к истине; именно так обстоит дело в области электрических и магнитных сил. И чаша весов полностью склоняется в пользу третьей картины, как только второе приближение к истине достигается благодаря тому, что мнимое действие сил на расстоянии, приводится к процессам движения в наполняющей пространство среде, между мельчайшими частицами которой существуют жесткие связи,— случай, который представляется почти осуществленным также в упомянутой области. Следовательно, здесь то поле, на котором должна быть дана решающая битва между различными рассматриваемыми нами основными допущениями механики. Но само решение этого вопроса исходит из предпосылок, что предварительно должны быть основательно взвешены во всех отношениях все имеющиеся налицо возможности. Цель настоящей работы и состоит в том, чтобы развить их в особом направлении. Эта работа была бы, следовательно, необходима даже и в том случае, если бы понадобилось еще много времени, прежде чем представилась бы возможность прийти к определенному решению, а также и в том случае, если это решение в конце концов оказалось бы не в пользу изложенной здесь картины.

КНИГА ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ [20]

Предварительное замечание. В рассуждениях 1.
первой книги опыт совершенно исключен. Все положения, изложенные в ней, суть суждения a priori в смысле Канта. Они покоятся на законах внутреннего созерцания и формах собственной логики высказывающего и не имеют с внешним опытом никакой другой связи, кроме той, которая имеется в этих созерцаниях и формах логики.

Раздел 1.

ВРЕМЯ, ПРОСТРАНСТВО, МАССА

Пояснение. Время, с которым мы будем иметь дело в пер- 2.
вой книге, есть время нашего внутреннего созерцания. Поэтому оно является величиной, от изменения которой могут мыслиться зависимыми изменения всех остальных рассматриваемых величин, в то время как само оно является независимой переменной.

Пространство, с которым мы будем иметь дело в первой книге, есть пространство нашего представления. Оно является, таким образом, пространством Эвклидовой геометрии со всеми свойствами, которые приписываются ему этой геометрией. Для нас безразлично, рассматриваются ли эти свойства как данные посредством законов нашего внутреннего созерцания или как мыслимо-необходимые следствия произвольных определений.

Масса, с которой мы будем иметь дело в первой книге, вводится через определение.

3. Определение 1. Материальная частица есть признак, при помощи которого мы однозначно соотносим определенную точку пространства в данный момент времени с определенной точкой пространства в любой другой момент времени.

Каждая материальная частица неизменна и неуничтожима. Точки пространства, отмеченные посредством той же самой материальной частицы в два различных момента времени, совпадают, если совпадают указанные моменты времени. Эти положения содержатся уже в определении, если оно правильно сформулировано.

4. Определение 2. Число материальных частиц в любой части пространства, сравниваемое с числом материальных частиц, находящихся в некоторой выбранной части пространства в определенное время, называется массой, содержащейся в первой части пространства.

Число материальных частиц в пространстве, выбранном для сравнения, можно и нужно выбирать бесконечно большим. Масса отдельных частиц будет тогда, в соответствии с определением, бесконечно малой. Поэтому масса в любом объеме может принимать любое рациональное или иррациональное значение.

5. Определение 3. Конечная или бесконечно малая масса, содержащаяся в бесконечно малом пространстве, называется материальной точкой. Материальная точка состоит, таким образом, из произвольного числа соединенных друг с другом материальных частиц. Это число должно быть всегда бесконечно большим, что достигается тем, что мы представляем себе материальные частицы как бесконечно малые более высокого порядка по сравнению с материальной точкой исчезающе малой массы. Поэтому массы материальных точек, в частности, массы бесконечно малых материальных точек, могут находиться в любом рациональном и иррациональном отношении [21].

6. Определение 4. Совокупность одновременно рассматриваемых материальных точек называется системой материальных точек, или коротко — системой. Сумма масс отдельных точек является согласно (4) массой системы.

Конечная система состоит, таким образом, из конечного числа конечных материальных точек, или из бесконечного числа бесконечно малых материальных точек или из тех и других. Всегда возможно материальную систему представить составленной из бесконечного числа материальных частиц.

Примечание 1. В дальнейшем мы будем иметь дело с конечной материальной системой, составленной из конечного числа конечных материальных точек. Однако, так как мы не устанавливаем верхней границы для числа материальных точек и нижней границы для их массы, то наши общие положения охватывают в качестве особого случая и тот случай, когда система содержит бесконечно большое число бесконечно малых материальных точек. Нет надобности входить здесь в детали, требующиеся для аналитического рассмотрения этого случая. 7.

Примечание 2. Материальная точка может быть рассматриваема как частный случай и как простейший пример системы материальных точек. 8.

Раздел 2.

ПОЛОЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК И СИСТЕМ

ПОЛОЖЕНИЕ

Определение 1. Точка пространства, отмеченная данной материальной частицей в данный момент времени, называется положением этой материальной частицы в указанный момент времени. Положением материальной точки называется совокупное положение ее частиц. 9.

Определение 2. Одновременная совокупность положений всех точек системы называется положением системы. 10.

11. Определение 3. Каждое произвольное положение материальной точки в бесконечном пространстве называется геометрически мыслимым, или короче — мыслимым положением точки. Совокупность мыслимых положений точек системы называется мыслимым положением системы.

В каждый момент времени две материальные частицы могут различаться их положением; две материальные точки — массой и положением; две материальные системы — числом, массой и положением их точек.

На основании принятых нами определений, материальные частицы, материальные точки, системы материальных точек не различаются в других отношениях, кроме указанных.

12. Аналитическое представление положения: а) точки. Положение материальной точки может быть представлено тремя прямолинейными, прямоугольными Декартовыми координатами, отнесенными к покоящейся системы осей. Будем обозначать эти координаты через x_1, x_2, x_3. Каждому возможному положению точки соответствует однозначно определенная система значений этих координат и, наоборот, каждой произвольно выбранной системе значений координат соответствует однозначно определенное возможное положение точки.

Положение точки можно определить и через какие-нибудь r величин $p_1, \ldots, p_\rho, \ldots, p_r$, если определенная система значений этих величин будет соответствовать определенному положению точки, и наоборот. Прямолинейные координаты являются, следовательно, функциями этих величин, и наоборот. Величины p_ρ назовем обобщенными координатами точки. Если $r > 3$, то на основании геометрических соображений между величинами p_ρ должно существовать $r-3$ уравнения, которые представляют их как функции трех независимых величин, например x_1, x_2, x_3. Предполагая, что между координатами нет никаких соотношений, мы найдем из чисто геометрических соображений, что $r \leqslant 3$. Если $r < 3$, то не все мыслимые положения точки могут быть представлены посредством систем значений p_ρ, но только часть последних. Положения, которые нельзя представить посредством p_ρ, должны

считаться исключенными из рассмотрения при пользовании p_ρ.

Аналитическое представление: b) системы. Положение системы n материальных точек может быть задано через $3n$ прямоугольных координат точек системы. Будем обозначать эти координаты через $x_1 \ldots, x_\nu \ldots, x_{3n}$, причем x_1, x_2, x_3 обозначают координаты первой точки, а $x_{3\mu-2}$, $x_{3\mu-1}$, $x_{3\mu}$ — координаты μ-й точки. Эти $3n$ координат x_ν мы обозначаем кратко как прямоугольные координаты системы. Каждому мыслимому положению системы соответствует однозначно определенная система значений прямоугольных координат, и наоборот, каждой произвольно выбранной системе значений x_ν соответствует однозначно определенное мыслимое положение системы. 13.

Можно также положение системы определять через какие-нибудь r величин $p_1 \ldots, p_\rho \ldots, p_r$, поскольку определенной системе значений этих величин соответствует определенное положение системы; и наоборот. Следовательно, прямоугольные координаты суть функции этих величин, и наоборот. Величины p_ρ называются обобщенными координатами системы. Если $r > 3n$, то между p_ρ должны существовать на основании геометрических соображений $r-3n$ уравнений. Примем, что между координатами p_ρ не существует никаких соотношений и поэтому всегда $r \leqslant 3n$. Если $r < 3n$, то не все мыслимые положения системы могут быть представлены системой значений p_ρ, но только часть последних. Те положения, которые не могут быть представлены при помощи p_ρ, должны быть исключены из рассмотрения при пользовании координатами p_ρ.

КОНФИГУРАЦИЯ И АБСОЛЮТНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Определение 1. Совокупность взаимных положений точек системы называется конфигурацией системы. Конфигурация системы и абсолютное положение конфигурации в пространстве определяют вместе положение системы. 14.

Определение 2. Координатой конфигурации называется каждая координата системы, значение которой не может изме- 15.

ниться без того, чтобы одновременно не изменилась конфигурация системы.

Является ли определенная координата координатой конфигурации или нет, не зависит, следовательно, от выбора остальных одновременно употребляемых координат.

16. Определение 3. Координатой абсолютного положения называется каждая координата системы, изменение которой не сопровождается изменением конфигурации, пока остальные координаты системы не изменяются.

Является ли определенная координата координатой абсолютного положения или нет, зависит, таким образом, от выбора остальных одновременно употребляемых координат.

