

вые получить представление о возможном механизме собирания электрического заряда из облаков для генерации молнии. Также впервые в этом эксперименте обнаружен разряд, вызываемый пробоем на убегающих электронах и широким атмосферным ливнем (ПУЭ-ШАЛ). Согласно предсказаниям теории именно разряд ПУЭ-ШАЛ может служить источником наблюдаемых мощных межоблачных радиоразрядов (NBE).

Подведём итог. Развитие активной фазы грозового разряда — предварительный пробой, инициация лидера, движение лидера вплоть до момента возвратного удара — полностью диктуется процессом собирания электрического заряда с облаков. Наше исследование обнаружило, что этот процесс сопровождается мощными коррелированными потоками гамма- и радиоизлучения, создаваемых пробоем на убегающих электронах.

Это позволяет утверждать, что именно пробой на убегающих электронах, инициируемый космическими лучами, является основным движущим механизмом грозового разряда.

Авторы благодарны В.П. Антоновой, Л.И. Вильдановой, К.П. Зыбину, Г.Г. Митько, А.С. Наумову, М.О. Птицыну, Ю.В. Шлюгаеву за полезные обсуждения затронутых в работе вопросов.

Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ 09-02-00462-а и грантом EOARD 067004 (ISTC 3641р).

Список литературы

1. Marshall T C et al. *Geophys. Res. Lett.* **32** L03813 (2005)
2. Stolzenburg M et al. *Geophys. Res. Lett.* **34** L04804 (2007)
3. Базелян Э М, Райзер Ю П *Физика молнии и молниезащиты* (М.: Физматлит, 2001)
4. MacGorman D R, Rust W D *The Electrical Nature of Storms* (New York: Oxford Univ. Press, 1998)
5. Sentman D D et al. *Geophys. Res. Lett.* **22** 1205 (1995)
6. Pasko V P et al. *Nature* **416** 152 (2002)
7. Smith D M et al. *Science* **307** 1085 (2005)
8. Jacobson A R *J. Geophys. Res.* **108** (D24) 4778 (2003)
9. Marshall T C, McCarthy M, Rust W J. *Geophys. Res.* **100** (D4) 7097 (1995)
10. Rhodes C et al. *J. Geophys. Res.* **99** (D6) 13059 (1994)
11. Гуревич А В, Зыбин К П *УФН* **171** 1177 (2001) [Gurevich A V, Zybin K P *Phys. Usp.* **44** 1119 (2001)]
12. Gurevich A V, Zybin K P *Phys. Today* **58** (5) 37 (2005)
13. Gurevich A V, Milikh G M, Roussel-Dupre R *Phys. Lett. A* **165** 463 (1992)
14. Bethe H *Ann. Phys.* **5** 325 (1930)
15. Wilson C T R *Proc. Cambr. Philos. Soc.* **22** 34 (1924)
16. Chubenko A P et al. *Phys. Lett. A* **309** 90 (2003)
17. Gurevich A V et al. *Phys. Lett. A* **325** 389 (2004)
18. Gurevich A V, Duncan L M, Karashtin A N, Zybin K P *Phys. Lett. A* **312** 228 (2003)
19. Караштин А Н, Шлюгаев Ю В, Гуревич А В *Изв. вузов. Сер. Радиофиз.* **48** 800 (2005) [Karashtin A N, Shlyugaev Yu V, Gurevich A V *Radiophys. Quantum Electron.* **48** 711 (2005)]
20. Антонова В П и др. *ЖТФ* **77** (11) 109 (2007) [Antonova V P et al. *Tech. Phys.* **52** 1496 (2007)]
21. Борисов Н Д, Гуревич А В, Милих Г М *Искусственная ионизированная область в атмосфере* (М.: ИЗМИРАН, 1986)
22. Papadopoulos K et al. *J. Geophys. Res.* **98** (A10) 17593 (1993)
23. Gurevich A V, Borisov N D, Milikh G M *Physics of Microwave Discharges* (Amsterdam: Gordon and Breach, 1997)
24. Moore C et al. *Geophys. Res. Lett.* **28** 2141 (2001)
25. Dwyer J R et al. *Geophys. Res. Lett.* **32** L01803 (2005)
26. Howard J et al. *Geophys. Res. Lett.* **35** L13817 (2008)
27. Dwyer J R et al. *Geophys. Res. Lett.* **32** L20809 (2005)
28. Rahman M et al. *Geophys. Res. Lett.* **35** L06805 (2008)
29. Nguyen C V, van Deursen A P J, Ebert U J. *Phys. D* **41** 234012 (2008)
30. Gurevich A V, Zybin K P, Roussel-Dupre R A *Phys. Lett. A* **254** 79 (1999)
31. Gurevich A V, Zybin K P, Medvedev Yu V *Phys. Lett. A* **349** 331 (2006)
32. Eack K et al. *J. Geophys. Res.* **101** 29637 (1996)

PACS numbers: **01.65.+g, 52.35.-g, 52.55.-s**
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200907i.0790

Классические результаты Б.Б. Кадомцева и вращение плазмы в современных токамаках

В.И. Ильгисонис

1. Введение. Этапы работы в Курчатовском институте
В докладе рассказывается о трёх теоретических работах Б.Б. Кадомцева в области управляемого термоядерного синтеза, которые, по мнению автора, дают представление об определённых периодах научной деятельности Бориса Борисовича в Курчатовском институте. Кадомцев как теоретик работал весьма продуктивно, круг его интересов, как известно, был весьма широк, поэтому выбор таких работ не может не быть субъективным. Среди работ первого периода выделяется цикл, относящийся к так называемому энергетическому принципу устойчивости [1]. Другие две его работы, представленные в настоящем докладе, — это работы по неустойчивости на запертых частицах [2] и редуцированным уравнениям для описания динамики плазмы [3]. Каждая из этих работ стала в определённом смысле этапной, открыв целое направление для дальнейших исследований. Существенно, что все они служат яркими примерами продуктивности теории, которая впоследствии блестяще подтверждалась экспериментами. В докладе отмечается, какое значение имеют эти работы сейчас, как их результаты преломляются с учётом нового явления, которое не обсуждалось в те годы, — явления вращения плазмы. В современных токамаках плазма может вращаться с высокой скоростью, и это вращение в настоящее время рассматривается как весьма существенный фактор улучшения удержания плазмы. Вращение требует модификации большинства результатов, полученных для неподвижной равновесной плазмы.

К первому этапу работы Б.Б. Кадомцева в Курчатовском институте можно условно отнести годы с 1956-го по 1962-й. В 1956 г. Борис Борисович приходит в Курчатовский институт в теоретический сектор Михаила Александровича Леонтовича, который оценил способного молодого человека и взял его на работу. Большая заслуга Леонтовича состоит в том, что ему всего за несколько лет удалось собрать небольшой, но весьма успешный коллектив ярких теоретиков с большими потенциальными возможностями. В случае с Кадомцевым весьма велика и заслуга Виталия Дмитриевича Шафранова, который привёл своего однокашника Бориса Кадомцева в теоретический сектор к Михаилу Александровичу.

Первые работы Бориса Борисовича были посвящены кинетике; они отчасти продолжали его предыдущую деятельность в Обнинске, но очень скоро он, благодаря своей способности выделять главное, переключается на задачи макроскопического удержания плазмы. Вообще, это умение Кадомцева быстро выделять главное в любой проблеме и сосредотачиваться на её ключевых аспектах весьма характерно для всей его последующей деятельности. В значительной степени именно это умение быстро выдвинуло его в ряд ведущих фигур в новой науке — теории высокотемпературной плазмы. Он начинает работать над теорией устойчивости, и эта тематика так

или иначе будет разрабатываться им на протяжении всей жизни. На этом этапе им выполнен ряд ключевых работ по магнитогидродинамической (МГД) устойчивости плазмы в магнитных ловушках и, в частности, сформулирован энергетический принцип устойчивости МГД-равновесий, речь о котором пойдет ниже. Кульминацией этой деятельности стала экспериментальная проверка принципа "минимума \mathbf{W} " в лаборатории М.С. Иоффе [4]. Логическим завершением данного этапа стала защита докторской диссертации в 1961 г. и избрание Бориса Борисовича членом-корреспондентом АН СССР в 1962 г.

На втором этапе (1962–1970 гг.) Борис Борисович разрабатывает теорию турбулентности замагниченной плазмы и связанных с ней процессов переноса. В конце концов наступает понимание того, что боровская диффузия, казавшаяся долгое время непреодолимым препятствием на пути к реализации термоядерного синтеза, не является неизбежной для токамака и может быть устранена. Это обстоятельство позволило затем перейти к разработке концепции термоядерного реактора на основе токамака. В то же время Кадомцев продолжает поиски "ключевой" для токамака неустойчивости и в её поисках приходит к открытию неустойчивости на запертых частицах. В 1970 г. его избирают действительным членом АН СССР и присуждают Государственную премию СССР.

