

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 7 номер 8 год 1995

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ И ОТРЫВОМ ПОТОКА ОТ ПОВЕРХНОСТИ

© А. П. Карпенко, В. Н. Ляхов, И. Н. Протасов, В. Е. Фортвов

Объединенный институт высоких температур РАН
127412, Москва, ул.Ижорская, д.13/19 Fax 485 79 90

Рассматривается решение нестационарной 3-мерной задачи газовой динамики, описываемой уравнениями Эйлера. Силы трения на стенке вводятся с помощью численного алгоритма. Используется конечно-разностный метод Мак-Кормака с расщеплением и локальным сглаживанием. Вычисления выполнены на транспьютерной системе.

NUMERICAL SIMULATION OF A 3-D FLUID GAS DYNAMICS UNSTEADY PROBLEM WITH SHOCK WAVES AND FLUX SEPARATION FROM A SURFACE

A. P. Karpenko, V. N. Lyakhov, I. N. Protasov, V. E. Fortov

Joint Institute for High Temperatures of Russian Academy of Sciences
IVTAN, Izhorskaya, 13/19, Moscow, 127412, Russia Fax 485 79 90

Solution of a 3-D fluid gas dynamics unsteady problem described by the Euler equations is considered. The friction force on the wall is introduced with help of a numerical algorithm. The Mac-Cormack finite - difference method with splitting and local smoothing is used. The calculations were executed on a transputer system.

Введение

Если ударная волна (далее UV или Sw) ориентирована против потока газа и ее интенсивность достаточно велика, то поток может оторваться от поверхности тела. Образуется сложная газодинамическая структура, включающая в себя крупный вихрь, слои смешения и λ -конфигурацию, состоящую из трех UV . Характерный размер Δ такой структуры значительно больше толщины пограничного слоя δ .

Существенны для таких явлений следующие факторы:

- нестационарность и многомерность течения;
- большие числа Рейнольдса ($Re \geq 10^5 \dots 10^6$), когда модель ламинарного течения неэффективна;
- наличие крупных вихрей вместе с сопутствующими им волнами разрежения и слоями смешения;

- развитый (возможно нестационарный) отрыв потока от гладкой стенки с нефиксированной границей отрыва;
- большое различие пространственных масштабов явлений ($\Delta \gg \delta$).

Указанные факторы сильно осложняют моделирование таких явлений. Поэтому обычно мало внимания уделяют сравнению результатов моделирования с картиной реального течения и не исследуют причины различия параметров в окрестности границы отрыва. Методы расчетов разработаны в основном для случаев, когда положение этой границы заранее задано (например, за острой кромкой, рис.1а) [1,2]. Значительно меньше работ, в которых поток отрывается от гладкой поверхности в произвольном месте или зона отрыва пульсирует или перемещается по гладкой поверхности (рис. 1б) [3-7].

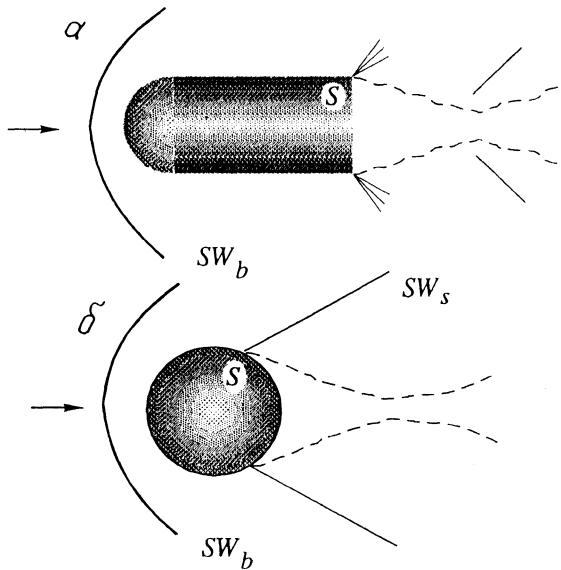


Рис.1. Картина обтекания при фиксированной (а) и нефиксированной (б) границах отрыва потока.

В работах, посвященных изучению течений с отрывом потока от поверхности тела, различают следующие ситуации:

1. Моделирование *развитого* отрыва в отличие от изучения процесса зарождения и развития отрыва из неустойчивой стадии.
2. Исследование *развитого* отрыва потока от *излома* поверхности (например, от задней кромки прямоугольного тела) в отличие от отрыва от *гладкой* поверхности (например, при обтекании шара, цилиндра или крыла).
3. Моделирование *развитого* отрыва потока от произвольной поверхности в гипотетической *идеальной* среде без вязкости и теплопроводности (границу отрыва можно заранее задавать в любом месте) в отличие от отрыва потока в среде с *вязкостью*.

Данная работа рассматривает ситуацию с *развитым* отрывом потока от *гладкой* поверхности в среде с *вязкостью*.

В историческом плане сначала рассматривались задачи с заранее заданной границей отрыва в идеальной среде с использованием аналитических методов [8]. Из набора решений надо было выбрать такое, которое соответствует реальному течению или, например, испытать его на устойчивость. Удачнее всего решение получалось тогда, когда отрыв потока задавался с излома поверхности тела. Однако на гладкой поверхности очень трудно заранее угадать границу отрыва.

С появлением численного метода сквозного счета стали получать решения, в которых отрыв потока от гладкой поверхности или от поверхности с изломом формируется без каких-либо заранее заданных условий. Решение при этом определяется только уравнениями сплошной среды и традиционными однородными граничными условиями. Для ламинарного течения при малых числах Рейнольдса ($Re < 10^4$) используют уравнения Навье-Стокса, в большинстве других случаев – уравнения Эйлера, не описывающие вязкое трение в газе. Решения получаются однозначными и могут быть нестационарными.

Однако выяснилось, что при использовании модели Эйлера передняя граница S отрыва потока от гладкой поверхности располагается в расчете гораздо ниже по потоку, чем в реальном течении. Особенно это заметно при сверхзвуковом обтекании тел (например, шара или цилиндра). Газодинамическая картина течения вдали от поверхности тела при этом воспроизводится хорошо.

При объяснении сказанного необходимо учитывать следующие обстоятельства. Пренебрежение в уравнениях движения действием сил вязкости (сил внутреннего трения) делает невозможным постановку граничного условия прилипания, что приводит к неоднозначности в аналитических решениях. В отличие от этого присутствие аппроксимационной вязкости в нестационарной модели, основанной на уравнениях Эйлера (без молекулярной вязкости), при использовании метода сквозного счета формирует однозначные решения, хотя граница отрыва воспроизводится неточно. Если же смоделировать недостающее условие прилипания, то, как выяснилось, можно получить решение, достаточно хорошо согласующееся с реальным течением не только по газодинамической структуре во внешнем потоке, но и по местоположению передней границы отрыва. И это несмотря на то, что природа аппроксимационной и молекулярной вязкостей различна. Силу трения и тепловой поток на поверхности тела при таком подходе надо задавать приближенно. Хорошее согласие численного решения с реальным течением получается как при стационарном течении, так и в случае, когда зона отрыва движется или пульсирует.

В данной работе для расчета газодинамической структуры течения с развитым отрывом потока используется методика, основанная на применении комбинированной модели Эйлера (КМЭ). Эта модель использует разностные аналоги уравнений Эйлера и требует моделирования силы трения и теплообмена на поверхности тела. КМЭ предложена Ляховым В.Н., и первые результаты ее применения представлены в работах [3,6].

Цель работы заключается в следующем:

- изложение и обсуждение КМЭ;
- применение КМЭ для решения трехмерной задачи о бифуркации (разветвлении) UV около стенки;
- исследование полученного поля течения, а также зависимости решения от параметров задачи и численного метода, постановки задачи (двух- или трехмерная), коэффициента силы трения на стенке.

Новым в работе является использование КМЭ для расчета сложного неста-

ционарного трехмерного течения с UV и отрывом потока от гладкой стенки для больших чисел Рейнольдса.

В разделе 1 изложена суть КМЭ. В качестве примера рассмотрена хорошо известная задача об обтекании цилиндра или шара потоком газа. В разделе 2 приведены постановка и алгоритм решения задачи о бифуркации около стенки UV , ориентированной против потока. В разделе 3 представлены результаты моделирования на многотранспьютерной вычислительной системе и их анализ. В Приложении обсуждается использование других моделей для решения рассматриваемых задач, а также особенности постановки граничных условий.

1. Комбинированная модель Эйлера

1.1. Описание модели. Суть КМЭ состоит в том, что известные уравнения Эйлера для невязкого газа используют совместно со специальным алгоритмом, который при реализации граничных условий моделирует силу трения и теплообмен на поверхности тела. Были апробированы три способа построения таких алгоритмов:

С-1. Перенос параметров из пристенного слоя ячеек в "фиктивные" ячейки.

С-2. Введение в уравнения Эйлера дополнительных источников диссипации, действующих только около стенки.

С-3. Учет торможения потока около стенки как в нормальном к ней направлении, так и в касательном, при определении давления на стенке.

Способы 2 и 3 не требуют введения "фиктивных" ячеек.

Расчеты показали, что все способы дают сходные результаты. Детальное изложение и сравнение этих способов и порождаемых ими наборов алгоритмов выходят за рамки работы.

Рассмотрим один из алгоритмов, основанный на первом способе задания граничных условий. Этот алгоритм представляет собой модификацию известного алгоритма "зеркального" переноса, который обычно используют для плоскости симметрии.

