

УДК 519.634

РАСЧЕТ УДАРНОГО СЖАТИЯ ПОРИСТЫХ СРЕД В КОНИЧЕСКИХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ МИШЕНЯХ С ВЫХОДНЫМ ОТВЕРСТИЕМ¹⁾

© 2006 г. В. В. Милявский*, В. Е. Фортов*, А. А. Фролова**, К. В. Хищенко*,
А. А. Чарахчьян**, Л. В. Шуршалов**

(*125412 Москва, ул. Ижорская 13/19, ИТЭС ОИВТ РАН;

** 119991 Москва, ул. Вавилова 40, ВЦ РАН)

e-mail: chara@ccas.ru

Поступила в редакцию 15.11.2005 г.

Развитый ранее метод типа С.К. Годунова для уравнений гидродинамики сжимаемых сред на подвижных регулярных сетках обобщается на случай ударно-волновых течений упругопластических пористых сред. Приводятся результаты моделирования гипотетической экспериментальной установки по проверке обнаруженного ранее в расчетах эффекта увеличения интенсивности сходящихся ударных волн в пористых средах при увеличении степени пористости. Библ. 30. Фиг. 14. Табл. 4.

Ключевые слова: сходящиеся ударные волны, пористые среды, упругопластические течения.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование ударного сжатия графита в конических твердотельных мишенях было начато в работах [1]–[3]. Модель основывалась на уравнениях гидродинамики, уравнениях состояния конденсированных сред и уравнении кинетики превращения графита в алмаз. Не учитывались начальная пористость графита и сдвиговые напряжения в мишени. Последующий учет пористости привел к неожиданному результату (см. [4], [5]): при уменьшении начальной плотности графита заметно увеличивалась не только температура, но и давление в графите. Этот эффект был обнаружен также при расчете одномерных сферических и цилиндрических сходящихся ударных волн умеренной интенсивности в графите и алюминии (см. [4], [5]). Кроме того, было показано (см. [5]), что эффект сохраняется и при учете возможных сдвиговых напряжений в мишени в рамках простейшей модели динамики деформируемого твердого тела. В настоящей работе представлено детальное описание использованной ранее методики [5], а также приведены результаты расчета новой задачи, моделирующей вылет вещества из мишени с выходным отверстием.

Приведем уравнения, описывающие осесимметричные течения гипоупругой идеально-пластической среды (см., например, [6], [7]). В цилиндрических координатах r, z, ϑ все функции полагаются независимыми от ϑ . Вектор скорости \mathbf{u} имеет две компоненты u_r и u_z . Отличными от нуля компонентами тензора напряжений являются $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$ и $\sigma_{\vartheta\vartheta}$. Уравнения, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии, имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1a)$$

$$\rho \frac{du_r}{dt} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r}, \quad \rho \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_{rz}}{\partial r}, \quad (1б)$$

$$\rho \frac{d(\varepsilon + |\mathbf{u}|^2/2)}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial r(\sigma_{rr} u_r + \sigma_{rz} u_z)}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_{rz} u_r + \sigma_{zz} u_z)}{\partial z}, \quad (1в)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u_r \partial/\partial r + u_z \partial/\partial z$ – лагранжева производная по времени, ρ – плотность, ε – удельная внутренняя энергия. Из тензора напряжений выделяется девиаторная часть, $\sigma_{rr} = -p + s_r$, $\sigma_{zz} = -p + s_z$,

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 04-01-00051 и 04-02-16471) и Российской академии наук (программа ОМН РАН “Вычисл. и информ. пробл. решения больших задач”).

$\sigma_{\vartheta\vartheta} = -p + s_{\vartheta}$, где p – давление, s_r, s_z, s_{ϑ} – диагональные элементы девиатора тензора напряжений, удовлетворяющие условию

$$s_r + s_z + s_{\vartheta} = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) замыкаются уравнениями состояния

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T), \quad (3)$$

где T – температура, и уравнениями, которые описывают эволюцию компонент девиатора:

$$\begin{aligned} \frac{ds_r}{dt} - \sigma_{rz}\Psi &= 2G\varphi_r - \frac{2}{3}G\operatorname{div}\mathbf{u} - \lambda s_r, \quad \Psi = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ \frac{ds_z}{dt} + \sigma_{rz}\Psi &= 2G\varphi_z - \frac{2}{3}G\operatorname{div}\mathbf{u} - \lambda s_z, \\ \frac{d\sigma_{rz}}{dt} + \frac{s_r - s_z}{2}\Psi &= G\varphi_{rz} - \lambda\sigma_{rz}, \end{aligned} \quad (4)$$

где в левой части стоит производная Яуманна по времени от компонент тензора, G – задаваемый модуль сдвига среды, $\varphi_r = \partial u_r / \partial r$, $\varphi_z = \partial u_z / \partial z$, $\varphi_{rz} = \partial u_r / \partial z + \partial u_z / \partial r$ – компоненты тензора скоростей деформаций. Компонента девиатора s_{ϑ} определяется формулой (2). Функция λ выбирается так, чтобы выполнить условие Мизеса для пластического течения

$$Q = s_r^2 + s_z^2 + s_{\vartheta}^2 + 2\sigma_{rz}^2 \leq \frac{2}{3}Y^2, \quad (5)$$

где Y – задаваемый предел текучести среды. Можно убедиться, что из соотношений (2) и (4) следует формула

$$\frac{dQ}{dt} = W - \lambda Q, \quad W = 2G(s_r\varphi_r + s_z\varphi_z + \sigma_{rz}\varphi_{rz} + s_{\vartheta}u_r/r). \quad (6)$$

Поэтому если положить

$$\lambda = 0 \text{ при } Q < 2Y^2/3, \quad \lambda = 3W/(2Y^2) \text{ при } Q = 2Y^2/3, \quad (7)$$

то из (6) при $Q = 2Y^2/3$ следует $dQ/dt = 0$.

При $Y = 0$ девиатор тензора напряжений зануляется и уравнения (1) переходят в уравнения гидродинамики.

В начальный момент времени задаются нулевые компоненты девиатора напряжений, скорость, давление p_0 , температура T_0 и плотность ρ_{00} . В случае пористого вещества $\rho_{00} < \rho_0$, где ρ_0 – нормальная плотность вещества в отсутствие пор такая, что $p_0 = p(\rho_0, T_0)$ в соответствии с уравнением состояния (3). Постановка задач для пористого вещества соответствует модели из [8]: движение пористой среды начинается с прохождения по ней головной ударной волны, за фронтом которой пор нет, а на фронте выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии.

В литературе имеется много методов расчета упругопластических течений, в частности типа С.К. Годунова (см., например, [7], [9], [10]). В настоящей работе описаны особенности метода, связанные с учетом начальной пористости, а также приведена разностная схема для уравнений (1) и (4), которая в некоторых деталях отличается от других работ. Эти детали связаны, во-первых, с использованием расщепления на лагранжев этап и этап пересчета поля течения на заданную подвижную сетку. Использование переменных Лагранжа позволяет упростить разностную схему, в частности за счет уменьшения числа переменных, которые необходимо вычислять на границах ячеек сетки из решения задачи о распаде разрыва. Другой особенностью метода является обобщение на уравнения (1) и (4) почти консервативных схем (см. [11]) и одного из способов подавления вычислительного энтропийного следа (см. [12]), развитых ранее для уравнений гидродинамики.

Еще одна особенность метода связана с задачей о распаде разрыва для определения необходимых величин на границах ячеек сетки. Обычно для этой цели используются линейные аналоги исходных уравнений, для которых решение задачи о распаде разрыва выписывается в виде явных формул. В результате получаются схемы с линейной искусственной вязкостью. Как было показано ранее (см. [12]), в случае уравнений гидродинамики использование таких схем для сквозного расчета сильных ударных волн может приводить к сильным колебаниям численного решения,

устранение которых требует заметного уменьшения шага по времени по сравнению с условием Куранта. В то же время схемы для уравнений гидродинамики, использующие решение нелинейной задачи о распаде разрыва, в частности с приближенным двучленным уравнением состояния, имеют на сильных ударных волнах квадратичную вязкость и, как следствие, дают монотонное численное решение ударных волн любой интенсивности без уменьшения шага по времени. В настоящей работе такие схемы обобщаются на уравнения (1) и (4). При этом удается избежать решения сложной задачи о распаде разрыва для этих уравнений. Предлагается вначале получить явные формулы для необходимых величин из решения некоторой линейной задачи о распаде разрыва, а затем выделить из этих формул “гидродинамическую” часть и заменить ее результатом решения нелинейной задачи для уравнений гидродинамики.

1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

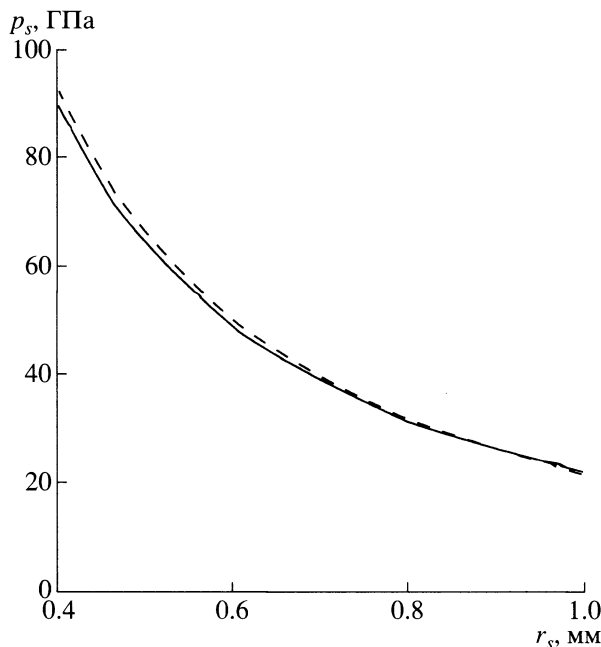
Развитый ранее метод расчета гидродинамических течений с подвижными внутренними и внешними границами обобщается на описанный выше класс задач. Метод построен на подвижных регулярных сетках с явным выделением границ раздела в виде сеточных линий (см. [13]). Для расчета внутренних узлов сетки развит вариант метода из [14], отличающийся большей универсальностью, который генерирует приемлемые сетки практически при любом искривлении граничных линий. Используется расщепление на лагранжев этап и этап пересчета с лагранжевой сетки на сетку очередного шага по времени (см. [15]). На последнем этапе, который отличается от случая уравнений гидродинамики только большим числом переменных, применяется вариант консервативной квазимонотонной схемы второго порядка точности (см. [16]). Если необходимое условие близости сеток оказывается нарушенным, то применяются многошаговые алгоритмы (см. [17]). Шаг по времени выбирается из эмпирического условия устойчивости схемы (см. [13]) на лагранжевом этапе.