ВЫВОДЫ

17. 1. Одна и та же координата не может быть одновременно координатой конфигурации и координатой абсолютного положения. Напротив, любая произвольно взятая координата может не быть и вообще не будет ни координатой конфигурации, ни координатой абсолютного положения.

18. 2. Если $n > 3$, то можно так выбрать, и притом самыми разнообразными способами $3n$ независимых друг от друга координат всех положений, чтобы среди них находилось до $3n-6$ координат конфигурации; но нельзя выбрать эти координаты так, чтобы они включали больше $3n-6$ координат конфигурации. Ибо если мы выберем среди координат три расстояния трех любых точек системы друг от друга и $3n-3$ расстояний остальных точек от них, то уже получим $3n-6$ координат конфигурации и каждые $3n-6$ различных функций этих расстояний будут также являться $3n-6$ координатами конфигурации системы.

Меньшее число координат конфигурации может существовать; они могут, например, вовсе не существовать, если мы пользуемся $3n$ прямоугольными координатами. Большее число координат конфигурации не может быть среди независимых координат; ибо если бы среди любых координат существовало больше чем $3n-6$

координат конфигурации, то можно было бы последние представить как функции тех $3n-6$ расстояний, следовательно, они не 19. были бы независимыми друг от друга.

3. Если $n > 3$, то можно $3n$ независимых координат всех мыслимых положений системы так выбрать и притом разнообразными способами, чтобы среди них находилось до 6, однако не более чем 6, координат абсолютного положения.

Ибо если мы выберем координаты так, чтобы среди них имелось $3n-6$ координат конфигурации и прибавим к ним 6 произвольных координат, например, 6 прямоугольных координат системы, то последние и будут координатами абсолютного положения, так как никакое изменение этих координат не изменит конфигурации системы, пока остальные координаты остаются постоянными. Однако может иметь место случай, когда координат абсолютного положения меньше шести; так, например, они полностью отсутствуют, если мы применяем прямоугольные координаты системы. Случай же, когда этих координат больше шести, не может иметь места; ибо если бы для определенного выбора координат их было больше шести, то все мыслимые конфигурации системы определялись бы посредством остальных координат, которых имеется меньше чем $3n-6$; таким образом, для системы вообще нельзя было бы указать $3n-6$ независимых друг от друга координат конфигурации, что противоречило бы выводу 2.

4. Если $3n$ независимых координат для системы n точек вы- 20. браны так, что между ними существует $3n-6$ координат конфигурации, то остальные 6 необходимо будут координатами абсолютного положения. Если же $3n$ координат так выбраны, что среди них существует 6 координат абсолютного положения, то остальные $3n-6$ будут координатами конфигурации. Ибо если среди последних $3n-6$ координат находится хотя бы одна такая координата, которая изменяется без того, чтобы изменилась конфигурация, то абсолютное положение конфигурации определялось бы более чем шестью независимыми координатами, что невозможно.

5. В качестве координаты абсолютного положения может быть 21. использована любая величина, изменение которой вызывает изме-

нение положения системы и которая не является координатой конфигурации. Шесть любых величин, которые обладают этими свойствами и независимы друг от друга, могут быть приняты за координаты абсолютного положения. Они делаются координатами абсолютного положения вследствие того, что к ним не прибавляются никакие другие величины в качестве координат, кроме тех, которые имеют свойства координат конфигурации.

КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ [22]

а) Точек

22. Определение 1. Переход материальной точки из начального положения в конечное, независимо от времени и способа перехода, называется перемещением точки из ее начального положения в конечное. Перемещение точки, таким образом, вполне определяется через начальное и конечное положения. Оно также может быть задано через начальное положение, направление и величину перехода.

23. Примечание 1. Величина перемещения точки равна расстоянию ее конечного положения от начального. Если x_ν — декартова координата начального положения, а x'_ν — конечного, то величина перемещения s' есть положительный корень уравнения

$$s'^2 = \sum_{\nu=1} (x'_\nu - x_\nu)^2.$$

24. Примечание 2. Направление перемещения есть направление линии, соединяющей начальное и конечное положения. Если имеем x_ν, x'_ν и s' для одного перемещения и x^0_ν, x''_ν, s'' — для другого, то угол, образованный этими перемещениями, определяется уравнением

$$s's'' \cos \widehat{s's''} = \sum_{\nu=1}^{3} (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu). \qquad \text{(a)}$$

Ибо, рассматривая треугольник из обоих перемещений и угол, образованный ими, получим уравнение

$$s'^2 + s''^2 - 2s's'' \cos \widehat{s's''} = \sum_{\nu=1}^{3} [(x'_\nu - x_\nu) - (x''_\nu - x^0_\nu)]^2, \qquad \text{(b)}$$

из которого следует, имея в виду (23), уравнение (а).

Определение 2. Два перемещения точки называются тождественными, если начальные и конечные положения этих перемещений совпадают. Два перемещения точки называются равными, если их величины и направления совпадают. Два перемещения называются параллельными, если они имеют одно направление. 25.

Замечание. Если обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_k$ прямолинейные координаты точки в пространстве k измерений, а $x'_1, x'_2, \ldots$ $\ldots, x'_k$ — координаты второй точки, то, прибавляя к ранее данным определениям новое, именно, что расстояние двух точек в пространстве k измерений является положительным корнем уравнения 26.

$$s'^2 = \sum_{\nu=1}^{k} (x'_\nu - x_\nu)^2,$$

мы тем самым расширяем содержание исследования и вместе с тем всю механику на пространство k измерений без необходимости изменения формулировок (не учитывая при этом второстепенных фактов). Однако этим замечанием не следует пользоваться практически, ибо соответственно ранее данным определениям речь должна идти лишь о пространстве Эвклидовой геометрии.

b) Систем

Определение. Переход материальной системы из начального положения в конечное вне зависимости от времени перехода и способа перехода называется перемещением системы из начального положения в конечное. 27.

Перемещение системы, следовательно, вполне задается ее начальным и конечным положениями. Оно также вполне определено, если даны начальное положение системы и признаки, определяющие направление перемещения и его величину.

28. Вспомогательное определение. Средним квадратическим значением ряда величин мы называем положительный корень из среднего арифметического значения квадратов отдельных величин.

29. Определение а. Величиной перемещения системы называется среднее квадратическое значение величин перемещений отдельных составляющих ее материальных частиц.

Величина перемещения, которое переводит одно положение системы в другое, называется также удалением или расстоянием этих двух положений одно от другого. Величина перемещения обозначается так же, как его длина.

30. Замечание. Расстояние двух положений системы одно от другого не зависит от формы аналитического представления, в частности от выбора системы координат.

31. Задача. Выразить расстояние двух положений системы через ее прямоугольные координаты.

Пусть n есть число материальных точек системы. Пусть x_ν есть значение одной из координат до перемещения, x'_ν — после перемещения. Координата x_ν вместе с тем является координатой одной из точек системы. Пусть масса этой точки есть m_ν, где $\nu = 1, \ldots$ $\ldots, 3n$; однако среди всех этих m_ν имеются равные, в частности, пусть для каждого $\mu = 1, \ldots, 3n$:

$$m_{3\mu-2} = m_{3\mu-1} = m_{3\mu}$$

Если η есть число материальных частиц в единице массы, то масса m_ν содержит в себе $m_\nu\eta$ материальных частиц, а полная масса m содержит, следовательно, $m\eta$ материальных частиц. Используя эти обозначения, найдем для среднего квадратичного значения s' перемещений всех материальных частиц положительный корень уравнений

$$ms'^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2, \tag{a}$$

причем

$$m = \frac{1}{3} \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu. \tag{b}$$

Теорема. Расстояние двух положений системы одно от другого всегда меньше суммы расстояний обоих положений от третьего. 32.

Действительно, пусть x'_ν, x''_ν, x'''_ν есть декартовы координаты трех положений 1, 2, 3; пусть далее s_{12}, s_{13}, s_{23} есть расстояния указанных положений одно от другого. Положим для сокращения:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}(x'''_\nu - x'_\nu) = a_\nu, \qquad \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}(x'''_\nu - x''_\nu) = b_\nu,$$

тогда

$$s_{13}^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} a_\nu^2, \qquad s_{23}^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} b_\nu^2, \qquad s_{12}^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} (a_\nu - b_\nu)^2.$$

Если положить, что $s_{12} > s_{13} + s_{23}$, то, возводя обе части в квадрат, получим:

$$s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2 > 2 s_{13} s_{23}.$$

Возводя еще раз в квадрат, получим:

$$4s_{13}^2 s_{23}^2 - (s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2)^2 < 0.$$

Однако это невозможно, ибо левую часть подстановкой значений s можно записать в форме

$$4\sum_{\nu=1}^{3n} \sum_{\mu=1}^{3n} (a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu)^2,$$

что является, как сумма квадратов, существенно положительной величиной. Таким образом, остается положить:

$$s_{12} \leqslant s_{13} + s_{23},$$

так как противоположное предположение невозможно.

33. Следствие. Всегда возможно три расстояния трех положений системы друг от друга рассматривать как стороны плоского треугольника.

