидно, содержит простой физический смысл. Однако она имеет по сравнению с формой Якоби тот недостаток, что в ней без необходимости содержится время, хотя сама формулировка ее определяет только путь системы, но не движение по нему: движение же определяется только дополнительным замечанием, согласно которому сравниваемые движения должны совершаться с постоянной энергией.

Обзор от (626) до (640). 1. Из нашего изложения для любого естественного движения свободной консервативной системы вытекает, что каждый из приведенных ниже интегралов принимает при определенных условиях указанное выше значение 641.

$$\int (T-U)\,dt, \quad \int (T+U)\,dt,$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{U+h}}, \quad \int \sqrt{U+h}\,ds,$$

$$\int T dt.$$

При этом оба интеграла, стоящие в верхней строке, относятся к движению системы, а остальные только к пути последней. Интегралы, стоящие в левом столбце, относятся к случаю, когда рассматриваются все, в том числе и циклические, координаты системы и когда считаются одинаковыми только такие положения, при которых циклические координаты имеют также одинаковые значения. Остальные интегралы относятся к случаю, когда циклические координаты системы скрытые и одинаковыми считаются уже такие положения системы, при которых только видимые координаты имеют одинаковые значения. Рассмотрение последнего интеграла предполагает применимость принципа сохранения энергии. Рассмотрение двух средних интегралов может проводиться независимо от применимости принципа сохранения энергии.

2. Физическое значение написанных слева интегралов чрезвычайно простое; относящиеся к ним утверждения являются непосредственным следствием основного закона. 642.

Интегралы, написанные выше справа, утратили простое физическое значение, однако утверждение о том, что они для естественного движения принимают значения, указанные выше, представляет собой все же форму основного закона, правда, запутанную и неотчетливую. Однако запутанной и неотчетливой форма основного закона стала в данном случае потому, что этот закон приспособлен здесь к запутанным и неотчетливым предпосылкам. Предложения, которые относятся к пятому из интегралов, имеют обманчивый вид простого самостоятельного физического положения.

Наш метод доказательства рассчитан не на то, чтобы быть по возможности простым, а на то, чтобы максимально ярко выразить указанную выше связь.

643. 3. Тот факт, что природа не устроена так, чтобы тот или другой из этих интегралов был минимальным, вытекает, во-первых, из того, что уже в голономных системах при произвольных конечных положениях системы минимум вообще не наступает и, во-вторых, из того, что существуют естественные системы, для которых минимум вообще никогда не наступает и для которых не исчезает даже вариация этих интегралов. Всеобщее значение законов естественных движений нельзя поэтому приписать ни одному из этих интегралов, и в этом мы усмотрели право считать обманчивой кажущееся простое значение последнего интеграла.

Конечные уравнения движения для голономных систем

644. Замечание 1. Если мы обозначим через V' значение интеграла

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}},$$

взятого вдоль естественного пути между двумя системами значений всех координат свободной голономной системы с адиабатическими циклами и понимаемого в качестве функции начальных и конечных значений указанных координат, т. е. $p_{\rho 0}$, $p_{\rho 1}$ и $\mathfrak{p}_{\rho 0}$, $\mathfrak{p}_{\rho 1}$ и величины h, то выражение

$$V'\sqrt{\frac{2E}{m+\mathfrak{m}}}$$

будет представлять прямейшее расстояние системы. При этом сохраняется обозначение, которым мы до сих пор пользовались в этом разделе.

Ибо, согласно (632), V' равно промежутку времени естественного перехода между заданными положениями при математической энергии h. Если, следовательно, S является прямейшим расстоянием между двумя положениями, то

$$E=\frac{1}{2}(m+\mathfrak{m})\frac{S^2}{V'^2},$$

откуда и вытекает утверждение.

Следствие. С помощью функции V' естественные пути рассматриваемой системы могут быть представлены в замкнутой форме. 645.

Ибо если мы обозначим, как и до сих пор, ds — элемент пути видимой частичной системы, $d\mathfrak{s}$ — элемент пути циклической частичной системы и $d\sigma$ — элемент пути полной системы, то будем иметь

$$(m+\mathfrak{m})\,d\sigma^2=m\,ds^2+\mathfrak{m}\,d\mathfrak{s}^2, \tag{a}$$

следовательно (57), применяя прежние обозначения,

$$d\sigma^2=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{m}{m+\mathfrak{m}}a_{\rho\sigma}dp_\rho dp_\sigma+\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\frac{\mathfrak{m}}{m+\mathfrak{m}}\mathfrak{a}_{\rho\sigma}d\mathfrak{p}_\rho d\mathfrak{p}_\sigma. \tag{b}$$

Если, наконец, $\widehat{\sigma p_\rho}$ и $\widehat{\sigma\mathfrak{p}_\rho}$ есть углы, которые образует путь полной системы с координатами p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$ полной системы, то уравнения естественных путей, вследствие (224) и (226), после деления обеих сторон на постоянный множитель, получаются в форме

$$\sqrt{a_{\rho\rho1}}\cos \sigma p_{\rho1} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\rho1}}, \tag{c}$$

$$\sqrt{a_{\rho\rho0}}\cos \sigma p_{\rho0} = -\sqrt{\frac{2E}{m}}\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\rho0}}, \tag{d}$$

$$\sqrt{\mathfrak{a}_{\rho\rho1}}\cos \sigma \mathfrak{p}_{\rho1} = \sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\,\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\rho1}}, \tag{e}$$

$$\sqrt{\mathfrak{a}_{\rho\rho0}}\cos \sigma \mathfrak{p}_{\rho0} = -\sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\,\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\rho0}}. \tag{f}$$

Эти уравнения могут интерпретироваться двояко: они представляют уравнения естественных путей как в виде дифференциальных уравнений первого порядка, так и в конечной форме.

646. Примечание. Предыдущие уравнения от (c) до (f) являются правильными в любом случае, рассматриваются ли циклические координаты как наблюдаемые или как продолжительно скрытые. Однако эти уравнения теряют свою применимость, как только предполагается последнее. Ибо в этом случае выражение V' будет неизвестным и уравнения не могут быть записаны в развернутой форме.

647. Задача 1. Преобразовать предыдущие уравнения движения свободной голономной системы таким образом, чтобы они сохраняли свою применимость, если даже циклические движения системы считаются скрытыми.

Мы обозначаем через V значение интеграла

$$\sqrt{2m}\int_0^1 \sqrt{U+h}\,ds\ ,$$

взятого вдоль естественного пути между какими-нибудь двумя системами значений видимых координат. При определении этого естественного пути мы будем рассматривать встречающиеся в силовой функции циклические количества движения как неизменные постоянные, и следовательно V должна рассматриваться как

функция начальных и конечных значений только видимых координат и постоянной.