Введем слой "фиктивных" ячеек β (рис. 2), в которые на каждом шаге по времени будем пересылать параметры из соответствующих ячеек α :

$$a) v_{\beta} = -v_{\alpha} \rightarrow v_w = 0; \quad b) e_{\beta} = e_{\alpha} \rightarrow e_w = e_{\alpha}; \quad c) \rho_{\beta} = \rho_{\alpha} \rightarrow \rho_w = \rho_{\alpha}. \quad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность газа; e — удельная суммарная энергия; v — нормальная к стенке составляющая вектора скорости. Поверхность стенки W располагается между ячейками α и β . Значения параметров на стенке (v_w, e_w, ρ_w) получены с помощью линейной интерполяции для случая, когда поверхность W находится в середине между ячейками α и β (например, $v_w = 0.5(v_{\alpha} + v_{\beta})$).

Для касательной к стенке составляющей вектора скорости u рассмотрим три алгоритма переноса [6]:

— симметричный перенос, предполагающий, что W — плоскость симметрии без трения (рис. 2б, д):

$$u_{\beta} = u_{\alpha} \rightarrow u_w = u_{\alpha}, \quad (\tau_w = 0); \quad (1.2)$$

— антисимметричный перенос, предполагающий, что W — стенка с трением (рис. 2в, е):

$$u_{\beta} = -u_{\alpha} \rightarrow u_w = 0, \quad (\tau_w \neq 0);$$

– комбинированный перенос:

$$u_{\beta} = (1 - 2\nu)u_{\alpha} = \begin{cases} u_{\beta} = u_{\alpha}, & \nu = 0 \quad (\tau_w = 0), \\ u_{\beta} = -u_{\alpha}, & \nu = 1 \quad (\tau_w \neq 0), \quad (u_w = 0). \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь τ_w – касательное напряжение, характеризующее силу трения на стенке. Комбинированный перенос является модификацией "зеркального" переноса и включает в себя симметричный и антисимметричный переносы (при $\nu = 0$ и $\nu = 1$, соответственно). При $0 \leq \nu \leq 1$ он позволяет реализовать промежуточные режимы между двумя предельными случаями:

- 1) полное скольжение потока относительно поверхности W при $\tau_w = 0$ – моделирование условия для плоскости симметрии при отсутствии силы трения;
- 2) полное торможение потока ($u_w = 0$).

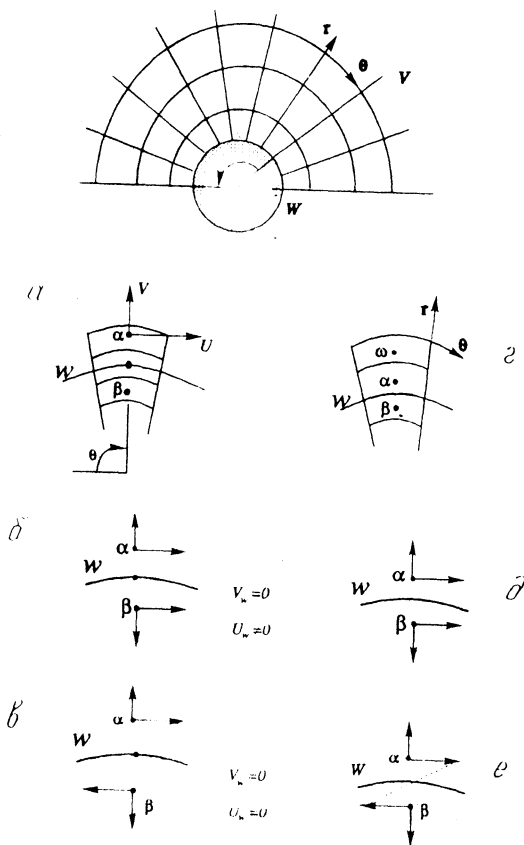


Рис.2. К алгоритмам переноса параметров из пристенного слоя ячеек в "фигтивные" ячейки: $a, b, в$ – поверхность стенки W находится внутри ячейки, расположенной между ячейками α, β ; $г, д, e$ – поверхность стенки располагается вдоль границы между ячейками; $б, д$ – алгоритм симметричного переноса; $в, e$ – алгоритм антисимметричного переноса.

Физический смысл имеет лишь алгоритм симметричного переноса для плоскости симметрии. Тем не менее, мы будем использовать комбинированный перенос и применять его для выпуклой стенки.

Алгоритмы симметричного и антисимметричного переноса использовались в задаче об обтекании прямоугольного уступа в работе [9]. В отличие от наших результатов там подчеркивалось сходство получаемых решений между собой. Это можно объяснить тем, что в работе [9] отрыв был фиксирован на 90° -кромке. При этом оказывается, что решение мало чувствительно к перемене алгоритмов. Из-за этой особенности обычно не задумываются о том, какой алгоритм следует выбрать.

Антисимметричный перенос иногда применяют при использовании уравнений Навье-Стокса, поскольку он, казалось бы, реализует необходимое условие прилипания на стенке ($u_w=0$). Однако такая реализация не является строгой в математическом смысле. Строгая постановка граничных условий в этом случае рассмотрена в Приложении.

1.2. Результаты исследования модели. Комбинированная модель Эйлера апробирована на следующих задачах:

- дифракция UV около цилиндра или шара и обтекание этих тел установившимся потоком газа (рис. 3а) [3,6];
- дифракция UV около вершины угла (рис.3б) [3,10];
- бифуркация около стенки UV , ориентированной против потока (рис.3в) [11,12];
- течение с отрывом потока перед телом с иглой впереди или перед уступом с пластиной (рис. 3г) [12].

Результаты апробации рассмотрим на примере первой из этих задач. Постановка задачи, уравнения Эйлера в криволинейных координатах, способ решения, а также необходимые ссылки приведены в работах [3,6].

Рассматривались начальные условия двух типов:

- 1) UV набегает на тело, находящееся в неподвижной среде;
 - 2) тело мгновенно помещают в однородный стационарный поток газа.
- Предполагается, что течение симметрично, $M_2=2$; $\gamma=1.4$.

На рис.4 представлены распределения давления P_w и скорости u_w на поверхности шара для вариантов полного скольжения потока на стенке ($\tau_w=0$) и полного торможения потока в ячейке ($u_w=0$). Лобовой точке здесь соответствует $\theta=0$, тыльной – $\theta=180^\circ$. На представленных кривых видны участки больших градиентов параметров при $\theta=\theta_*$. Это можно объяснить наличием ударной волны SW_s , ориентированной против потока. Непосредственно за ней начинается область отрыва потока. Если трение на стенке отсутствует, то ударная волна SW_s и начало отрыва располагаются на $15-20^\circ$ ниже по течению, чем при наличии трения. Экспериментальные результаты при $Re \approx (2 \dots 6)10^5$ ($\theta=\theta_s$) хорошо согласуются с вариантом при $u_w=0$ [6,13-16]. На передней части тела результаты обоих вариантов ($\tau_w=0$ и $u_w=0$) практически совпадают как между собой, так и с экспериментальными данными.

По-видимому, это и является причиной широкого использования традиционной модели Эйлера для расчетов на передней поверхности тела. Отметим, что около стенки при использовании антисимметричного переноса формируются тонкие (2-3 ячейки) слои с характерными профилями $\rho(r)$, $u(r)$ – своеобразные погранслои. Такой характер решения возможен при наличии трения на стенке. Это обстоятельство и породило в некоторой степени идею КМЭ.

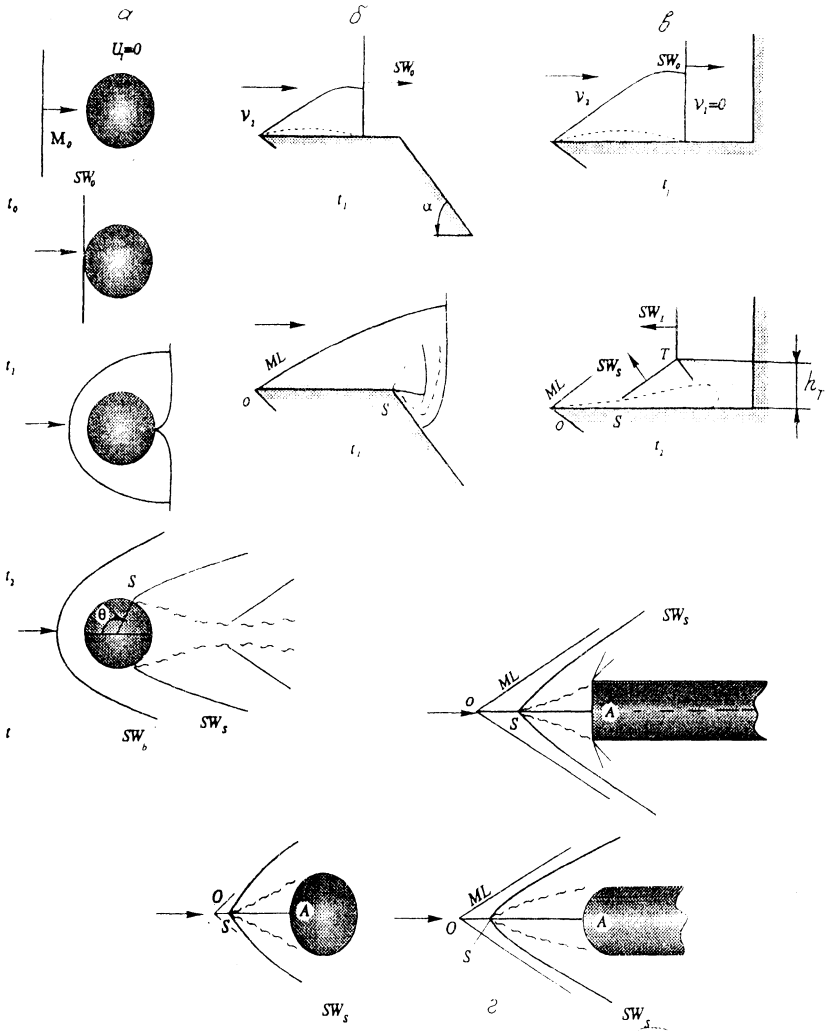


Рис.3. Примеры задач, которые были исследованы с использованием КМЭ. Обтекание: a — цилиндра или шара; b — вершины угла; β — стенки; γ — тела с иглой или уступа с пластиной. ML — линия Маха