34. Определение b. Разностью направлений двух перемещений системы из общего начального положения называется угол в плоском треугольнике, прилегающие стороны которого образуют длины обоих перемещений, а противолежащая сторона является расстоянием между их конечными положениями.

Разностью направлений двух перемещений называется угол между ними, или наклон их одно относительно другого.

35. Замечание. Наклон двух перемещений из общего начального положения относительно друг друга всегда является однозначно определенным действительным углом, меньшим π, ибо треугольник, определяющий этот угол, всегда может быть построен (32).

36. Замечание. Наклон двух перемещений определяется независимо от формы аналитического представления, в частности от выбора координат.

37. Задача. Выразить относительный наклон двух перемещений из общего начального положения через декартовы координаты начального и конечного положений.

Пусть x_ν есть координаты общего начального положения, а x'_ν и x''_ν — координаты обоих конечных положений. Пусть s' и s'' есть длины обоих перемещений, а $\widehat{s's''}$ — заключенный между ними угол. Рассматривая плоский треугольник, образованный соответствующими расстояниями между тремя положениями системы, получим

$$2ms's''\cos\widehat{s's''} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2 + \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x''_\nu - x_\nu)^2 - \\ - \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left[(x''_\nu - x_\nu) - (x'_\nu - x_\nu)\right]^2,$$

откуда

$$ms's''\cos\widehat{s's''} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x''_\nu - x_\nu)(x'_\nu - x_\nu), \qquad \text{(a)}$$

где s' и s'' должны быть выражены через прямоугольные координаты в соответствии с (31a).

Теорема. Два перемещения системы из общего начального 38.
положения образуют между собой угол, равный нулю, если перемещения отдельных точек системы в обоих случаях одинаково направлены и соответственно пропорциональны, и наоборот.

Действительно, если перемещения всех точек одинаково направлены и пропорциональны, то для всех ν

$$x''_\nu - x_\nu = \varepsilon (x'_\nu - x_\nu),$$

где под ε понимаем одинаковый для всех ν множитель. Поэтому правая часть уравнения (37a) равна $m\varepsilon s'^2$. Однако далее имеем $s'' = \varepsilon s'$, таким образом, из уравнения имеем $\cos\widehat{s's''} = 1$, следовательно, $\widehat{s's''} = 0$, как внутренний угол треугольника (35).

Наоборот, если $\widehat{s's''} = 0$ и $\cos\widehat{s's''} = 1$, то уравнение (37a) дает, если вставить значения s' и s'' и возвести в квадрат обе части:

$$0 = \left[\sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x''_\nu - x_\nu)(x'_\nu - x_\nu)\right]^2 - \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x''_\nu - x_\nu)^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2 = \\ = \sum_{\mu=1}^{3n} \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu m_\mu \left[(x''_\nu - x_\nu)(x'_\mu - x_\mu) - (x''_\mu - x_\mu)(x'_\nu - x_\nu)\right]^2,$$

а это возможно только тогда, когда для каждого μ и ν имеем

$$\frac{x''_\mu - x_\mu}{x''_\nu - x_\nu} = \frac{x'_\mu - x_\mu}{x'_\nu - x_\nu},$$

тем самым доказано и обратное положение.

Следствие 1. Если два перемещения с общим начальным 39.
положением имеют нулевой наклон относительно третьего перемещения из того же положения, то они имеют нулевой наклон и относительно друг друга.

Все перемещения, которые имеют равный нулю наклон относительно некоторого определенного перемещения, имеют также равный нулю наклон друг относительно друга. То общее, что имеется у всех таких перемещений, называется направлением последних.

40. Следствие 2. Если два перемещения имеют одно направление, то они имеют одинаковый наклон к любому третьему перемещению. Все перемещения одного направления из общего положения образуют, таким образом, одинаковые углы со всеми перемещениями другого направления. Этот общий угол называется углом между двумя направлениями, или наклоном обоих направлений.

41. Определение. Два перемещения системы называются тождественными, если перемещения отдельных точек в обоих случаях тождественны. Два перемещения системы называются равными, если перемещения точек в обоих случаях равные. Два перемещения системы называются параллельными, если перемещения точек в обоих случаях параллельны и соответственно пропорциональны.

42. Следствие. Два перемещения системы из различных начальных положений параллельны, если каждое из них имеет одинаковое направление с перемещением, которое проходит через его начальное положение и одинаково направлено с другим перемещением, и наоборот.

43. Добавление. Разностью направлений двух перемещений системы из различных начальных положений называется угол между каждым из них и третьим, которое проходит через начальное положение одного из них и параллельно другому перемещению.

44. Задача. Выразить угол между двумя любыми перемещениями системы через прямоугольные координаты их четырех концевых положений.

Пусть s' и s'' есть величины этих перемещений, а $\widehat{s's''}$ — угол между ними. Пусть x_ν и x'_ν есть координаты начального и конечного положений первого перемещения, а x^0_ν и x''_ν — координаты начального и конечного положений второго перемещения. Перемещение, начальные координаты которого x_ν и конечные координаты $x_\nu + x''_\nu - x^0_\nu$, имеет одинаковое начальное положение с первым перемещением и равно второму. Оно образует, следовательно, с перемещением искомый угол, определяемый уравнением

$$ms's''\cos\widehat{s's''} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu).$$

То же самое значение получается, если мы построим перемещение через начальное положение второго и равное первому и определим угол между этим перемещением и вторым.

Наше определение и добавление (43) является, следовательно, однозначным и потому допустимым.

Определение. Два перемещения системы называются перпендикулярными друг к другу, если угол между ними прямой. 45.

Следствие 1. Необходимым и достаточным условием взаимной перпендикулярности двух перемещений является уравнение 46.

$$\sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) = 0,$$

в котором приняты обозначения задачи (44).

Следствие 2. В системе n точек из данного положения мыслимо $(3n-1)$-кратное многообразие перемещений, следовательно $(3n-2)$-кратное многообразие направлений, которые перпендикулярны данному направлению. 47.

Определение. Компонентой перемещения в данном направлении называется перемещение, направление которого совпадает с данным направлением, а величина равна ортогональной проекции величины данного перемещения на данное направление. 48.

Если величина данного перемещения есть s и образует с данным направлением угол ω, то ее компонента в этом направлении есть $s\cos\omega$.

Величина компоненты в данном направлении называется обыкновенно просто компонентой в этом направлении.

СЛОЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

49. Замечание. Если система имеет несколько перемещений, которые равны данным перемещениям и присоединяются друг к другу так, что конечное положение предшествующего есть начальное положение последующего, то достигнутое конечное положение не зависит от последовательности перемещений, ибо это имеет место для перемещений отдельных точек, а следовательно, и для системы.

50. Определение 1. Перемещение, которое переводит систему в то же конечное положение, как и ряд последовательных перемещений, равных данным, называется суммой данных перемещений.

51. Определение 2. Разностью двух перемещений называется такое перемещение, которое в сумме со вторым дает первое перемещение.

52. Следствие (из 49). Сложение и вычитание перемещений подчиняется правилам алгебраического сложения и вычитания.

Раздел 3

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ПУТИ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

53. Предварительное замечание. В дальнейшем мы будем рассматривать не отдельно взятую материальную точку, а систему материальных точек. Поэтому в последующем всегда речь будет идти о перемещениях систем, если не сделана особая оговорка.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

54. Пояснение. Перемещение называется бесконечно малым, если длина его бесконечно мала. Бесконечно малое перемещение определяется по направлению и величине через задание его положения и бесконечно малые изменения координат системы, возникающие вследствие перемещения.

Задача 1а. Выразить длину ds бесконечно малого перемещения через изменения dx_ν $3n$ прямоугольных координат системы [23]. 55.

Заменяя в уравнении (31*i*) $x'_\nu - x_\nu$ через dx_ν, получим:

$$mds^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu dx_\nu^2.$$

Задача 1b. Выразить угол $\widehat{s's''}$ между двумя бесконечно малыми перемещениями ds и ds' через изменения координат dx_ν и dx'_ν. 56.
Решение задачи получаем из (44), подставляя dx_ν вместо $x'_\nu - x_\nu$ и dx'_ν вместо $x''_\nu - x^0_\nu$

$$mdsds' \cos \widehat{ss'} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu dx_\nu dx'_\nu .$$

Это решение имеет место независимо от того, имеют ли оба перемещения общее положение или нет.

Задача 2а. Выразить длину ds бесконечно малого перемещения через изменения dp_ρ обобщенных координат p_ρ системы. 57.