Согласно (635d), при переходе от одного естественного пути к другому с произвольно варьируемыми видимыми координатами

$$\delta_q \sqrt{2m}\int_0^1 \sqrt{U+h}\,ds = 2E\delta_{\mathfrak{p}}\sqrt{\frac{\mathfrak{m}}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}, \tag{a}$$

следовательно, так же, в частности, при переходе от одного естественного к любому соседнему естественному пути

$$\delta_q V = 2E\delta_{\mathfrak{p}} V'. \tag{b}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial p_{\rho1}} = 2E\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\rho1}},$$
$$\frac{\partial V}{\partial p_{\rho0}} = 2E\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\rho0}}. \tag{c}$$

С помощью этих уравнений мы можем исключить циклические координаты из правых частей уравнений (645c и d). Что касается левых частей, то мы должны заменить углы $\widehat{\sigma p_\rho}$ через $\widehat{sp_\rho}$. Теперь мы имеем, согласно (645b) и (75),

$$\sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}}\sqrt{a_{\rho\rho}}\,d\sigma\cos\sigma p_\rho = \sum_{\sigma=1}^{r}\frac{m}{m+\mathfrak{m}}a_{\rho\sigma}dp_\sigma =$$
$$= \frac{m}{m+\mathfrak{m}}\sqrt{a_{\rho\rho}}\,ds\cos sp_\rho. \tag{d}$$

И затем из этих уравнений

$$U+h = T = \frac{1}{2}m\frac{ds^2}{dt^2},$$

и (e)

$$E = \frac{1}{2}(m+\mathfrak{m})\frac{d\sigma^2}{dt^2},$$

разделив, получим

$$d\sigma = \sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}}\sqrt{\frac{E}{U+h}}\,ds \tag{f}$$

и, следовательно, из (d) и (f) найдем

$$\cos \sigma p_\rho = \sqrt{\frac{U+h}{E}}\cos s,\ p_\rho. \tag{g}$$

Подставляя теперь результат (c) в правые, а результат (g) в левые части преобразуемых уравнений, мы получим уравнения

$$\sqrt{a_{\rho\rho 1}}\cos sp_{\rho 1} = \frac{1}{\sqrt{2m\,(U+h)_1}}\,\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 1}},$$

$$\sqrt{a_{\rho\rho 0}}\cos sp_{\rho 0} = -\frac{1}{\sqrt{2m\,(U+h)_0}}\,\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 0}}, \tag{h}$$

которые и представляют собой искомые преобразования. Ибо они не содержат более никаких величин, которые относятся к скрытым системам, и могут интерпретироваться каждым из двух способов таким образом, что они определяют естественные пути видимой частичной системы в виде либо дифференциальных уравнений первого порядка, либо в конечной форме.

648. Примечание. Функция V не содержит времени и дает только естественные пути системы, но не движение системы по этим путям.

Так как, однако, естественные пути проходятся с одинаковой скоростью и так как мы уже придали постоянной h, встречающейся в V, значение аналитической энергии, то в уравнение легко ввести время как независимую переменную. Связь же между временем и длиной пути, применявшейся до сих пор в качестве независимой переменной, задана уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = t_1 - t_0. \tag{a}$$

Мы получим в результате перемножения уравнений (647k)

$$\sqrt{2m\,(U+h)} = \sqrt{2mT} = m\frac{ds}{dt},$$

и, принимая во внимание (75) и (270),

$$q_{\rho 1} = \frac{\partial V}{\partial p_{\rho 1}} \tag{b}$$

$$q_{\rho 0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 0}} \tag{c}$$

Наконец, мы получим для значения самой функции

$$V = 2\int_t^{t_1} T\,dt. \tag{d}$$

По форме эти уравнения значительно проще, чем уравнения предыдущей задачи, однако последние имеют то преимущество, что они содержат на одну независимую переменную меньше.

Примечание 2. Функция V является той функцией, которая 649.
была названа Гамильтоном характеристической функцией консервативной системы. Это утверждение находится в соответствии с (412), ибо при сделанной там предпосылке, что все координаты системы видимые, функция, обозначенная теперь через V, переходит в функцию, обозначенную там этой же буквой.

Впрочем ясно, что характеристическая функция системы, согласно расширенному теперь определению, является чисто математической величиной, не имеющей физического значения. Ибо в зависимости от того, рассматриваем ли мы большие или меньшие части циклических движений как скрытые, мы можем установить для этой системы различные характеристические функции, которые имеют одинаковую аналитическую ценность, но различное значение для одинаковых движений системы.

Теорема. Характеристическая функция V консервативной 650.
системы удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 1}\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 1}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma 1}} = (U+h)_1$$

и

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 0}\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma 0}}=(U+h)_0$$

которые соответствуют дифференциальным уравнениям (227) для прямейшего расстояния.

Ибо эти уравнения получаются в результате подстановки направляющих косинусов из уравнений (647h) в уравнение (88), которому они удовлетворяют.

651. Замечание 2. Если мы обозначим через P' значение интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt,$$

взятого вдоль естественного пути между двумя системами значений всех координат свободной голономной системы с адиабатическими циклами и понимаемого как функция этих значений и продолжительности времени перехода, то P' будет отличаться от главной функции системы (415) только на произведение времени перехода на (неизвестную) постоянную. Ибо $T-U$ отличается от энергии системы только на (неизвестную) постоянную.

652. Следствие. С помощью функции P' могут быть представлены в замкнутой форме естественные движения.

Фактически различие между P' и определенной в (415) главной функцией не мешает непосредственному применению уравнений (414b и c), так что мы получаем:

$$q_{\rho 1}=\frac{\partial P'}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{a}$$

$$q_{\rho 0}=-\frac{\partial P'}{\partial p_{\rho 0}}, \tag{b}$$

$$\mathfrak{q}_{\rho 1}=\frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\rho 1}}, \tag{c}$$

$$\mathfrak{q}_{\rho 0}=-\frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\rho 0}}. \tag{d}$$

Уравнения же (414d) требуют незначительного изменения. Вместо них мы получим

$$h=-\frac{\partial P'}{\partial t_0}=\frac{\partial P'}{\partial t_1}.$$

Примечание. Предыдущие уравнения от (a) до (d) правильные в любом случае, независимо от того, могут ли наблюдаться в действительности все координаты или нет. Однако эти уравнения теряют свою применимость, когда циклические движения системы рассматриваются как скрытые. 653.

Задача 2. Преобразовать предыдущие уравнения движения свободной голономной системы таким образом, чтобы они сохранили свою применимость, если даже циклические движения системы считаются скрытыми. 654.

Мы обозначим через P значение интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt,$$

взятого вдоль естественного движения между двумя системами значений видимых координат, соответствующих моментам времени t_0 и t_1. При определении этого естественного движения циклические количества движения, содержащиеся в константах силовой функции, должны рассматриваться как неизменные, а P должна пониматься как функция только начальных и конечных значений видимых координат и моментов времени t_0 и t_1.