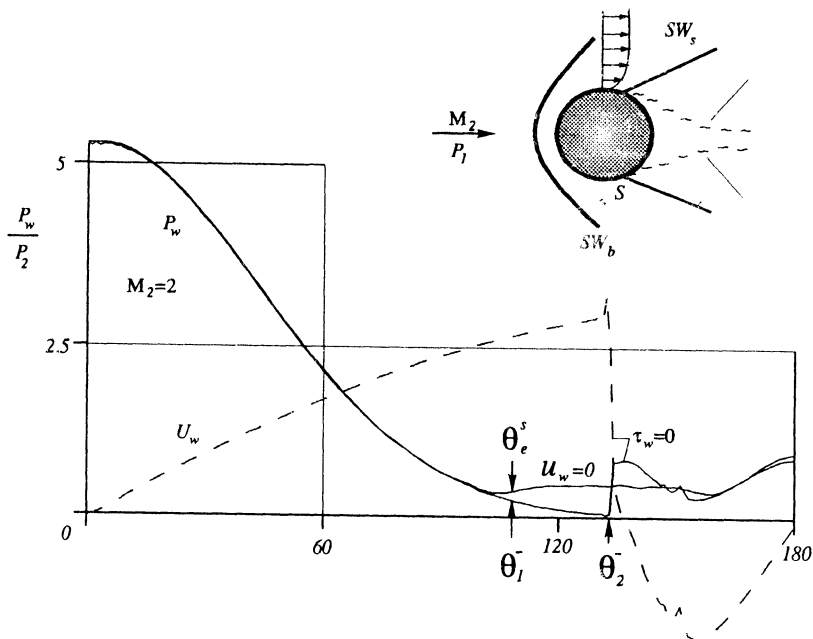


Рис.4. К задаче о дифракции ударной волны около цилиндра или шара.

Принципиальным является вопрос о том, как результаты моделирования зависят от величины силы трения на стенке? Численные эксперименты дают неожиданный ответ: при изменении касательного напряжения τ_w в довольно широком интервале от $0.1\tau_w^{\max}$ до τ_w^{\max} результаты практически не изменяются. Этот факт является ключевым для использования КМЭ. Он позволяет не особенно заботиться об определении точного значения τ_w . Здесь τ_w^{\max} соответствует полному торможению потока, когда $u_w=0$; предполагается, что при изменении ν в диапазоне $(0,1)$ касательное напряжение изменяется от 0 до τ_w^{\max} (для неподвижной стенки).

Сказанное иллюстрирует рис. 5, на котором представлена зависимость координаты отрыва потока $\theta_+^o=180^\circ-\theta_-^o$ от коэффициента ν при использовании комбинированного переноса (1.3) в задаче о поперечном обтекании неподвижного цилиндра при $M_2=2$, $\gamma=1.4$. Характерной особенностью функции $\theta_+(\nu)$ является пологое плато в диапазоне от $\nu=0.1$ до $\nu=1$. Такое же плато имеет место в задаче о бифуркации УВ (рис. 3б), когда рассматривают зависимость величины h_T от ν (рис. 5). Подобное плато наблюдается и в задаче об обтекании тела с иглой или пластиной (рис. 3з).

По-видимому, в рассматриваемых задачах мы имеем дело с проявлением универсального свойства консервативности картины течения по отношению к величине силы трения на стенке после некоторого порогового значения этой силы. Об этом свидетельствуют плато на обсуждаемых кривых. Указанное обстоятельство позволяет рекомендовать КМЭ для предварительного получения поля давления и ударно-волновой структуры течения.

На рис. 6 представлены зависимости величин θ_- и силы сопротивления C_x от шага сетки $\Delta\theta$. Рисунок показывает сходимость решений как при учете

трения на стенке, так и без него. Заметим, что интегральные характеристики C_x мало различаются в этих двух вариантах, хотя координаты точки отрыва

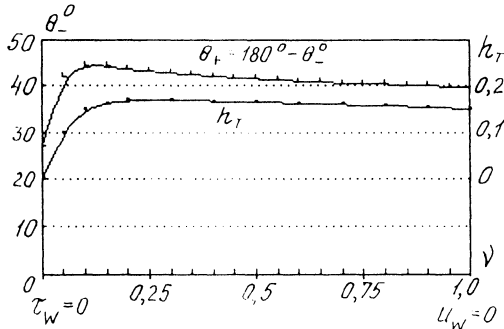


Рис.5. Чувствительность результатов моделирования к изменению силы трения на стенке

отличаются весьма заметно. При наличии трения на стенке решение сходится медленнее (при уменьшении $\Delta\theta$), чем без трения. Однако в любом случае сетка у стенки остается на порядок более крупной, чем при использовании уравнений Навье-Стокса. Последнее обстоятельство является важным с точки зрения экономии вычислительных ресурсов при решении нестационарных трехмерных задач, в которых необходимо учитывать явления, происходящие в разных масштабах Δ и δ (при $\Delta \gg \delta$).

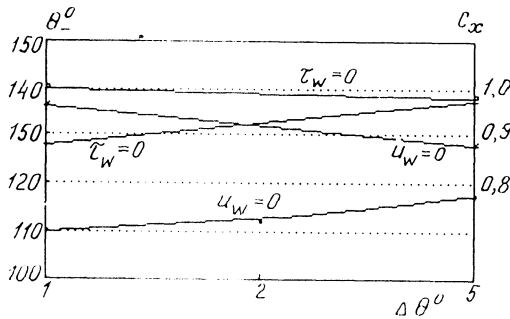


Рис.6. Чувствительность результатов моделирования к изменению шага сетки

Отрыв потока от гладкой стенки может возникнуть при совместном выполнении следующих трех условий:

- дефицит полного импульса у поверхности (неоднородность параметров потока вдоль нормали к поверхности);
- наличие вязкости;
- обратный градиент давления (например, UB , ориентированная против потока).

$KMЭ$ обеспечивает выполнение первых двух условий (вязкость в данном случае численная). Поэтому при наличии UB , ориентированной против потока, может возникнуть зона отрыва, которая после своего развития, как показывают расчеты, почти не зависит от коэффициента трения, метода расчета и сетки (т.е. от величины численной вязкости).

2. Постановка и алгоритм решения задачи о бифуркации ударной волны

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим течение газа в прямоугольной ударной трубе с закрытым торцом B (рис. 7а). Поток газа за фронтом плоской ударной волны SW_0 втекает в трубу параллельно ее стенкам (рис. 8а). Происходит интерференция слабых возмущений от входных кромок, и на стенках трубы формируются пограничные слои (рис. 8б). При достижении фронтом ударной волны SW_0 торца трубы волна отражается. Обратно движется фронт ударной волны SW_s , и происходит отрыв потока от стенки с образованием λ -конфигурации, состоящей из трех волн: SW_s, SW_1, SW_2 . Волны сходятся в тройной точке T , из которой начинается слой смешения. Этот слой разделяет потоки газа с разными скоростями и температурами (рис. 8в,г).

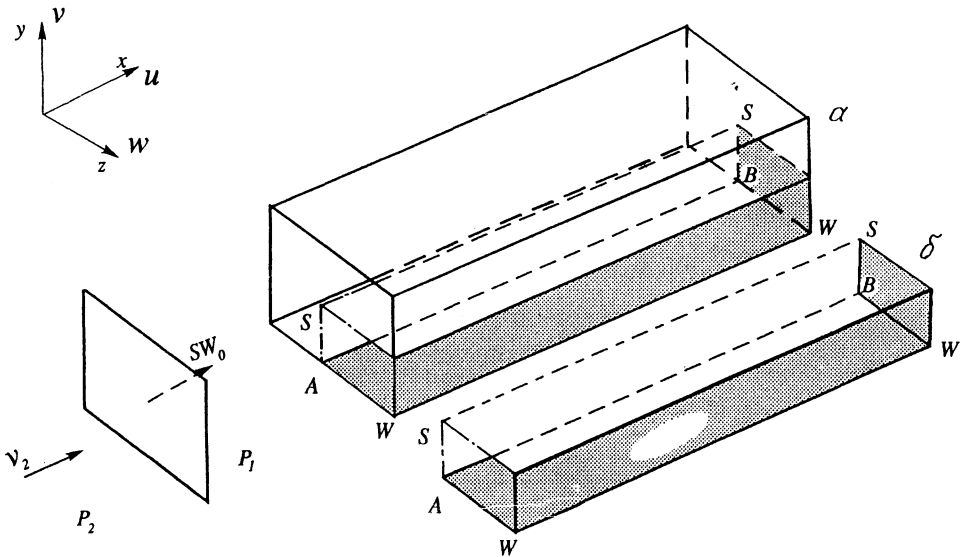


Рис.7. Схема задачи (а) и расчетная область (б)

Данное явление подробно исследовано экспериментально в работе [3]. Там же описана алгебраическая модель Марка, удовлетворительно предсказывающая условия возникновения λ -конфигурации. Численное моделирование такого явления в двумерном приближении было выполнено в работе [17] с использованием уравнений Навье-Стокса в приближении тонкого слоя, а также в работе [18] с использованием кинетически согласованных разностных схем. В обоих случаях сетка сильно сгущалась около стенки и подбирались такие условия, чтобы число Рейнольдса формально было небольшим.