Следующий этап, с 1971-го г. по 1990-й г., — это период, в который в Курчатовском институте, как, впрочем, и во всем мире, строятся крупные токамаки: сначала Т-10, на котором с помощью мощного гиротронного нагрева очень быстро были получены рекордно высокие параметры плазмы, потом Т-15 — уникальный токамак со сверхпроводящими обмотками. В это время Бориса Борисовича интересует физика токамака "в целом", он разрабатывает принципы самоорганизации плазмы в токамаке. В теории устойчивости он обращается к ключевой для работы токамаков неустойчивости срыва; к этому же времени относится ряд его важных достижений в физике нелинейных явлений, в частности известные уравнения Кадомцева–Петвиашвили и Кадомцева–Погуце. О последних пойдёт речь в разделе 4. В 1984 г. Б.Б. Кадомцев становится лауреатом Ленинской премии. Данный этап естественно завершается переходом к разработке крупных международных проектов, инициатором которых выступил Евгений Павлович Велихов. После 1990 г. Кадомцевым был написан ряд обзоров по физике плазмы в токамаках, ставших в значительной степени основой проекта Международного термоядерного реактора ИТЭР, в котором Борис Борисович активно участвовал. История развития концепции токамака от первой идеи до ИТЭРа описана самим Кадомцевым в обзоре [5]. Заслуги Бориса Борисовича перед международным термоядерным сообществом оценены присуждением ему в 1998 г. премии им. Дж.К. Максвелла Американского физического общества.

2. Энергетический принцип устойчивости

Во второй половине 1950-х годов задача обеспечения макроскопической устойчивости плазмы в термоядерных системах, и в первую очередь МГД-устойчивости, выходит на передний план. Довольно быстро стала понятна важная роль желобковой неустойчивости в

магнитных ловушках, при которой плазма вытянутыми вдоль направления магнитного поля языками просачивается сквозь магнитные силовые линии, практически не возмущая магнитное поле. Эта неустойчивость является МГД-аналогом неустойчивости Рэля–Тейлора, которую естественно анализировать с энергетической точки зрения.

Для простых гамильтоновых систем достаточно очевиден следующий "энергетический принцип устойчивости" статических равновесий: в силу положительной определённости кинетической энергии положительная определённость потенциальной энергии гарантирует (по теореме Ляпунова) устойчивость исходного равновесия. Первым идею такого подхода применительно к задачам МГД высказал, по-видимому, Лундквист в 1951 г. [6]. В течение последующих шести лет эти идеи активно развивались Крускалом, Калсрудом, Шлютером, Розенблютом, Лонгмайром и др. (см., например, [7, 8]), был получен ряд важных результатов, и в 1958 г. исчерпывающая математическая формулировка энергетического принципа для произвольных МГД-систем была дана в работе [9] Бернштейна, Фримана, Крускала и Калсруда (БФКК). К этому времени и в работах Кадомцева, и в работах вышеперечисленных авторов уже фигурировали основные составляющие энергетического принципа БФКК [10]. Однако полнота и общность формулировок БФКК привели к тому, что именно работа [9] ассоциируется теперь с энергетическим принципом МГД-устойчивости и является одной из самых цитируемых в физике плазмы. После опубликования этой статьи появляется целый поток работ по применению энергетического принципа для описания устойчивости конкретных магнитных систем, конкретных мод и т.п.

Для МГД-системы с гамильтонианом

$$H = K + W = \int_{\Gamma} \frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} d^3r + \int_{\Gamma} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) d^3r \quad (1)$$

энергетический принцип устойчивости формулируется как требование положительной полуопределённости второй вариации потенциальной энергии

$$\delta^2 W \geq 0 \quad (2)$$

в окрестности статического положения равновесия $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, $\nabla p = \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}/4\pi$ (использованы стандартные обозначения: \mathbf{V} , p — соответственно макроскопическая скорость и давление плазмы с показателем адиабаты γ , удерживаемой магнитным полем \mathbf{B} в объёме Γ , который для простоты считается фиксированным). Величину $\delta^2 W$ удобно выразить в терминах смещения элемента плазмы ξ :

$$\begin{aligned} \delta^2 W &= -\frac{1}{2} \int \xi \mathbf{F}(\xi) d^3r = \\ &= \int d^3r \frac{1}{4\pi} \left\{ \text{rot}^2 [\xi \times \mathbf{B}] + [\xi \times \text{rot} [\xi \times \mathbf{B}]] \text{rot } \mathbf{B} + \right. \\ &\quad \left. + \xi \nabla p \text{div } \xi + \gamma p \text{div}^2 \xi \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

В данном выражении отчётливо прослеживается физическая природа возможной неустойчивости: второй и третий члены в правой части (3) ответственны за два возможных механизма неустойчивости, связанных соответственно с протекающим по плазме электрическим

током и с её давлением, тогда как возмущение магнитного поля и сжимаемость плазмы являются стабилизирующими факторами. Продуктивность энергетического принципа тесно связана с самоспряжённостью (эрмитовостью) линеаризованного силового оператора \mathbf{F} , понимаемой в обычном смысле,

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) d^3r = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\xi} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) d^3r$$

(векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ произвольны и обращаются в нуль на границе области интегрирования Γ).

Самоспряжённость \mathbf{F} гарантирует необходимость условия устойчивости (2) и его полноту для систем с магнитными поверхностями, к которым относится большинство известных магнитных ловушек. Другими словами, можно доказать утверждение, что если для какого-то смещения $\boldsymbol{\xi}$ потенциальная энергия отрицательна, то найдётся собственная мода уравнения малых колебаний

$$\rho \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}),$$

которая будет экспоненциально нарастать во времени [9]. Причём набор собственных мод образует полную систему.

Кадомцев применяет данный принцип для анализа желобковых мод и находит условие устойчивости

$$\nabla p \nabla U + \frac{\gamma p (\nabla U)^2}{U} > 0, \quad (4)$$

где $U = \int dl/B$ — интеграл вдоль силовой линии магнитного поля (по длине желобка). Первый член в (4) описывает благоприятный для устойчивости эффект "средней магнитной ямы", который возникает при нарастании магнитного поля от зоны удержания плазмы, а второй учитывает стабилизирующий эффект сжимаемости плазмы. Это и ряд других практических приложений энергетического принципа были затем суммированы Кадомцевым в исключительно полном и ясно написанном обзоре [1].

Важный нюанс энергетического принципа состоит в следующем. Теорема Ляпунова требует знакоопределённости функционала (строгого неравенства в (2)). В связи с этим возникает вопрос о роли *нейтральных* смещений, не меняющих потенциальную энергию W , т.е. таких, которые, на языке собственных мод, отвечают нулевой частоте. Именно эти смещения могут быть подозрительными с точки зрения нелинейной неустойчивости. Более того, можно показать, что в МГД-системах такие нейтральные смещения всегда существуют, причем они нетривиальны, т.е. не сводятся к глобальным сдвигам и поворотам плазмы как целого, не представляющим интереса для рассматриваемой проблемы. Но оказывается, что в системах со вложенными магнитными поверхностями, не находящимися в состоянии граничной устойчивости, нейтральные возмущения сводятся к преобразованиям перемаркировки жидких элементов, которые не возмущают физические величины, характеризующие состояние плазмы, — давление, плотность и магнитное поле [11]. Таким образом, для статических равновесий плазмы в системах с магнитными поверхностями энергетический принцип в форме (2), (3) является исчерпывающим. Однако существование маркировоч-

ных симметрий указывает на возможность сдвига равновесия вдоль таких преобразований, т.е. на течения. Поэтому попытка обобщения этого подхода на случай плазмы с течениями кажется естественной.