Теперь, согласно (628c), при переходе от естественного движения к произвольному соседнему движению одинаковой продолжительности имеет место уравнение

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int(T+U)\,dt=\delta_{\mathfrak{p}}\int(T-U)\,dt.$$

Если мы применим это уравнение к переходу от одного естественного движения к другому естественному движению одинаковой продолжительности, то оно даст нам

$$\delta_{\mathfrak{q}}P=\delta_{\mathfrak{p}}P'.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 0}}=\frac{\partial P'}{\partial p_{\rho 0}}, \quad \frac{\partial P}{\partial p_{\rho 1}}=\frac{\partial P'}{\partial p_{\rho 1}}.$$

При помощи этих уравнений мы исключаем скрытые координаты из правых частей уравнений (652). Что касается левых частей этих уравнений, то достаточно замечания, что количество движения q_ρ всей системы по ее координатам p_ρ является одновременно количеством движения видимой частичной системы по координате p_ρ. В соответствии с этим мы получаем в качестве уравнений движения видимой частичной системы

$$q_{\rho 1}=\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{a}$$

$$q_{\rho 0}=-\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 0}}, \tag{b}$$

которые и являются искомыми преобразованиями.

655. Примечание 1. Введенная нами функция P является той функцией, которая обозначена Гамильтоном буквой S и названа главной функцией консервативной системы. Это утверждение находится в соответствии с (415), ибо при сделанной там предпосылке, что все координаты — видимые, функция, обозначенная здесь через P, переходит в функцию, обозначенную там той же буквой.

656. Примечание 2. Значение главной функции для определенного перехода соответствует характеристической функции в простой форме.

С помощью простого преобразования получим

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}(2U+h)\,dt=$$

$$=\sqrt{2m}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds-\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1\frac{h\,ds}{\sqrt{U+h}}.$$

Следовательно по (647), (644), получаем

$$P=V-h(t_1-t_0),$$

причем мы должны полагать, что в правой части величина V представлена как функция от (t_1-t_0), $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$.

Следовательно, обратно

$$V=P+h(t_1-t_0), \tag{b}$$

причем мы должны полагать, что в правой части величина (t_1-t_0) представлена как функция h, $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$.

Примечание 3. Аналитическая энергия не входит в главную функцию. Она может быть все же выведена из последней при помощи уравнений (654a, b), (286c) и (612a). Она может быть выражена также непосредственно через P. Ибо если мы в правой части уравнения (656a) изменим только t_1 и t_0, но не $p_{\rho 1}$ и $p_{\rho 0}$ и если обозначим через dh соответствующее изменение h, то получим 657.

$$dP=\frac{\partial V}{\partial h}dh-h\,d(t_1-t_0)-(t_1-t_0)\,dh.$$

Следовательно, в соответствии с (648a),

$$dP=-h\,d(t_1-t_0),$$

откуда следует

$$h=-\frac{\partial P}{\partial t_1}=\frac{\partial P}{\partial t_0}.$$

Теорема. Главная функция P консервативной системы удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка 658.

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma 1}\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 1}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma 1}}+\frac{\partial P}{\partial t_1}=U_1,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma 0}\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 0}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma 0}}-\frac{\partial P}{\partial t_0}=U_0,$$

которые соответствуют дифференциальным уравнениям (227) для прямейшего пути.

Ибо эти уравнения получаются, если мы выразим аналитическую энергию h через производные от P сначала непосредственно, при помощи уравнений (657), а затем косвенно, при помощи уравнений (612a) и (654a и b).

659. Обзор от (644) до (658). 1. В (644)—(658) даны четыре конечных представления движения голономной системы с адиабатическими циклами. В первом и третьем представлении все координаты рассматривались как доступные наблюдению. Во втором и третьем представлении циклические координаты рассматривались как скрытые.

Первое и второе представления, которые привели к характеристической функции, давали в сущности только путь системы и соответствовали принципу наименьшего действия.

Третье и четвертое представления, которые привели к главной функции, дали полностью это движение и соответствовали принципу Гамильтона.

660. 2. Все четыре представления имеют один и тот же простой физический смысл, и причина математической сложности их выражения для всех одинакова.

Простой физический смысл состоит в том, что естественные пути всегда прямейшие пути, и в чисто геометрической связи этих путей с прямейшим расстоянием в голономных системах. Причина математической запутанности состоит в том, что мы не всегда одинаково расценивали все существенные определяющие элементы движения, но исключали некоторые из них как скрытые. Мы можем также сказать, что неодинаковый подход к ним состоит в том, что мы вводили в качестве элементов определения для некоторых координат их начальные и конечные значения, а для других координат — начальные скорости.

Характер наших выводов был рассчитан не на то, чтобы быть возможно простым, но на то, чтобы выявить это отношение по возможности отчетливо.

661. 3. Можно дать дальнейшее представление движения голономной системы, исключая некоторые координаты или вводя для видимых координат вместо конечных и начальных значений другие величины в качестве определяющих элементов, или исходя из дифференциальных уравнений (650) и (658), аналогично тому,

как это имело место для прямейшего расстояния в (232) и дальше.

Эти представления в особых случаях имеют преимущество с математической точки зрения, как это показал Якоби. Однако чем дальше в этом направлении будут двигаться, тем больше будет скрываться физический смысл этих операций за их математической формой, тем больше используемые функции будут принимать характер вспомогательных конструкций, не обладающих физическим смыслом.

Неконсервативные системы

Объяснения и замечания. 1. Если материальная система не содержит никаких других скрытых масс, кроме тех, 662.
которые совершают адиабатически-циклические движения, то при подходящем выборе видимых координат всегда возможно превратить энергию, которая перешла в энергию скрытых масс, в энергию видимых масс. Имеющаяся уже налицо видимая энергия может, следовательно, продолжительно сохраняться в качестве видимой энергии. Это свойство является определяющим признаком консервативных систем. На том же основании мы обозначаем силы, производимые скрытыми массами таких систем, как консервативные силы.

2. В противоположность этому, такие системы, для которых 663.
никакой выбор среди видимых координат не является достаточным, чтобы превращать обратно скрытую энергию в видимую, называются неконсервативными системами, а силы скрытых масс таких систем — неконсервативными силами. Неконсервативные системы, в которых энергия превращается преимущественно из энергии видимых масс в энергию скрытых масс, но не наоборот, называются диссипативными системами, а силы скрытых масс таких систем — диссипативными силами.

3. В общем системы и силы природы неконсервативны, по- 664.
скольку в рассмотрение принимаются скрытые массы. Это обстоятельство является неизбежным следствием того, что консерва-

тивные системы образуют только исключительные случаи, полученные в качестве большего или меньшего приближения.

Следовательно, для любой естественной системы существует большая вероятность того, что она является неконсервативной. В соответствии с опытом, однако, системы сил природы являются диссипативными, поскольку вообще рассматриваются скрытые массы. Это обстоятельство находит достаточное объяснение в гипотезе, что в природе число скрытых масс и их свобод движения бесконечно бо́льшое по сравнению с числом видимых масс и их видимых координат, так что для всякого произвольно выбранного движения существует бесконечная вероятность против того, что энергия будет концентрироваться, переходя от указанного бесконечно большого количества скрытых масс к определенному малому количеству масс рассматриваемой видимой системы.