В двумерной постановке с использованием КМЭ без сгущения сетки это явление детально исследовано в работах [11,12]. Варьировались способы задания начальных и граничных условий, размеры ячеек расчетной сетки, коэффициент трения, интенсивность ударной волны SW_0 , состав газов, порядок аппроксимации дифференциальных уравнений. Получено удовлетворительное совпадение результатов численного моделирования с экспериментальными результатами [3,11]: сравнивались величины давлений и структура ударно-волновой картины. В данной работе исследуется проявление эффекта трехмерности течения.

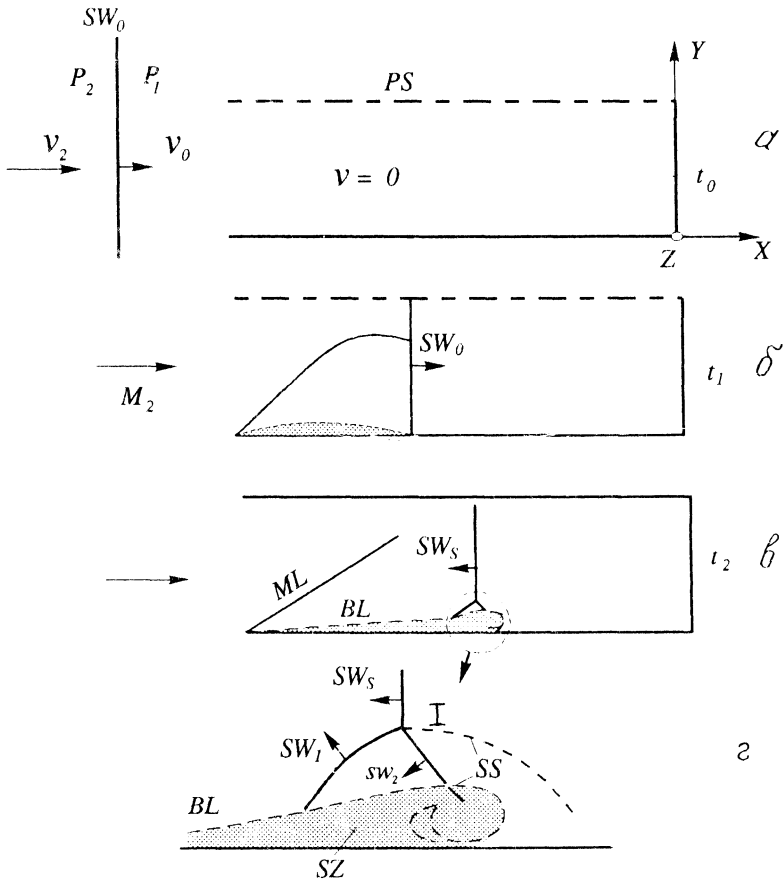


Рис.8. Схема течения газа: а — втекание газа в ударную трубу; б — движение ударной волны SW_0 в прямом направлении; в — движение отраженной ударной волны SW_s навстречу потоку; г — формирование λ -конфигурации

2.2. Алгоритм решения. Предположим, что поток в трубе имеет две плоскости симметрии. Это дает возможность рассматривать только 1/4 часть изучаемого объема (рис.7б).

Для построения модели течения воспользуемся системой уравнений Эйлера, описывающей трехмерное нестационарное течение идеального газа:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q &= (\rho u \ \rho v \ \rho w \ \rho e \ \rho)^T, \\
 F_x &= (u\rho u + p \ u\rho v \ u\rho w \ u\rho h \ u\rho)^T, \\
 F_y &= (v\rho u \ v\rho v + p \ v\rho w \ v\rho h \ v\rho)^T, \\
 F_z &= (w\rho u \ w\rho v \ w\rho w + p \ w\rho h \ w\rho)^T
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Здесь t – время; u, v, w – компоненты скорости газа вдоль направлений x, y, z , соответственно; ρ – плотность; p – давление; e – полная энергия единицы объема; $h = e + p/\rho$ – энтальпия.

Для интегрирования системы (2.1) используем схему Мак-Кормака, принцип расщепления по направлениям и физическим процессам, локальное сглаживание [3,6] и геометрическую схему распараллеливания процесса вычислений [19]. Пусть L^x обозначает все операции, которые следует выполнить в узле i, j, k на одном шаге интегрирования вдоль направления x . Аналогично введем операторы L^y, L^z . Тогда алгоритм решения задачи можно записать в виде

$$Q_{i,j,k}^{n+2} = L^x L^y L^z L^z L^y L^x Q_{i,j,k}^n,
 \tag{2.3}$$

где индекс n соответствует моменту времени t^n , а $n+2$ – моменту $t^{n+2} = t^n + 2\tau$, τ – текущий шаг интегрирования по времени. При вычислении τ используется критерий Куранта-Фридрикса-Леви. Формула (2.3) имеет погрешность $O(\tau^2, h^2)$, где h – максимальный из шагов $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Граничные условия на стенках реализуем с помощью алгоритма комбинированного переноса (1.3).

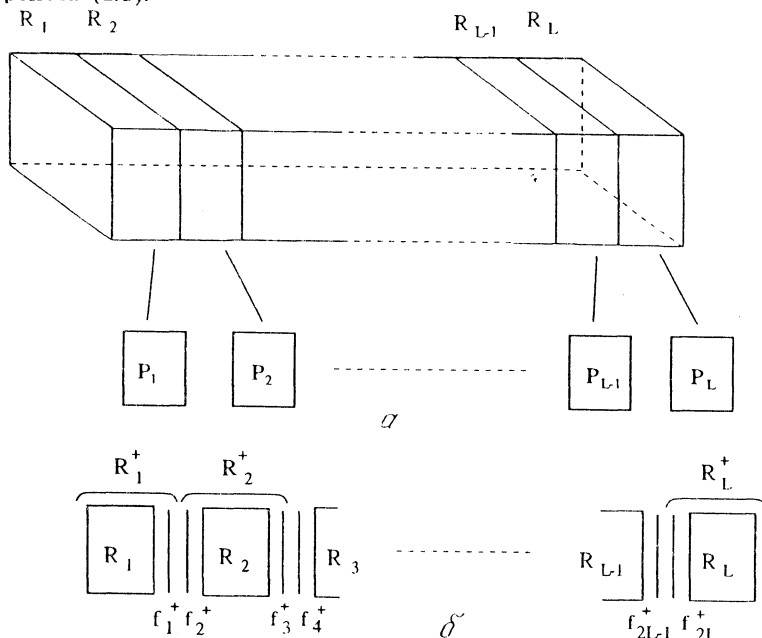


Рис.9. Схема распараллеливания (а) и расширенная расчетная область (б)

Идея распараллеливания состоит в том, что расчетную область R делят на L подобластей R_1, \dots, R_L с помощью плоскостей, перпендикулярных направ-

лению x , и каждая из этих подобластей связывается со своим транспьютером (рис. 9а). При этом между смежными подобластями появляются внутренние границы, требующие применения специальных алгоритмов расчета.

Для того, чтобы выполнить шаги интегрирования и сглаживания вдоль каждого из направлений x, y, z в узле (i, j, k) необходимы значения переменных из двух соседних узлов (например, для направления y — из узлов $(i, j-1, k)$, $(i, j+1, k)$). Поэтому подобласти R_ℓ , $(\ell=2, \dots, L-1)$ расширим с помощью двух дополнительных слоев, а крайние подобласти R_1, R_L — с помощью одного слоя. Сказанное иллюстрирует рис. 9б где R^+ , R^+ обозначают расширенную расчетную область R и подобласть R_ℓ , соответственно; стрелки показывают направления пересылки параметров. Указанные пересылки реализуют выполнение граничных условий на внутренних границах.

Заметим, что возможны различные варианты программной реализации дополнительных слоев и обмена данными между ними. При разработке ОККАМ-программы проанализированы эти варианты и выбран оптимальный по критериям требуемой памяти, быстродействия и простоты реализации алгоритма. Размеры статьи не позволяют рассмотреть эти вопросы детально [20,21].

3. Результаты численного моделирования

Приведенные ниже результаты получены на сетке $70 \times 70 \times 96$ узлов на 32-транспьютерной системе с конвейерной архитектурой ($L=32$). Один шаг интегрирования занимал около 30 с, общее количество шагов — около 700. Эффективность использования транспьютерной системы (отношение достигнутой производительности к потенциально возможной) составляет ~ 0.7 , что для многопроцессорных систем является вполне приемлемым.