Для расчета головной ударной волны, которая идет по пористому веществу, были реализованы три метода. Точность расчета контролировалась сравнением результатов, полученных разными методами. В качестве основного выбран метод сквозного счета через фронт такой волны, использующий простую модель кинетики пор (см. [18]). В постановку задачи можно формально включить удельный объем пор v_p , определив его в начальный момент так: $v_p = \rho_{00}^{-1} - \rho_0^{-1}$ перед фронтом волны, $v_p = 0$ – за фронтом. В расчете функция v_p полагается новой неизвестной функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dv_p}{dt} = \begin{cases} -A v_p (p - p_0), & p > p_0 \\ 0, & p \leq p_0. \end{cases} \quad (8)$$

В уравнения состояния (3) вместо плотности ρ подставляется плотность сплошного вещества $\rho_s = (\rho^{-1} - v_p)^{-1}$. Уравнение (8) записывается в каждой ячейке разностной сетки, а постоянная A выбирается так, чтобы за размазанной по сетке головной ударной волной функция v_p уменьшалась на несколько порядков.

Для одномерной гидродинамической задачи о сходящейся в исходно пористом шаре ударной волне, инициированной сферическим ударником, реализован метод явного выделения фронта волны. Первоначально вводится расчетная область небольшого размера с небольшим числом узлов сетки, значения искомым функций в которых берутся из решения задачи о распаде разрыва, определяющей параметры входящей в пористое вещество ударной волны. Далее на каждом шаге по времени с помощью схемы второго порядка точности определяются значения искомым функций на верхнем временном слое. По давлению в ближайшем к фронту волны узле сетки и ударной адиабате пористого вещества определяются скорость волны и тем самым новое положение фронта. По мере увеличения расчетной области туда добавляются новые узлы сетки, при этом все узлы перераспределяются равномерно по радиусу r , а значения функций в них определяются с помощью интерполяции локальными монотонными сплайнами четвертого порядка точности (см. [19]). Возможное количество узлов сетки ограничено некоторым заданным максимальным числом. Фронт волны выделяется явно вплоть до его выхода на жесткую стенку, поставленную при достаточно малом r . Далее исходное пористое вещество уже не влияет на решение задачи и расчет отраженной ударной волны ведется по обычной схеме сквозного счета. На этапе явного выделения фронта головной сходящейся волны ударные волны внутри расчетной области отсутствуют, что позволяет вместо уравнения энергии использовать уравнение изо-



Фиг. 1. Давление на фронте сходящейся сферической ударной волны p_s как функция радиуса волны r_s : сплошная линия – метод сквозного счета, штриховая – явное выделение фронта.

энтропии $d\varepsilon = pd\rho/\rho^2$, которое вместе с (3) для каждого узла лагранжевой сетки интегрируется с достаточно малым шагом по ρ .

На фиг. 1 приведены зависимости давления на фронте сходящейся сферической волны от радиуса волны в исходно пористом шаре из графита с $\rho_{00}/\rho_0 \approx 0.75$ и начальным радиусом 2 мм, полученные методом сквозного счета и методом явного выделения фронта волны. Радиус волны в методе сквозного счета определялся приближенно внутри размазанного по сетке фронта волны, а в качестве давления на фронте выбиралось максимальное давление. Видно, что результаты очень близки.

Для двумерных задач был развит метод сквозного счета, построенный на модели двухфазной среды (см. [20], [2]). Поры предполагаются заполненными газом с уравнениями состояния

$$p = R\rho T, \quad \varepsilon = CT,$$

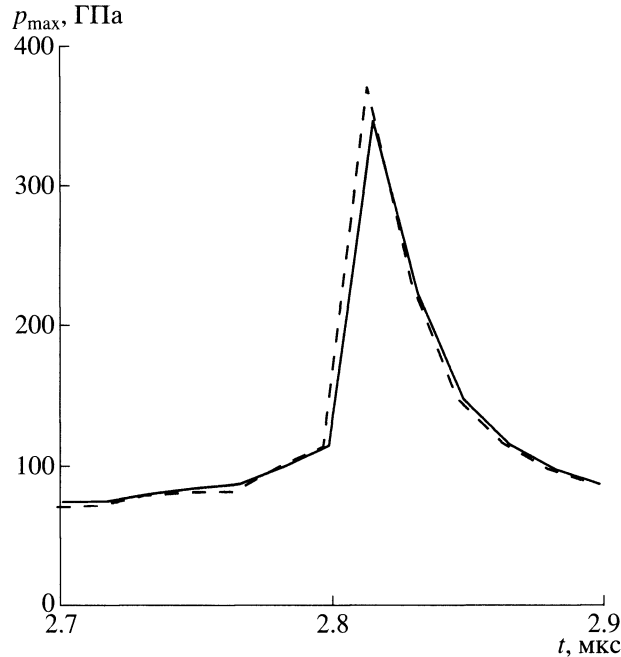
где постоянные R и C примерно соответствуют воздуху. Вводятся новые неизвестные функции: плотность сплошного вещества ρ_s и плотность газа ρ_g , исходное значение ρ_{g0} которой определяется по начальным значениям давления и температуры. Оба вещества имеют одинаковые давление и температуру, а внутренняя энергия и удельный объем ρ^{-1} аддитивны:

$$\begin{aligned} p &= p_s(\rho_s, T) = R\rho_g T, \\ \varepsilon &= (1 - \alpha)\varepsilon_s(\rho_s, T) + \alpha CT, \\ \rho^{-1} &= (1 - \alpha)\rho_s^{-1} + \alpha\rho_g^{-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где α – постоянная массовая концентрация газа, которая находится из условия

$$\rho_{00}^{-1} = (1 - \alpha)\rho_0^{-1} + \alpha\rho_{g0}^{-1},$$

функции $p_s(\rho, T)$ и $\varepsilon_s(\rho, T)$ определяются уравнениями состояния сплошного вещества (3). Уравнения (9) выполняют ту же роль, что и уравнения состояния для однофазной среды, так как позволяют при заданных ε и ρ определять p , T , ρ_s и ρ_g . Механизм уменьшения удельного объема пор $v_p = \alpha\rho_g^{-1}$ на несколько порядков за фронтом головной ударной волны заключается в увеличении на несколько порядков давления за фронтом волны, а вместе с ним и плотности газа ρ_g при сравнительно небольшом изменении плотности конденсированного вещества ρ_s .



Фиг. 2. Максимальное по пространству давление исходно пористого графита в конической мишени как функция времени для методов сквозного счета, построенных на кинетике пор (сплошная линия), и двухфазной модели (штриховая).

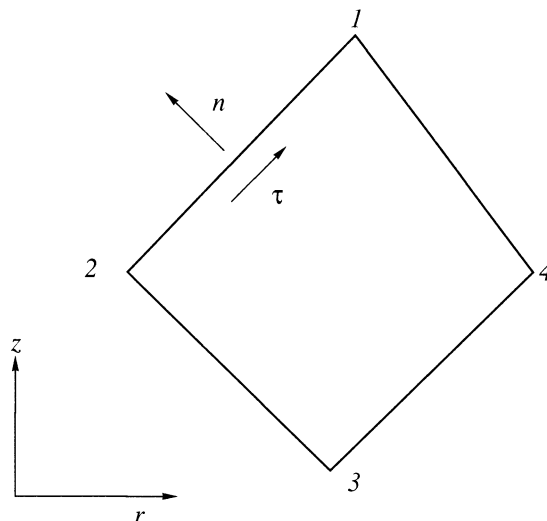
Методы сквозного счета, построенные на моделях кинетики пор и двухфазной среды, сравнивались на гидродинамической задаче из [5] об ударном сжатии пористого графита с $\rho_{00}/\rho_0 \approx 0.75$, заполняющего коническую полость в стальной мишени. Показанное на фиг. 2 хорошее совпадение результатов расчетов свидетельствует о том, что метод сквозного счета не вносит заметных искажений в решение задачи.

Перейдем к описанию разностной схемы для уравнений (1) и (4) на лагранжевом этапе. Строится двухслойная по времени схема типа Годунова второго порядка точности на регулярных четырехугольных сетках. Вначале строится схема первого порядка точности, которая называется базовой, а затем методом из [21] строится схема типа предиктор–корректор второго порядка. Ниже описывается базовая схема.