665. 4. Впрочем, разница между консервативными и диссипативными системами и силами заключается не в природе вещей, а базируется на добровольном ограничении нашего представления или на неизбежном ограничении нашего знания свободных систем. Если все массы природы рассматриваются как видимые массы, то эта разница отпадает, и все силы природы могут быть обозначены в этом случае как консервативные силы.

666. 5. Все консервативные силы представляются в общем как производные силовых функций, следовательно, как такие функции видимых координат системы, которые не зависят от времени. Неконсервативные силы зависят, кроме того, от первых и более высоких производных видимых координат по времени. При каждой аналитически заданной форме силы обоих видов может быть поставлен вопрос: совместима ли эта форма с предпосылками нашей механики и не противоречит ли она ей?

667. 6. На этот последний вопрос в общем нельзя дать ответа; в деталях он может рассматриваться со следующих точек зрения:

1) если может быть выявлена закономерная непрерывная система, которая производит силы данной формы, то доказано, что данная форма удовлетворяет требованиям нашей механики;

2) если может быть доказана невозможность обнаружить такую систему, то этим самым показано, что данная форма противоречит нашей механике;

3) если в природе может быть выявлена какая-нибудь система, которая, согласно опыту, производит силы данной формы, то это мы рассматриваем как доказательство того, что данная форма совместима с нашей механикой.

Если ни один из этих случаев не имеет места, то поставленный вопрос должен остаться открытым. Если бы нашлась форма силы, которую, согласно *п.* 2, следовало бы отвергнуть, однако, согласно *п.* 3, нужно было бы допустить, то вместе с этим была бы доказана недостаточность гипотезы, которая лежит в основе нашей механики, а вместе с этим недостаточность самой этой механики.

Раздел 6

О ПРЕРЫВНОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Объяснения и замечания. 1. Все системы материальных точек, к которым вообще может быть применен основной закон в соответствии со всеми предпосылками, должны иметь непрерывные связи. Коэффициенты всех уравнений условий таких систем являются, следовательно, непрерывными функциями положения (124). Однако это не мешает тому, что эти функции чрезвычайно быстро меняются вблизи некоторых положений, так что уравнения имеют вблизи этих положений коэффициенты, отличающиеся на конечную величину. 668.

2. Если рассматриваемая система проходит через такое положение, то полное знание ее движения требует полного знания уравнений условий во время быстрого изменения последних. Некоторые предположения о движении, могут быть однако, опущены, если форма уравнений условий системы дана только до и после места их быстрого изменения. Если мы ограничимся такого рода предложениями, то аналитически будет проще не принимать 669.

во внимание особый характер изменения, а рассматривать уравнения условий таким образом, как будто коэффициенты их были прерывными. В этом случае понимание системы как прерывной обусловлено добровольным ограничением нашего рассмотрения этой системы.

670. 3. Может также оказаться, что наши физические средства позволят в остальном полностью исследовать связь системы, но не достаточны для исследования ее в местах быстрого изменения, хотя мы убеждены и можем доказать физически, что эта связь и здесь непрерывная. Если это так, то мы вынуждены представить связь аналитически как прерывную, если не хотим отказаться от единого представления последней. В этом случае понимание системы как прерывной обусловлено неизбежной ограниченностью нашего знания системы.

671. 4. Если, наоборот, заданы аналитически коэффициенты уравнений условий системы как прерывные функции положения без указания, как эти функции определены, то мы предполагаем, что налицо один из двух упомянутых раньше случаев. Мы рассматриваем, следовательно, заданные уравнения только как неполное и приближенное описание истинной непрерывной формы связи. Следовательно, мы принимаем, как само собой разумеющееся, что от нас требуют не полного определения такой системы, а только установления тех положений, которые могут быть сформулированы, несмотря на неполное знание системы, при предпосылке, что в местах прерывности неизвестная связь является в действительности непрерывной.

672. 5. Если система с конечной скоростью проходит через некоторое место весьма быстрого изменения, то ее уравнения условий испытывают в течение исчезающе малого времени конечные изменения. Если система в течение всего времени движения является, как предполагается основным законом — закономерной, то она все же принимает такой вид, как будто во время прохождения через указанное положение ее закономерность была нарушена, хотя на самом деле это не имеет места. Следовательно, если аналитически нам была дана система, уравнения условий которой не зависят от времени, но в некоторый момент времени внезапно приобретают новую форму, то эти уравнения условий в данный момент времени мы рассматриваем только как приближенное выражение другой, нам неизвестной и возможно более сложной, однако непрерывной и закономерной связи. Следовательно, мы принимаем также, что от нас требуют не полного определения движения системы, а только установления тех положений, которые могут быть сформулированы несмотря на наше недостаточно полное знание системы, при предпосылке, что в момент прерывности истинная связь системы закономерная и непрерывная.

6. Понимая все прерывности положения и времени в указанном выше смысле, мы тем самым добровольно отказались от рас- 673.
смотрения действительно прерывных систем. То, что прохождение системы через кажущееся положение прерывности не определяется полностью только основным законом, вполне соответствует физическому опыту, который говорит, что знания системы до и после места прерывности недостаточно, чтобы полностью определить изменение движения при переходе через это место.

О СИЛЕ УДАРА ИЛИ ОБ УДАРЕ

Замечание. Если система проходит прерывные положения, 674.
то скорость ее претерпевает конечное изменение. Производные ее координат по времени мгновенно переходят к новому значению. Ибо непосредственно до и после места прерывности эти производные, а следовательно, и компоненты скорости, должны удовлетворять линейным уравнениям с коэффициентами, различающимися на конечную величину.

Следствие 1. При переходе через положение прерывности 675.
ускорение делается бесконечно большим, однако временной интеграл ускорения, взятый по времени перехода, вообще сохраняет конечное значение, ибо этот временной интеграл есть изменение скорости, которое, в общем, имеет конечное значение. 676.

Следствие 2. Если уравнения условий двух или нескольких соединенных систем терпят прерывность, то при переходе через эту прерывность силы, возникающие между системами, становятся бесконечно большими, однако временной интеграл силы, взятый по времени перехода, остается конечным. Ибо в общем случае компоненты ускорения прерывной системы по общим координатам делаются в смысле следствия 1 бесконечными. Так как, однако, коэффициенты уравнений условий во время прерывности остаются конечными, то сила будет порядка ускорения.

677. Определение. Ударной силой или, короче, ударом, называется временной интеграл от силы, с которой одна система действует на другую в течение времени перехода через положение прерывности, взятый по времени перехода через место прерывности.

678. Примечание. При конечных скоростях рассматриваемых систем могут встречаться конечные и бесконечные малые, однако не бесконечно большие, удары. Мы предполагаем в последующем конечные удары.

679. Следствие 1. Для каждого удара существует всегда противоудар. Он является временным интегралом силы, с которой вторая система, упомянутая в определении (677), действует на первую систему.