На рис. 10 представлены поля изолиний $\rho = \text{const}$ для дву- и трехмерных

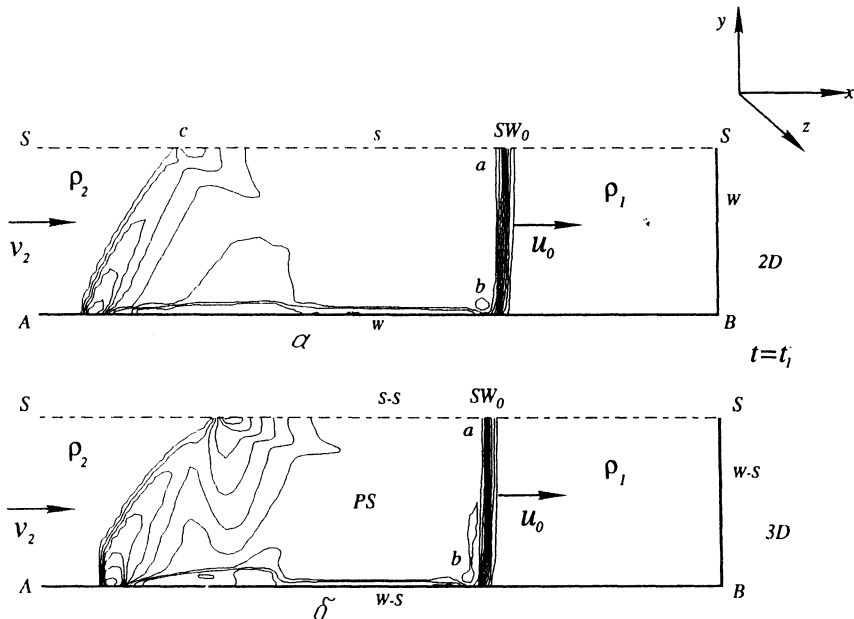


Рис.10. Поля изолиний $\rho = \text{const}$ для двумерных (а) и трехмерных (б) расчетов; ударная волна движется в прямом направлении

расчетов в момент времени, когда ударная волна SW_0 еще движется в прямом направлении к торцу трубы B . В обоих вариантах расчетов видна сходная структура течения. Около входной кромки формируются слабые скачки плотности. Основание фронта ударной волны SW_0 около стенки несколько отстает от основной части фронта (область b) и там наблюдается небольшой подъем давления, которого нет за фронтом волны около плоскости симметрии SS . Это согласуется с результатами работы [22], в которой использованы уравнения Навье-Стокса и где сетка около стенок сгущалась. Аналогичный подъем давления в виде зубца на осциллограмме регистрируют и в физических экспериментах при прохождении фронта ударной волны SW_0 , когда записывают сигнал от датчика давления, вмонтированного в стенку ударной трубы. Часто эту особенность объясняют "дребезгом" измерительной системы. Приведенные результаты позволяют сделать вывод о том, что указанный подъем давления связан с торможением потока на стенке и не является следствием "дребезга".

На рис. 11 показаны поля изолиний $\rho = \text{const}$ в момент времени, когда отраженный фронт ударной волны SW_1 движется обратно. Структуры течения в двух- и трехмерных расчетах качественно похожи. Хорошо видна λ -конфигурация. Отрыв потока от стенки начинается в основании ударной волны SW_s : позади λ -конфигурации формируется система вихрей. Анализ полей скоростей в поперечных плоскостях zOy показывает наличие круговых течений, что позволяет сделать вывод о существовании винтового течения вокруг направления x . Эти детали картины течения хорошо согласуются с экспериментами, представленными в работах [3,11].

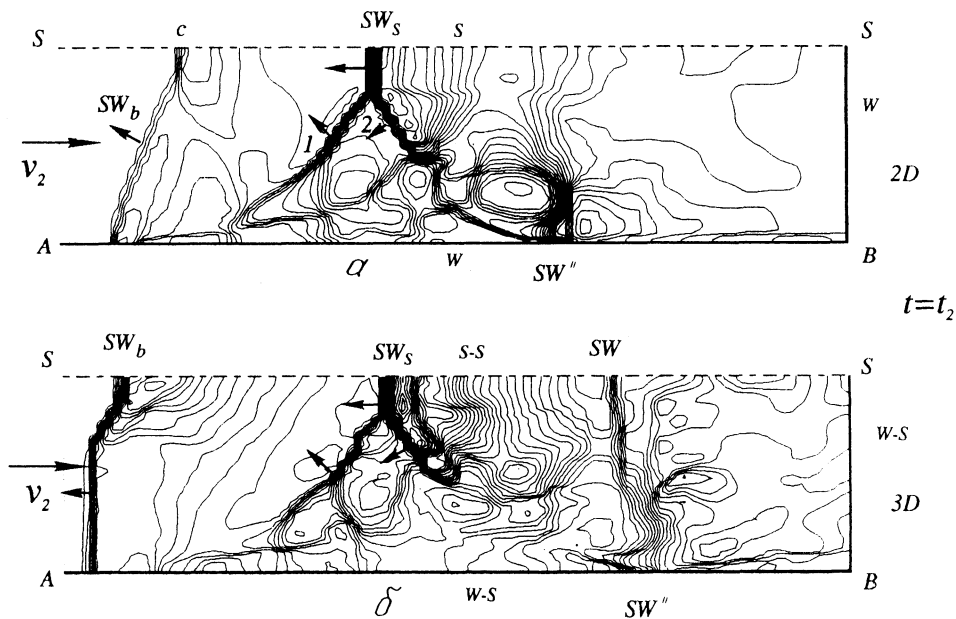


Рис.11. Поля изолиний $\rho = \text{const}$ для двумерных (а) и трехмерных (б) расчетов; отраженный фронт ударной волны движется обратно

Результаты трехмерных расчетов для двух моментов времени представлены на рис. 12. Показаны поля изолиний $\rho = \text{const}$ для стенки и плоскости сим-

метрии. В момент времени $t = t_1$ фронт ударной волны SW движется вдоль линии SS (линии пересечения плоскостей симметрии) без деформаций; вдоль линии AB (линии пересечения плоскости симметрии и стенки) наблюдается небольшое отклонение фронта назад (из-за действия силы трения на стенке); вдоль линии WW (линии стыка двух стенок) мы видим еще большее отставание фронта, поскольку здесь сказывается сила трения на двух стенках (окрестность "с"). В момент времени $t = t_2$, когда обратно движется отраженная от торца трубы ударная волна SW_1 , наблюдается неоднородность параметров в направлении z , вдоль которого предполагается однородность параметров в двумерных расчетах.

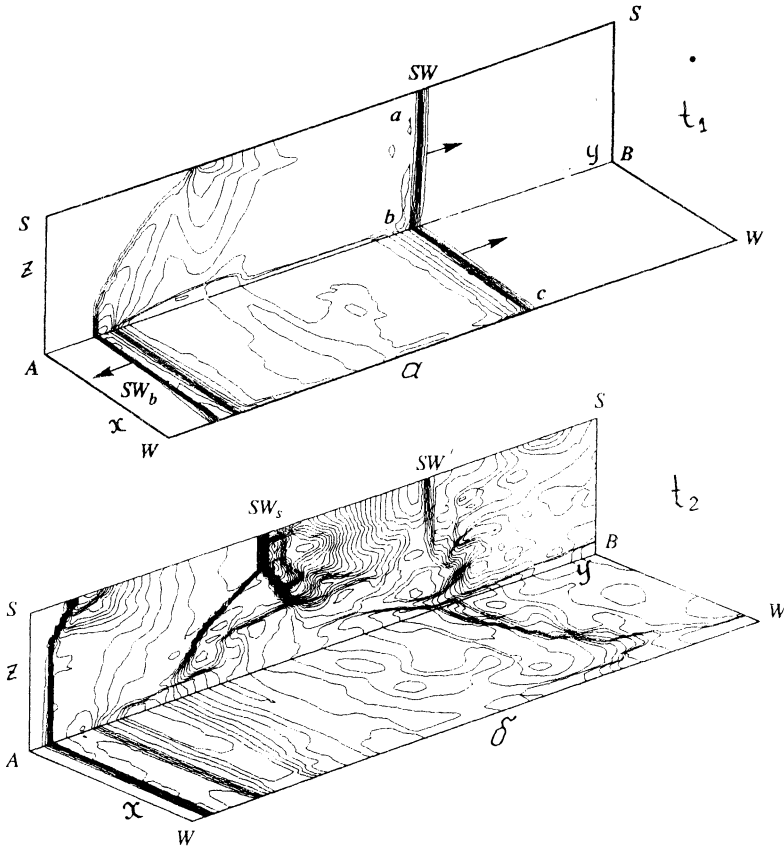


Рис.12. Поля изолиний $\rho = \text{const}$ для стенки и плоскости симметрии: a — фронт ударной волны движется в прямом направлении; b — отраженный фронт ударной волны движется обратно

Картину течения в момент времени $t = t_2$ иллюстрируют также рис.13-15. На рис. 13 показаны поля изолиний на стенке и в плоскости симметрии. На стенке $WABW$ видна неоднородность вдоль направления z (эффект трехмерности). В плоскости симметрии $SABS$ видна λ -конфигурация и впадина волны разрежения позади нее, причем около стенки плотность ниже, поскольку газ

здесь нагрев. На рис.14 приведены для сравнения поверхности $\rho(x,y)$ и поля изолиний $\rho=\text{const}$, полученные в дву- и трехмерных расчетах. Видно, что в трехмерных расчетах пик давления за фронтом ударной волны SW_s выше, а впадина волны разрежения глубже, чем в двухмерных расчетах. Отметим, что для задач внешнего обтекания ситуация иная – амплитуды получаются меньше. Рис.15а,б позволяет сравнить функции $\rho(x)$, $p(x)$ вдоль лучей SS и AB .