Прямоугольные координаты x_ν есть функции p_ρ и только p_ρ, так как они полностью определяются последними и так как перемещения, которые не могут быть представлены через изменения p_ρ, исключаются из рассмотрения (13). Если положим для сокращения

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial p_\rho} = \alpha_{\nu\rho}, \tag{a}$$

то получим соответственно этому $3n$ уравнений в форме

$$dx_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} \alpha_{\nu\rho} dp_\rho, \tag{b}$$

в которых $\alpha_{\nu\rho}$ являются функциями положения, следовательно, являются функциями p_ρ. Если подставить значения (b) в уравнение (55) и положить для сокращения:

$$ma_{\rho\sigma} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \alpha_{\nu\rho} \alpha_{\nu\sigma}, \tag{c}$$

то мы получим в качестве решения задачи

$$ds^2 = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\rho dp_\sigma. \tag{d}$$

58. Задача 2b. Выразить угол $\widehat{ss'}$ между двумя бесконечно малыми перемещениями ds и ds', имеющими общее положение, посредством изменения dp_ρ и dp'_ρ обобщенных координат p_ρ системы.

Мы получаем значения dx'_ν по уравнению (57 b) и подставим их, а также значения dx_ν, в уравнение (56). Учитывая, что для обоих перемещений значения самих координат, следовательно, значения величин $a_{\rho\sigma}$, являются равными, мы получаем

$$ds ds' \cos \widehat{ss'} = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\rho dp'_\sigma.$$

Свойства $\alpha_{\rho\sigma}$ и $a_{\rho\sigma}$. Введение $b_{\rho\sigma}$

59. 1. Для всех значений ρ, σ, τ имеем (ср. 57a)

$$\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} = \frac{\partial a_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma}.$$

60. 2. Для всех значений ρ и σ имеем (ср. 57c)

$$a_{\rho\sigma} = a_{\sigma\rho}.$$

61. 3. Число величин $\alpha_{\rho\sigma}$ равно $3nr$; число отличных друг от друга величин $\alpha_{\rho\sigma}$ равно $\frac{1}{2} r(r+1)$.

62. 4. Для всех ρ

$$a_{\rho\rho} > 0.$$

Для всех ρ и σ

$$a_{\rho\rho} a_{\sigma\sigma} - a_{\rho\sigma}^2 > 0.$$

Действительно, эти неравенства выражают необходимые условия того, что правая часть (57d) является существенно положительной величиной при любых значениях dp_ρ.

5. Для всех значений ρ, σ, τ имеет место уравнение 63.

$$\sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \alpha_{\nu\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\rho}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\rho} \right) = m \left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\rho} + \frac{\partial a_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma} \right).$$

Для доказательства этого уравнения подставляем в правую часть значение $a_{\rho\sigma}$ из (57 c) и затем применяем свойства $\alpha_{\rho\sigma}$ по (59).

6. Пусть определитель из r^2 величин $\alpha_{\rho\sigma}$ есть Δ. Введем новые величины $b_{\rho\sigma}$: 64.

$$b_{\rho\sigma} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\rho\sigma}}.$$

Тогда для всех значений ρ и σ имеем

$$b_{\rho\sigma} = b_{\sigma\rho}.$$

Число различных друг от друга величин $b_{\rho\sigma}$ равно $\frac{1}{2} r(r+1)$.

7. Значение выражения 65.

$$\sum_{\rho=1}^{r} a_{\rho\iota} b_{\rho\varkappa}$$

равно единице для $\iota = \varkappa$ и равно нулю для всех ι, отличных от $\varkappa$, ибо если $\iota = \varkappa$, то $\sum_{\rho=1}^{r} a_{\rho\iota} b_{\rho\varkappa} \Delta$ представляет собой сам определитель Δ. Если же ι и $\varkappa$ не равны друг другу, то отмеченная сумма представляет определитель, который образуется из определителя Δ при замене строки $a_{\rho\varkappa}$ строкой $a_{\rho\iota}$. В этом определителе получаются две одинаковые строки и, следовательно, его значение равно нулю.

8. Для всех значений ι и $\varkappa$ имеют силу уравнения 66.

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} a_{\rho\iota} a_{\sigma\varkappa} = a_{\iota\varkappa};$$

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} b_{\rho\iota} b_{\sigma\varkappa} = b_{\iota\varkappa}.$$

Образуем в соответствии с (65) величины $\sum_{\rho=1}^{r} b_{\rho\sigma} a_{\rho\iota}$ и $\sum_{\rho=1}^{r} a_{\rho\sigma} b_{\rho\iota}$ для всех значений σ от 1 до r; полученные уравнения умножим соответственно на $a_{\sigma\varkappa}$ и $b_{\sigma\varkappa}$ и сложим их. В результате получим упомянутые уравнения.

67. 9. Определенное изменение величин $a_{\rho\sigma}$ влечет изменение величин $b_{\rho\sigma}$. Если обозначим через $\delta a_{\rho\sigma}$ и $\delta b_{\rho\sigma}$ любые совместные вариации $a_{\rho\sigma}$ и $b_{\rho\sigma}$, то получим уравнения

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\iota}a_{\sigma\varkappa}\delta b_{\rho\sigma} = -\delta a_{\iota\varkappa};$$

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\iota}b_{\sigma\varkappa}\delta a_{\rho\sigma} = -\delta b_{\iota\varkappa}.$$

Эти уравнения получаются, если проварьировать уравнения (66) и применить соотношения (65).

68. 10. Если изменить в $a_{\rho\sigma}$ и $b_{\rho\sigma}$ лишь определенную координату p_τ, то получим для каждого значения τ

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\iota}a_{\sigma\varkappa}\frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau};$$

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\iota}b_{\sigma\varkappa}\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial b_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau}.$$

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В НАПРАВЛЕНИИ КООРДИНАТ

69. Определение 1. Перемещением в направлении данной координаты называется бесконечно малое перемещение, при котором изменяется лишь одна эта координата.

Направление всех перемещений из общего положения в направлении одной и той же координаты — одно и то же; оно называется направлением координаты в этом положении.

70. Замечание. Направление координаты зависит от выбора остальных одновременно употребляемых координат.

71. Определение 2. Приведенной компонентой бесконечно-малого перемещения в направлении данной координаты называется компонента перемещения в направлении координаты (48), (69), деленная на скорость изменения координаты при перемещении в ее собственном направлении.

Приведенную компоненту в направлении некоторой координаты называют также кратко компонентой вдоль этой координаты.

Можно говорить о компоненте любого перемещения в любом направлении, однако нельзя говорить о приведенной компоненте в любом направлении, но только о приведенной компоненте бесконечно малого перемещения в направлении некоторой координаты.

Задача 1a. Выразить наклон $\widehat{sx_\nu}$ перемещения ds относительно прямолинейной координаты x_ν через $3n$ изменения dx_ν. 72.

В уравнении (56) положим $dx'_\nu = 0$ для всех значений ν за исключением того, к которому относится задача.

Тогда согласно (69) направление ds' есть направление x_ν, а угол $\widehat{ss'}$ становится искомым углом. Так как по (55) $mds'^2 = m_\nu dx'^2_\nu$, то имеем решение задачи в следующем виде:

$$ds\cos\widehat{sx_\nu} = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,dx_\nu,$$

где для ds должно быть подставлено его выражение через dx_ν.

Задача 1b. Выразить компоненту $d\bar{x}_\nu$ перемещения ds вдоль прямоугольной координаты x_ν через ее изменение dx_ν. 73.

Если положим в предыдущей задаче угол $\widehat{sx_\nu} = 0$, то перемещение ds происходит в направлении x_ν, и мы замечаем, что скорость изменения координаты при перемещении в ее собственном направлении равна dx_ν/ds, а следовательно, равна $\sqrt{m/m_\nu}$. Левая часть выражения (72) представляет уже компоненту ds в направлении x_ν; делим ее на $\sqrt{m/m_\nu}$ и получаем (71) как решение задачи:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m}\,dx_\nu.$$

Задача 1c. Выразить изменения прямоугольных координат dx_ν при некотором перемещении через приведенные компоненты перемещения вдоль этих координат. 74.

Решение предыдущей задачи дает непосредственно ответ:

$$dx_\nu = \frac{m}{m_\nu}\, d\bar{x}_\nu.$$

75. Задача 2a. Выразить наклон $\widehat{sp_\rho}$ перемещения ds относительно обобщенной координаты p_ρ через r изменений dp_ρ.

В уравнении (58) положим $dp'_\rho = 0$ для всех ρ, за исключением того, к которому относится задача. Направление ds', следовательно, по (69) есть направление p_ρ, а угол $\widehat{ss'}$ есть искомый угол. Так как согласно (57) $ds'^2 = a_{\rho\rho} dp'^2_\rho$, то получаем решение задачи в виде

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\, ds \cos \widehat{sp_\rho} = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\sigma,$$

где вместо ds следует подставить его значение через dp_σ.

76. Замечание 1. Если мы положим в решении предыдущей задачи все $dp_\sigma = 0$ за исключением определенного dp_σ, то направление ds становится направлением координаты p_σ, а угол $\widehat{sp_\rho}$ переходит в угол $\widehat{p_\sigma p_\rho}$, который координата p_σ образует с координатой p_ρ. Так как далее $ds^2 = a_{\sigma\sigma} dp_\sigma^2$, то для последнего угла имеем

$$\cos \widehat{p_\sigma p_\rho} = \frac{a_{\rho\sigma}}{\sqrt{a_{\rho\rho} a_{\sigma\sigma}}}\,.$$

Этот угол согласно (62) всегда действительный.

