

## Пылеакустические волны в неравновесной пылевой плазме

А. В. Филиппов<sup>1)</sup>, А. Н. Старостин, И. М. Ткаченко<sup>+</sup>, В. Е. Фортов\*, Д. Байестер<sup>∇2)</sup>, Л. Конде<sup>□2)</sup>

ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований, 142190 Троицк, Московская обл., Россия

<sup>+</sup> Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, 46022 Valencia, Spain

\* Объединенный институт высоких температур РАН, 127412 Москва, Россия

<sup>∇</sup> School of Mathematics and Physics, Queen's University, BT7 1NN Belfast, UK

<sup>□</sup> Universidad Politécnica de Madrid, 28040 Madrid, Spain

Поступила в редакцию 30 ноября 2009 г.

После переработки 12 апреля 2010 г.

На основе метода моментов, применимого при любых значениях параметра неидеальности пылевой плазмы, и на основе гидродинамического подхода, справедливого только при малых параметрах неидеальности, проведено обобщение теории волн и колебаний комплексной плазмы на случай двухэкспоненциального потенциала взаимодействия. Показано, что при малых параметрах неидеальности гидродинамический подход и подход на основе метода моментов приводят к одному и тому же дисперсионному соотношению. Показано, что скорость пылеакустических волн в длинноволновой области определяется малой постоянной экранирования, а в коротковолновой – большей постоянной. Показано, что в неравновесной плазме скорость пылеакустических волн оказывается значительно выше той, что получается при использовании дебаевской теории экранирования для равновесной плазмы. Также на основе гидродинамического подхода показана важность включения самосогласованного влияния пылевой, электронной и ионной компонент друг на друга, учета стоков электронов и ионов на пылевые частицы, приводящих к заметному изменению параметров потенциала взаимодействия пылевых частиц.

**1. Введение.** Пылевая плазма широко распространена в природе и в технологических плазменных установках. Для ее диагностики сегодня часто используются методы, основанные на исследованиях реакции пылевой компоненты на внешние периодические воздействия. Эти исследования позволяют определить потенциал взаимодействия заряженных пылевых частиц в плазме. Колебания пылевой плазмы вначале рассматривались на основе гидродинамического (ГД) подхода [1], и были получены дисперсионные соотношения для пылеакустических волн (ПАВ). Затем была создана теория пылерешеточных волн (ПРВ) [2] на основе рассмотрения упорядоченных в кристаллическую решетку пылевых частиц. Далее оба подхода интенсивно развивались и уточнялись (подробнее см. обзор [3]), но при этом зарядка пылевых частиц неизменно рассматривалась на основе приближения ограниченных орбит (ПОО), а потенциал взаимодействия полагался дебаевским. В неравновесной плазме, в которой неравновесность создается стоками электронов и ионов на пылевые частицы, а обратные эмиссионные потоки отсутствуют, потенциал взаимодействия пылевых частиц отлича-

ется от дебаевского [4]. Также при повышенных давлениях неприменимо ПОО. Поэтому требуется обобщение теории пылеакустических волн на случай неравновесной пылевой плазмы, чему и посвящена настоящая работа.

**2. Дисперсионное уравнение на основе метода моментов.** ГД подход справедлив только при малых параметрах неидеальности, поэтому необходимо развитие теории колебаний пылевой плазмы при промежуточных и высоких значениях параметра неидеальности. В работе [5] для сильнонеидеальной пылевой плазмы был предложен метод квазилокализованных зарядов, в котором использовался дебаевский потенциал взаимодействия и не учитывались стоки электронов и ионов на пылевые частицы. В настоящей работе теория колебаний пылевой компоненты развивается на основе метода моментов, который свободен от указанных недостатков и, в отличие от подхода, использованного в [5], способен учесть эффекты затухания коллективных процессов.

Как показано в работе [4], в неравновесной плазме при повышенных давлениях потенциал взаимодействия описывается суммой двух потенциалов Юкавы с разными зарядами и постоянными экранирования. Фурье-образ парного потенциала взаимодействия пылевых частиц можно представить в виде

<sup>1)</sup>e-mail: fav@triniti.ru

<sup>2)</sup>D. Ballester, L. Conde.

$$\varphi(k) = \frac{4\pi e^2 Z_d^2}{k^2} \zeta(k), \quad (1)$$

где  $Z_d$  – заряд пылевых частиц в элементарных зарядах  $e$ , функция  $\zeta(k)$  для неэкранированного кулоновского потенциала тождественно равна единице, а в неравновесной плазме имеет вид

$$\zeta(k) = k^2 \left( \frac{\theta_1}{k^2 + k_1^2} + \frac{\theta_2}{k^2 + k_2^2} \right), \quad (2)$$