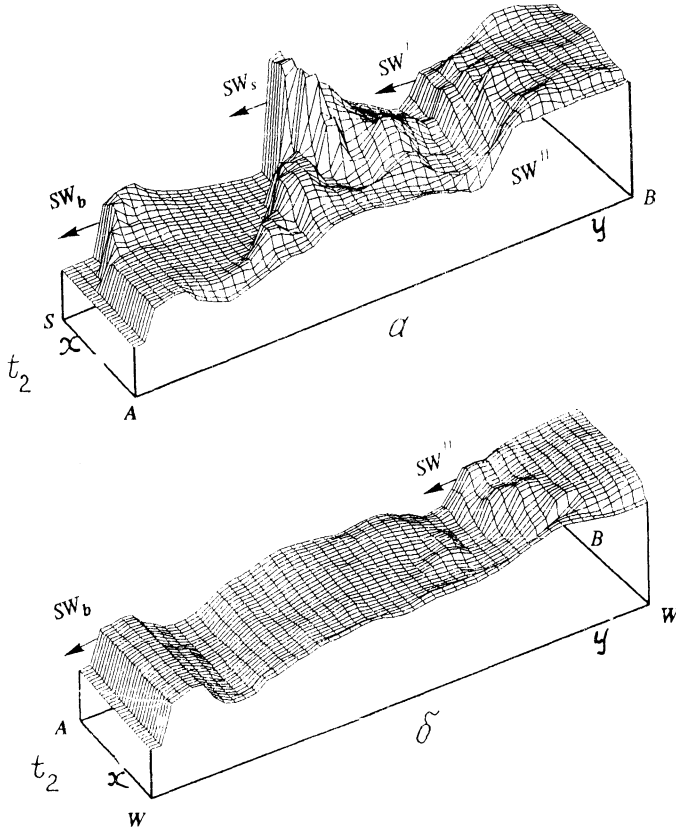


Рис.13. Поля изолиний на стенке (а) и в плоскости симметрии (б); фронт ударной волны движется в прямом направлении

Заключение

Представленные результаты показывают, что *КМЭ* воспроизводит эффект присутствия силы трения на стенке. Благодаря этому местоположение передней границы зоны отрыва потока лучше согласуется с результатами экспериментов, чем в расчетах без задания трения. Аналогичный эффект можно наблюдать, если на прямоугольной расчетной сетке аппроксимировать криволинейную поверхность (например, цилиндра) ломаной и использовать традиционную модель Эйлера с обычным граничным условием непротекания. По-видимому, такая "шероховатая" поверхность уменьшает вблизи себя импульс потока и, тем самым, в каком-то смысле также моделирует трение на стенке.

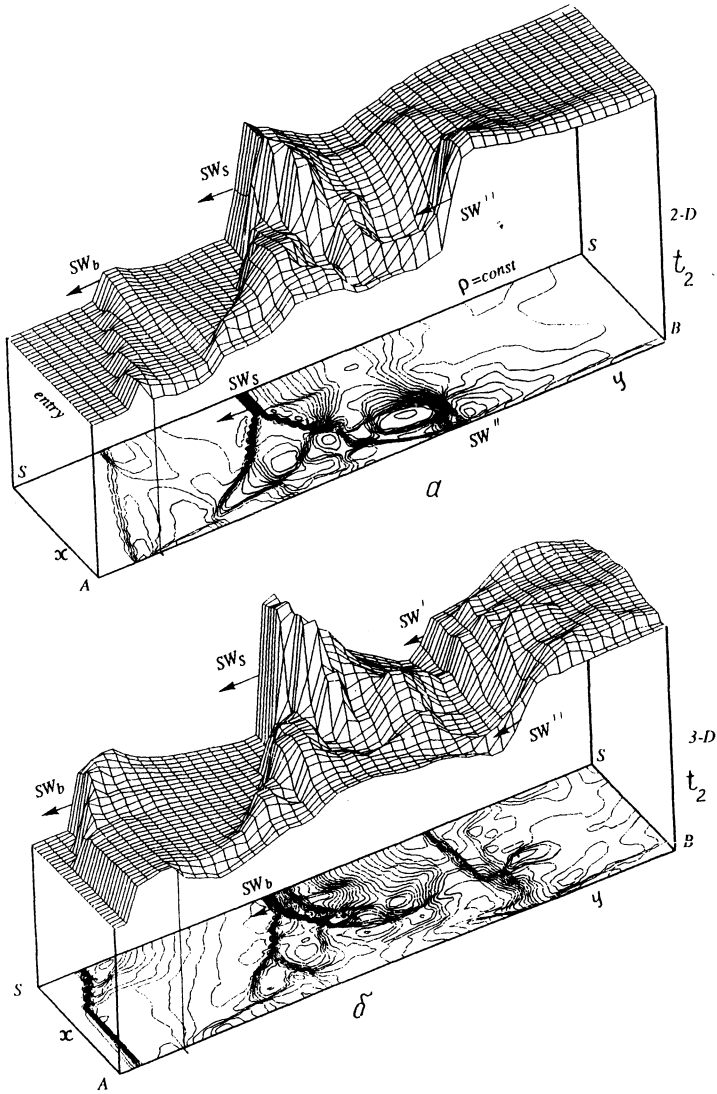


Рис.14. Поверхности $\rho(x,y)$ и поля изолиний $\rho = \text{const}$ для двумерных (а) и трехмерных (б) расчетов

Вычислительные эксперименты с использованием КМЭ позволили выявить далеко неочевидный факт: сила трения на стенке проявляется лишь непосредственно около поверхности тела (2-3 ячейки, масштаб $\cdot \delta \ll \Delta$). Однако из-за действия этой силы (даже в таком узком слое) появляются условия для отрыва потока и возможна перестройка течения в масштабе $\Delta \gg \delta$. Таким образом, не моделируя детально структуру пограничного слоя (по-сути, лишь обозначая его наличие), удастся неплохо воспроизводить наблюдаемые в экспериментах

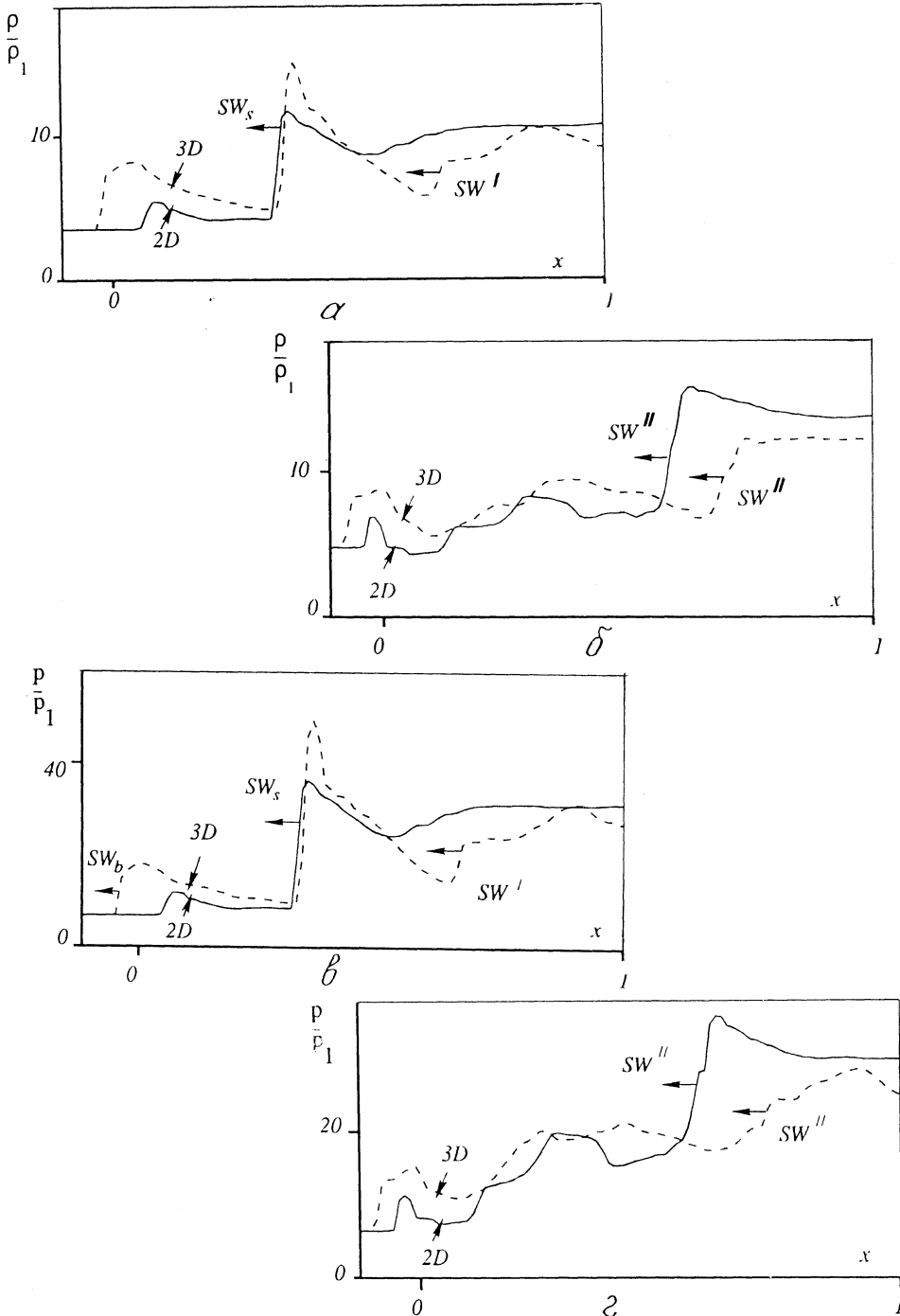


Рис.15. Плотность $\rho(x)$ вдоль луча SS (а) и луча AB (б); давление $p(x)$ вдоль луча SS (в) и луча AB (г)

развитый отрыв потока и формирование λ -конфигурации. Такой прием значительно экономит ресурсы ЭВМ, так как дает возможность не сгущать сетку около поверхности тела и тем самым не уменьшать шаг по времени.