77. Замечание 2. Координаты p_ρ называются ортогональными, если каждая из них в любом положении перпендикулярна к направлению всех остальных. Необходимым и достаточным условием этого является требование (76), чтобы все $a_{\rho\sigma}$ (для которых ρ и σ различные) исчезали. Прямоугольные координаты являются примером ортогональных.

78. Задача 2b. Выразить компоненты $d\bar{p}_\rho$ перемещения ds по координатам p_ρ через изменения dp_ρ этих координат при перемещении.

Если мы положим в уравнении (75) $\widehat{sp_\rho} = 0$, то это означает, что перемещение ds происходит вдоль p_ρ, т. е. все dp_σ равны нулю,

кроме dp_ρ, и, следовательно, уравнение обращается в $\sqrt{a_{\rho\rho}}\, ds = a_{\rho\rho} dp_\rho$. Скорость изменения p_ρ при перемещении в ее собственном направлении равняется $1/\sqrt{a_{\rho\rho}}$. По (48) $ds \cos \widehat{sp_\rho}$ есть компонента перемещения ds в направлении p_ρ и, имея в виду определение (71), видим, что левая часть выражения (75) представляет приведенную компоненту перемещения вдоль p_ρ. Мы получаем, таким образом, соотношение

$$d\bar{p}_\rho = \sqrt{a_{\rho\rho}}\, ds \cos \widehat{sp_\rho}, \qquad \text{(a)}$$

следовательно, решение задачи имеем в виде

$$d\bar{p}_\rho = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\sigma. \qquad \text{(b)}$$

Задача 2c. Выразить изменения dp_ρ координат при перемещении ds при помощи компонент $d\bar{p}_\rho$ перемещения по координатам p_ρ. 79.

Решение уравнения (78b), с учетом обозначения (64), дает непосредственно решение нашей задачи:

$$dp_\rho = \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} d\bar{p}_\sigma.$$

Задача 3a. Выразить компоненты $d\bar{p}_\rho$ некоторого перемещения вдоль обобщенных координат p_ρ через компоненты $d\bar{x}_\nu$ этого перемещения вдоль прямоугольных координат системы. 80.

Из системы уравнений (78), (57c), (57b) и (74) получаем:

$$d\bar{p}_\rho = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\rho} \alpha_{\nu\sigma} dp_\sigma =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\rho} dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{3n} \alpha_{\nu\rho} d\bar{x}_\nu.$$

Задача 3b. Выразить компоненты dx_ν через компоненты $d\bar{p}_\rho$. 81.
Из системы уравнений (73), (57b), (79) получаем:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m}\, dx_\nu = \frac{m_\nu}{m} \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{\nu\sigma} dp_\sigma = \frac{m_\nu}{m} \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{\nu\sigma} \sum_{\rho=1}^{r} b_{\rho\sigma} d\bar{p}_\rho,$$

или, полагая для сокращения

$$\frac{m_\nu}{m}\sum_{\sigma=1}^{r}\alpha_{\nu\sigma}b_{\rho\sigma}=\beta_{\nu\rho}, \tag{a}$$

получаем

$$d\bar{x}_\nu=\sum_{\rho=1}^{r}\beta_{\nu\rho}d\bar{p}_\rho. \tag{b}$$

82. Задача 4. Выразить длину бесконечно малого перемещения через его приведенные компоненты по координатам системы.

Применив обобщенные координаты p_ρ, получаем последовательным применением уравнений (78b) и (79) к уравнению (57d)

$$ds^2=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}a_{\rho\sigma}dp_\rho dp_\sigma=\sum_{\rho=1}^{r}dp_\rho d\bar{p}_\rho=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma}d\bar{p}_\rho d\bar{p}_\sigma.$$

83. Для прямоугольных координат, в частности, получаем

$$ds^2=\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m_\nu}{m}dx_\nu^2=\sum_{\nu=1}^{3n}dx_\nu d\bar{x}_\nu=\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m}{m_\nu}d\bar{x}_\nu^2.$$

84. Задача 5а. Выразить угол между двумя бесконечно малыми перемещениями из любого положения через приведенные компоненты обоих перемещений вдоль прямоугольных координат.

Последовательным применением (73) и (74) к уравнению (56) получим

$$dsds'\cos\widehat{ss'}=\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m_\nu}{m}dx_\nu dx'_\nu=\sum_{\nu=1}^{3n}dx_\nu d\bar{x}'_\nu=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3n}d\bar{x}_\nu dx'_\nu=\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m}{m_\nu}d\bar{x}_\nu d\bar{x}'_\nu.$$

Для ds и ds' следует подставить их значения через dx_ν из (83).

85. Задача 5b. Выразить угол между двумя бесконечно малыми перемещениями из общего положения через компоненты обоих перемещений вдоль обобщенных координат p_ρ.

Применяя (78) и (79) к уравнению (58), получаем последовательно следующие формы:

$$dsds'\cos\widehat{ss'}=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}a_{\rho\sigma}dp_\rho dp'_\sigma=\sum_{\rho=1}^{r}dp_\rho d\bar{p}'_\rho=$$

$$=\sum_{\rho=1}^{r}d\bar{p}_\rho dp'_\rho=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma}d\bar{p}_\rho d\bar{p}'_\sigma.$$

Значения для ds и ds', выраженные через $d\bar{p}_\rho$, берем из (82).

Задача 6. Выразить угол между двумя бесконечно малыми перемещениями через углы, которые они образуют с координатами системы. 86.

Разделим последнее из уравнений (85) на $dsds'$ и, замечая, что по (78а)

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}=\frac{d\bar{p}_\rho}{ds},\qquad \sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{s'p_\rho}=\frac{d\bar{p}_{\rho'}}{ds},$$

получим решение задачи в виде

$$\cos\widehat{ss'}=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma}\sqrt{a_{\rho\rho}a_{\sigma\sigma}}\cos\widehat{sp_\rho}\cos\widehat{s'p_\sigma}.$$

В частности для прямоугольных координат 87.

$$\cos\widehat{ss'}=\sum_{\nu=1}^{3n}\cos\widehat{sx_\nu}\cos\widehat{s'x_\nu}.$$

Заметим, что уравнение (86) предполагает одно и то же положение обоих перемещений, в то время как (87) свободно от этого предположения.

Теорема. r углов, которые образуются любым направлением в данном положении с направлением r обобщенных координат, связаны уравнением 88.

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma}\sqrt{a_{\rho\rho}a_{\sigma\sigma}}\cos\widehat{sp_\rho}\cos\widehat{sp_\sigma}=1.$$

Это уравнение получается, если мы в (86) направления ds и ds' будем считать одинаковыми.

89. Следствие. В частности, для $3n$ углов, которые образуются любым перемещением системы с прямоугольными координатами, будет иметь место следующее соотношение:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} \cos^2 \widehat{sx_\nu} = 1.$$

УПОТРЕБЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

90. Обозначения. Длина бесконечно малого перемещения ds определяется через значения координат положения p_ρ и их изменения dp_ρ. Обозначим через частный дифференциал $\partial_p ds$ изменение ds, если мы изменим лишь p_ρ и dp_ρ, а все остальные переменные оставим постоянными. Наоборот, если мы будем рассматривать (что тоже допустимо) координаты p_ρ и компоненты $d\bar{p}_\rho$ вдоль них как независимые определяющие элементы ds, то соответствующий частный дифференциал для ds обозначим через $\partial_q ds$.

Возможны и другие частные дифференциалы ds, но для нашей цели нет нужды их обозначать специально. Для них оставим в резерве обычный знак ∂ds, определяющийся каждый раз более детально специальной оговоркой.

91. Замечание 1. Можно представить компоненты перемещения вдоль координат как частные производные длины перемещения, именно:

$$d\bar{p}_\rho = \frac{1}{2}\frac{\partial_p ds^2}{\partial dp_\rho} = ds\,\frac{\partial_p ds}{\partial dp_\rho}.$$

Для этого нужно продифференцировать уравнение (57d) и использовать (78).

92. Замечание 2. Можно выразить наклон бесконечно малого перемещения относительно координаты p_ρ в виде частных производных длины этого перемещения, именно:

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho} = \frac{\partial_p ds}{\partial dp_\rho}.$$

При этом необходимо иметь в виду (91) и (78).

Примечание. Если, в частности, применяются прямоугольные координаты, то уравнения (91) и (92) примут вид 93.

$$d\bar{x}_\nu = ds\,\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}, \tag{a}$$

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\cos\widehat{sx_\nu} = \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}, \tag{b}$$

в которых смысл частных дифференциалов определяется из предыдущего.

Замечание 3. Можно выразить dp_ρ в виде частных производных длины бесконечно малого перемещения, именно: 94.

$$dp_\rho = \frac{1}{2}\frac{\partial_q ds^2}{\partial d\bar{p}_\rho} = ds\,\frac{\partial_q ds}{\partial d\bar{p}_\rho}.$$

При этом необходимо учитывать уравнения (82) и (79).