Рассмотрим четырехугольную ячейку сетки в плоскости (r, z) , узлы которой $r_i, z_i, i = 1, 2, 3, 4$, пронумерованы против часовой стрелки, как это показано на фиг. 3. В приводимые ниже формулы будут входить площадь ячейки $v = \iint dr dz$ и интеграл по ячейке $V = \iint r dr dz$, которые вычисляются по координатам узлов. Для удобства записи формул введем узел $r_5 = r_1, z_5 = z_1$. Границы ячейки пронумеруем от 1 до 4 так, что граница i соединяет узлы i и $i + 1$. На границах вычисляются величины

$$\Delta r_i = r_{i+1} - r_i, \quad \Delta z_i = z_{i+1} - z_i, \quad l_i = \sqrt{\Delta r_i^2 + \Delta z_i^2}, \quad \bar{r}_i = (r_i + r_{i+1})/2.$$

На каждой границе введем локальную систему координат, определяемую единичными векторами внешней нормали n и касательной τ , как это показано на фиг. 3. Все неизвестные величины определены в серединах ячеек, а для аппроксимации пространственных производных применяется интегроинтерполяционный метод. При интегрировании по границам ячейки неизвестные функции полагаются постоянными на каждой границе и определяются из решения некоторой приближенной задачи о распаде разрыва, о которой будет сказано ниже. Вектор скорости и тензор напряжений на границе преобразуются из исходной в локальную систему координат. Далее предполагается, что на каждой границе i определены компоненты вектора скорости $U_{ni}, U_{\tau i}$, тензора напряжений $\Sigma_{nni}, \Sigma_{n\tau i}$, которые для краткости обозначаются через $\Sigma_{ni}, \Sigma_{\tau i}$, и давление P_i . Компонента тензора напряжений $\Sigma_{\tau\tau i}$ входит в аппроксимацию отдельных слагаемых, но после суммирования из окончательных формул исчезает.



Фиг. 3.

Уравнение неразрывности (1а) аппроксимируется обычным образом:

$$\rho V = \rho' V', \quad V' = V + \Delta t \sum_{i=1}^4 U_i l_i \bar{r}_i, \quad (10)$$

где величины со штрихом здесь и далее относятся к верхнему временному слою, Δt – шаг по времени. Аппроксимация уравнений движения (1б) имеет вид

$$m \frac{u'_r - u_r}{\Delta t} = \sum_{i=1}^4 (\Sigma_{ni} \Delta z_i - \Sigma_{\tau i} \Delta r_i) + \frac{s_r - s_\theta}{R} v, \quad m = \rho v, \quad R = \frac{V}{v}, \quad (11a)$$

$$M \frac{u'_z - u_z}{\Delta t} = - \sum_{i=1}^4 \bar{r}_i (\Sigma_{ni} \Delta r_i + \Sigma_{\tau i} \Delta z_i), \quad M = \rho V. \quad (11b)$$

Перейдем к аппроксимации уравнения энергии (1в). В случае уравнений гидродинамики, когда компоненты девиатора напряжений равны нулю, уравнение (1в) можно с помощью (1б) привести к виду

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (12)$$

и далее с помощью (1а) – к виду

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (13)$$

Уравнение (12) используется в [11] для построения почти консервативных схем, близких к консервативным и одновременно гарантирующих отсутствие потери точности расчета внутренней энергии. Уравнение (13) можно использовать в ячейках сетки, где плотность на шаге по времени уменьшается, так как эти ячейки относятся к волне разрежения, для которой использование неконсервативных схем не приводит к отсутствию сходимости численного решения к точному. Для аппроксимации (13) на шаге по времени можно решать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\rho^2 d\varepsilon(p, \rho) = p d\rho, \quad (14)$$

где функция $\varepsilon(p, \rho)$ определяется уравнениями состояния (3), от значения ρ на нижнем временном слое до ρ' с достаточно малым шагом по ρ . Как показано в [12], такой прием позволяет эффективно подавлять вычислительный энтропийный след, возникающий при выходе ударной волны

на свободную поверхность. Ниже приводится несложное обобщение описанных выше конструкций на случай ненулевого девиатора напряжений.

Аппроксимация уравнения (1в), аналогичная (11), имеет вид

$$M \frac{\varepsilon' + |\mathbf{u}'|^2/2 - \varepsilon - |\mathbf{u}|^2/2}{\Delta t} = \sum_{i=1}^4 l_i \bar{r}_i (\Sigma_{ni} U_{ni} + \Sigma_{\tau i} U_{\tau i}). \quad (15)$$

Алгебраическим следствием этого уравнения является закон сохранения энергии, что необходимо при сквозном счете через фронт ударной волны. Исключим из (15) кинетическую энергию, для чего умножим (11а) на $R\bar{u}_r$, где $\bar{u}_r = (u'_r + u_r)/2$, а (11б) – на $\bar{u}_z = (u'_z + u_z)/2$, и вычтем результаты из (15). Полученное таким образом уравнение после введения на границах ячеек компоненты девиатора напряжений $S_{ni} = \Sigma_{ni} + P_i$ можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\Delta t} &= -\frac{\bar{p}}{\rho} \operatorname{div}_h \mathbf{u} + D_s, \\ D_s &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^4 (S_{ni} g_i + \Sigma_{\tau i} h_i) - \bar{u}_r \frac{s_r - s_\delta}{\rho R}, \\ g_i &= l_i \bar{r}_i U_{ni} - \Delta z_i R \bar{u}_r + \Delta r_i \bar{r}_i \bar{u}_z, \quad h_i = l_i \bar{r}_i U_{\tau i} + \Delta z_i \bar{r}_i \bar{u}_z + \Delta r_i R \bar{u}_r, \\ \bar{p} &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i P_i, \quad \alpha_i = g_i / \left(\sum_i l_i \bar{r}_i U_{ni} \right)^{-1}, \quad \operatorname{div}_h \mathbf{u} = \left(\sum_i l_i \bar{r}_i U_{ni} \right) V^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь выделено слагаемое, аппроксимирующее правую часть уравнения (12). Так как $\Sigma \alpha_i = 1$, \bar{p} в (16) является интерполяционной формулой для давления в ячейке по значениям давления на границах. Почти консервативная схема строится на дополнительном условии $0 \leq \alpha \leq 1$ (см. [11]). Далее заметим, что с помощью (10) уравнение (16) приводится к виду

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\Delta t} = -\frac{\bar{p}}{\rho \rho'} \frac{\rho' - \rho}{\Delta t} + D_s. \quad (17)$$

Для ячеек сетки с $\rho' < \rho$, когда от консервативности схемы можно отказаться, вместо (17) решается приближенно дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + D_s \quad (18)$$

на интервале $0 \leq t \leq \Delta t$. Метод решения построен так, чтобы при $D_s = 0$ он переходил в решение уравнения (14) в плоскости термодинамических переменных. Используется простейшая схема расщепления $\varepsilon' = \tilde{\varepsilon} + D_s \Delta t$, где $\tilde{\varepsilon}$ находится из решения (14).

Следуя работе [6], уравнения (4) аппроксимируем без последних слагаемых, отвечающих за пластичность течения. Вместо этого на каждом шаге по времени при нарушении условия Мизеса (5) все компоненты девиатора домножаем на один и тот же коэффициент, обеспечивающий выполнение (5). Как было показано С.С. Григоряном в примечании к работе [6] (см. также [22]), такой алгоритм при $Y = \text{const}$ дает разностную схему, аппроксимирующую уравнения (4) и (7). Пространственные производные в (4) аппроксимируются интегроинтерполяционным методом по компонентам вектора скорости U_{ni} , $U_{\tau i}$ на границах ячеек. Для повышения устойчивости схемы вторые слагаемые в левой части уравнений (4) аппроксимируются по значениям компонент девиатора на верхнем временном слое.

Перейдем к определению необходимых величин на границах ячеек. Вначале воспользуемся обычной техникой постановки и решения линейной задачи о распаде разрыва (см., например, [7], [9], [10]), адаптированной к схемам в переменных Лагранжа. Пусть все неизвестные зависят от одной пространственной декартовой переменной x . В уравнении (4) отбросим последние слагаемые в правой части, отвечающие за пластичность течения, и вторые слагаемые в левой части.

Введем лагранжеву координату $y = \int \rho dx$. Тогда уравнения (1) и (4) примут вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_\tau}{\partial y}, \quad (19a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \sigma_n \frac{\partial u_n}{\partial y} + \sigma_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial y}, \quad (19б)$$

$$\frac{\partial \sigma_\tau}{\partial t} = G\rho \frac{\partial u_\tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial s_n}{\partial t} = \frac{4}{3}G\rho \frac{\partial u_n}{\partial y}. \quad (19в)$$

Здесь $v = \rho^{-1}$ – удельный объем, σ_n, s_n – нормальные напряжение и компонента дивергента вдоль оси x , σ_τ – касательное напряжение, u_n, u_τ – соответствующие компоненты вектора скорости. Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{w}(t, y) = (u_n, u_\tau, \sigma_n, \sigma_\tau)$, компоненты которого надо определять на границах ячеек, и приведем систему (19) к матричному виду

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = 0. \quad (20)$$

Для этого внутреннюю энергию ε удобно полагать функцией p и v . В силу первого уравнения (19a), второго уравнения (19в) и равенства $\sigma_n = s_n - p$ имеем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \varepsilon_p \frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon_v \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon_p \left[-\frac{\partial \sigma_n}{\partial t} + \left(\frac{4}{3}G\rho + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_p} \right) \frac{\partial u_n}{\partial y} \right].$$

Подставив это равенство в (19б) и воспользовавшись определением скорости звука c в виде $\rho^2 c^2 = (\varepsilon_v + p)/\varepsilon_p$, получим уравнение (20) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -a^2 & e & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^2 = G\rho, \quad a^2 = \rho^2 c^2 + \frac{4}{3}b^2 - \frac{s_n}{\varepsilon_p}, \quad e = \frac{\sigma_\tau}{\varepsilon_p}.$$

Далее вместо квазилинейной системы (20) рассмотрим линейную систему с постоянной матрицей A , которая приводится к характеристическому виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial y} \right) I_\xi = 0, \quad (21)$$