Использование КМЭ позволяет быстро и с относительно небольшими затратами вычислительных ресурсов определять газодинамическую структуру течения. Если газодинамическая обстановка такова, что нет условий для отрыва потока от поверхности тела, то численные решения, полученные с использованием этой модели как с учетом, так и без учета силы трения на стенке, почти совпадают друг с другом. Если же имеются условия для отрыва потока, то решения, полученные при наличии и отсутствии трения, сильно отличаются. В любом случае необходима проверка сходимости решения при разных размерах ячеек расчетной сетки. При использовании КМЭ надо проверять также сходимость решения при разных коэффициентах трения.

В работе [23] также использована, по-видимому, КМЭ. Представлены результаты численного моделирования задачи о бифуркации УВ около стенки со слоем горячего газа. Подчеркивается, что результаты существенно различаются при учете и без учета силы трения на стенке (последний случай фактически означает, что вместо стенки рассматривают плоскость симметрии). На этот вывод следует обратить внимание, так как имеются работы (например, [24]), в которых не делают различий между аналогичными результатами, полученными со слоем горячего газа около стенки с трением или около плоскости симметрии. Анализ результатов [23] показывает, что в этих случаях решения получаются разными, хотя отсутствие сравнения с экспериментами не позволяет сделать окончательные выводы.

КМЭ позволяет получить решения всех вариантов: с учетом или без учета силы трения на стенке, а также независимо от этого с учетом или без учета теплообмена на стенке (например, решение задачи о бифуркации УВ при наличии слоя горячего или холодного газа около стенки или без нее).

На основании опыта использования КМЭ можно заключить, что эта модель является эффективным инструментом для моделирования дву- и трехмерных стационарных и нестационарных течений сжимаемого газа с ударными волнами и развитым отрывом потока от стенки. Модель является предельной, так как вводит силу трения только на стенке. В методическом плане рассматриваемая модель течения является промежуточной между моделями, для описания которых традиционно используют уравнения Навье-Стокса ($Re \lesssim 10^3 - 10^4$) или Рейнольдса и уравнения Эйлера (при $Re \rightarrow \infty$).

Очень важной является следующая особенность решений, полученных с помощью КМЭ. При исключении силы трения на стенке ($\tau_w=0$), что означает уменьшение вязкости у стенки до нуля, граница отрыва потока сдвигается ближе к тыльной стороне цилиндра (рис.4). Казалось бы, если наряду с этим мы будем уменьшать вязкость во всем потоке, то это приведет к сдвигу границы отрыва еще дальше к тыльной стороне цилиндра. Но расчеты показывают обратную тенденцию. Измельчение сетки, а следовательно, и уменьшение аппроксимационной вязкости (согласно [25]) сдвигает границу отрыва против потока, т.е. удаляет ее от тыльной стороны цилиндра ($\theta_-(\Delta\theta)$ на рис.6). Это наблюдается как при учете силы трения, так и без ее учета. В этом смысле численная модель Эйлера приобретает новые черты по сравнению с исходными дифференциальными уравнениями Эйлера из-за неизбежного присутствия численной вязкости, влияние которой не исчезает при измельчении сетки. Получившееся решение единственно и устойчиво, оно сходится к своему предельному

значению (рис.6). Дифференциальные уравнения Эйлера в этой ситуации допускают бесчисленное количество аналитических решений с отрывом струйки тока от поверхности тела [8]. Эти решения однако не реализуются в реальном течении из-за неустойчивости тангенциального разрыва, который вводится в схему течения для моделирования отрыва. Отсюда следует вывод о том, что использование модели Эйлера в численной реализации придает ей новые свойства по сравнению с исходными дифференциальными уравнениями, позволяя получать однозначные решения с отрывом потока от поверхности тела, качественно согласующиеся с реальным течением. А моделирование действия силы трения у поверхности тела позволяет получить и количественное соответствие по полю давления и структуре картины течения. Отмеченная особенность согласуется с высказыванием Н.Н.Яненко [25]: "Как правило, при изучении разностных схем исходным объектом являются дифференциальные уравнения, а разностная схема выступает как алгоритм решения этих уравнений. Однако возможна такая точка зрения, что сама разностная схема есть самостоятельный объект, который описывает некоторое физическое явление безотносительно к какому-либо дифференциальному уравнению...". В этом смысле численная вязкость не досадная ошибка аппроксимации, а необходимое и полезное свойство численной модели в сквозном расчете.

Полное решение рассматриваемых задач означает определение:

- а) газодинамической структуры течения (масштаб Δ),
- б) тепловых потоков и силы трения (масштаб $\delta \ll \Delta$),
- в) границ ламинарного и турбулентного течений и воспроизведение диссипативных свойств турбулентного потока.

Для определения газодинамической структуры течения обычно используют модель Эйлера, при нахождении тепловых потоков и силы трения – модели Навье-Стокса и Рейнольдса. Ресурсов современных ЭВМ недостаточно, чтобы с помощью наиболее общей из этих моделей – модели Навье-Стокса – получить полное решение с учетом всех факторов, перечисленных в начале статьи. Авторы полагают, что наиболее реальный и экономичный путь получения газодинамической картины течения с наличием UV и развитого отрыва потока – это использование $KMЭ$. Полное решение можно получить при совместном или последовательно-итеративном использовании указанных моделей в выделенных соответствующим образом подобластях с применением явных и неявных методов для направлений с большими и малыми шагами соответственно.

От начального момента времени до момента, когда ударная волна SW_0 достигнет закрытого конца трубы B (рис. 7,8), область между волной SW_0 и концом трубы B оказывается не затронутой возмущением. Поэтому можно отказаться от проведения вычислений в этой области. Однако априори не удастся определить положение волны SW_0 в каждый момент времени с требуемой точностью и приемлемыми затратами. С этой целью оказывается удобным использовать диффузный балансер загрузки [26,27]. Время решения задачи в результате уменьшается примерно на 15% (теоретически – на 18%).

Авторы благодарят Белоцерковского О.М., Блохина А.М., Боглаева Ю.П., Борового В.Я., Годунова С.К., Елизарову Т.Г., Желнина В.А., Забродина А.В., Лихачева А.П., Нейландта В.Я., Рослякова Г.С., Черного Г.Г., Чудова Л.А. за плодотворные обсуждения и советы, Баженову Т.В., Гвоздеву Л.Г. за обсуждение результатов при сравнении их с экспериментами, Головачева Ю.П., Левина В.А., Щербака С.Б. за конструктивную критику, коллег по работе Базаро-

ва С.Б., Белова И.В., Резванова Р.Г., Рыжкова А.М., Харитоновна С.М. за участие в проведении расчетов.

Приложение

Для решения рассматриваемых задач иногда рекомендуют использовать уравнения Навье-Стокса или их приближения. Для этих уравнений естественны условия непротекания и прилипания потока, и не надо использовать искусственную процедуру типа антисимметричного переноса. Рассмотрим такой подход в двумерной постановке, используя представление метода конечных объемов.

П.1. Для простоты рассмотрим ячейку расчетной сетки около плоской стенки (рис.16). Выпишем соответствующую систему уравнений Навье-Стокса, отметив в правой части лишь наличие второй производной для касательной к стенке компоненты вектора скорости:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = D = Re^{-1} \left(\dots + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots \right).$$

Здесь Q, F_x, F_y определяются подобно (2.2); для плоскопараллельного течения $w=0$ и $\partial F_z / \partial z = 0$.

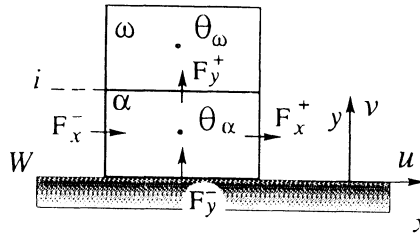


Рис.16. Ячейка расчетной сетки около плоской стенки

Схему вычисления величины Q_α в ячейке α для любого из явных методов можно записать в виде (рис. 16)

$$Q_\alpha^{n+1} = Q_\alpha^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_x^+ - F_x^-)^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (F_y^+ - F_y^-)^n + \Delta t Re^{-1} \left(\dots + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots \right)^n.$$

Поскольку нас интересуют условия на стенке с трением, рассмотрим лишь столбец элементов с параметрами на стенке W :

$$(F_y^-)_w = (0, p_w, 0, 0)^T. \quad (\text{П.1})$$

Отметим, что из-за множителя $v=v_w=0$ такие значения компонент вектора F_y^- на стенке получаются при любых u_w ($u_w=0$ или $u_w \neq 0$). Поэтому существенное значение имеет лишь величина давления на стенке p_w . Отсюда видно, что уравнения Эйлера, в которых источниковый член отсутствует ($D=0$), не могут "чувствовать" граничное условие для касательной компоненты скорости u_w (например, условие прилипания $u_w=0$).