$k_1$  и  $k_2$  – постоянные экранирования в неравновесной плазме [6, 4], а параметры  $\theta_1$  и  $\theta_2$  равны

$$\theta_1 = \frac{k_d^2 - \kappa_-^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}, \quad \theta_2 = -\frac{k_d^2 - \kappa_-^2 - k_1^2}{k_1^2 - k_2^2}. \quad (3)$$

Здесь  $k_d^2 = k_{de}^2 + k_{di}^2$ ,  $k_{de}^2 = 4\pi e^2 n_0 / T_e$ ,  $k_{di}^2 = 4\pi e^2 n_0 / T_i$ ,  $n_{e0} = n_{i0} = n_0$  – концентрация электронов и ионов в невозмущенной плазме,  $T_e$ ,  $T_i$  – температура электронов и ионов в энергетических единицах,  $\kappa_-^2 = \kappa_e^2 - \kappa_i^2 = -S_- / Z_d$ ,  $\kappa_e^2 = -\tilde{S}_e / Z_d$ ,  $\kappa_i^2 = -\tilde{S}_i / Z_d$ ,  $S_- = \tilde{S}_i - \tilde{S}_e$ ,  $\tilde{S}_\sigma = S_\sigma / D_\sigma$ ,  $D_\sigma$  – коэффициент диффузии заряженных частиц плазмы сорта  $\sigma$  ( $\sigma = e, i$ ),  $S_\sigma$  – стоки плазменных частиц на макро-частицу, которые в стационарном состоянии равны друг другу:  $S_e = S_i \equiv S$ . Отметим, что  $\theta_1 + \theta_2 = 1$ .

Предположим существование диэлектрической функции плазмы,  $\epsilon(k, \omega)$ . Тогда метод моментов позволяет связать характерную частоту слабозатухающей ленгмюровской моды пылевой компоненты в плазме,  $\omega_L(k)$ , с отношением четвертого и второго частотных моментов функции потерь в системе [7]:

$$\omega_L^2(k) = \frac{C_4(k)}{C_2(k)} = \omega_{pd}^2 [\zeta(k) + V(k) + U(k)], \quad (4)$$

где  $\omega_{pd}$  – пылевая плазменная частота:  $\omega_{pd}^2 = 4\pi e^2 Z_d^2 n_{d0} / m_d$ ,  $C_\nu(k) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{\nu-1} \times \text{Im} \epsilon^{-1}(k, \omega) d\omega$ ,  $V(k)$  – власовский вклад в дисперсию,

$$V(k) = \frac{3k^2}{4\pi Z_d^2 e^2 n_d / T_d} \equiv \frac{k^2 c_d^2}{\omega_{pd}^2}, \quad (5)$$

$$U(k) = \frac{1}{2\pi^2 n_d} \int_0^\infty p^2 [S(p) - 1] \sum_{i=1,2} \theta_i f_i(p, k) dp, \quad (6)$$

$S(k)$  – статический структурный фактор пыли,

$$f_i(p, k) = \frac{3}{4} - \frac{p^2}{4k^2} - \left( \frac{k_i^2}{4k^2} + \frac{1}{3} \frac{p^2}{p^2 + k_i^2} \right) + \frac{(p^2 + k_i^2 - k^2)^2}{16pk^3} \ln \left[ \frac{(p+k)^2 + k_i^2}{(p-k)^2 + k_i^2} \right], \quad (7)$$

$n_d$ ,  $T_d$  – концентрация и температура пылевой компоненты,  $m_d$  – масса пылевых частиц,  $c_d^2 = 3T_d/m_d$ .

Дисперсионное уравнение (4) соответствует случаю слабого затухания ПАВ. В случае малого корреляционного вклада, введя столкновения с нейтральными частицами с эффективной частотой  $\nu_d$  (см. ниже), из (4) получим дисперсионное уравнение

$$\omega(\omega + i\nu_d) = k^2 \left[ c_d^2 + \omega_{pd}^2 \left( \frac{\theta_1}{k^2 + k_1^2} + \frac{\theta_2}{k^2 + k_2^2} \right) \right]. \quad (8)$$

На рис.1 представлены зависимости  $\omega_1(k)$ , действительной части частоты, от волнового вектора