Замечание 4. Для всех частных производных ds, независимо от индекса τ, существуют соотношения 95.

$$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau}, \tag{a}$$

ибо имеет место

$$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}dp_\rho dp_\sigma$$

и

$$\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}d\bar{p}_\rho dp_\sigma.$$

Действительно, если подставить в первую форму из (79) значения dp_ρ и dp_σ, выраженные через $d\bar{p}_\rho$ и $d\bar{p}_\sigma$, а также использовать соотношения (68) и вторую форму, то придем к уравнению (a). Если проделаем те же операции над второй формой, то придем также к соотношению (a).

Теорема. Если положение бесконечно малого перемещения претерпевает дважды такие изменения, при которых один раз изменения координат сохраняют их первоначальное значение, а другой раз 96.

— компоненты вдоль координат, то изменения длины перемещения в обоих случаях равны и противоположны по знаку.

Так как во втором случае $\delta dp_\rho = 0$, а координаты p_ρ получают изменение δp_ρ, то изменение длины перемещения есть

$$\delta_\sigma ds = \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau. \tag{a}$$

В первом случае должно быть $\delta d\bar{p}_\rho = 0$, а координаты подвергаются тем же самым изменениям δp_ρ, следовательно,

$$\delta_q ds = \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau. \tag{b}$$

Из обоих уравнений (a) и (b), а также (95) следует:

$$\delta_p ds = -\delta_q ds, \tag{c}$$

что доказывает теорему.

ПУТИ СИСТЕМ

97. Объяснение 1. Совокупность одновременно представленных положений, которые система пробегает при переходе из одного положения в другое, называется путем системы. Путь можно рассматривать и как одновременно представленную совокупность перемещений, которые система претерпевает при переходе из одного положения в другое.

98. Объяснение 2. Часть пути, которая ограничивается двумя бесконечно близкими положениями, называется элементом пути. Элемент пути является бесконечно малым перемещением; он имеет длину и направление.

99. Объяснение 3. Направлением пути системы в некотором определенном ее положении называется направление элемента пути бесконечно близкого к этому положению.

Длиной пути системы между двумя ее положениями называется сумма длин элементов пути между этими положениями.

Аналитическое представление. Путь системы аналитически представляется заданием координат его положений, как функций одного и того же выбранного переменного. Каждому значению переменного соответствует определенное положение пути. В качестве независимой переменной может служить одна из координат. Часто целесообразно в качестве независимого переменного применять длину пути от определенного положения. Производные по этому выбранному переменному, т. е. по длине пути, будем обозначать по Лагранжу, т. е. посредством штрихов. 100.

Определение 1. Путь системы называется прямым, если он имеет во всех положениях одинаковое направление. 101.

Следствие. Если система описывает прямой путь, то ее отдельные точки описывают прямые линии, длины которых (считая от начального положения) всегда пропорциональны друг другу (38). 102.

Определение 2. Путь системы называется криволинейным, если меняется направление его при переходе от одного положения к другому. Скорость изменения направления с длиной пути называется кривизной пути. Кривизна пути есть, таким образом предельное значение отношения между разностью направлений и расстоянием двух соседних элементов пути. 103.

Примечание. Значение кривизны поэтому определяется независимо от аналитического нредставления, в частности, независимо от выбора координат. 104.

Задача 1. Выразить кривизну c пути через изменение углов, которые образует направление пути с прямоугольными координатами системы. 105

Пусть $d\varepsilon$ есть угол, образуемый направлениями пути в начале и конце элемента пути ds. Тогда по (103)

$$c = \frac{d\varepsilon}{ds}.$$

Пусть, далее, $\cos \widehat{sx_\nu}$ есть косинус угла, образуемого направлением пути в начале ds с x_ν и пусть $\cos \widehat{sx_\nu} + d \cos \widehat{sx_\nu}$ обозначает то же самое, но в конце элемента ds. Тогда по (87)

$$\cos d\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{3n} \cos \widehat{sx_\nu}\,[\cos \widehat{sx_\nu} + d \cos \widehat{sx_\nu}].$$

Однако по (89)

$$\sum_{\nu=1}^{3n} \cos^2 \widehat{sx_\nu} = 1$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{3n} [\cos \widehat{sx_\nu} + d \cos \widehat{sx_\nu}]^2 = 1.$$

Если вычтем из суммы двух последних уравнений удвоенное первое, тогда получим

$$2 - 2\cos(d\varepsilon) = d\varepsilon^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} [d \cos \widehat{sx_\nu}]^2.$$

Разделив это выражение на ds^2, получим решение задачи:

$$c^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} \left(\frac{d \cos \widehat{sx_\nu}}{ds}\right)^2.$$

106. Задача 2. Выразить кривизну пути через изменение прямоугольных координат системы вдоль пути.

Имея в виду (72) и (100), получаем

$$\cos \widehat{sx_\nu} = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x'_\nu,$$

следовательно,

$$(\cos \widehat{sx_\nu})' = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x''_\nu.$$

Таким образом, в соответствии со (105) решение задачи будет

$$mc^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu x''^2_\nu.$$

107. Задача 3. Выразить кривизну пути через изменения прямоугольных координат, рассматриваемых как функции произвольного переменного τ. По правилам дифференциального исчисления находим

$$x''_\nu = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx_\nu}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{ds}\right) = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^3 \cdot \left(\frac{ds}{d\tau} \cdot \frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} - \frac{dx_\nu}{d\tau} \cdot \frac{d^2s}{d\tau^2}\right).$$

Если подставим это в c^2 и заметим, что по (55)

$$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\right)^2, \tag{a}$$

и, следовательно,

$$m\frac{ds}{d\tau} \cdot \frac{d^2s}{d\tau^2} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \frac{dx_\nu}{d\tau} \cdot \frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}, \tag{b}$$

то решение задачи получаем в виде

$$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^4 c^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left(\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}\right)^2 - m\left(\frac{d^2s}{d\tau^2}\right)^2, \tag{c}$$

причем для $ds/d\tau$ и $d^2s/d\tau^2$ подставляются их значения из предыдущих уравнений.

Задача 4. Выразить кривизну пути через изменения обобщенных координат p_ρ системы вдоль пути. 108.

Введем в (106) вместо прямоугольных координат обобщенные p_ρ, выразив x''_ν через p'_ρ и p''_ρ. Сперва имеем по (57b):

$$x'_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} \alpha_{\nu\rho} p'_\rho.$$

Следовательно,

$$x''_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} (\alpha_{\nu\rho} p''_\rho + \alpha'_{\nu\rho} p'_\rho)$$

и

$$x''^2_\nu = \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} (\alpha_{\nu\rho}\alpha_{\nu\sigma} p''_\rho p''_\sigma + 2\alpha'_{\nu\rho}\alpha_{\nu\sigma} p'_\rho p''_\sigma + \alpha'_{\nu\rho}\alpha'_{\nu\sigma} p'_\rho p'_\sigma).$$

Образуем эти уравнения для всех ν, умножим каждое на $\frac{m_\nu}{m}$ и сложим. Слева получим c^2; справа — суммирование по ν проводим при помощи уже введенных величин $\alpha_{\rho\sigma}$ в первых двух членах. Суммирование в первом члене дает непосредственно по (57с) $a_{\rho\sigma}$. В качестве множителя при p''_σ во втором члене получаем:

$$2\sum_{\rho=1}^{r} p'_\rho \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\sigma}\alpha'_{\nu\rho} = 2\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r} p'_\rho p'_\tau \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\sigma} \frac{\partial \alpha_{\nu\rho}}{\partial p_\tau} =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r} p'_\rho p'_\tau \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\rho}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\rho}\right) =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r} p'_\rho p'_\tau \left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial a_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) = \qquad \text{(по 63)}$$

$$= \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r} p'_\rho p'_\tau \left(2\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial a_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma}\right).$$

При переходе от второй формы к третьей и от четвертой к пятой проводим вычисление, учитывая, что если $F(\rho, \sigma)$ — любое выражение, содержащее индексы ρ и σ, то имеет место тождество

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} F(\rho, \sigma) \equiv \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} F(\sigma, \rho). \qquad \text{(a)}$$

Множитель третьего члена не может быть выражен через a_ρ. Для того чтобы исключить в конечном результате обозначения, отнесенные к прямоугольным координатам, положим

$$a_{\rho\sigma\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \cdot \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\lambda} \cdot \frac{\partial \alpha_{\nu\rho}}{\partial p_\mu}. \qquad \text{(b)}$$

Тогда окончательно получим решение:

$$c^2 = \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} \left\{ a_{\rho\sigma} p''_\rho p''_\sigma + \sum_{\tau=1}^{r} \left(2\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial a_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\rho p'_\tau p''_\sigma + \right.$$

$$\left. + \sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} a_{\rho\sigma\lambda\mu} p'_\rho p'_\sigma p'_\lambda p'_\mu \right\}. \qquad \text{(c)}$$

Здесь $a_{\rho\sigma}$ являются введенными в (57) функциями p_ρ; а $a_{\rho\sigma\lambda\mu}$ есть функции тех же переменных. Число этих новых функций равно $\frac{1}{4} r^2 (r+1)^2$.