где $\xi = \pm a, \pm b$, а инварианты $I_\xi(\mathbf{w})$ имеют вид

$$\begin{aligned} I_{-a} &= au_n - a\alpha u_\tau + \sigma_n - \alpha\sigma_\tau, & I_a &= -au_n + a\alpha u_\tau + \sigma_n - \alpha\sigma_\tau, \\ I_{-b} &= bu_\tau + \sigma_\tau, & I_b &= -bu_\tau + \sigma_\tau, & \alpha &= el(a^2 - b^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Для уравнений (21) ставится задача о распаде разрыва: найти $\mathbf{w}(t, 0)$ для кусочно-разрывных начальных данных

$$\mathbf{w}(0, y) = \begin{cases} \mathbf{w}_1, & y < 0, \\ \mathbf{w}_2, & y > 0. \end{cases}$$

Помимо \mathbf{w}_1 и \mathbf{w}_2 , слева и справа от разрыва заданы значения давления и плотности – соответственно, p_1, ρ_1 и p_2, ρ_2 . Коэффициенты инвариантов (22) вычисляются в зависимости от того, с какой стороны приходит соответствующая характеристика на линию $y = 0$: для инвариантов I_a и I_b – по данным с индексом 1, для I_{-a} и I_{-b} – по данным с индексом 2. Из (21) для искомым компонент вектора \mathbf{w} имеем четыре уравнения

$$I_{-a}(\mathbf{w}_2) = I_{-a}(\mathbf{w}), \quad I_{-b}(\mathbf{w}_2) = I_{-b}(\mathbf{w}), \quad I_a(\mathbf{w}_1) = I_a(\mathbf{w}), \quad I_b(\mathbf{w}_1) = I_b(\mathbf{w}),$$

решение которых имеет вид

$$\begin{aligned}
 u_\tau &= \frac{b_2 u_{\tau 2} + b_1 u_{\tau 1} + \sigma_{\tau 2} - \sigma_{\tau 1}}{b_1 + b_2}, \quad \sigma_\tau = \frac{b_1 \sigma_{\tau 2} + b_2 \sigma_{\tau 1} + b_1 b_2 (u_{\tau 2} - u_{\tau 1})}{b_1 + b_2}, \\
 u_n &= U_n + \frac{s_{n2} - s_{n1} + a_2 \beta_2 + a_1 \beta_1 + \gamma_2 - \gamma_1}{a_1 + a_2}, \\
 \sigma_n &= -P + \frac{s_{n2} a_2 + s_{n1} a_1 + a_1 a_2 (\beta_2 - \beta_1) + a_1 \gamma_2 + a_2 \gamma_1}{a_1 + a_2}, \\
 \beta_i &= \alpha_i (u_\tau - u_{\tau i}), \quad \gamma_i = \alpha_i (\sigma_\tau - \sigma_{\tau i}), \quad i = 1, 2; \\
 U_n &= \frac{a_1 u_{n1} + a_2 u_{n2} + p_1 - p_2}{a_1 + a_2}, \quad P = \frac{a_1 p_2 + a_2 p_1 + a_1 a_2 (u_{n1} - u_{n2})}{a_1 + a_2}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Выделенные в (23) слагаемые U_n и P совпадают с решением гидродинамической задачи о распаде разрыва в акустическом приближении при $a_i = \rho_i c_i$, $i = 1, 2$ (см., например, [12]). Как видно из приведенных выше формул, при нулевых компонентах девиатора $s_{ni} = \sigma_{\tau i} = 0$, $i = 1, 2$, имеем $\sigma_n = -P$, $u_n = U_n$. Отсюда ясно, как модифицировать формулы (23), чтобы при $s_{ni} = \sigma_{\tau i} = 0$ они совпадали с решением нелинейной задачи о распаде разрыва для уравнений гидродинамики, которая дает определенные преимущества при расчете сильных ударных волн по сравнению с линейной задачей (см. [12]). Для этого достаточно заменить U_n и P в (23) результатом решения нелинейной гидродинамической задачи U_{ng} , P_g . Компоненты вектора w и давление P_g дают необходимые для построения схемы величины на границах ячеек.

Для полноты описания метода приведем формулы перехода в местную систему координат для вектора скорости и девиатора напряжений. В применении к границе между узлами 1 и 2 на фиг. 3 имеем

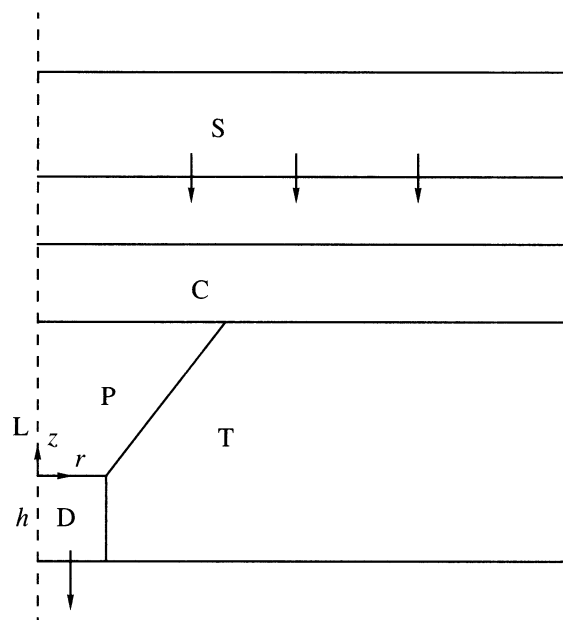
$$\begin{aligned}
 u_n &= u_r \sin \varphi + u_z \cos \varphi, \quad u_\tau = u_r \cos \varphi - u_z \sin \varphi, \\
 s_n &= s_r \sin^2 \varphi + 2\sigma_{rz} \sin \varphi \cos \varphi + s_z \cos^2 \varphi, \\
 \sigma_\tau &= (s_r - s_z) \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{rz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\
 \sin \varphi &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2}}.
 \end{aligned}$$

2. ЗАДАЧА О ВЫЛЕТЕ ДИСКА

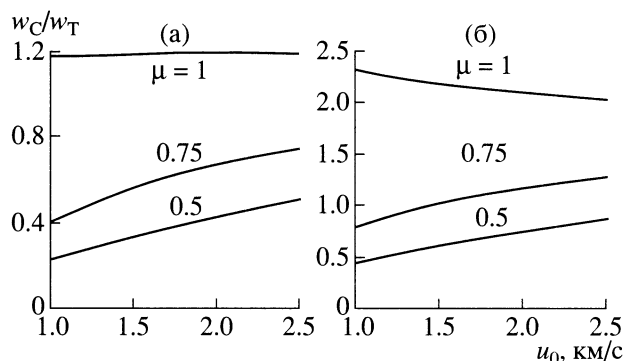
Постановка задачи, моделирующая гипотетическую экспериментальную установку, показана на фиг. 4. Алюминиевый ударник S толщиной 10 мм налетает на сборку, состоящую из стальной крышки C толщиной 8 мм и расположенных внутри мишени T усеченного конуса с пористым веществом P и диска D . Ось z направлена от меньшего основания конуса к большему. Точка $z = 0$ отвечает меньшему основанию. Возникающая в конусе сходящаяся ударная волна выталкивает диск из мишени. Целью эксперимента является измерение зависимости скорости вылета диска от начальной плотности вещества в конусе и сравнение с теоретической зависимостью.

Радиус диска $r_0 = 1$ мм совпадает с радиусом меньшего основания конуса. Высота конуса $L = 7$ мм, угол раствора $\vartheta = 75^\circ$, радиус большого основания $r_1 = r_0 + L \operatorname{tg} \vartheta / 2$. Радиус ударника и сборки неограничен, что в расчетах моделировалось условием жесткой стенки при достаточно большом $r = 3r_1$. Рассматривались разные значения скорости ударника $u_0 = 1-2.5$ км/с и толщины диска $h = 1-3$ мм, материалы мишени (сталь или свинец) и диска (алюминий или медь). В качестве пористого вещества выбран алюминий с начальной плотностью ρ_{00} и нормальной плотностью ρ_0 . Относительная начальная плотность $\mu = \rho_{00}/\rho_0$ варьировалась в пределах $1 \geq \mu \geq 0.5$. Если это не оговорено особо, диск полагается погруженным в мишень, имеющую соответствующий канал радиусом r_0 и глубиной $h_T = h$. Отдельные расчеты выполнялись для мишени без канала, т.е. при $h_T = 0$.

Использованные в расчетах таблицы широкодиапазонных уравнений состояния металлов (см. [23]) позволяли, в частности, определять термодинамически равновесное состояние вещества: твердое тело, двухфазная смесь твердого тела и жидкости (расплав), жидкая фаза, двухфаз-



Фиг. 4. Постановка задачи в цилиндрических координатах (r, z) .



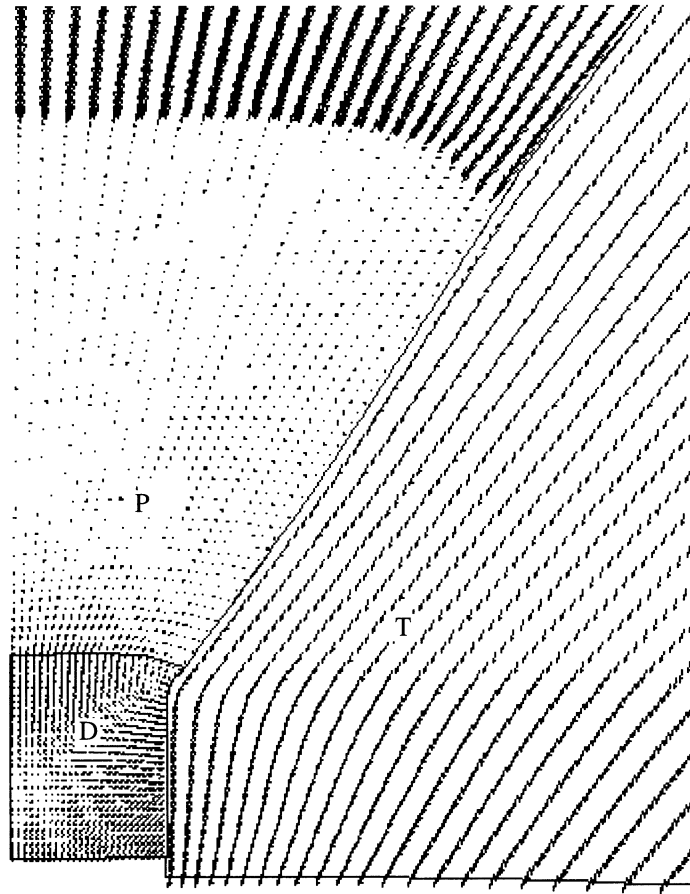
Фиг. 5. Отношение скоростей ударных волн в конусе и мишени как функция скорости ударника для стальной (а) и свинцовой (б) мишени.