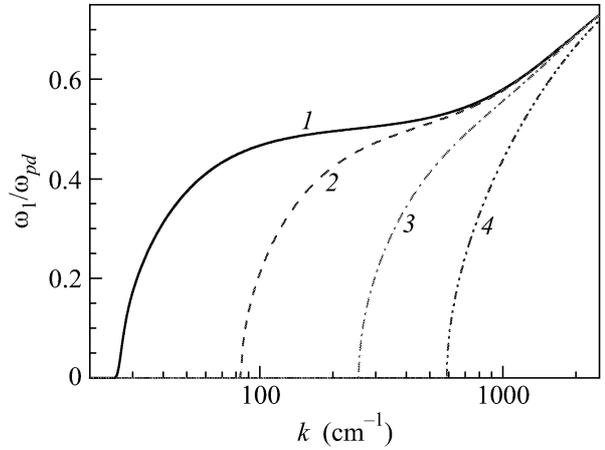


Рис.1. Дисперсионные кривые ПАВ для пылевых частиц с плотностью  $\rho_d = 1.5 \text{ г/см}^3$  при  $n_d = 10^5 \text{ см}^{-3}$ ,  $Q_{\text{ion}} = 10^{15} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $T_e = T_i = 300 \text{ К}$ ,  $R_d = 1 \text{ мкм}$ ,  $k_1 = 2190.31 \text{ см}^{-1}$ ,  $Z_d = 193.37$ ,  $\omega_{pd} = 41.51 \text{ с}^{-1}$ ,  $\nu_d = \omega_{pd}$ ,  $c_d = 0$ : 1 –  $p = 1$  торр,  $k_2 = 26.61 \text{ см}^{-1}$ ,  $\theta_1 = 0.500$ ,  $\theta_2 = 0.500$ ; 2 – 10 торр,  $k_2 = 84.13 \text{ см}^{-1}$ ,  $\theta_1 = 0.499$ ,  $\theta_2 = 0.501$ ; 3 – 100 торр,  $k_2 = 266.07 \text{ см}^{-1}$ ,  $\theta_1 = 0.493$ ,  $\theta_2 = 0.507$ ; 4 – 760 торр,  $k_2 = 733.49 \text{ см}^{-1}$ ,  $\theta_1 = 0.437$ ,  $\theta_2 = 0.563$

в плазме с внешним источником ионизации газа, рассчитанные из дисперсионного уравнения (8). В расчетах задавалось, что частота столкновений пылевых частиц с атомами нейтрального газа (см. ниже) равна плазменной пылевой частоте  $\nu_d = \omega_{pd}$  (при этом условии значение волнового вектора, при достижении которого появляется ненулевое решение  $\omega_1$ , примерно соответствует меньшей из постоянных экранирования). Также полагалось, что  $c_d = 0$ .

Из рис.1 видно, что в области  $k \sim k_2$  частота ПАВ быстро растет с ростом волнового вектора, а затем в области  $k_2 \ll k \ll k_1$  выходит на насыщение. При дальнейшем увеличении волнового вектора в области  $k \sim k_1$  снова начинается рост частоты. Это говорит о том, что при малых значениях волнового векто-

ра групповая скорость пылеакустических волн определяется меньшей постоянной экранирования, а при больших – большей постоянной. Действительно, из (8) в случае сильно отличающихся постоянных экранирования мы получаем, что при  $k \sim k_2 \ll k_1$  групповая скорость определяется соотношением

$$v_{gr} = \frac{d\omega_1}{dk} \approx \frac{\omega_{pd}}{k_2} \frac{\theta_2}{(1 + \lambda_2^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{\theta_2 - \chi(1 + \lambda_2^{-2})}}, \quad (9)$$

а при  $k \sim k_1 \gg k_2$

$$v_{gr} \approx \frac{\omega_{pd}}{k_1} \frac{\theta_1}{(1 + \lambda_1^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{1 - \chi + (\theta_2 - \chi)/\lambda_1^2}}, \quad (10)$$

где  $\lambda_1 = k/k_1$ ,  $\lambda_2 = k/k_2$ ,  $\chi = (\nu_d/2\omega_{pd})^2$ .