П.2. В уравнениях Навье-Стокса информация о прилипании (т.е. $u_w=0$) входит в член D через вторую производную, например, так:

$$\left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2}\right)_w \rightarrow \frac{\frac{u_w - u_\alpha}{\Delta y} - \frac{u_\alpha - u_w}{\Delta y/2}}{3\Delta y/4} = \frac{4}{3} \frac{u_w - 3u_\alpha}{(\Delta y)^2} \quad (\text{при } u_w=0).$$

Эта информация обесценивается с увеличением числа Рейнольдса (при $Re > 10^5 - 10^6$) по двум причинам. Во-первых, из-за множителя Re^{-1} сила трения, определяемая источником членом D и обусловленная молекулярной вязкостью, становится малой по сравнению с численной вязкостью. Строго говоря источник D соответствует силе трения между двумя слоями жидкости, а не между жидкостью и стенкой. Источник D , построенный на основе закона Ньютона $\tau = \mu u'_y$, не обладает никакой информацией о свойствах стенки (о коэффициенте трения, шероховатости, смачиваемости и т.д.). Во-вторых, реальное течение при больших числах Рейнольдса теряет устойчивость (ламинарность), и в потоке начинают преобладать силы трения, обусловленные турбулентным перемешиванием. Эти силы значительно больше сил трения в ламинарном течении.

Указанные обстоятельства ограничивают применение модели Навье-Стокса, а также так называемых кинетически-согласованных разностных схем [5,18] при больших числах Рейнольдса.

П.3. Для полной постановки граничных условий надо еще задать или определить на стенке величину давления p_w в $(F_y)_w$. Это делается по-разному для уравнений Навье-Стокса и Эйлера.

При использовании уравнений Навье-Стокса иногда полагают, что $p_w = p_\alpha$, т.е. $(\partial p / \partial y)_w \approx 0$.

Это соответствует традиционному представлению о неизменности давления поперек пограничного слоя.

При использовании уравнений Эйлера такое решение дает результаты, не очень хорошо согласующиеся с точными одномерными решениями, например, для задач отражения от стенки волн разрежения или сжатия. Поэтому величину p_w иногда определяют из этих точных решений для невязкого газа, используя лишь нормальную к стенке составляющую вектора скорости v_α [6]:

если поток направлен к стенке,

$$p_w = p_\alpha \left(1 + \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\lambda(1 + \mu + \lambda/4)} \right), \quad \lambda = \frac{M_\alpha^2 \gamma}{1 - \mu}, \quad \mu = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}; \tag{П.2}$$

если поток направлен от стенки,

$$p_w = p_\alpha \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\alpha \right)^{2\gamma/(\gamma - 1)}. \tag{П.3}$$

Здесь

$$M_\alpha = |v_\alpha| / a_\alpha, \quad a_\alpha = \sqrt{\gamma p_\alpha / \rho_\alpha}.$$

Этот способ определения p_w отражает тот физический факт, что в невязком газе стенка эквивалентна плоскости симметрии, через которую газ не протекает, но касательная сила трения τ_w отсутствует. Условия симметрично-го переноса (1.1), (1.2) дают решения, аналогичные (П.2) и (П.3).

Если принять во внимание тот факт, что из-за действия сил трения газ около стенки тормозится не только по нормали к ней, но и в касательном направлении, то для расчета давления p_w формул (П.2), (П.3) окажется недостаточно, и при использовании уравнений Эйлера следует привлекать дополнительные соображения. Например, можно применить какую-либо формулу для вычисления давления торможения [6], используя полный или неполный вектор скорости u_α (способ С-3 из раздела 1.1). В пробных расчетах формула Релея-Пито дала неплохие результаты при использовании методов Мак-Кормака и Годунова. Однако в полном объеме этот вопрос не исследован.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.В. Гогош, Г.Ю. Степанов. Турбулентные отрывные течения. — М.: Наука, 1979, 213 с.
2. В.Я. Боровой. Течение газа и теплообмен в зонах взаимодействия ударных волн с пограничным слоем. — М.: Машиностроение, 1983, 343 с.
3. Г.В. Баженова, Л.Г. Гвоздева и др. Нестационарные взаимодействия ударных и детонационных волн. — М.: Наука, 1986, 206 с.
4. В.А. Черкашин. Определение аэродинамических сил при сверхзвуковом обтекании тела с выступающей иглой. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1986, препр. № 26, 28 с.
5. А.Н. Антонов, Т.Г. Елизарова, А.Н. Павлов, Б.Н. Четверушкин. Прямое численное моделирование колебательных режимов при обтекании тела с иглой. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1988, препр. № 56, 32 с.
6. В.Н. Ляхов, В.В. Подлубный, В.Б. Титаренко. Воздействие ударных волн и струй на элементы конструкций. — М.: Машиностроение, 1989, 352 с.
7. А.Н. Антонов, В.М. Куццов, В.В. Комаров. Пульсации давления при струйных и отрывных течениях. — М.: Машиностроение, 1990, 250 с.
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986, 342 с.
9. О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. Метод крупных частиц в газовой динамике. — М.: Наука, 1982, 391 с.
10. L.G. Gvozdeva, V.N. Lyakhov. Shock wave diffraction near the convex corner apex with strong flow deflection // Analysis of numerical simulation results. Proc. 16-th international symposium on shock tubes and waves. — Aachen, West Germany, 1987, p. 597-603.
11. H. Kleine, V.N. Lyakhov, V. Chistov, L.G. Gvozdeva, H. Groning. Bifurcation of a reflected shock wave in a shock tube // Book of abstracts of 18-th international symposium on shock waves. — Sendai, Japan, 1991, p. 813.
12. В.Н. Ляхов, И.Н. Протасов, И.В. Белов, Р.П. Резванов. Численное моделирование нестационарных течений газа с ударными волнами и развитым отрывом потока от тела // Тезисы докл. Всес. симпозиума "Газодинамика взрывных и ударных волн, детонационного и сверхзвукового горения" — Алма-Ата: 1991, с.96-97.
13. М.Е. Дейч. Техническая газодинамика — М.: Энергия, 1974, 213с.
14. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа — М.: Мир, 1986, 215 с.
15. М.П. Сыщиков, М.К. Березкина, А.Н. Семенов. Формирование течения около модели в ударной трубе // Аэрофизические исследования сверхзвуковых течений. — М. — Л.: Наука, 1967, с. 7-13.
16. И.В. Басаргин, И.М. Дементьев, Г.И. Мишин. Полигон для аэродинамических исследований // Аэрофизические исследования сверхзвуковых течений. — М. — Л.: Наука, 1967, с. 168-178.
17. V. Takano. Simulation for ionizing reflected shock waves in argon in a shock tube // Current topics in shock waves. Proc. 17-th international symposium on shock waves and shock tubes. — Bethlehem, 1989, p. 408-413.
18. Л.В. Дородницын. Численное моделирование расщепления отраженного скачка уплотнения. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1991, препр. № 4, 34 с.
19. G.A. Ohman, T.-E. Malen, P. Kunsela. Numerical fluid flow and heat transfer calculations on multiprocessor systems. — Turku: Abo Akademi, 1988, report 88-3, 46 p.
20. А.П. Карпенко, В.Н. Ляхов, И.Н. Протасов, В.Е. Фортвов. Численное моделирование нестационарного трехмерного течения газа с ударными волнами и отрывом потока. — М.: ИВТАН, 1993, препр. № 2-365, 29с.
21. А.П. Карпенко, В.Н. Ляхов, И.Н. Протасов. Efficiency of transputer system in numerical simulation of a 3-D unsteady fluid dynamics problem. — М.: ИВТАН, 1993, препр. № 8-359, 22p.
22. Ю.М. Липницкий, А.В. Панасенко. Расчет нестационарных вязких течений // Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 167-171.

23. *D. Rayevsky, G. Ben-Dor*. Shock wave interaction with a thermal layer // *AIAA Journal*, 1992, v. 30, № 4, p. 1135-1139.
24. *В.И. Бергельсон, И.В. Немчинов, Т.И. Орлова, В.М. Хазина*. Развитие предвестников, образующихся при взаимодействии ударной волны с газовыми каналами пониженной плотности// *Физика горения и взрыва*, 1990, № 2, с.128-135.
25. *Ю.И. Шокин, Н.Н. Яненко*. Метод дифференциального приближения. – Новосибирск: Наука, 1985, 350 с.
26. *А.П. Карпенко, В.Н. Постнов*. Оценка эффективности диффузного алгоритма балансировки загрузки транспьютерной сети для одной задачи газовой динамики. – М.: ИВТАН, 1991, препр. № 2-320, 28 с.
27. *А.П. Карпенко*. Параметрическое согласование вычислительных алгоритмов с архитектурой многопроцессорных систем. 1.Общий случай. – М.: ИВТАН, 1994, препр. № 2-367, 25 с.

Поступила в редакцию
29.11.94.