Плоская ударная волна, генерируемая ударником в крышке мишени, входит в конус и мишень, скорости ударных волн в которых w_C и w_T в момент их возникновения можно оценить, отбросив сдвиговые напряжения и решив соответствующие задачи о распаде разрыва. На фиг. 5 приведено отношение w_C/w_T как функция скорости ударника u_0 для стальной и свинцовой мишени и трех значений относительной начальной плотности алюминия $\mu = 1, 0.75$ и 0.5 . Для заданного материала мишени это отношение уменьшается с уменьшением μ , а при $\mu < 1$ – также с уменьшением u_0 . При одних и тех же значениях u_0 и μ отношение w_C/w_T для стальной мишени значительно меньше, чем для свинцовой. Малость отношения w_C/w_T означает, что давление в материале мишени вблизи диска может значительно возрасти еще до прихода к диску сходящейся в конусе ударной волны. В результате диск будет обжат мишенью, что затруднит его вылет. Как показано на фиг. 6, в случае стальной мишени при $u_0 = 1$ км/с, $\mu = 0.5$, $h = 1$ мм такой эффект действительно имеет место. Поэтому для низкоскоростных ударников нужно использовать свинцовые мишени, для которых, как показали расчеты, эффект предварительного обжатия диска отсутствует по крайней мере при $u_0 \geq 1$ км/с.

Ударная волна в диске имеет спадающий за фронтом профиль давления, так как за время ее прохождения по диску давление в конусе заметно уменьшается. Выход такой ударной волны на свободную поверхность диска сопровождается появлением области с отрицательным давлением,

ная смесь жидкости и газа (кипящая жидкость), газ. Газообразное состояние в данной задаче не возникало. Для твердой и жидкой фаз учитывались метастабильные состояния при растягивающих напряжениях. Положение области неустойчивых состояний задавалось на плоскости ρ и T весьма упрощенно: при $\rho < \rho_{l0}$ и $T < T_{v0}$, где ρ_{l0} и T_{v0} – плотность жидкой фазы и температура в точке испарения при атмосферном давлении. Если в какой-либо ячейке сетки вещество оказывается в неустойчивом состоянии, эта ячейка выбрасывается из расчета, а на ее границе ставится атмосферное давление. Такой грубый подход позволяет диагностировать появление области, в которой вещество скорее всего разрушится, не останавливая при этом расчет задачи. Для тех ячеек сетки, где состояние вещества отлично от твердого, полагается $Y = G = 0$. Для твердого состояния значение G бралось из работы [24]: $G = 80, 27, 40$ и 7 ГПа для стали, алюминия, меди и свинца соответственно, а предел текучести Y определялся по значению теоретической прочности на сдвиг $k = Y/\sqrt{3} = G/30$ (см. [25]).

В теории упругости границы раздела сред являются особыми поверхностями, касательное напряжение σ_τ вдоль которых определяется не из уравнений, а из специальных граничных условий, связывающих σ_τ и σ_n . Такие связи могут определяться только из эксперимента и в данном случае неизвестны. Поэтому задача о вылете диска решалась в двух противоположных вариантах. В первом варианте на всех границах раздела ставится условие свободного скольжения $\sigma_\tau = 0$. Во втором варианте, который назовем задачей без скольжения, никакого условия на границах раздела сред не ставится, а касательное напряжение определяется из решения задачи так же, как и на любой другой поверхности.



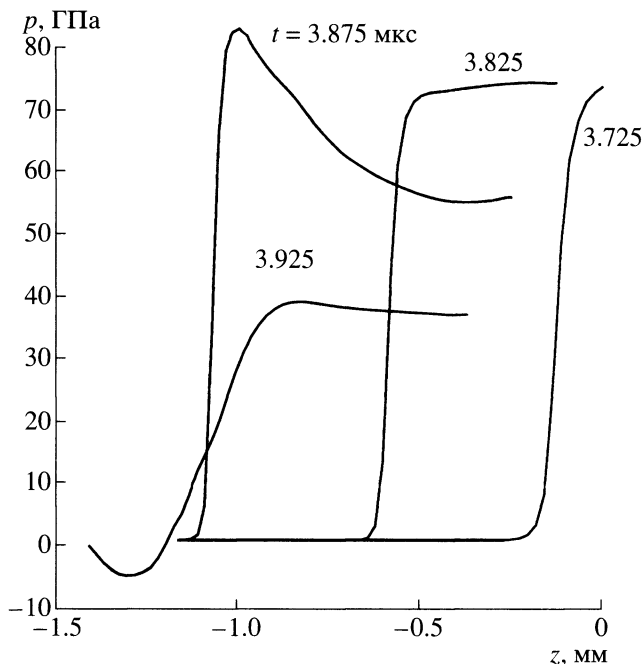
Фиг. 6. Поле скорости в окрестности диска D при его обжатии стальной мишенью T.

где возможно разрушение вещества. Это демонстрирует фиг. 7, где для одного из вариантов задачи приведено давление вдоль оси симметрии в диске в моменты времени до выхода ударной волны на свободную поверхность и после выхода.

В качестве скорости вылета диска v_{mid}^D возьмем модуль усредненной по массе осевой составляющей скорости, вычисленной в момент прекращения расчета. Если это не оговорено особо, моменту прекращения расчета предшествует большой интервал времени, в течение которого v_{mid}^D меняется незначительно. В качестве характеристик сходящейся в конусе ударной волны возьмем максимальное по пространству и времени давление в конусе p_{max}^C и температуру в точке максимального давления $T_{p_{\text{max}}}^C$.

Можно предположить, что в эксперименте будет измеряться одно значение осевой составляющей скорости, например некоторое среднее значение или максимальное значение на внешней границе диска. Желательно поэтому подобрать параметры установки так, чтобы диск, во-первых, не разрушался и, во-вторых, не возникло струй, по крайней мере на внешней границе диска. Заметим также, что расчет скорости фрагментов диска при его разрушении требует значительно более сложной модели.

В табл. 1 сравниваются решения двух вариантов задачи для ударника с $u_0 = 2.5$ км/с, отличающиеся только материалом мишени. Как видно из сравнения максимальных значений давления и температуры, в случае стальной мишени интенсивность сходящейся в конусе ударной волны больше, чем в случае свинцовой. При уменьшении начальной плотности значительно возрастает интенсивность сходящейся волны, а вместе с ней и скорость вылета диска. За исключением варианта с $\mu = 1$ для свинцовой мишени, вероятность разрушения диска очень велика. Об этом го-



Фиг. 7. Давление в алюминиевом диске вдоль оси симметрии для случая стальной мишени при $u_0 = 1.5$ км/с, $\mu = 0.5$, $h = 1$ мм.

ворит появление не только областей с неустойчивым состоянием, но и областей с большим по модулю отрицательным давлением.

В табл. 2 сравниваются алюминиевый и медный диски в случае ударника с $u_0 = 1.5$ км/с. Из-за большой массы медного диска изменения скорости его вылета при изменении μ незначительны, что делает применение медного диска в эксперименте неэффективным. Для алюминиевого диска зависимость $v_{mid}^D(\mu)$ остается сильной, но и вероятность разрушения диска по-прежнему велика.

Таблица 1. Стальная и свинцовая мишени в задаче со свободным скольжением, алюминиевый диск с $h = 1$ мм, $u_0 = 2.5$ км/с: v_{mid}^D (км/с) – скорость вылета диска, p_{max}^C (ГПа) и $T_{p_{max}}^C \times 10^3$ (К) – максимальное давление и температура в точке максимального давления в конусе, p_{min}^D (ГПа) – минимальное давление в диске, S – твердое тело, L – жидкость, N – неустойчивое состояние

μ	v_{mid}^D		p_{max}^C		$T_{p_{max}}^C$		Состояние диска		p_{min}^D	
	St	Pb	St	Pb	St	Pb	St	Pb	St	Pb
1	3.8	3.3	66	41	0.8	0.6	S	S	-4	-1.8
0.75	5.5	4.2	111	74	6.6	3.5	S + L + N	S	-4.4	-6.4
0.5	7.2	5.5	168	127	15.6	13.6	L + N	S + L + N	-4	-6.4

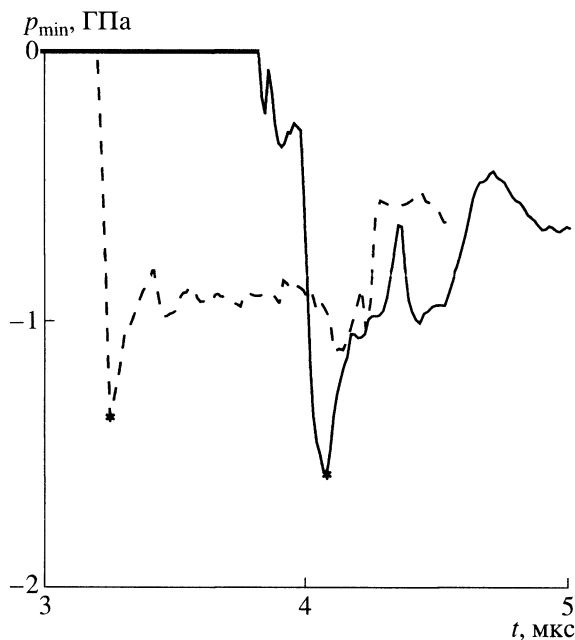
Таблица 2. Алюминиевый и медный диски с $h = 1$ мм в задаче со свободным скольжением, мишень из стали, $u_0 = 1.5$ км/с; обозначения см. в подписи к табл. 1