Такая попытка делается уже в 1960 г. Фриманом и Ротенбергом [12], которые получили энергетическое условие из общего линеаризованного уравнения движения

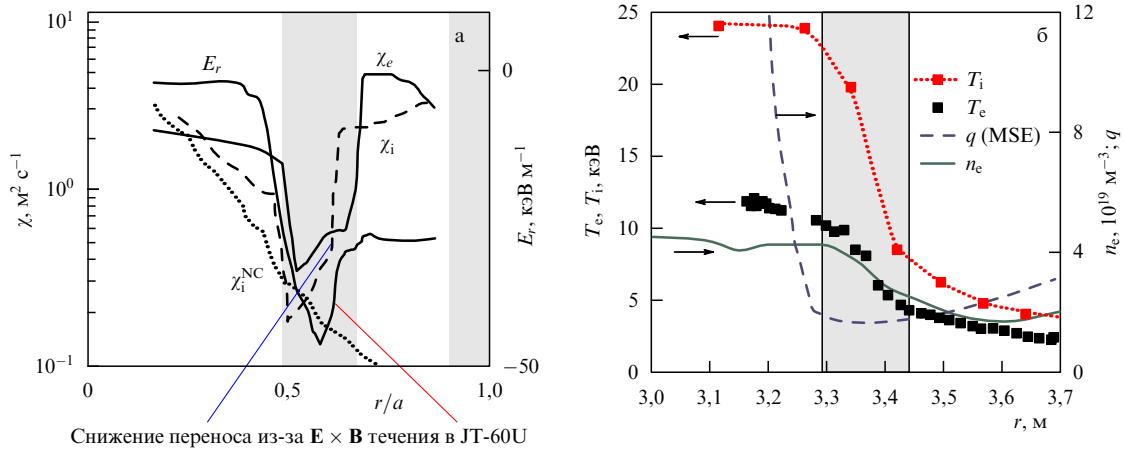
$$\rho \ddot{\boldsymbol{\xi}} + 2\rho(\mathbf{V} \nabla) \dot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = 0, \quad (5)$$

где ρ , \mathbf{V} — стационарные значения массовой плотности и скорости течения плазмы, а оператор \mathbf{F} модифицирован по сравнению с оператором \mathbf{F} в (3), но по-прежнему сохраняет свойство эрмитовости. Консервативность системы (антисимметричный оператор с $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ в (5) выпадает при интегрировании из уравнения баланса энергии) вновь позволяет получить по аналогии со статическим энергетическим принципом достаточное условие устойчивости в виде

$$\begin{aligned} \delta^2 W \approx \int_{\Gamma} d^3r \left\{ -\frac{1}{\rho} \operatorname{rot}^2 [\boldsymbol{\xi} \times \rho \mathbf{V}] - [\boldsymbol{\xi} \times \operatorname{rot} [\boldsymbol{\xi} \times \rho \mathbf{V}]] \operatorname{rot} \mathbf{V} + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{V}^2}{\rho} \operatorname{div}^2 (\rho \boldsymbol{\xi}) + \left(\boldsymbol{\xi} \nabla \frac{\mathbf{V}^2}{2} - 2\mathbf{V} (\mathbf{V} \nabla) \boldsymbol{\xi} \right) \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{\xi}) + \right. \\ \left. + \operatorname{rot}^2 [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}] + [\boldsymbol{\xi} \times \operatorname{rot} [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}]] \operatorname{rot} \mathbf{B} + \right. \\ \left. + \boldsymbol{\xi} \nabla p \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \gamma p \operatorname{div}^2 \boldsymbol{\xi} \right\} \geq 0, \quad (6) \end{aligned}$$

которое в отличие от условия в статическом случае оказывается слишком "жестким" (далёким от необходимого) и не удовлетворяется для систем, представляющих сколько-нибудь практический интерес за исключением весьма частных случаев (например, при течении плазмы строго вдоль силовых линий магнитного поля, $\mathbf{V} \parallel \mathbf{B}$). Интерес к этой деятельности пропадает почти на 20 лет, поскольку роль макроскопического движения плазмы (течения) считается несущественной при скорости течения много меньшей звуковой скорости. Отметим, что это соображение не вполне корректно, так как характерный размер пространственной неоднородности течения может заметно отличаться от размера областей неоднородности давления, плотности плазмы или магнитного поля, что может сделать существенным учёт движения плазмы и при гораздо меньших скоростях. Однако в ранних термоядерных экспериментах такая возможность не отмечалась.

Возобновление интереса к течениям плазмы связано с появлением новых мощных средств нагрева плазмы в современных токамаках. При нескомпенсированной инжекции пучков быстрых атомов плазма в токамаках приходит во вращение, скорость которого может по порядку величины достигать звуковой скорости. При этом регистрируются так называемые режимы *улучшенного удержания*, возникновение которых связывают с появлением относительно узких слоев неоднородного вращения. На рисунке 1 представлено характерное для таких режимов явление так называемого транспортного барьера. В узком слое наблюдается скачок электрического поля и соответственно скорости вращения плазмы. Скачок температуры именно в этом слое соответствует резкому снижению эффективной теплопроводности в данной области. Наличие такого слоя позволяет значи-



Снижение переноса из-за $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ течения в JT-60U

Рис. 1. Транспортный барьер на японском токамаке JT-60U (см. [13]). (а) Показаны скачки электрического поля E_r и эффективных коэффициентов ионной χ_i и электронной χ_e теплопроводностей в зоне барьера. Видно, что ионная теплопроводность уменьшается до уровня χ_i^{NC} , рассчитанной по неоклассической (NC) теории (пунктирная кривая). (б) Большой градиент температур T_e, T_i и плотности n_e в этой зоне иллюстрирует понятие "транспортный барьер"; q — коэффициент запаса устойчивости, измеренный методом MSE (Motional Stark Effect — динамический эффект Штарка).

тельно увеличить допустимые значения параметров плазмы, удерживаемой внутри барьера. Указанные обстоятельства сделали очевидной актуальность исследования эффектов вращения плазмы и в задачах устойчивости, и в тесно связанных с ними задачах теории переноса.

Одна из возможных причин слишком большого разрыва между достаточным условием устойчивости Фримана и Ротенберга (6) и необходимым условием МГД-устойчивости — недоучёт связей между смещением и скоростью, свойственных реальной динамике системы. Сказанное можно пояснить на простом примере, иногда называемом задачей Прендергаста. Рассмотрим движение заряда по симметричному холму в поле тяжести и в вертикальном магнитном поле. Магнитное поле не меняет энергии заряда, и умозаключения, сделанные из анализа знака второй вариации потенциальной энергии, свидетельствуют о возможной неустойчивости при любом уклоне холма. Положительная определённая потенциальной энергии гарантирует устойчивость лишь в гравитационной яме, хотя ясно, что магнитное поле оказывает влияние на динамику заряда. При достаточной величине магнитного поля равновесие на макушке холма или вращение вокруг него может оказаться устойчивым. В этом несложно убедиться, поскольку задача решается точно. Излишняя свобода в варьируемых функциях может быть устранена учётом присущих системе законов сохранения, отличных от закона сохранения энергии. Так, в данной задаче должен сохраняться обобщённый момент импульса. В общем случае при наличии дополнительных инвариантов движения, показанных на условной фазовой плоскости линиями уровня (рис. 2), вместо произвольных смещений ξ достаточно исследовать возмущения ξ_R , сохраняющие значение таких инвариантов. Любопытно, что следование этой процедуре и учёт закона сохранения обобщённого момента импульса в вариациях позволяет в нашем примере получить точный (необходимый и достаточный) критерий устойчивости.

Применительно к гидродинамике эта идея была выдвинута В.И. Арнольдом [14, 15], который в 1965 г. предложил при анализе устойчивости течений учи-

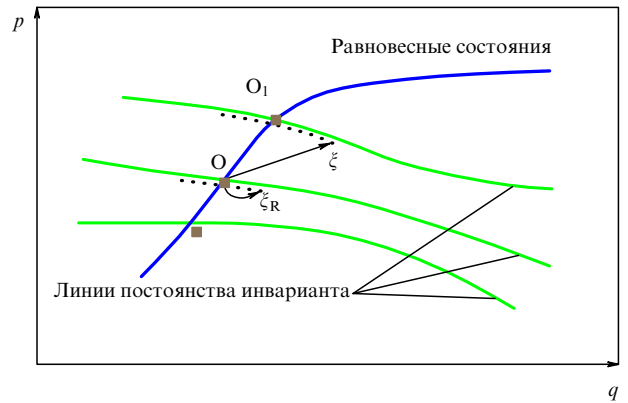


Рис. 2. Иллюстрация случая вырожденного равновесия (тёмная кривая — синяя в электронной версии статьи). Колебания (показанные точками) происходят вдоль линий постоянства инварианта.