Раздел 4

ВОЗМОЖНЫЕ И НЕВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Объяснение 1. Между некоторым количеством материаль- 109.
ных точек существует связь, если на основании знания части компонент перемещений этих точек можно высказать суждение об остальных компонентах.

Объяснение 2. Если между точками системы существуют 110.
связи, то часть мыслимых перемещений системы исключается из рассмотрения, а именно те перемещения, которые противоречат условиям связей. И наоборот, если среди мыслимых перемещений часть выключается из рассмотрения, то между точками системы имеется связь. Связи между точками системы определяются полностью, если для каждого мыслимого перемещения системы известно, допустимо оно или не допустимо.

Объяснение 3. Перемещения, допустимые к рассмотрению, 111.
называются возможными. Остальные перемещения называются невозможными. Возможные перемещения называются также виртуальными. Возможными они называются всегда, когда в качестве суженного понятия они сопоставляются с мыслимыми перемещениями. Виртуальными перемещениями они называются тогда, когда они противопоставляются, как более широкое понятие, более узким, например действительным, перемещениям.

Объяснение 4. Возможными путями называются пути, 112.
составленные из возможных перемещений. Возможные положения — это все те положения, которые достигаются возможными путями.

113. Объяснение 5. Все положения возможных путей есть возможные положения. Однако отсюда не следует, что каждый мыслимый путь через возможные положения является возможным. Более того, перемещение между соседними бесконечно близкими возможными положениями может быть невозможным.

114. Объяснение 6. Между двумя возможными положениями всегда можно провести возможный путь. Ибо если провести от какого-нибудь действительного положения до обоих возможных положений лишь один возможный путь, то оба эти пути вместе составляют уже возможный путь между обоими положениями. Если бы к одному из этих положений не вел возможный путь, то это положение не являлось бы возможным.

115. Определение 1. Связь системы называется непрерывной, если она не противоречит следующим трем положениям:

1) что задание всех возможных конечных перемещений содержится в задании возможных бесконечно малых перемещений (непрерывность конечного);

2) что каждое возможное бесконечно малое перемещение может следовать вдоль прямого непрерывного пути (непрерывность бесконечно малого);

3) что каждое бесконечно малое перемещение, возможное из данного положения, возможно также и из другого бесконечно близкого положения; при этом не учитываются отклонения порядка расстояния между этими положениями или более высокого порядка (непрерывная изменчивость возможных перемещений).

116. Следствие. Если в системе имеются лишь непрерывные связи, то сумма двух любых возможных бесконечно малых перемещений из общего положения есть также возможное перемещение из того же положения (наложение бесконечно малых перемещений).

Ибо в соответствии со (115,3) отдельные перемещения должны следовать друг за другом, и в соответствии со (115,2) прямое перемещение из начального положения в конечное является также возможным перемещением.

117. Определение 2. Связь системы называется внутренней, если она касается лишь взаимных положений точек системы.

Следствие. Если в системе имеются лишь внутренние связи, 118.
то каждое перемещение, которое не изменяет конфигурации, есть возможное перемещение, и наоборот.

Определение 3. Связь системы называется закономерной 119.
(gesetzmässiger), если она не зависит от времени.

Закономерная связь заключается, таким образом, в том утверждении, что среди мыслимых перемещений системы в любое время (или независимо от времени), одни перемещения являются возможными, другие — невозможными.

Примечание. Пока мы имеем дело только с геометрией 120.
системы, разница между закономерной и незакономерной связью теряется, ибо все наше исследование в этом случае не касается вопроса о времени. Если связи системы для двух моментов времени различны, то будем говорить (при теперешних рассуждениях), что имеем дело с двумя различными системами. Иначе говоря, в первой книге мы будем иметь дело только со связями закономерными.

Определение 1. Система материальных точек называется 121.
материальной системой, если она подчинена только непрерывным связям.

Определение 2. Материальная система называется свобод- 122.
ной, если она подчинена только внутренним и закономерным связям.

Определение 3. Материальная система называется голо- 123.
номной, если все мыслимые непрерывные движения между двумя возможными положениями являются возможными движениями. Это название означает, что система должна подчиняться интегральным (ὅλος) законам (νόμος), в то время как вообще материальная система подчиняется только дифференциальным законам (ср. (132) и далее).

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Замечание. Система материальных точек удовлетворяет 124.
условиям материальной системы, если дифференциалы ее прямоугольных координат подчинены лишь однородным линейным

уравнениям, коэффициенты которых являются непрерывными функциями возможных значений координат.

Первый вид непрерывности (115) предполагается, если вообще говорят о дифференциалах координат системы; оба других вида непрерывности удовлетворяются при ограничении допустимых дифференциалов.

125. Обратное положение. Если система материальных точек удовлетворяет условиям материальной системы, то дифференциалы ее прямоугольных координат должны подчиняться однородным линейным уравнениям, коэффициенты которых есть непрерывные функции возможных значений координат.

Для доказательства рассмотрим возможные положения системы и возможные перемещения из них. Для любого из этих произвольно выбранных перемещений $3n$ изменений dx_ν координат относятся как

$$\varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \ldots : \varepsilon_{13n}.$$

Если под du_1 будем понимать любую бесконечно малую величину, то группой уравнений

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu} du_1$$

дано определение группы возможных перемещений. Среди последних либо содержатся либо не содержатся все возможные перемещения. Если имеет место последнее, тогда мы должны взять второе перемещение, которое не может быть представлено в этой форме, и пусть для него $3n$ изменений координат dx_ν относятся, как

$$\varepsilon_{21} : \varepsilon_{22} : \ldots : \varepsilon_{23n}.$$

Если понимать под du_2 вторую произвольную бесконечно малую величину, то группой уравнений

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu} du_1 + \varepsilon_{2\nu} du_2,$$

согласно (116), дано более общее определение группы возможных перемещений. Как и раньше, в этой системе либо содержатся все возможные перемещения, либо нет. Если имеет место последнее, то, как и ранее, введем новую величину du_3 и будем

продолжать этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем всех возможных перемещений. Если мы ввели таким образом $3n$ величин du_λ, то выражения

$$dx_\nu = \sum_{\lambda=1}^{3n} \varepsilon_{\lambda\nu} du_\lambda \qquad (a)$$

представляют все возможные перемещения системы тогда, когда все мыслимые перемещения — возможные, т. е. связей между точками системы не существует. Таким образом, все возможные перемещения системы могут быть выражены при помощи уравнений условий (связей) в форме

$$dx_\nu = \sum_{\lambda=1}^{l} \varepsilon_{\lambda\nu} du_\lambda,$$

где во всех случаях $l \leqslant 3n$.

Для того чтобы можно было удовлетворить этой форме произвольно выбранными значениями dx_ν, достаточно, чтобы dx_ν удовлетворяли $3n - l$ однородным линейным уравнениям, которые могут быть получены исключением du_λ из (a). Величины $\varepsilon_{\lambda\nu}$ должны быть непрерывными функциями положения (115,3). Согласно (124) приращения dx_ν не должны подчиняться дальнейшим ограничениям.

Примечание. Число и содержание уравнений между dx_ν, 126
которые мы выводили по указанному способу (125a), не должны зависеть от специального выбора используемых перемещений. Ибо если мы воспользуемся другими перемещениями, и поэтому выразим dx_ν через другие величины dv_λ, то эти значения dx_ν можно подставить в те уравнения, которые получены при помощи исключения. Если бы эти уравнения не удовлетворялись тождественно, то это означало бы, что dv_λ являются зависимыми, что противоречило бы определению этих величин. Следовательно, эти уравнения должны удовлетворяться тождественно и, следовательно, они не могут различаться от аналогичных уравнений или их линейных комбинаций, которые получались бы при помощи исключения dv_λ. Число уравнений, которые получаются при помощи dv_λ, не может быть больше числа уравнений, получаемых при помощи du_λ; оно

не может быть также и меньшим, ибо в противном случае обратный способ докажет, что du_λ не независимы друг от друга.

127. Следствие 1. Связь материальной системы можно полностью аналитически выразить заданием одного возможного положения системы и системы однородных линейных уравнений между дифференциалами ее прямоугольных координат.

Ибо соотношения между этими дифференциалами не могут, согласно (125), быть даны иначе, чем такой системой уравнений. Это не препятствует тому, что между координатами существуют также конечные уравнения. Однако эти конечные уравнения можно полностью заменить заданием единственного возможного положения и равного числа однородных линейных уравнений между дифференциалами. Эти последние, однако, не могут противоречить непосредственно данным дифференциальным уравнениям. Они получаются, следовательно, или из этих последних, или они добавляются для достижения полного описания.

128. Обозначение. Уравнения, которые выражают связь материальной системы в прямоугольных координатах, будут в дальнейшем записываться так:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} dx_\nu = 0.$$

При этом мы считаем, что существует i таких уравнений и, следовательно, ι принимает значения от 1 до i. Величины $x_{\iota\nu}$ следует рассматривать как непрерывные функции x_ν.