680. Следствие 2. Удар всегда исходит от одной системы, испытывающей прерывность движения и действующей на другую систему, которая также испытывает прерывность движения; он является немыслимым без двух таких влияющих друг на друга систем.

По тем же причинам, как и при рассмотрении сил, мы можем говорить просто об ударах, не упоминая о системах, которые их производят или на которые они действуют.

681. Следствие 3. Удар всегда можно рассматривать как векторную величину, отнесенную к системе, которая его производит, а также и как отнесенную к системе, на которую он действует. Его компоненты по общим координатам являются вообще отличными от нуля, по необщим координатам являются нулями, а в направлениях, которые не выражаются через изменения применяемых координат, остаются неопределенными. Такое же утверждение имеет место для сил, для которых удар есть временной интеграл.

Обозначение. Если система с координатами p_ρ испытывает прерывность в своем движении, то соответствующие компоненты ударов, которые действуют на систему вдоль p_ρ, обозначим через J_ρ. Компоненты ударов, которые система производит по p_ρ, обозначим через J'_ρ. 682.

Для второй системы, координаты которой мы обозначаем через $\mathfrak{p}_\rho$, можно обозначить соответственные величины через $\mathfrak{J}_\rho$ и $\mathfrak{J}'_\rho$ (ср. (467)).

Тогда имеем тождества

$$J_\rho = \mathfrak{J}'_\rho,$$
$$\mathfrak{J}_\rho = J'_\rho.$$

Теорема. Удар и противоудар всегда друг другу противоположны и равны, т. е. компоненты обоих по каждой координате противоположны и равны тогда, когда обе величины рассматриваются как векторные в отношении как одной, так и другой системы. 683.

Удар и противоудар могут рассматриваться как временные интегралы силы и противосилы (ср. (468)). С помощью введенных обозначений эта теорема может быть выражена уравнениями

$$J_\rho = -J'_\rho,$$
$$\mathfrak{J}_\rho = -\mathfrak{J}'_\rho.$$

Сложение ударов

Теорема. Если система одновременно соединена с многими системами, то удар, который производится совокупностью этих систем, равняется сумме ударов, которые производят отдельные системы. Ибо утверждение это в каждый момент удара имеет место для действующих сил (471), следовательно, и для интегралов последних. 684.

685. Следствие. Удары, производимые или испытываемые системой, можно преобразовать по правилам сложения и разложения вообще векторных величин. Мы говорим о компонентах ударов и о результирующей ударов в том смысле, в котором мы говорим о компонентах силы и о результирующей сил (ср. (472)—(474)).

686. Определение. Удар, действующий на отдельную материальную точку или исходящий от нее, называется элементарным ударом.

687. Следствие 1. Каждый удар, исходящий от одной материальной системы или действующий на нее, может быть разложен на некоторое число элементарных ударов (ср. (479)).

688. Следствие 2. Сложение и разложение элементарных ударов следует правилам сложения и разложения геометрических отрезков (параллелограм ударов) (ср. (478)).

ДВИЖЕНИЕ ПОД ВЛИЯНИЕМ УДАРОВ

689. Задача 1. Определить движение материальной системы под влиянием заданного удара.

Решение задачи состоит в задании изменений, которые испытывает вследствие удара скорость системы. Пусть рассматриваемая система та же самая, что и в (481); если P_ρ означает компоненту бесконечно большой силы, действующей в течение времени удара на систему, то в течение этого промежутка имеем по (481)

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = P_\rho. \tag{a}$$

Умножим эти уравнения на dt и проинтегрируем по времени удара. Так как значения координат в течение этого времени постоянные, то

$$m\int f_\rho dt = q_{\rho 1} - q_{\rho 0}, \tag{b}$$

где индексом 0 мы характеризуем величины до удара и индексом 1 — после удара.

Мы имеем далее по (682)

$$\int P_\rho dt = J_\rho \tag{c}$$

и, положив для сокращения

$$\int P_\varkappa dt = J_\varkappa, \tag{d}$$

получим r уравнений вида

$$q_{\rho 1} - q_{\rho 0} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} J_\varkappa = J_\rho. \tag{e}$$

Так как скорость системы перед и после удара должна удовлетворять связям системы, то из k уравнений условий получаем еще k уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}(\dot{p}_{\rho 1} - \dot{p}_{\rho 0}) = 0, \tag{f}$$

которые вместе с уравнениями (e) могут рассматриваться как $(k+r)$ неоднородных линейных уравнений для $(k+r)$ величин $\dot{p}_{\rho 1} - \dot{p}_{\rho 0}$ и $J_\varkappa$ или также для $(k+r)$ величин $q_{\rho 1} - q_{\rho 0}$ и $J_\varkappa$, которые, следовательно, однозначно определяют эти величины и вместе с этим изменения скорости системы.

Примечание 1. Если нам даны скорости системы перед удaром, т. е. величины $q_{\rho 0}$ и $\dot{p}_{\rho 0}$ известны, то мы можем уравнения (689e) вместе с k уравнениями (689f) или, что то же самое, с k уравнениями 690.

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\dot{p}_{\rho 1} = 0$$

рассматривать как $r+k$ неоднородных линейных уравнений для $r+k$ величин $\dot{p}_{\rho 1}$ и $J_\varkappa$, которые однозначно определяют эти величины и, следовательно, скорости системы после удара.

Примечание 2. Если мы применим прямоугольные координаты и обозначим компоненты удара по координате x_ν — посредством I_ν, то уравнения удара принимают форму $3n$ уравнений 691.

$$m_\nu(\dot{x}_{\nu 1} - \dot{x}_{\nu 0}) + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} I_\iota = I_\nu, \tag{a}$$

которые вместе с i уравнениями, выведенными из уравнений условий

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu}(\dot{x}_{\nu 1}-\dot{x}_{\nu 0})=0, \tag{b}$$

однозначно определяют $3n$ компонент $\dot{x}_{\nu 1}-\dot{x}_{\nu 0}$ изменения скорости и i вспомогательных величин I_ι.

692. Примечание 3. Если координата p_ρ свободная, то соответствующие величины $p_{\chi\rho}$ равны нулю; соответствующие уравнения удара по p_ρ принимают простой вид:

$$q_{\rho 1}-q_{\rho 0}=J_\rho.$$

Если в голономной системе все координаты свободные, то все уравнения принимают эту простую форму и получающиеся таким образом r уравнений достаточны для определения r величин $\dot{p}_{\rho 1}-\dot{p}_{\rho 0}$, которые есть известные линейные функции величин $q_{\rho 1}-q_{\rho 0}$, непосредственно определяемых этими уравнениями.

693. Следствие 1 (из (689)). Для того чтобы система из покоя мгновенно перешла к данной возможной скорости, достаточно сообщить системе удар, который по величине и направлению равен произведению данной скорости и массы системы.