тывать сохранение завихренности. В МГД завихрённость не сохраняется, но в системах с магнитными поверхностями сохраняется (при определённых условиях) перекрёстная спиральность I_1 и её "двойник" I_2 :

$$I_1 = \int \mathbf{V} \mathbf{B} d^3r, \quad I_2 = \int \mathbf{V} \mathbf{D} d^3r. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{D} — линейно независимый с \mathbf{B} в замороженной в плазму бездивергентный вектор, также касательный к магнитным поверхностям; интегрирование в (7) выполняется по объёму между любыми близкими магнитными поверхностями. Учёт по схеме Арнольда ограничений на варьируемые функции, накладываемых условием сохранения величин (7) в вариациях, позволил получить общие равновесия с течениями и, одновременно, более мягкое по сравнению с условием (6) Фримана–Ротенберга условие устойчивости [16, 17]. В общем виде устранение излишней свободы в вариациях независимых переменных (координат и импульсов "жидких элементов" среды) обеспечивается расщеплением возмущений в соответствии с инвариантностью величин вида

$$\int_{\Gamma} \lambda \mathbf{P} \mathbf{V} d^3r,$$

где \mathbf{P} — канонический импульс (с учётом возмущения), $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ — равновесное поле скоростей в объёме G , λ — весовой фактор, связанный с топологией системы. Существенно, что такое расщепление учитывается как в первой, так и во второй вариациях функционала. При этом, хотя из рассмотрения первой вариации получается условие равновесия самого общего функционального вида, условие устойчивости может быть всё ещё далёким от необходимого.

Методически полезно отметить распространённое в литературе заблуждение, что, формально добавив к варьируемому функционалу сохраняющиеся величины (такие, например, как наши интегралы (7)) с неопределёнными множителями Лагранжа и проведя варьирование нового функционала, можно автоматически получить улучшенное (более мягкое) условие устойчивости. Эта процедура, изложенная, например, в известном обзоре [18], позволяет получить лишь более общий класс равновесий, но не ограничивает возмущения в вариациях и, следовательно, приводит к потере информации об уже найденных интегралах движения при исследовании выпуклости функционала, т.е. снова к более жёсткому условию устойчивости, чем по методу Арнольда. Таким же недостатком страдает и подавляющее большинство работ по исследованию нелинейной устойчивости и устойчивости течений, выполненных позднее в соответствии с рецептами [18].

Другая чисто физическая причина трудностей энергетического подхода — волны с отрицательной энергией. Действительно, если устойчивые колебания в рассматриваемой системе могут обладать не только положительной, но и отрицательной энергией, энергетический анализ возмущений для исследования их устойчивости может быть непродуктивен. Заметим, что Кадомцев не обошёл своим вниманием феномен волн с отрицательной энергией, однако в известной работе [19] рассматривалось лишь взаимодействие электромагнитных волн в средах с различной дисперсией. Для наших же целей важно, что отрицательной энергией могут обладать и МГД-колебания. Действительно, из уравнения Фримана–Ротенберга (5) формально следует дисперсионное уравнение для собственной частоты ω :

$$A\omega^2 - 2B\omega - C = 0, \quad (8)$$

где для ξ в виде нормальных мод

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \hat{\xi}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (9)$$

коэффициенты $A = \int \rho |\hat{\xi}|^2 d^3\mathbf{r}$, $B = -i \int \rho \hat{\xi}^* (\mathbf{V} \nabla) \hat{\xi} d^3\mathbf{r}$ и $C = - \int \hat{\xi}^* \mathbf{F}[\hat{\xi}] d^3\mathbf{r}$ вещественны по определению. Решение (8) имеет вид

$$\omega = \frac{B + s\sqrt{B^2 + AC}}{A}, \quad (10)$$

где $s = 1$ либо $s = -1$ для определённой собственной волны. Следовательно, собственная волна неустойчива, только если $B^2 + AC < 0$. Энергию собственной моды можно записать в виде

$$E = \frac{1}{2} (A|\omega|^2 + C) \exp(2\gamma t), \quad (11)$$

где инкремент $\gamma = \text{Im } \omega$. Так как энергия сохраняется, E в (11) не может зависеть от времени и должна быть равна нулю для любой неустойчивой собственной моды с $\gamma \neq 0$.

Энергия устойчивой собственной моды с $\gamma = 0$ даётся выражением

$$E = s\omega \sqrt{B^2 + AC} \quad (12)$$

и может быть либо положительной (волны положительной энергии, ВПЭ), либо отрицательной (волны отрицательной энергии, ВОЭ). Последние существуют как собственные моды с $-B^2/A < C < 0$ и $\text{sign}(B) = -s$. Из (8), (12) следует, что все ВОЭ асимметричны, т.е. они имеют пространственную зависимость в направлении стационарного течения, так что $B \neq 0$. Как указано в [20], существует интервал параметров равновесия, в котором могут сосуществовать волны с положительной и отрицательной энергией. Когда частоты таких волн совпадают (условия резонанса), энергия может переходить из ВОЭ в ВПЭ, что приводит к неустойчивости. По сути, такие пары ВОЭ и ВПЭ являются универсальным механизмом любой асимметричной неустойчивости в идеальной МГД-системе с потоками.

Собственные моды с чисто вещественными или чисто мнимыми собственными значениями, которые образуют на плоскости $\text{Re } \omega - \text{Im } \omega$ симметричный относительно начала координат спектр, будем называть симметричными. В частности, они отвечают статическим равновесиям или модам, однородным вдоль направления течения ($B = 0$). Для симметричных мод работает стандартный энергетический принцип, поскольку их энергия (12) всегда неотрицательна и проходит через нуль при переходе из зоны устойчивости в зону неустойчивости. Этот принцип, разумеется, нарушается при возбуждении в системе ВОЭ, поскольку нуль энергии может достигаться и в целиком устойчивой зоне.

Отмеченной неприятности, связанной с ВОЭ, также можно избежать с помощью учёта нужного числа дополнительных интегралов движения, по крайней мере, в случае дискретного спектра. Линейное уравнение движения (5) имеет бесконечный набор интегралов типа энергии [21], но не сводящихся к ней:

$$E_n = \frac{1}{2} \int \left(\rho |\xi^{(n+1)}|^2 - \xi^{*(n)} \mathbf{F}[\xi^{(n)}] \right) d^3\mathbf{r}, \quad (13)$$

где $\xi^{(n)}$ — n -я производная по времени. В основном эти интегралы независимы. E_0 соответствует энергии, интеграл E_1 — инвариантам типа (7). Инварианты высшего порядка (13) не имеют очевидных нелинейных аналогов. Используя рекуррентное соотношение, которое следует немедленно из (5),

$$\xi^{(n+2)} = -2(\mathbf{V} \nabla) \xi^{(n+1)} + \frac{\mathbf{F}[\xi^{(n)}]}{\rho}, \quad (14)$$

все интегралы (13) можно выразить через начальные возмущения $\dot{\xi}_0 = \dot{\xi}|_{t=0}$ и $\xi_0 = \xi|_{t=0}$. В частности,

$$E_1(\dot{\xi}_0, \xi_0) = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\rho} |\mathbf{F}[\xi_0] - 2\rho(\mathbf{V} \nabla) \dot{\xi}_0|^2 - \dot{\xi}_0^* \mathbf{F}[\dot{\xi}_0] \right) d^3\mathbf{r}. \quad (15)$$

Следуя подходу Арнольда [15], интегралы движения (13) можно ввести в функционал Ляпунова с помощью множителей Лагранжа λ_n :

$$U(\dot{\xi}_0, \xi_0) = \sum_{n=0}^N \lambda_n E_n(\dot{\xi}_0, \xi_0). \quad (16)$$

Следующая теорема предоставляет достаточное условие для формальной устойчивости системы, описываемой уравнением (5).

Теорема. Если существуют вещественные числа λ_n и целое число $N \in [0, \infty]$ такие, что форма (16) положительно определена для всех ξ_0 и ξ_0 , то форма (16) является функционалом Ляпунова и состояние равновесия формально (спектрально) устойчиво.

Доказательство этой теоремы и более детальное изложение данного подхода см. в [22]. Теорема при определённых предположениях также обеспечивает необходимые условия спектральной устойчивости, т.е. если система устойчива, то тогда существуют λ_n такие, при которых функционал U неотрицателен при любом возмущении.