μ	v_{mid}^D		p_{max}^C		$T_{p_{max}}^C$		Состояние диска		p_{min}^D	
	Al	Cu	Al	Cu	Al	Cu	Al	Cu	Al	Cu
1	2.5	1.7	29	41	0.5	0.6	S	S	-1.4	-5
0.75	3.5	1.9	75	110	3.5	4	S + L + N	S	-6	-9
0.5	4.2	2.0	82	108	7.3	8.3	S + L	S + L + N	-6.5	-6

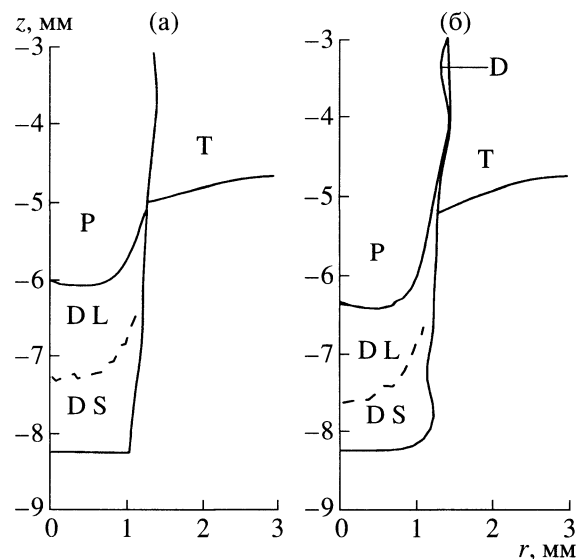
Таблица 3. Алюминиевый диск с $h = 3$ мм для трех ударников с $u_0 = 2.5, 1.5$ (стальная мишень) и 1 км/с (свинцовая мишень) в задачах со свободным скольжением на всех границах (А), без скольжения на всех границах (В) и со свободным скольжением только на границе диск–мишень (С); обозначения см. в подписи к табл. 1

u_0	μ	V_{mid}^D			P_{max}^C		$T_{P_{max}}^C$		Состояние диска		P_{min}^D	
		А	В	С	А	В	А	В	А	В	А	В
2.5	1	3.8	3.3	3.5	66	47	1.1	0.7	S	S	-1.1	-1.1
	0.75	4.5	4.2	4.3	108	105	6.5	5.2	S + L	S + L	-1.4	-1.8
	0.5	5.4	5.3	5.4	157	151	14	14	S + L	S + L	-1.5	-1.8
1.5	1	2.3	1.5	1.8	29	20	0.5	0.4	S	S	-1.2	-2.5
	0.75	2.4	1.9	2.1	80	63	3.5	3.1	S	S	-1.6	-2.2
	0.5	2.8	2.7	2.7	116	98	5	4.5	S + L	S + L	-1.8	-2.8
1	1	1.2	<0.6	1	13	9	0.4	0.4	S	S	-1.2	-1
	0.75	1.5	<0.7	1.3	25	17	1.7	1.1	S	S	-1.25	-1.4
	0.5	2	1.7	2	70	68	4.1	3.9	S	S	-1.8	-3

В табл. 3 представлены результаты моделирования вылета алюминиевого диска толщиной $h = 3$ мм. Существенным отличием от диска с $h = 1$ мм является отсутствие областей с неустойчивым состоянием и заметное уменьшение величины растягивающих напряжений. Согласно приведенным в [26] результатам ударно-волновых экспериментов, предельное растягивающее напряжение, начиная с которого разрушается алюминий, в зависимости от интенсивности ударной волны меняется в пределах от 2.65 до 3.9 ГПа. Эти значения по абсолютной величине заметно больше приведенных в табл. 3 значений минимального давления в диске, по крайней мере для задачи со свободным скольжением, что позволяет надеяться на сохранение целостности диска. Заметим также, что минимальное по пространству давление в диске как функция времени имеет



Фиг. 8. Минимальное по пространству давление в алюминиевом диске как функция времени для случая стальной мишени при свободном скольжении вдоль границ раздела материалов, $h = 3$ мм, $\mu = 0.75$, $u_0 = 1.5$ (сплошная линия) и 2.5 км/с (штриховая).



Фиг. 9. Границы раздела материалов (сплошные линии) и фаз (штриховые) для задач со свободным скольжением при $t = 4.3$ мкс (а) и без скольжения при $t = 4.4$ мкс (б), $u_0 = 2.5$ км/с, $\mu = 0.5$, $h = 3$ мм: P – исходно пористый алюминиевый конус, T – стальная мишень, L и S – жидкая и твердая фазы алюминиевого диска.

в окрестности минимума узкий пик, вне которого абсолютное значение минимального давления заметно ниже. В частности, для двух вариантов, показанных на фиг. 8, пиковое значение (отмечено звездочкой), приведенное в табл. 3, равно ~ 1.5 ГПа, а минимальное по пространству давление вне пика ~ 1 ГПа.

На фиг. 9 для варианта с высокой интенсивностью сходящейся волны ($u_0 = 2.5$ км/с, $\mu = 0.5$) сравниваются задачи со свободным скольжением вдоль границ раздела и без скольжения. Для рассматриваемого варианта начальная стадия течения, связанная со сходящейся в конусе ударной волной, примерно одинакова для обеих задач, что видно из значений p_{\max}^C и $T_{p_{\max}}^C$ в табл. 3. Основное отличие в решениях задач связано с появлением в задаче без скольжения тонкого слоя материала диска, прилипшего к мишени, вдоль которого скользит вначале основная масса диска, а затем и изначально пористый алюминий. При формировании этого слоя возникают растягивающие напряжения, что и приводит к отмеченному в табл. 3 увеличению модуля минимального давления в диске для задачи без скольжения. Возможные разрушения диска, связанные с формированием прилипшего слоя, скорее всего будут локализованы вблизи мишени и не окажут заметного влияния на скорость вылета диска. В задаче без скольжения небольшая часть диска, включающая в себя слой вблизи мишени, не учитывалась при расчете скорости вылета диска. В результате эта скорость для обеих задач оказалась примерно одинаковой (см. табл. 3).

Как видно из фиг. 9, вблизи нижней свободной границы диска алюминий находится в твердом состоянии, что делает маловероятным появление струй, связанных с неустойчивостью свободной границы.

Продолжим анализ данных из табл. 3. Рассмотрены ударники с $u_0 = 1, 1.5$ и 2.5 км/с. Для первого ударника выбрана свинцовая мишень из-за описанного выше эффекта предварительного обжата диска стальной мишенью. Для двух других ударников выбрана стальная мишень. При уменьшении интенсивности сходящейся волны различие в скорости вылета диска для задач со свободным скольжением и без скольжения увеличивается. Это связано с тем, что в задаче без скольжения, во-первых, меньше интенсивность сходящейся волны и, во-вторых, появляется трение диска на границе с мишенью. Чтобы оценить влияние каждого из этих механизмов на уменьшение скорости диска, дополнительно решалась задача с условием свободного скольжения только на границе между диском и мишенью. Роль трения на границе с мишенью оказывается определяющей только для вариантов с низкой интенсивностью сходящейся волны ($u_0 = 1$ км/с, $\mu = 0.75$ и 1). В случае задачи без скольжения для этих вариантов характерно отсутствие слоя скольжения из материала диска. В результате скорость всего диска при его движении внутри канала уменьшается. В момент прекращения расчета скорость вылета диска продолжала уменьшаться, что отмечено в табл. 3 знаком $<$.

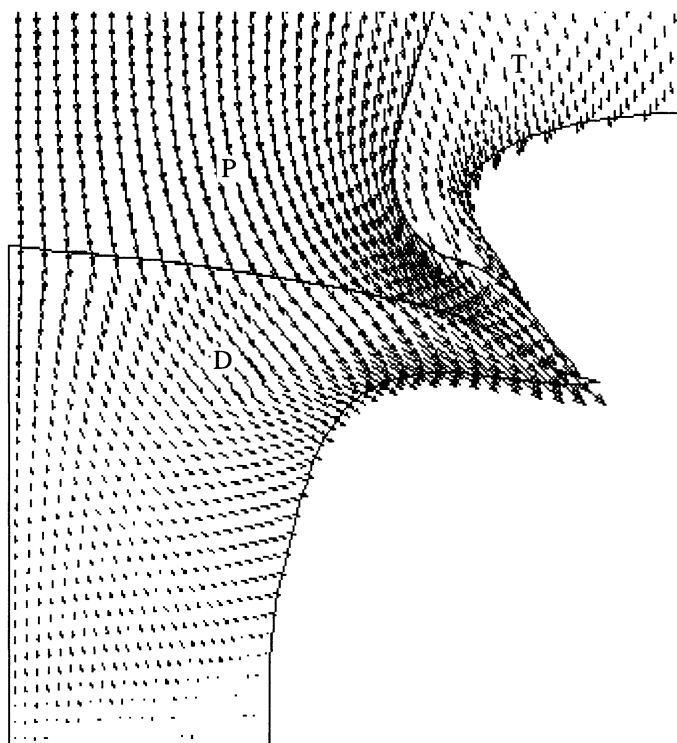
Наиболее пригодным для сравнения с экспериментом представляется вариант с $u_0 = 2.5$ км/с. Скорость вылета диска существенно меняется с изменением μ и почти не зависит от неизвестной связи между нормальным и касательным напряжениями на границах раздела. Для ударников с $u_0 = 1.5$ и 1 км/с отметим заметное увеличение скорости вылета при уменьшении μ от 0.75 до 0.5 как для задачи со свободным скольжением, так и для задачи без скольжения. Можно надеяться, что это увеличение будет зарегистрировано в эксперименте при точности измерения скорости вылета порядка 0.1 км/с.