Ибо если $q_{\rho 0}=0$ и данные $\dot{p}_{\rho 1}$ удовлетворяют уравнениям условий, то равенства

$$J_\chi=0 \text{ и } J_\rho=q_{\rho 1}$$

удовлетворяют уравнениям (689 e и f).

694. Следствие 2. Для того чтобы движущаяся система из своего мгновенного положения перешла внезапно к покою, достаточно сообщить системе удар, который по величине и направлению равен отрицательному произведению скорости системы на ее массу.

Ибо, если $q_{\rho 1}=0$ и величины $\dot{p}_{\rho 0}$ удовлетворяют уравнениям условий системы, то допущение

$$J_\chi=0$$
$$J_\rho=-q_{\rho 0}$$

удовлетворяет уравнениям (689 e и g).

Теорема. Изменения скорости, которые сообщают системе ряд одновременно действующих ударов, являются суммой изменений скорости, которые сообщаются системе отдельно действующими ударами. 695.

Как одновременно действующие при этом обозначаются все удары, которые происходят в исчезающе малое время, без учета их различия во времени.

Эта теорема (ср. (485)) вытекает из линейной формы уравнений (689 e и f); ее можно рассматривать также как непосредственное следствие теоремы (485).

Примечание. Содержание предыдущей теоремы может быть выражено также в часто употребляемой форме — многие одновременно действующие удары не мешают друг другу в отношении скоростей, которые они производят. 696.

Теорема. Если направление удара перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы, на которую он действует, то удар не влияет на движение системы, и наоборот, если производимый удар не влияет на движение системы, на которую он действует, то он перпендикулярен к каждому возможному перемещению последней. 697.

Теорема может рассматриваться как непосредственное следствие теоремы (488) или может быть соответствующим способом выведена из уравнения (689e).

Примечание. Хотя из задания ударов можно сделать однозначное заключение об изменении движения, однако из внезапных изменений движения нельзя сделать однозначное заключение об ударах, которыми они вызываются. 698.

Задача 2. Определить ударную силу, которую материальная система производит при заданном мгновенном изменении движения. 699.

По (682) компоненты искомого удара обозначаются через J'_ρ и по (683 и 689e) они равны

$$J'_\rho=-q_{\rho 1}+q_{\rho 0}-\sum_{\chi=1}^{k} p_{\chi\rho}J_\chi.$$

Здесь $q_{\rho 1}$ и $q_{\rho 0}$ определены условиями задачи. Однако J_x остаются не определенными, пока не дано движение второй системы, на которую действует удар. Решение задачи, таким образом, оказывается не определенным, поскольку остаются не определенными слагаемые, перпендикулярные к каждому возможному перемещению системы (250).

700. Примечание 1. Все компоненты удара, который производится системой при мгновенном изменении движения, вполне определяются последним в направлении любого возможного движения.

701. Примечание 2. Все компоненты удара, производимого системой при мгновенном изменении движения, вполне определяются последним в направлении любой свободной координаты.

702. Примечание 3. Если p_ρ является свободной координатой, то удар, производимый в направлении этой координаты, можно записать в следующих формах:

$$J'_\rho = -q_{\rho 1} + q_{\rho 0},$$

$$J'_\rho = -\left(\frac{\partial_\rho E}{\partial \dot{p}_\rho}\right)_1 + \left(\frac{\partial_\rho E}{\partial \dot{p}_\rho}\right)_0.$$

ВНУТРЕННЕЕ ПРИНУЖДЕНИЕ ПРИ УДАРЕ

703. Замечание 1. Если система материальных точек, между которыми не существует связей, испытывает удар, то возникающее изменение скорости имеет направление удара и величину, равную величине удара, деленной на массу системы.

704. Замечание 2. Если между точками системы, подвергающейся удару, существуют связи, то изменение скорости системы отклоняется от того, которое дано в предыдущем замечании. Следовательно, в качестве причины этого отклонения можно рассматривать связь системы.

705. Определение. Внутренним принуждением при ударе, или просто принуждением при ударе, мы называем изменение приращения скорости системы, которое обусловливается при ударе совокупными связями системы.

Принуждение при ударе измеряется разностью действительного приращения скорости системы и того приращения, которое возникло бы при снятии всех уравнений условий системы.

Следствие. Принуждение при ударе равно временному интегралу от внутреннего принуждения системы, взятого по всему промежутку удара. 706.

Задача. Определить принуждение системы при ударе. 707.

Обозначим компоненты принуждения по координатам p_ρ через Z_ρ. Умножив уравнения (497a) на mdt и проинтегрировав по времени удара, получим

$$mZ_\rho = q_{\rho 1} - q_{\rho 0} - J_\rho. \tag{a}$$

Компоненты принуждения по произвольным координатам, вообще говоря, недостаточны для определения величины принуждения.

Если же мы пользуемся прямоугольными координатами и обозначаем компоненты принуждения по координатам x_ν через Z_ν, то получим

$$mZ_\nu = m_\nu(\dot{x}_{\nu 1} - \dot{x}_{\nu 0}) - I_\nu. \tag{b}$$

Следовательно, величина принуждения Z представится положительным корнем уравнения

$$mZ^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left(\dot{x}_{\nu 1} - \dot{x}_{\nu 0} - \frac{I_\nu}{m_\nu}\right)^2.$$

Теорема 1. Величина принуждения при ударе меньше для естественного изменения движения, чем для любого возможного изменения движения. 708.

Действительно, необходимые и достаточные условия минимума величины $\frac{1}{2} mZ^2$ при заданных I_ν выражаются $3n$ уравнениями (ср. (155), (498))

$$m_\nu(\dot{x}_{\nu 1} - \dot{x}_{\nu 0}) - I_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} I_\iota = 0,$$

где I_ι — неопределенные множители.

Эти уравнения вместе с i уравнениями

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu}(\dot{x}_{\nu 1}-\dot{x}_{\nu 0})=0$$

однозначно определяют $3n+i$ величин $\dot{x}_{\nu 1}-\dot{x}_{\nu 0}$ и I_ι. Так как полученные уравнения совпадают с уравнениями движения (691), то им удовлетворяют только естественные изменения скорости системы.

709. Примечание. Предыдущая теорема является применением принципа наименьшего принуждения Гаусса к специальным условиям удара.

710. Следствие. Если связи системы препятствуют тому, чтобы угол между ударом и соответствующим изменением скорости системы был равен нулю (703), то этот угол оказывается настолько малым, насколько это допускается связями системы.

Ибо если мы представим себе плоский треугольник, одна сторона которого выражает величину удара, деленную на массу системы, вторая сторона — любое возможное изменение скорости и третья сторона — величину, равную разности первых двух, т. е. величину принуждения, соответствующую данному возможному изменению скорости, то угол ε, заключенный между первыми двумя сторонами, представляет угол между ударом и изменением скорости (34). Среди всех возможных изменений скорости заданного возможного направления только то может быть естественным, для которого принуждение расположено перпендикулярно к соответствующему изменению скорости (708). Следовательно, если ограничиться только этими последними треугольниками, то все они должны быть прямоугольными.