Продуктивность описанного подхода можно проиллюстрировать на простом и наглядном примере неустойчивости Рэля–Тейлора вращающегося холодного гравитирующего газа. Все равновесные величины могут зависеть только от радиуса r в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Равновесная скорость выражается в виде

$$\mathbf{V} = r\Omega(r)\mathbf{e}_\varphi, \quad r\Omega^2(r) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (17)$$

где $\Omega(r)$ — угловая частота вращения в гравитационном поле с потенциалом $\Phi(r)$, $\mathbf{e}_\varphi = r\nabla\varphi$. Условие устойчивости такого вращения хорошо известно: это известный критерий Рэля (необходимое и достаточное условие спектральной устойчивости), сводящееся в данном случае к требованию вещественности так называемой эпиклической частоты κ :

$$\kappa^2 = 4\Omega^2 + r \frac{\partial\Omega^2}{\partial r} \geq 0. \quad (18)$$

Теперь применим к этой задаче описанный выше вариационный метод. Заметим, что в этом случае все инварианты (13) локальны и для вращающихся с частотой $\Omega(r)$ мод первые два инварианта E_0 и E_1 имеют вид

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2} (|\dot{\xi}|^2 - \xi^{*\top} \hat{\mathbf{B}} \xi) = \\ &= \frac{1}{2} \left(|\dot{\xi}_r|^2 + |\dot{\xi}_\varphi|^2 + |\dot{\xi}_z|^2 + r \frac{\partial\Omega^2}{\partial r} |\xi_r|^2 \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} \left(|\hat{\mathbf{B}}\xi - 2\Omega\hat{\mathbf{A}}\dot{\xi}|^2 - \xi^{*\top} \hat{\mathbf{B}} \xi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial\Omega^2}{\partial r} \xi_r - 2\Omega\dot{\xi}_\varphi \right]^2 + \left(4\Omega^2 + r \frac{\partial\Omega^2}{\partial r} \right) |\xi_r|^2 \end{aligned}$$

(здесь $\hat{\mathbf{B}}$ — матрица: $B_{ij} = 2r\Omega\Omega'_r\delta_{i1}\delta_{j1}$, δ — символ Кронекера). Если в качестве U выбрать E_1 , положив в (16) $\lambda_{i \neq 1} = 0$, то мы придём к условию спектральной устойчивости, которое в точности представляет собой критерий Рэля (18). Энергетический принцип ($U = E_0$) даёт, как следует из (19), более жёсткое достаточное условие устойчивости: $r \partial\Omega^2/\partial r \geq 0$. Это подтверждает эффективность предлагаемого нами метода.

Другой пример связан с магнитовращательной (или, если следовать латинской терминологии, магниторотационной) неустойчивостью (МВН) Е.П. Велихова [23], которая, как полагают, может быть ответственна за

турбулентные процессы в аккреционных дисках. Рассчитаем значения энергий и частот собственных мод в эксперименте, моделирующем явление магнитовращательной неустойчивости. Рассмотрим несжимаемую проводящую жидкость, вращающуюся поперёк однородного магнитного поля $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ с угловой скоростью

$$\mathbf{V} = r\Omega(r)\mathbf{e}_\varphi, \quad \Omega(r) = \frac{\Omega_1 r_1^2}{r^2}, \quad (20)$$

заданной в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Выберем для определённости $r_2/r_1 = 5$, где r_1 и r_2 — соответственно внутренний и внешний радиусы канала, в который помещена жидкость, Ω_1 — угловая скорость на радиусе r_1 . Подробное исследование устойчивости такого потока было представлено в [20, 24] для нормальных мод в виде $\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t + im\phi + ik_z z)$.

На рисунке 3 показаны частота и энергия собственных осесимметричных ($m = 0$) и неосесимметричных волн ($m = 1$) в зависимости от значения параметра равновесия Ω_1/ω_A , характеризующего скорость вращения (ω_A — альвеновская частота). Зона неустойчивости закрашена. В осесимметричном случае (рис. 3а) только волны с положительной энергией могут быть возбуждены в системе. Точке слияния двух ветвей на рис. 3а соответствует значение $\Omega_1/\omega_A \approx 2,0$, которое является порогом магнитовращательной неустойчивости для $m = 0$. Природа осесимметричной МВН не имеет отношения к волнам с отрицательной энергией и может быть объяснена механизмом, схожим с неустойчивостью Рэля–Тейлора [23].

Для мод с $m = 1$ (рис. 3б) положительная и отрицательная энергии могут сосуществовать в системе, когда $\Omega_1/\omega_A > 1$. Порог неустойчивости в этом случае $\Omega_1/\omega_A \approx 1,7$ (что соответствует радиальной моде с $n_r = 0$), когда частоты ВОЭ и ВПЭ совпадают, согласно сказанному выше. Дискретность спектра также позволяет воспользоваться описанным комбинированным функционалом (16). Подробно этот пример разобран в [22].

Таким образом, обобщение классического энергетического принципа на случай динамических равновесий, т.е. течений, возможно, хотя и не универсально.

3. Неустойчивость на запертых частицах

На втором этапе работы в Курчатовском институте Борис Борисович много размышляет о природе турбулентности плазмы в токамаке и тесно связанной с ней проблеме аномального переноса частиц и энергии поперёк магнитного поля. По словам Олега Павловича Погуце — ученика и ближайшего в те годы соратника Бориса Борисовича — Кадомцеву хотелось придумать нечто столь же простое, как желобковая неустойчивость, но чтобы это "нечто" было бы характерным для токамака. В результате этих размышлений он приходит к представлениям о неустойчивости на запертых частицах [2, 25], природа которой может быть проиллюстрирована следующим образом.

В токамаках, как, впрочем, и в ряде других тороидальных систем со вложенными магнитными поверхностями, образованными силовыми линиями с эргодической намоткой, желобковая неустойчивость плазмы низкого (по сравнению с давлением магнитного поля) давления стабилизируется магнитным широм — перекрещенностью силовых линий магнитного поля на

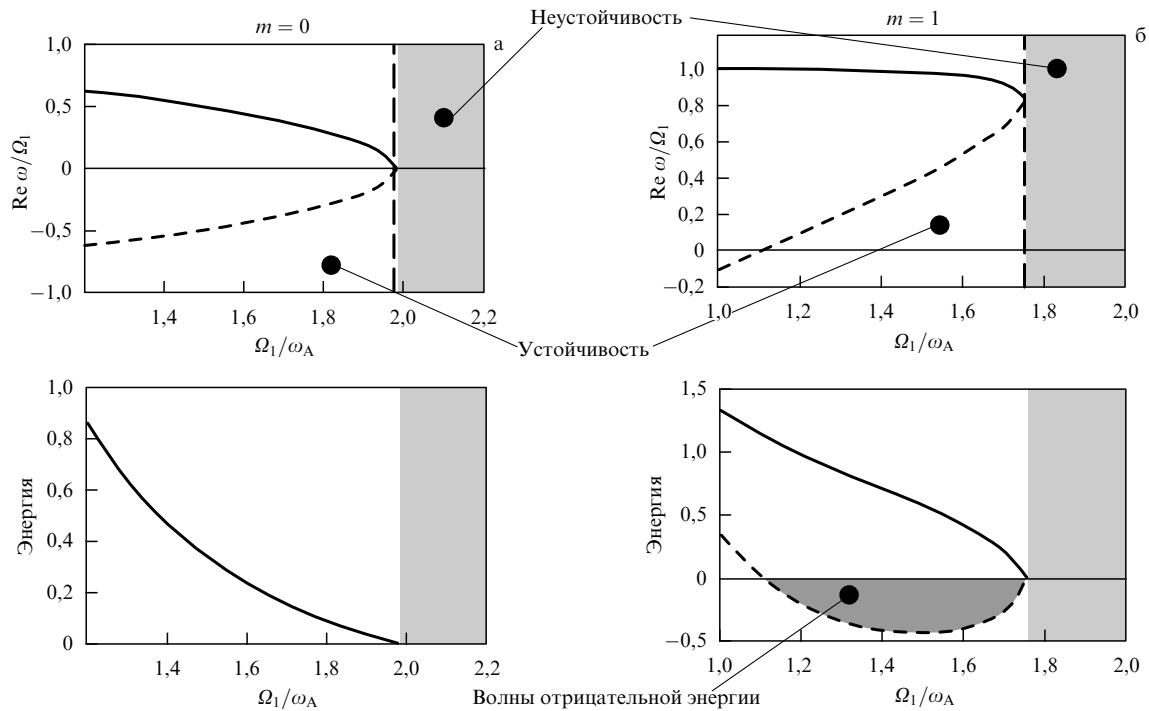


Рис. 3. Энергия (в произвольных единицах) и частота наиболее неустойчивых собственных мод: (а) осесимметричных с $m = 0$ и (б) несимметричных с $m = 1$. Область неустойчивости выделена цветом [20].