В заключение покажем, что происходит с диском, если он не погружен в мишень, т.е. в случае мишени без канала. На фиг. 10 показано поле скорости для одного из вариантов задачи. Видна сильная боковая разгрузка материала диска, которая скорее всего приведет к его разрушению.

3. ЗАДАЧА О ВЫЛЕТЕ СТРУИ

Эта задача отличается от показанной на фиг. 4 отсутствием диска. Исследование задачи ограничено случаем стальной мишени, ударником с $u_0 = 2.5$ км/с и условием свободного скольжения на границах раздела. Задача рассматривалась в двух вариантах. В первом варианте внутри мишени находится алюминий, во втором варианте – графит с учетом кинетики его перехода в алмаз.

Вначале рассмотрим мишень без канала. На фиг. 11 показан результат расчета для пористого алюминия с $\mu = 0.5$. Алюминий внутри мишени находится в твердом и жидком состоянии, а вылетающая из мишени струя находится в основном в состоянии кипящей жидкости. Так как время установления термодинамического равновесия для этого состояния может быть больше времени образования струи, реальная струя может находиться в метастабильном состоянии перегретой



Фиг. 10. Поле скорости в алюминиевом диске и вблизи него для стальной мишени без канала при $u_0 = 2.5$ км/с, $\mu = 0.5$, $h = 3$ мм, $t = 3.3$ мкс.

жидкости. Другая возможность заключается в отделении парообразной фазы от жидкой с образованием высокоскоростной струи пара (см. [27]).

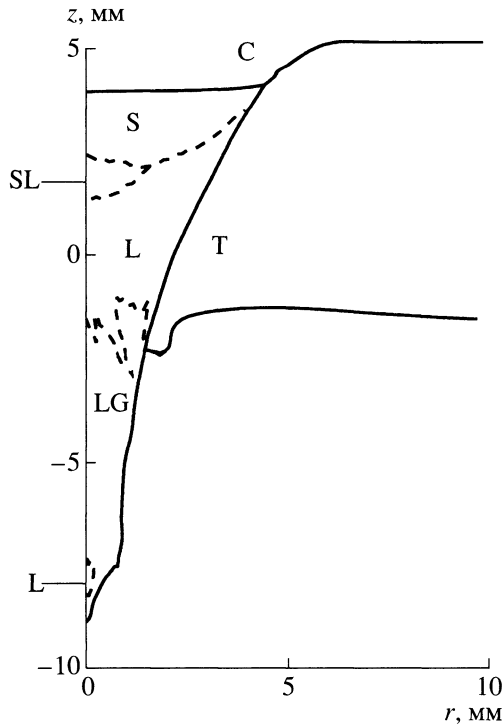
В качестве скорости струи v_{\max} возьмем максимальное значение модуля осевой составляющей скорости на нижней границе струи. Скорость и фазовый состав струи в момент прекращения расчета вместе с характеристиками сходящейся волны p_{\max}^C и $T_{p_{\max}}^C$ приведены в табл. 4 для значений $\mu = 0.5, 0.75$ и 1 . В отличие от задачи с диском, зависимость $p_{\max}^C(\mu)$ слабая, что связано с близостью свободной границы. Однако зависимость $T_{p_{\max}}^C(\mu)$ по-прежнему очень сильная, что и приводит к сильной зависимости фазового состава и скорости струи от μ . При $\mu = 1$ струя находится в твердом состоянии, при $\mu = 0.75$ – в жидком и частично в неустойчивом состоянии, при $\mu = 0.5$, как это было видно из фиг. 11, – в состоянии кипящей жидкости с небольшим включением жидкой фазы. Скорость струи меняется от 3.6 км/с при $\mu = 1$ до 13.4 км/с при $\mu = 0.5$.

Зависимость $v_{\max}(t)$ приведена на фиг. 12. Видно, что для $\mu = 0.5$ в момент прекращения расчета функция $v_{\max}(t)$ еще далека от постоянного значения и продолжает увеличиваться.

Остановимся на любопытном проявлении неустойчивости границы раздела сред, возникающей при использовании мишени с пустым каналом. Как видно из фиг. 13, при глубине канала $h_T = r_0 = 1$ мм через небольшое время после начала вылета струи мишень схлопывается и отсекает вы-

Таблица 4. Задача без диска для стальной мишени без канала, $u_0 = 2.5$ км/с, v_{\max} (км/с) – максимум модуля осевой составляющей скорости на нижней границе струи, SL – расплав, LG – кипящая жидкость, остальные обозначения аналогичны табл. 1

μ	v_{\max}	p_{\max}^C	$T_{p_{\max}}^C$	Состояние алюминия
1	3.6	60	0.8	S
0.75	8.15	75	4.4	S + SL + L + N
0.5	13.4	82	11	S + SL + L + LG



Фиг. 11. Границы раздела материалов (сплошные линии) и фаз (штриховые) для задачи без диска с мишенью без канала при $t = 3.7$ мкс, $u_0 = 2.5$ км/с, $\mu = 0.5$: С и Т – стальные крышка и мишень, S, SL, L и LG – твердая фаза, расплав, жидкая фаза и кипящая жидкость соответственно в исходно пористом алюминиевом конусе.

нение кинетики перехода графит–алмаз при $T \leq T_s$.

Смесь графита и алмаза описывается моделью (9), где в качестве уравнения состояния конденсированного вещества и вместо уравнения состояния совершенного газа используются уравнения состояния графита и алмаза (см. [28], [29]). Кинетика фазового превращения описывается уравнением для массовой концентрации алмаза α (см. [18]):

$$\frac{d\alpha}{dt} = \chi(p, T) \frac{1 - \alpha p - p_s}{\tau p_s},$$

$$\chi(p, T) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \leq p_s \text{ или } T \leq T_s, \\ (T - T_s)/\Delta T, & \text{если } T_s \leq T \leq T_s + \Delta T, \\ 1, & \text{если } T > T_s + \Delta T, \end{cases}$$

где в функцию $\chi(p, T)$ введен упомянутый выше запрет на фазовый переход при $T \leq T_s$ и промежуточный интервал температур шириной $\Delta T = 500$ К, обеспечивающий непрерывность функции $\chi(p, T)$ по T . Значению $\alpha = 0$ отвечает чистый графит, $\alpha = 1$ – чистый алмаз. Подчеркнем, что сделанные по сравнению с моделью из [18] дополнения лишь уменьшают скорость образования алмаза.

Результат расчета для ударника с $u_0 = 2.5$ км/с и стальной мишени без канала показан на фиг. 14. Видно, что в вылетающей струе имеется компактная область почти чистого алмаза с $\alpha > 0.9$.

летевшую часть струи от остального алюминия. Для показанного на фиг. 13 варианта ($u_0 = 2.5$ км/с, $\mu = 0.5$) скорость схлопывания примерно 2.5 км/с. При увеличении h_T в два раза скорость схлопывания почти не меняется, за исключением финальной стадии схлопывания, когда минимальный радиус мишени $r_{\min} < 0.1$.

Схлопывание мишени с каналом вызвано сходящейся в конусе ударной волной, а не ударной волной в мишени, как это было в случае описанного выше эффекта предварительного обжатия диска для низкоскоростных ударников. Чтобы в этом убедиться, была решена задача с аналогичной свинцовой мишенью, скорость ударной волны в которой намного меньше, а эффект схлопывания по-прежнему имеет место.

В силу инвариантности уравнений относительно умножения пространственных координат и времени на одно и то же число (за исключением уравнения кинетики пор, которое используется только для создания численного метода), при пропорциональном увеличении размеров мишени скорость схлопывания не изменится.

В заключение приведем результат моделирования задачи с пористым графитом вместо алюминия. Начальная плотность графита и параметры кинетики фазового перехода графит–алмаз взяты из работы [18]: начальная плотность графита $\rho_{00} = 1.9$ г/см³, давление начала фазового перехода $p_s = 24$ ГПа, характерное время перехода $\tau = 0.1$ мкс. Нормальная плотность графита $\rho_0 = 2.265$ г/см³, $T_0 = 293$ К.

Данные работы [18] построены на результатах экспериментов с плоской ударной волной, в которой давление p_s соответствует температура $T_s = 1240$ К в точке на ударной адиабате пористого графита. Поэтому в уравнении кинетики фазового перехода графит–алмаз был дополнительно введен запрет на такой переход при $T \leq T_s$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

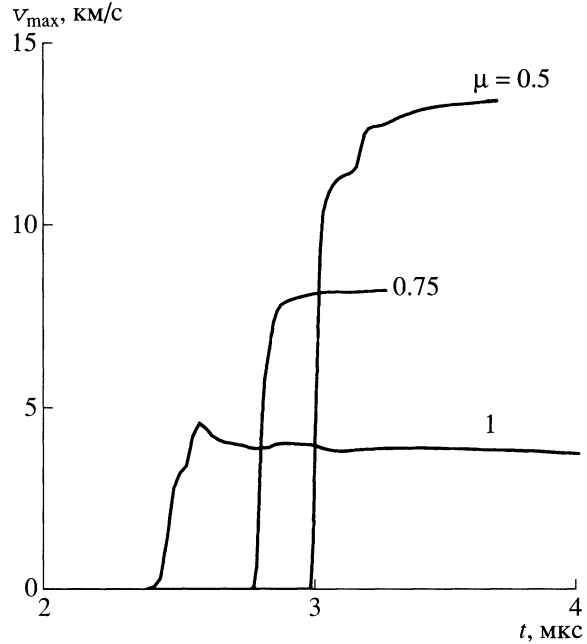
Увеличение интенсивности сходящейся ударной волны в пористых средах при уменьшении начальной плотности, обнаруженное ранее (см. [4], [5]), приводит для не слишком тяжелых дисков к заметному увеличению скорости вылета диска из мишени.