У всех этих треугольников гипотенуза одинакова, а катет, противолежащий углу ε, принимает наименьшее значение только для естественного движения (708).

Отсюда следует, что для естественного изменения скорости сам угол ε принимает наименьшее значение.

Теорема 2. Направление принуждения при ударе расположено перпендикулярно к каждому возможному (виртуальному) перемещению системы из ее мгновенного положения. 711.

Ибо согласно (707) и (689) компоненты принуждения можно представить в форме

$$-\frac{1}{m}\sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} J_\varkappa.$$

Следовательно, принуждение, как векторная величина, расположено перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы (250).

Эта теорема может быть получена как прямое следствие теоремы (500).

Символическое выражение. Если обозначить через δp_ρ 712.
изменения координат p_ρ для любого возможного перемещения системы, то предыдущую теорему можно представить в форме символического равенства

$$\sum_{\rho=1}^{r}(q_{\rho 1}-q_{\rho 0}-J_\rho)\,\delta p_\rho=0, \tag{a}$$

которое для прямоугольных координат принимает форму

$$\sum_{\nu=1}^{3n}[m_\nu(\dot{x}_{\nu 1}-\dot{x}_{\nu 0})-I_\nu]\,\delta x_\nu=0. \tag{b}$$

Сравни (393) и (501).

Примечание. Предыдущая теорема является приспособлением принципа д'Аламбера к специальным условиям удара. Символическая форма (712) является обычным выражением принципа д'Аламбера применительно к явлениям удара. 713.

Следствие 1. Компонента произведенного ударом изменения движения в направлении любого возможного перемещения системы равна компоненте удара в том же направлении, деленной на массу системы. 714.

Следствие 2. Компонента произведенного ударом изменения движения в направлении любой свободной координаты равна компоненте удара в том же направлении, деленной на массу системы. 715.

716. Следствие 3. Компонента скорости системы, испытывающей удар, по каждой координате абсолютного положения изменяется на величину компоненты удара по соответствующей координате, деленной на массу системы. Связи системы при этом предполагаются произвольными.

717. Примечание. Даже без знания или без полного знания связей масс системы мы можем все же всегда написать шесть уравнений движения системы, испытывающей удар. Если в качестве координат абсолютного положения системы принять шесть величин α_1, α_2, α_3, ω_1, ω_2, ω_3, введенных в (402), то указанные шесть уравнений будут являться выражением закона движения центра тяжести и принципа площадей для специальных условий удара.

ЭНЕРГИЯ, РАБОТА

718. Определение. Увеличение энергии системы вследствие производимого удара называется работой удара.

Уменьшение энергии вследствие производимых ударов можно рассматривать как отрицательное увеличение ее. Поэтому работа удара может быть как положительной, так и отрицательной.

719. Следствие. Работа удара есть временной интеграл той работы, которая производится силой, временной интеграл которой является данным ударом.

720. Теорема. Работа удара равна произведению величины удара и среднего значения компоненты начальной и конечной скорости системы, взятой в направлении удара.

Ибо каким бы ни было изменение действующей силы в течение удара и изменение движения за это время, окончательное движение и, следовательно, работа удара будет такой же, как если бы сила действовала в направлении удара с постоянной средней величиной.

Если исходить из этой упрощающей предпосылки, то, во-первых, величина действующей силы будет равна величине удара, деленной на время удара и, во-вторых, скорость, изменяясь равномерно, имеет среднее значение, равное среднему арифметическому

ее начального и конечного значения. Компонента перемещения, пройденного системой в направлении удара за время удара, равна среднему значению скорости, умноженному на время удара. Если, согласно (513), теперь вычислить работу, произведенную ударом, то время удара исключается, что и требовалось доказать.

Примечание. Предыдущая теорема, при использовании вве- 721.
денных ранее обозначений, аналитически выражается положением, что работа удара равна

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r} J_\rho(\dot{p}_{\rho 1}+\dot{p}_{\rho 0}).$$

Следствие 1. Работа удара равна произведению удара и 722.
компоненты начальной скорости, взятой в направлении удара, увеличенному на половину произведения величины удара и компоненты изменения скорости в направлении удара.

Аналитически это значит, что работа удара равна

$$\sum_{\rho=1}^{r} J_\rho \dot{p}_{\rho 0}+\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r} J_\rho(\dot{p}_{\rho 1}-\dot{p}_{\rho 0}),$$

что совпадает с предложением (721).

Следствие 2. Работа удара, приводящего покоящуюся си- 723.
стему в движение, равна половине произведения величины удара и компоненты произведенной скорости в направлении удара. Ибо, если $\dot{p}_{\rho 0}=0$, то работа удара равна

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r} J_\rho \dot{p}_{\rho 1}.$$

Теорема. Заданный удар сообщает покоящейся системе 724.
движение в направлении наибольшей работы, т. е. в том направлении, при котором он производит бо́льшую работу, чем он произвел бы, если мы путем прибавления к первоначальным связям новых связей принудили бы систему паремещаться в другом направлении (так называемая теорема Бертрана).

В самом деле, если J есть величина удара, v — вызванная ударом скорость, ε — угол между ними, то для каждой первоначальной и так же добавочной связи, согласно (714),

$$v = \frac{J}{m} \cos \varepsilon.$$

Следовательно, работа удара, согласно (723), равна

$$\frac{1}{2} Jv \cos \varepsilon = \frac{J^2}{2m} \cos^2 \varepsilon.$$

Согласно (710), угол ε принимает для естественного движения наименьшее значение, совместимое с первоначальными связями. Таким образом, увеличивая связи, угол ε можно только увеличить, а $\cos^2 \varepsilon$, следовательно, уменьшить, что и доказывает нашу теорему.

725. Следствие. Энергия, которую производит удар, приложенный к покоящейся системе, тем больше, чем больше связей мы снимаем. Наибольшее возможное значение этой энергии, получающейся при снятии всех связей системы, равно квадрату величины удара, деленному на удвоенную массу системы.

СОУДАРЕНИЕ ДВУХ СИСТЕМ

726. Пояснение 1. Мы говорим, что две системы сталкиваются, если они вступают в такое взаимоотношение, как если бы они подверглись в течение весьма малого времени некоторому соединению. Путем подходящего выбора координат обеих систем (452) мы будем представлять это соединение в виде прямого соединения.

727. Пояснение 2. Такое кратковременное соединение мы будем понимать как длительное соединение обеих систем с третьей неизвестной системой такого рода, что она в общем не оказывает никакого влияния на движение данных систем. Однако в непосредственной близости от таких положений, в которых определенные координаты одной системы становятся равными определенным координатам другой, эта третья система принуждает указанные координаты первых двух систем оставаться равными в течение весьма

малого промежутка времени. Эти временно равные координаты мы называем общими координатами обеих систем.