соседних магнитных поверхностях. Физически эта стабилизация достигается эффективным перераспределением локального возмущения электростатического потенциала по всей магнитной поверхности за счёт быстрого (с тепловой скоростью) перетекания электрических зарядов вдоль силовых линий магнитного поля. В результате этого магнитная поверхность должна стать эквипотенциалью, что препятствует просачиванию локализованных в полоидальном направлении желобков плазмы по радиусу, которое характерно для открытых ловушек. Однако представления о свободном перетекании зарядов по магнитной поверхности за счёт их движения вдоль силовых линий магнитного поля не вполне корректны. На рисунке 4 изображены проекции типичных траекторий заряженных частиц в магнитном поле токамака на его полоидальное (слева) и тороидальное (справа) сечения (для определенности изображена ситуация, в которой направление тороидального тока совпадает с направлением тороидального магнитного поля; показаны траектории положительно заряженных частиц). На рис. 4а показаны так называемые пролётные частицы, траектории которых охватывают и магнитную, и геометрическую ось токамака, лишь слабо отклоняясь от соответствующей магнитной поверхности. Толщина траектории на рисунке определяется диаметром ларморовской орбиты частицы. На рисунке 4б показаны траектории частиц, косинус питч-угла (т.е. угла α между направлениями скорости частицы и магнитного поля) которых невелик. Такие частицы весьма чувствительны к неоднородности магнитного поля вдоль траектории и могут оказаться запертыми между магнитными пробками, формируемыми на магнитной поверхности в результате неоднородности тороидального магнитного поля ($B_T \sim 1/r$, где r — расстояние до оси токамака). Из-за внешней схожести полоидальные проекции траекторий запертых частиц иногда именуют "банановыми"

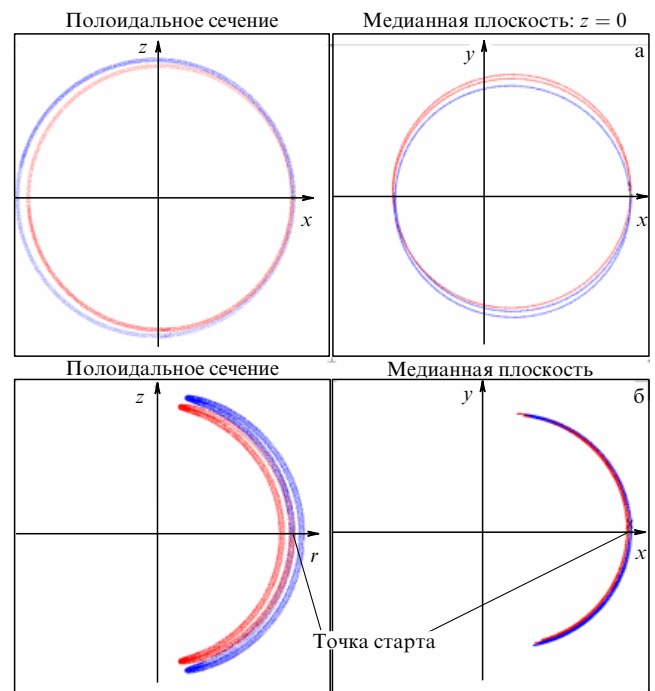


Рис. 4. Типичные траектории пролётных (а) и запертых (б) частиц в токамаке, стартующих из одной точки с противоположными скоростями. Тёмный цвет (синий в электронной версии) соответствует $v > 0$, светлый (красный) — $v < 0$.

орбитами. Таким образом, траектория запертой частицы не охватывает всю магнитную поверхность, а локализуется лишь в некоторой её области. Поэтому для достаточно низкочастотных процессов можно представить себе, что из-за такого характера движения частиц не происходит точной компенсации возмущения элект-

рического потенциала за счёт продольного движения вдоль силовых линий. Запертая частица просто не может сдвинуться под действием возмущения — ей препятствуют магнитные пробки. Разумеется, доля запертых частиц относительно невелика. Максимальное значение пробочного отношения на магнитной поверхности радиусом ρ равно

$$\Pi = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad (21)$$

и запертыми оказываются частицы, питч-угол α которых удовлетворяет соотношению

$$\left| \cos \alpha \right| = \left| \frac{v_{\parallel}}{v} \right| \leq \sqrt{\frac{\Pi - 1}{\Pi}} \approx \sqrt{2\varepsilon},$$

где $\varepsilon = \rho/R$, R — большой радиус токамака (радиус магнитной оси). Таким образом, доля запертых частиц (при изотропном распределении в фазовом пространстве) $\sim \varepsilon \ll 1$, и заряды, образующиеся за счёт запертых частиц, в значительной степени компенсируются перераспределением пролётных частиц. Вследствие этого эффекта инкремент неустойчивости на запертых частицах относительно невелик [2].

Как же на эту неустойчивость может повлиять вращение плазмы? Казалось бы, на периферии токамака тороидальное вращение не должно сильно сказаться на неустойчивости, потому что оно просто будет приводить к согласованному смещению частиц вдоль тора, как запертых, так и пролётных; эффект же полоидального вращения не столь очевиден. Действительно, вращение замагниченной плазмы (т.е. совместное движение ионов и электронов) обычно связано с присутствием радиального электрического поля (электрический дрейф — единственный тип дрейфового движения, скорость которого не зависит от знака заряда), причём в токамаке центральная область плазменного шнура обычно заряжена отрицательно. Заметим, что, как видно из рис. 4б, стартовая запертая частица отклоняется из-за тороидального дрейфа *вовнутрь* и в присутствии радиального электрического поля набирает кинетическую энергию. Этого избытка может хватить на прохождение через магнитную пробку, в результате чего частица станет пролётной. Для частицы с энергией E пробочное отношение в (21) следует эффективно уменьшить в $1 + e\phi' \Delta_b / E$ раз, где $\phi(\rho)$ — электрический потенциал, Δ_b — полуширина банановой орбиты. Частица, стартовая из той же точки в противоположную сторону, дрейфует наружу от стартовой магнитной поверхности и, следовательно, запирается сильнее. Для электронов направления дрейфов противоположны, но меняется и знак заряда, фигурирующий в приведённой выше поправке для пробочного отношения. Более любопытна ситуация в центре шнура. Здесь, как известно, при некоторых значениях $|\cos \alpha|$ существует асимметрия в пространстве скоростей: одна из двух частиц, стартовых в противоположных направлениях, может оказаться пролётной, в то время как другая — запертой (рис. 5). Теряющая скорость при движении от центра пролётная частица все равно останется пролётной, а запертая — запертой; лишь уменьшаются радиусы их орбиты в полоидальном сечении. При этом надо иметь в виду, что, как видно из рис. 5, траектории частиц в центральной

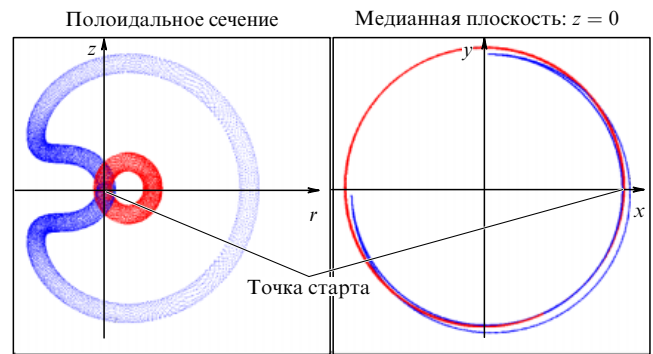


Рис. 5. Асимметрия траекторий частиц, стартовых из одной точки с противоположными скоростями в центре токамака.

области далеки от следования магнитным поверхностям, а вращение уменьшает данное отличие. Разумеется, при противоположном знаке $\phi'(\rho)$ эффект тоже будет противоположным.

Тем не менее из сказанного можно заключить, что явление неустойчивости на запертых частицах не претерпевает серьёзных изменений во вращающейся плазме.

4. Редуцированные магнитогидродинамические уравнения

Семидесятые годы XX в. — это время, в которое во всём мире ведётся строительство крупных токамаков. Рекордные достижения курчатовского Т-10 и принстонского PLT (Princeton Large Torus) открыли путь крупным токамакам следующего поколения: Т-15 в СССР, TFTR (Tokamak Engineering Test Reactor) и Doublet III в США, Tore-Supra во Франции, JET (Joint European Torus) в Великобритании и JT-60 в Японии. В эти годы Кадомцев формулирует концепцию перехода от физических исследований к созданию термоядерной энергетики. Его привлекают идеи самоорганизации плазмы, для их воплощения необходим аппарат нелинейных уравнений. Учёта нелинейности требует и самая опасная для плазмы токамака неустойчивость срыва, развивающаяся вначале как винтовая мода, но приводящая к выбросу плазмы и токового канала на стенку камеры. О физике такой неустойчивости рассказывалось в докладе С.В. Мирнова на этой сессии (см. с. 767 настоящего выпуска УФН). Здесь же мы остановимся на созданном для описания этой неустойчивости формализме.