129. Следствие 2. Связь материальной системы, положения которой выражаются через обобщенные координаты, аналитически можно описать через задание одного возможного положения и через систему однородных линейных уравнений между дифференциалами этих координат.

Употреблением обобщенных координат p_ρ, число которых $r < 3n$, связь между точками системы уже предполагается существующей. По (128) мы можем в уравнения, описывающие связь через прямоугольные координаты, внести значения dx_ν через dp_ρ из уравнений (57b). Полученные линейные однородные уравнения

таковы, что среди них $3n - r$ выполняются тождественно, вследствие существования $3n - r$ уравнений, выражающих $3n$ величин x_ν через r величин p_ρ. Остальные $k = i - 3n + r$ уравнений между dp_ρ вполне эквивалентны совместным уравнением между dx_ν, и достаточны поэтому (127) вместе с заданием возможного положения для полного описания связей системы.

Обозначение. Уравнения, выражающие связи в обобщенных координатах p_ρ, в будущем будем записывать в виде 130.

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho} dp_\rho = 0.$$

Число этих уравнений принимаем равным k и, следовательно, $\varkappa = 1, \ldots, k$. Величины $p_{\varkappa\rho}$ есть непрерывные функции p_ρ.

Примечание. Уравнения (128) и (130) называют дифферен- 131.
циальными уравнениями или также уравнениями условий системы.

Теорема. Если возможно из дифференциальных уравнений 132.
материальной системы получить такое же число конечных уравнений между координатами системы, то система будет голономной (123). Ибо координаты каждого возможного положения будут удовлетворять конечным уравнениям. Разности координат двух смежных положений удовлетворяют, таким образом, такому же числу однородных линейных дифференциальных уравнений. И так как они не противоречат такому же числу заданных дифференциальных уравнений системы, то они должны удовлетворить также и этим последним. Перемещения между какими-нибудь двумя возможными положениями есть, таким образом, возможные перемещения, что и доказывает утверждаемое.

Обратное положение. Если материальная система голо- 133.
номная, то её дифференциальные уравнения допускают такое же число конечных или интегральных уравнений между координатами.

Если рассматривают r координат системы, между дифференциалами которых существует k уравнений, то $r - k$ переменных будут являться независимыми переменными. Перейдем от произвольного начального положения системы по различным возможным путям к некоторому положению, для которого независимые координаты имеют определенное значение. Если переходят затем при помощи непрерывно меняющихся путей к непрерывно меняющимся значениям остальных координат, т. е. к различным положениям, то эти положения будут возможными положениями, а перемещения между ними — возможными перемещениями. Мы получим, таким образом, систему значений дифференциалов, отличную от нуля, которая удовлетворяет данным дифференциальным уравнениям, даже если первые $r-k$ этих дифференциалов равны нулю. Это невозможно, так как уравнения линейные однородные. Следовательно, мы приходим всегда к одним и тем же значениям не только первых $r-k$, но и остальных координат. Последние, таким образом, есть определенные функции первых; k конечных уравнений, которые это выражают, есть интегралы этих дифференциальных уравнений, так как они не могут им противоречить.

СВОБОДА ДВИЖЕНИЯ

134. Определение. Число бесконечно малых изменений координат материальной системы, которые могут быть взяты произвольно, называется числом свобод движения или числом степеней свободы.

135. Примечание 1. Число свобод системы равно числу ее координат, уменьшенному на число дифференциальных уравнений системы.

136. Примечание 2. Число свобод не зависит от выбора координат. В обозначении (128), (130) число свобод равно $r-k$, точно так же по (129) равно $3n-i$, следовательно, оно всегда то самое число при любых числах r и k.

137. Примечание 3. Число свобод не меняется с положением системы. Так как связь непрерывна, то число свобод в смежных положениях не может различаться на конечную величину. Следовательно, так как непрерывное изменение этого числа исключается, то нет этого изменения и в конечно удаленных положениях.

138. Примечание 4. Доказательство положения (125) содержит решение следующей задачи: найти число свобод движения полностью известной материальной системы.

Число l вспомогательных величин du_χ, найденных по методу этого доказательства, и является искомым числом.

Если известно заранее, что возможное положение системы может быть представлено при помощи r обобщенных координат p_ρ, то можно в доказательстве вместо x_ν употреблять эти обобщенные координаты.

Определение. Координаты системы, изменения которых независимы от изменения остальных, называются свободными координатами системы. 139.

Следствие. Свободная координата не встречается в дифференциальных уравнениях и, наоборот, всякая координата, которая не встречается в дифференциальных уравнениях системы, есть свободная координата. 140.

Примечание 1. Является данная координата свободной или нет, зависит от выбора остальных одновременно употребляемых координат. Ибо если некоторая координата не входит в дифференциальные уравнения системы и если мы заменяем одну из координат, входящих в дифференциальные уравнения, функцией последних и той первой в качестве новой координаты, то эта первая координата теряет свойство быть свободной координатой, которое она имела до сих пор. 141.

Примечание 2. В свободной системе каждая координата абсолютного положения является свободной координатой (ср. (118) и (122)). 142.

Теорема. Если все возможные положения материальной системы могут быть представлены свободными координатами, то система является голономной (123). 143.

Каждое перемещение системы между возможными положениями выражается через систему значений дифференциалов свободных координат; каждая такая система значений есть возможная, так как она не подчиняется условиям, а поэтому каждое перемещение между двумя возможными положениями есть возможное перемещение.

Обратное положение. В голономной системе все возможные положения можно представить через свободные координаты. 144.

Если имеют голономную систему, между r координатами которой существует k дифференциальных уравнений, то возможно k координат выразить через $r—k$ остальных (ср. 133). Эти $r—k$ произвольно выбранных координат, следовательно, вполне определяют положение системы и ими можно пользоваться как свободными. Точно такой же смысл, очевидно, могут иметь и любые $r—k$ функции от первоначальных r координат.

145. Примечание 1. Число свободных координат голономной системы равно числу ее свобод движения.

146. Примечание 2. Если число координат материальной системы равно числу ее свобод движения, то эти координаты есть свободные координаты, а система — голономная.

Если бы существовало хотя бы только одно дифференциальное уравнение между координатами, то число координат было бы уже больше числа свобод движения. Вообще число координат не может быть меньше числа свобод движения.

147. Примечание 3. Возможное положение неголономной системы невозможно полностью выразить только через свободные координаты. Противное утверждение противоречило бы (143).

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ К ВОЗМОЖНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ

148. Теорема. Если возможно представить r компонент $d\bar{p}_\rho$ перемещения ds вдоль координат p_ρ через k величин $\gamma_\varkappa$ в виде

$$d\bar{p}_\rho = \sum_{\varkappa=1} p_{\varkappa\rho}\gamma_\varkappa,$$

где $p_{\varkappa\rho}$ определяются уравнениями условий (130), то данное перемещение является перпендикулярным к каждому возможному перемещению из того же положения.

Пусть ds' — длина любого возможного перемещения из одного и того же положения, а dp'_ρ — изменения координат для этого перемещения. Если умножим теперь предыдущие уравнения на dp'_ρ

и сложим их, то мы получим, принимая во внимание (85) и (130), следующее соотношение:

$$\sum_{\rho=1}^{r} d\bar{p}_\rho dp'_\rho = ds\,ds' \cos \widehat{ss'} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \gamma_\varkappa \sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho} dp'_\rho = 0;$$

следовательно, $\cos\widehat{ss'} = 0$; $\widehat{ss'} = 90^\circ$, ч. т. д.

Добавление. Общее число r компонент $d\bar{p}_\rho$ перемещения ds вдоль координат p_ρ можно однозначно определить, если мы знаем k из них и знаем также, что это перемещение перпендикулярно ко всем возможным перемещениям системы. 149.

Пусть опять dp'_ρ — изменения p_ρ для любого возможного перемещения. При помощи k уравнений условий можно выразить k из них как однородную линейную функцию остальных $r—k$ и подставить эти значения в уравнение

$$\sum_{\rho=1}^{r} d\bar{p}_\rho dp'_\rho = 0.$$

Так как в этих уравнениях теперь dp'_ρ совершенно произвольные, то коэффициенты при них должны равняться нулю. Это даст $r—k$ однородных линейных уравнений между $d\bar{p}_\rho$, из которых однозначно определим $r—k$ через k остальных.

Обратное положение. Если мыслимое перемещение перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы, то возможно r компонент $d\bar{p}_\rho$ вдоль p_ρ выразить при помощи подходящего определения через k величин $\gamma_\varkappa$ в виде 150.

$$d\bar{p}_\rho = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\gamma_\varkappa.$$

А именно, если мы определим величины $\gamma_\varkappa$ из каких-либо k этих уравнений и вычислим с помощью их все компоненты, то мы должны прийти к заданным значениям $d\bar{p}_\rho$. Ибо вычисленное таким образом перемещение расположено, в соответствии с (148), перпендикулярно ко всем возможным и имеет с заданным перемещением k общих компонент; оно имеет, следовательно, с этим последним, согласно (149), общими все r компонент вдоль координат p_ρ.