Выбор между стальной и свинцовой мишенями зависит от скорости ударника. Для алюминиевого ударника, имеющего скорость $u_0 \geq 1.5$ км/с, более предпочтительными являются стальные мишени из-за большей интенсивности сходящейся волны. Для ударников с $u_0 \leq 1$ км/с более предпочтительными являются свинцовые мишени, так как для пористого алюминия из-за уменьшения скорости входящей в алюминий ударной волны при уменьшении начальной плотности воздействие стальной мишени на диск начинается до прихода к диску ударной волны из конуса.

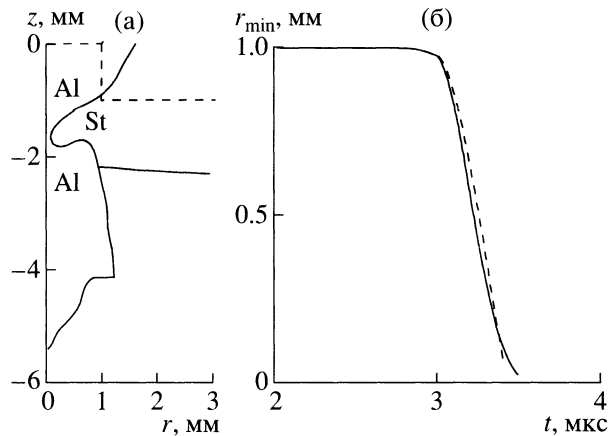
Ударная волна в диске имеет спадающий за фронтом профиль давления, что приводит к появлению растягивающих напряжений и, как следствие, к возможному разрушению диска. Увеличение толщины диска уменьшает величину растягивающих напряжений. Показана возможность выбрать толщину диска так, чтобы растягивающие напряжения стали меньше динамического предела разрушения, а увеличение скорости диска при уменьшении начальной плотности оставалось достаточно большим для его экспериментального измерения. Кроме того, при выбранном значении толщины алюминиевого диска вблизи его внешней границы алюминий остается в твердом состоянии, что делает маловероятным появление струй.

Были рассмотрены два типа задач: задача со свободным скольжением на границах раздела сред, в которой касательное напряжение вдоль границ равно нулю, и задача без скольжения, в которой никакого условия на касательное напряжение вдоль границ раздела не ставится. Для задачи без скольжения при достаточно высокой интенсивности сходящейся в конусе ударной волны возникает прилипший к мишени тонкий слой из материала диска, вдоль которого скользит основная масса диска. В случае высокоскоростных ударников с $u_0 \geq 2.5$ км/с это приводит к примерному равенству скорости вылета диска для обеих задач, что позволяет сделать вывод о слабой зависимости скорости вылета от неизвестной связи между нормальным и касательным напряжениями на границах раздела.

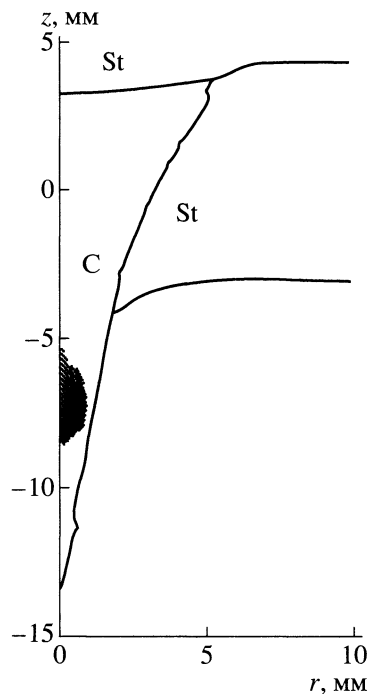
В отсутствие диска скорость вылета и фазовый состав свободной струи алюминия сильно зависят от степени пористости алюминия. В случае струи из кипящей жидкости измеренная в эксперименте скорость струи может заметно отличаться от расчетной из-за возможного нарушения термодинамического равновесия. Одним из возможных применений экспериментальной установки может оказаться изучение свойств веществ в отсутствие термодинамического равновесия.



Фиг. 12. Максимум модуля осевой составляющей скорости на нижней границе струи как функция времени для задачи без диска при $u_0 = 2.5$ км/с.



Фиг. 13. Мишень с пустым каналом при $u_0 = 2.5$ км/с, $\mu = 0.5$: (а) – граница между алюминием (Al) и мишенью (St) при $h_T = 1$ мм, $t = 0$ (штриховые линии) и 3.5 мкс (сплошные); (б) – минимальный радиус мишени как функция времени для $h_T = 1$ (сплошная линия) и 2 мм (штриховая).



Фиг. 14. Струя смеси графита и алмаза (C), вылетающая из стальной мишени (St) при $u_0 = 2.5$ км/с; темное пятно – область с массовой концентрацией алмаза $\alpha > 0.9$.

Для мишени с пустым выводящим каналом глубиной h и радиусом $r_0 \leq h$ мишень схлопывается через некоторое время после начала вылета струи и отсекает вылетевшую часть струи от остального алюминия.

При ударном сжатии пористого графита необходимые для перехода графита в алмаз давление и температура достигаются при сравнительно низкой скорости алюминиевого ударника 2.5 км/с. Для типичных значений параметров кинетики перехода и размерах конуса порядка 1 см в вылетающей струе возникает компактная область, занятая алмазом.

Принципиальная трудность получения алмазов с помощью ударного сжатия связана с большой остаточной температурой, возникающей в образце после его разгрузки. Имеются два возможных способа предохранить алмаз от обратного перехода в графит (см. [30]): либо быстро охладить алмаз, либо использовать эффект сохранения остаточного давления в специальных ампулах. В связи с первым подходом в работе [30] упоминается выстреливание ампулы сохранения в воду или в жидкий азот. Моделируемая экспериментальная установка позволит, возможно, сделать то же самое с частью образца без ампулы сохранения (с веществом, вылетающим из отверстия в мишени), уменьшив тем самым время охлаждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломоносов И.В., Фортвов В.Е., Фролова А.А. и др. Об одном возможном подходе к получению искусственных алмазов // Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 2. С. 199–201.
2. Ломоносов И.В., Фортвов В.Е., Фролова А.А. и др. Численное исследование ударного сжатия графита и его превращения в алмаз в конических мишенях // Ж. техн. физ. 2003. Т. 73. Вып. 6. С. 66–75.
3. Ломоносов И.В., Фортвов В.Е., Фролова А.А. и др. Моделирование превращения графита в алмаз при динамическом сжатии в конической мишени // Теплофиз. высоких т-р. 2003. Т. 41. № 4. С. 515–526.
4. Чарахчьян А.А., Ломоносов И.В., Милевский В.В. и др. О сходящихся ударных волнах в пористых средах // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 1. С. 72–77.
5. Чарахчьян А.А., Хищенко К.В., Милевский В.В. и др. Численное исследование сходящихся ударных волн в пористых средах // Ж. техн. физ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 15–25.
6. Уилкинс М.Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычисл. методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
7. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
8. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
9. Абузаров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л. и др. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 940–953.
10. Miller G.H., Colella P. A high-order Eulerian Godunov method for elastic-plastic flows in solids // J. Comput. Phys. 2001. V. 167. № 1. P. 131–176.
11. Чарахчьян А.А. Почти консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 11. С. 1681–1692.
12. Чарахчьян А.А. Об алгоритмах расчета распада разрыва для схемы С.К. Годунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 5. С. 782–796.
13. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
14. Грын В.И., Фролова А.А., Чарахчьян А.А. Сеточный генератор барьерного типа и его применение для расчета течений с подвижными границами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 6. С. 902–908.
15. van Leer B. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136.

16. *van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection // *J. Comput. Phys.* 1977. V. 23. № 3. P. 276–299.
17. *Charakhch'yan A.A.* Application of moving regular grids to computation of gasdynamic flows with interfaces // *Modern Problems in Comput. Aerogasdynamics*. M.: Mir Publs; CRC Press: Boca Ration, 1992. P. 189–210.
18. *Жук А.З., Иванов А.В., Канель Г.И.* Исследование кинетики фазового перехода графит–алмаз // *Теплофиз. высоких т-р.* 1991. Т. 29. № 3. С. 486–493.
19. *Fritch F.N., Carlson R.E.* Monotone piecewise cubic interpolation // *SIAM J. Numer. Analys.* 1980. V. 17. № 2. P. 238–246.
20. *Нигматулин Р.И.* Механика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
21. *Родионов А.В.* Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1987. Т. 27. № 12. С. 1853–1860.
22. *Кукуджанов В.В.* Метод расщепления упруго-пластических уравнений // *Изв. РАН. Механ. твердого тела.* 2004. № 1. С. 98–108.
23. *Bushman A.V., Fortov V.E., Kanel G.I., Ni A.L.* Intense dynamic loading of condensed matter. Washington: Taylor & Francis, 1993.
24. *Слепцова Г.П.* Модули упругости // *Физический энциклопедический словарь*. Т. 3. М.: Сов. энциклопедия, 1963. С. 273–274.
25. *Киттель Ч.* Элементарная физика твердого тела. М.: Наука, 1965.
26. *Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е.* Ударно-волновые течения в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996.
27. *Новиков Н.П.* О высокоскоростных кумулятивных струях // *Прикл. механ. и техн. физ.* 1962. № 6. С. 21–28.
28. *Khishchenko K.V., Fortov V.E., Lomonosov I.V. et al.* Shock compression, adiabatic expansion and multi-phase equation of state of carbon // *Shock Compression of Condensed Matter-2001*. New York: AIP, 2002. P. 759–762.
29. *Khishchenko K.V., Fortov V.E., Lomonosov I.V.* Multi-phase equation of state for carbon over wide range of temperatures and pressures // *Int. J. Thermophys.* 2005. V. 26. № 2. P. 479–491.
30. *Бацанов С.С.* Динамико-статическое сжатие // *Физ. горения и взрыва.* 1994. Т. 30. № 1. С. 125–130.