Необходимость получения упрощённой (но адекватной рассматриваемому явлению) нелинейной модели вызвана тем, что и МГД-уравнения, и дрейфовые уравнения оказываются весьма сложными для полного трёхмерного моделирования, в первую очередь, из-за своей многомасштабности. Так, в МГД-явлениях участвуют физические процессы, имеющие совершенно разные (различающиеся на несколько порядков) пространственные и временные масштабы: альвеновские, тепловые, инерционные, резистивные и так далее, и так далее. Прямое численное моделирование таких комплексных явлений не проходит: накапливающиеся на малых масштабах погрешности приводят обычно к неконтролируемым ошибкам на больших масштабах. Кроме того, производительность даже лучших суперкомпьютеров пока не позволяет осуществлять такие расчёты с требуемой точностью за обозримое время. Борис Борисович на

этом этапе решает предпринять попытку получения упрощённых (редуцированных) уравнений, пригодных для практического численного моделирования; в данном случае он ориентировался как раз на динамику винтовых мод, в том числе и нелинейную.

Ключевой идеей работы было получение уравнений, описывающих низкочастотную нелинейную динамику плазмы в токамаках, путём исключения из исходных МГД-уравнений более высокочастотных устойчивых магнитозвуковых осцилляций. Практически это можно было реализовать, проведя разложение по характерному для токамаков малому параметру — отношению полоидального и тороидального магнитных полей $\epsilon = B_{\perp}/B_0 \ll 1$ — и перейдя в результате от трёхмерной задачи к двумерной. Несколько позднее идея редуцированных уравнений для токамаков и стеллараторов развивалась в работах таких известных учёных, как М. Розенблют, Р. Хазелтин, Р. Уайт, а также в большом числе работ Х. Страуса (см., например, [26]), вследствие чего полученные впервые Кадомцевым и Погуце [3] уравнения нередко ассоциируют с именем Страуса.

Исключительно важным упрощением в описании нелинейной динамики альвеновских возмущений стало уравнение вмороженности для эффективного магнитного поля, определяемого лишь одной скалярной поточковой функцией ψ :

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{B}_{\perp} - \mu \frac{\rho}{R} B_0 \mathbf{e}_{\theta} = \nabla \zeta \times \nabla \psi, \quad (22)$$

где μ — угол вращательного преобразования в токамаке с большим радиусом R , $\mathbf{e}_{\theta} = \rho \nabla \theta$ и $R \nabla \zeta$ — орты в полоидальном и тороидальном направлениях соответственно. При $\epsilon \ll 1$ уравнение вмороженности магнитного поля сводится к уравнению вмороженности поля \mathbf{B}_* , автоматически выполняемому на несжимаемых течениях с $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_{\perp}$, $\text{div} \mathbf{v}_{\perp} = 0$, с вмороженным потоком ψ : $\partial \psi / \partial t + \mathbf{v} \nabla \psi = 0$. Уравнение Эйлера редуцируется при этом к

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla P = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_* \nabla) \mathbf{B}_*,$$

где

$$P = \frac{1}{8\pi} (2B_0 B_{\zeta}' + B_{\perp}^2 + 4\mu^2 \frac{\rho^2}{R^2} B_0^2) + \frac{\mu B_0 \psi}{2\pi R^2}$$

играет роль давления. Тем самым задача о движении плазмы сводится к задаче о двумерном течении несжимаемой идеально проводящей жидкости с вмороженным в неё магнитным полем \mathbf{B}_* . Эти редуцированные уравнения позволили просто и наглядно промоделировать эволюцию так называемых пузырей в токамаке, явление срыва и ряд других нелинейных явлений. Данная процедура редуцирования, предложенная Кадомцевым и Погуце для идеальной одножидкостной МГД-модели, стала основой для целого направления в нелинейной динамике замагниченной плазмы; положенные в её основу принципы применялись впоследствии для упрощения более сложных моделей и, в частности, двухжидкостных диссипативных уравнений Брагинского, используемых для описания периферийной плазмы.

При всех достоинствах данной процедуры редуцирования она не лишена некоторых недостатков. Нетрудно заметить, что возмущениями B_{\parallel} и $\text{div} \mathbf{v}_{\perp}$ можно прене-

бречь лишь в главном порядке разложения по параметру ϵ , так что процедура не вполне самосогласованна: динамика системы нарушает предположения, в рамках которых она была выведена. Кроме того, данные редуцированные уравнения не допускают стационарных состояний с течениями, что связано с нарушением симметрии перемаркировки, присущей исходным МГД-уравнениям (как уже отмечалось в разделе 2, именно наличие симметрии перемаркировки означает допустимость стационарных течений в рассматриваемой гидродинамической системе). Для преодоления этих недостатков и обобщения подхода Кадомцева и Погуце в отделе теории плазмы Курчатовского института под руководством В.П. Пастухова разрабатывается метод адиабатического разделения быстрых и медленных движений, который позволяет редуцировать идеальные и слабодиссипативные динамические системы с использованием различных малых параметров [27]. Данный метод является, по существу, обобщением классического метода Ван-дер-Поля на случай континуальных лагранжевых систем.

Суть метода можно кратко описать следующим образом. Пусть в слабодиссипативной системе есть быстрые устойчивые коллективные степени свободы с характерными частотами $\sim \omega_F$ и медленные коллективные степени свободы с частотами $\sim \omega_S \sim \epsilon \omega_F$, где, как и раньше, $\epsilon \ll 1$ (предполагаемая малость отклонения системы от идеальности также связана с величиной ϵ). По аналогии с преобразованием симметрии перемаркировки ищется адиабатическое преобразование обобщённых (поточковых) координат α^i в виде $\delta_a \alpha^i = -\xi_a \nabla \alpha^i$, которое не меняет лагранжиан с точностью до членов порядка ϵ^2 :

$$\delta_a \int_{\Gamma} L(\{\alpha^i\}, \{\partial_t \alpha^i\}, \{\nabla \alpha^i\}, \epsilon) d^3r = O(\epsilon^2).$$

Поле скоростей медленного (адиабатического) движения имеет ту же функциональную структуру и не возмущает быстрые степени свободы. Тогда редуцированное уравнение движения определяется из принципа наименьшего действия Гамильтона с использованием ξ_a в качестве варьируемой переменной.

Простейшая модель турбулентной конвекции и транспорта строится на основе одножидкостной МГД с параметром адиабатичности $\epsilon^3 \sim \chi/c_s a \ll 1$ и адиабатическим полем скоростей

$$\mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{B}_p \times \nabla \Phi}{B_p^2} \sim \epsilon c_s.$$

Здесь χ — коэффициент классической теплопроводности, служащей "затравочным" диссипативным процессом, c_s — скорость звука в плазме с поперечным размером a и полоидальным магнитным полем \mathbf{B}_p , Φ — вмороженный в плазму тороидальный магнитный поток (по некоторым причинам, обсуждение которых выходит за рамки данного доклада, использование величины Φ вместо полоидального потока ψ , фигурирующего в (22), может быть предпочтительнее). Характерные частоты исследуемой низкочастотной конвекции $\omega \sim \epsilon k_{\perp} c_s$ значительно ниже характерных частот следующих устойчивых ветвей колебаний: магнитозвуковой с частотой $\omega \sim k_{\perp} c_A$, альвеновской с частотой $\omega \sim k_{\parallel} c_A$, продольной звуковой с частотой

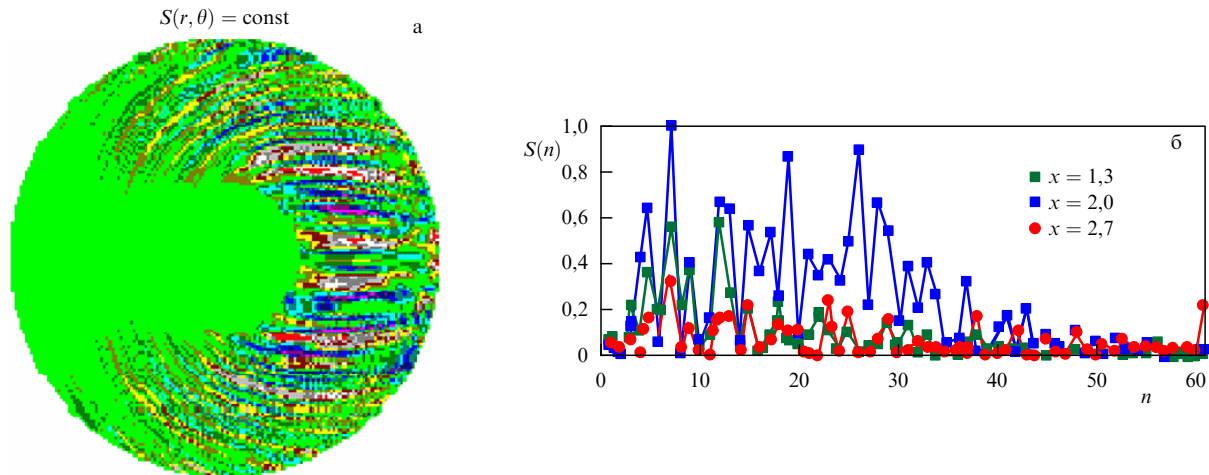


Рис. 6. Сечение изоэнтропийных поверхностей (а) и спектр флуктуаций энтропии (n — волновое число) в режиме развитой МГД-турбулентности (б) [28].