Пояснение 3. До и после соударения скорости изменения координат каждой из сталкивающихся систем подчинены уравнениям условий только своей собственной системы. Однако во время соударения скорости изменения общих координат соударяющихся систем должны удовлетворять еще условиям соединения. 728.

Следовательно, эти скорости, как и сами координаты, должны сделаться соответственно равными и оставаться такими в течение малого времени соударения.

Однако, так как это время рассматривается как бесконечно малое, а механический процесс, протекающий в нем, — как совершенно неизвестный, то мы рассматриваем наши системы только до и после соударения и ожидаем, что от нас потребуют только таких заключений, которые можно сделать без знания процессов, происходящих в течение соударения.

Задача. По заданным движениям до соударения определить движения двух соударяющихся систем после соударения, насколько это возможно без данных о явлениях во время самого соударения. 729.

Пусть p_ρ обозначают r координат одной, а $\mathfrak{p}_\rho$ — $\mathfrak{r}$ координат другой системы. Число общих координат пусть будет s. Компоненты импульса, испытываемого первой системой, обозначим через J_ρ, а второй системой — через $\mathfrak{J}_\rho$.

Величины до и после соударения обозначим индексами 0 и 1.

Для всех координат первой системы имеют силу уравнения вида (689e), и соответствующие уравнения — для всех координат второй системы. Кроме того, удары, которые испытывают обе стороны, находятся в отношении удара и противоудара, т. е. для всех общих координат, в соответствии с (682) и (683)

$$J_\rho = -\mathfrak{J}_\rho,$$

и для всех необщих координат

$$J_\rho = 0, \qquad \mathfrak{J}_\rho = 0.$$

Если мы соединим оба соотношения, то получим для s общих координат s уравнений вида

$$q_{\rho 1} - q_{\rho 0} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} J_{\varkappa} = -\mathfrak{q}_{\rho 1} + \mathfrak{q}_{\rho 0} - \sum_{\varkappa=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho} \mathfrak{J}_{\varkappa}, \tag{a}$$

а для $(r-s)+(\mathfrak{r}-s)$ необщих координат получим $r-s$ уравнений вида

$$q_{\rho 1} - q_{\rho 0} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} J_{\varkappa} = 0 \tag{b}$$

и $(\mathfrak{r}-s)$ уравнений вида

$$\mathfrak{q}_{\rho 1} - \mathfrak{q}_{\rho 0} + \sum_{\varkappa=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho} \mathfrak{J}_{\varkappa} = 0. \tag{c}$$

Уравнения (a), (b), (c) вместе с $k+\mathfrak{k}$ уравнениями условий обеих систем определяют движение обеих систем после удара, т. е. определяют скорости $\dot{p}_{\rho 1}$ и $\dot{\mathfrak{p}}_{\rho 1}$ и вспомогательные величины $J_{\varkappa}$ и $\mathfrak{J}_{\varkappa}$. Таким образом мы получили $r+\mathfrak{r}-s+k+\mathfrak{k}$ неоднородных линейных уравнений для определения $r+\mathfrak{r}+k+\mathfrak{k}$ неизвестных, решающих нашу задачу.

730. П р и м е ч а н и е. Если p_{ρ} и $\mathfrak{p}_{\rho}$ являются свободными координатами системы, то уравнения соударения можно записать в более простой форме. Именно, для общих координат получаем s уравнений вида

$$q_{\rho 1} + \mathfrak{q}_{\rho 1} = q_{\rho 0} + \mathfrak{q}_{\rho 0} \tag{a}$$

для необщих координат первой системы $r-s$ уравнений вида

$$q_{\rho 1} = q_{\rho 0} \tag{b}$$

и для необщих координат второй системы $\mathfrak{r}-s$ уравнений вида

$$\mathfrak{q}_{\rho 1} = \mathfrak{q}_{\rho 0}. \tag{c}$$

Таким образом, мы получили вместе $r+\mathfrak{r}-s$ уравнений для определения $r+\mathfrak{r}$ неизвестных $\dot{p}_{\rho 1}$ и $\dot{\mathfrak{p}}_{\rho 1}$.

731. С л е д с т в и е 1. Движения двух систем после их соударения не вполне определяются их движением до соударения и общими законами механики. Для полного их определения требуется знание других соотношений, полученное из иных источников. Число этих дальнейших соотношений должно равняться числу общих координат, появляющихся при столкновении.

С л е д с т в и е 2. Если при соударении возможно указать наряду с соотношениями, которые вытекают из общих законов механики, еще столько линейных уравнений для компонент скорости после соударения, сколько появляется общих координат, то задание движения до соударения становится достаточным для однозначного определения движения после удара. 732.

П р и м е ч а н и е. Особые соотношения, которые необходимы для определения движения при соударении и которые не вытекают из общих законов механики, определяются особенностями третьей скрытой системы, осуществляющей кратковременное соединение между двумя соударяющимися системами. 733.

Именно эта скрытая система воспринимает энергию, которую теряют соударяющиеся системы или которая является источником энергии, приобретаемой системами, испытывающими соударение. Первый случай имеет место, например, при неупругом соударении, при котором малую окрестность около точки приложения удара следует рассматривать как эту скрытую соединительную систему. Второй случай имеет место, например, при явлениях, вызывающих взрывы.

Однако рассмотрение этих особых условий не входит в задачу общей механики.

Заключительное замечание ко второй книге

Во второй книге мы не анализировали необходимые отношения между творениями нашего собственного ума, но рассматривали лишь опытные связи между предметами внешнего наблюдения. Поэтому необходимо было, чтобы наши рассмотрения опирались не только на законы нашего ума, но и на результаты прошедшего опыта. В качестве необходимого вклада опыта мы и взяли из нашего наблюдения природы основной закон. 734.

735. Вначале должно показаться, что основной закон является далеко недостаточным для того, чтобы охватить всю полноту фактов, которые дает нам природа и которые описываются существующей механикой. Ибо в то время, как основной закон предполагает непрерывные и закономерные связи, повседневный опыт ставит нас перед прерывными и незакономерными связями. Далее, в то время как основной закон четко предполагает только свободные системы, мы вынуждены рассматривать также и несвободные системы.

Больше того, даже закономерные непрерывные свободные системы не все подчиняются безоговорочно основному закону, но отчасти, видимо, противоречат ему. Однако мы могли изучать незакономерные и прерывные системы, рассматривая их незакономерность и прерывность как кажущиеся; мы могли также изучать движения несвободных систем, понимая их как части свободных систем; наконец, мы могли системы, видимо противоречащие основному закону, подчинить ему, допуская возможность существования скрытых масс. Таким образом, хотя мы не дополняли основной закон другими фактами опыта или другими произвольными понятиями, мы все же могли охватить всю область, которой вообще занимается механика.

Наша особая гипотеза не препятствует нам также понимать, что механика могла и должна была развиваться так, как она развивалась в действительности.

736. В результате этого мы можем утверждать, что основной закон является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы исчерпывающе представить участие опыта в общих законах механики.

ПРИЛОЖЕНИЯ