той $\omega \sim k_{\parallel} c_s$. Процедура редуцирования, формализованная как разложение по параметру ϵ интеграла действия, позволяет отсечь указанные устойчивые степени свободы и получить самосогласованные уравнения для низкочастотной конвекции плазмы. Вместо простейшего выражения для P , фигурирующего в уравнениях Кадомцева — Погуце, в данной схеме появляются уравнение переноса тепла, записываемое для энтропийной функции плазмы, и уравнение для флуктуаций тепловой энергии, учитывающие все виды источников и стоков энергии (высокочастотный нагрев, омический нагрев, вязкое тепловыделение, потери на излучение и пр.) в рассматриваемой системе [27].

Полученные таким способом редуцированные уравнения позволяют реализовать на типовых персональных компьютерах уникальную процедуру численного расчёта самосогласованной нелинейной динамики плазменной системы на временах порядка времени жизни системы (заметим, что наиболее передовые из имеющихся в мире гирокинетических кодов, в которых редукция проведена только по одному быстрому времени — периоду лармовского вращения заряженных частиц, позволяют рассчитывать лишь несколько десятков характерных времён развития турбулентного процесса). Результаты этих расчётов демонстрируют универсальные свойства развитой турбулентности плазмы, которые наблюдаются в экспериментах и на токамаках, и на других плазменных установках. К их числу относятся:

- широкий частотный спектр наблюдаемых колебаний, в котором могут присутствовать одна или несколько доминирующих частот;
- перемежаемость и негауссова статистика;
- недиффузионный характер поперечного (по отношению к направлению магнитного поля) переноса частиц и энергии;
- формирование и присутствие в плазме долгоживущих нелинейных структур ("филаментов", "блобов", "стримеров" и др.);
- ярко выраженные черты самоорганизации динамических и транспортных процессов (самосогласованность профилей плазменных параметров, L–H-переходы, "транспортные барьеры" и др.).

Сказанное иллюстрируется показанной на рис. 6 типичной картиной сечений изоэнтропийных поверхностей и спектра флуктуаций энтропийной функции. Широкий спектр флуктуаций не приводит, тем не менее, к осцилляциям усреднённого пространственного профиля энтропии, равно как и других параметров плазмы, которые остаются квазистационарными. В этом и состоит явление турбулентной самоорганизации — отклонение от установившегося профиля приводит к мгновенному усилению колебаний и переносов, компенсирующих это отклонение. Практический вывод, который делается из описанной физической картины, состоит в возможности управления турбулентным транспортом путём пространственного перераспределения источников вводимой в систему мощности и частиц [28].

В заключение хотелось бы подчеркнуть ещё раз, что очень многие проблемы, важность которых Б.Б. Кадомцев понимал на раннем этапе развития теории высокотемпературной плазмы, в частности, такие как турбулентность и самоорганизация плазмы, механизмы и способы подавления крупномасштабных неустойчивостей, физика процессов переноса и нелинейная динамика, и на современном этапе работ по термоядерному синтезу, этапе перехода к установкам реакторного масштаба, имеют чрезвычайно важное значение. Огромная заслуга Кадомцева заключается ещё и в том, что, благодаря его потрясающему физическому чутью, чувству предвидения и умению выделять главное, разработанные им принципы и подходы к решению указанных проблем сохраняют свою актуальность и продолжают с успехом развиваться в работах его последователей — теоретиков нынешнего поколения, как это было отчасти проиллюстрировано в настоящем докладе.

Я выражаю искреннюю признательность М.С. Аксентьевой, благодаря чьей настойчивости и энтузиазму появилась письменная версия данного доклада.

Список литературы

1. Кадомцев Б.Б., в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 2 (Под ред. М.А. Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 132 [Kadomtsev B.B., in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 2 (Ed. M.A. Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1966)]

2. Кадомцев Б Б *Письма в ЖЭТФ* **4** 15 (1966) [Kadomtsev B B *JETP Lett.* **4** 10 (1966)]
3. Кадомцев Б Б, Погуце О П *ЖЭТФ* **65** 575 (1973) [Kadomtsev B B, Pogutse O P *Sov. Phys. JETP* **38** 283 (1974)]
4. Gott Yu V, Ioffe M S, Tel'kovskii V G *Nucl. Fusion Suppl.* (1) 177 (1962)
5. Кадомцев Б Б *УФН* **166** 449 (1996) [Kadomtsev B B *Phys. Usp.* **39** 419 (1996)]
6. Lundquist S *Phys. Rev.* **83** 307 (1951)
7. Hain K, Lüst R, Schlüter A *Z. Naturforsch. A* **12** 833 (1957)
8. Rosenbluth M N, Longmire C L *Ann. Physics* **1** 120 (1957)
9. Bernstein I B et al. *Proc. R. Soc. London A* **244** 17 (1958)
10. Брагинский С И, Кадомцев Б Б, в сб. *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций* Т. 3 (Отв. ред. М А Леонтович) (М.: Изд-во АН СССР, 1958) с. 300 [Braginskii S I, Kadomtsev B B, in *Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions* Vol. 3 (Ed. M A Leontovich) (New York: Pergamon Press, 1959)]
11. Ilgisonis V I, Pastukhov V P *Письма в ЖЭТФ* **61** 186 (1995) [*JETP Lett.* **61** 189 (1995)]
12. Frieman E, Rotenberg M *Rev. Mod. Phys.* **32** 898 (1960)
13. Koide Y (JT-60 Team) *Phys. Plasmas* **4** 1623 (1997)
14. Арнольд В И *ДАН СССР* **162** 975 (1965) [Arnol'd V I *Sov. Math. Dokl.* **6** 773 (1965)]
15. Арнольд В И *ПММ* **29** 846 (1965) [Arnol'd V I *J. Appl. Math. Mech.* **29** 1002 (1965)]
16. Ильгисонис В И, Пастухов В П *Физика плазмы* **22** 228 (1996) [Ilgisonis V I, Pastukhov V P, *Plasma Phys. Rep.* **22** 208 (1996)]
17. Hameiri E *Phys. Plasmas* **5** 3270 (1998)
18. Holm D D et al. *Phys. Rep.* **123** 1 (1985)
19. Кадомцев Б Б, Михайловский А Б, Тимофеев А В *ЖЭТФ* **47** 2266 (1964) [Kadomtsev B B, Mikhailovskii A B, Timofeev A V *Sov. Phys. JETP* **20** 1517 (1965)]
20. Khalzov I V, Smolyakov A I, Ilgisonis V I *Phys. Plasmas* **15** 054501 (2008)
21. Ильгисонис В И, Хальзов И В *Письма в ЖЭТФ* **82** 647 (2005) [Ilgisonis V I, Khalzov I V *JETP Lett.* **82** 570 (2005)]
22. Ilgisonis V I, Khalzov I V, Smolyakov A I *Nucl. Fusion* **49** 035008 (2009)
23. Велихов Е П *ЖЭТФ* **36** 1398 (1959) [Velikhov E P *Sov. Phys. JETP* **9** 995 (1959)]
24. Khalzov I V, Ilgisonis V I, Smolyakov A I, Velikhov E P *Phys. Fluids* **18** 124107 (2006)
25. Кадомцев Б Б, Погуце О П *ЖЭТФ* **51** (6) 1734 (1966) [Kadomtsev B B, Pogutse O P *Sov. Phys. JETP* **24** 1172 (1967)]
26. Strauss H R *Phys. Fluids* **19** 134 (1976)
27. Пастухов В П, Чудин Н В *Физика плазмы* **27** 963 (2001) [Pastukhov V P, Chudin N V *Plasma Phys. Rep.* **27** 907 (2001)]