Из выражений (9), (10) видно, что при  $k \sim k_2 \ll k_1$  групповая скорость ПАВ определяется меньшей постоянной экранирования и оказывается величиной порядка  $\omega_{pd}/k_2$ , а в области  $k \sim k_1$  – большей постоянной экранирования и является величиной порядка  $\omega_{pd}/k_1$ , что хорошо видно из рис.2, на котором пред-

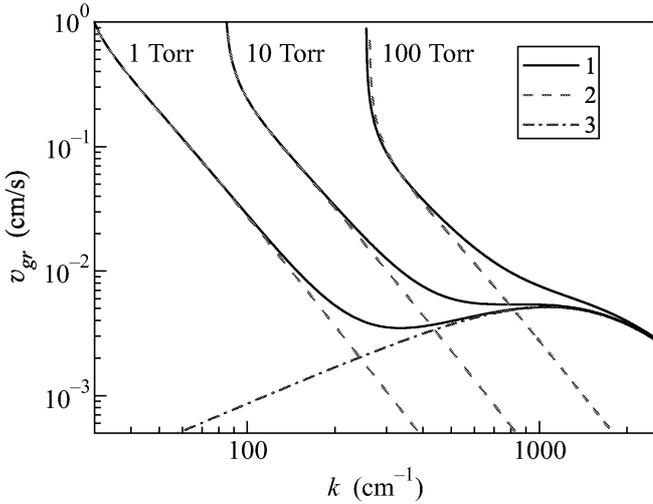


Рис.2. Зависимость групповой скорости ПАВ от волнового вектора (параметры плазмы как на рис.1): 1 – расчет на основе (8), 2 – согласно (9), 3 – согласно (10) (при разных давлениях эти кривые практически совпадали, поэтому приведена кривая только для давления 1 торр)

ставлены зависимости групповой скорости ПАВ от волнового вектора.

Вообще говоря, такая ситуация имеет место только в изотермической или близкой к ней плазме, в которой  $\theta_1 \approx \theta_2 \approx 1/2$ . В неизотермической плазме при  $T_e \gg T_i$  имеет место  $\theta_1 \approx 0$ ,  $\theta_2 \approx 1$  (основная зависимость этих величин от  $T_e$  и  $T_i$  при

$k_1 \gg k_2$  выражается формулами:  $\theta_1 \sim T_i/(T_e + T_i)$ ,  $\theta_2 \sim T_e/(T_e + T_i)$ ), в этом случае групповая скорость будет зависеть только от меньшей постоянной экранирования. В равновесной плазме  $k_1 = k_d$ ,  $k_2 = 0$ ,  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 0$ , поэтому скорость пылевого звука определяется обратной длиной дебаевского экранирования. Поскольку в неравновесной плазме при давлениях около 760 торр и ниже  $k_d \gg k_2$ , то в такой плазме скорость ПАВ будет в  $k_d/k_2 \gg 1$  раз выше, чем в равновесной.

Для верификации теории ПАВ на основе метода моментов продолжим изучение волновых свойств пылевой плазмы в ГД приближении.

**3. Дисперсионное уравнение пылевой плазмы в гидродинамическом приближении.** Уравнение движения пылевой компоненты в ГД приближении имеет вид

$$m_d n_d \frac{d\mathbf{V}_d}{dt} + \nabla p_d + n_d \mathbf{F}_S = e Z_d n_d \mathbf{E}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{V}_d$ ,  $p_d$  – направленная скорость и давление пылевых частиц, соответственно,  $F_S$  – сила Стокса. Силой ионного увлечения в слабоионизованной плазме при повышенных давлениях можно пренебречь. В настоящей работе рассматриваются только колебания с волновым вектором, направленным перпендикулярно направлению силы тяжести, и напряженности электрического поля приэлектродного слоя (электростатическая сила и сила тяжести уравновешивают друг друга). Силу Стокса определим как

$$\mathbf{F}_S = 6\pi\eta_0 \mathcal{K} R_d \mathbf{V}_d,$$

где  $\eta_0$  – динамическая вязкость газа,  $\mathcal{K}$  – поправка Каннингема, учитывающая отклонения от закона Стокса при конечных значениях числа Кнудсена – отношения длины пробега атомов газа к радиусу пылевой частицы  $R_d$ . Эта поправка задавалась согласно [8]. Уравнение (11) дополним уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \nabla (n_d \mathbf{V}_d) = 0. \quad (12)$$

После процедуры линеаризации и перехода к фурье-компонентам, из (11), (12) получим (индексы  $\mathbf{k}\omega$  опускаем):

$$\begin{aligned} -i(\omega + i\nu_d) m_d n_{d0} \mathbf{V}_d + i\mathbf{k} c_s^2 m_d n_{d1} &= e Z_d n_{d0} \mathbf{E}, \\ -i\omega n_{d1} + i n_{d0} \mathbf{k} \mathbf{V}_d &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\nu_d = \frac{6\pi\eta_0 R_d}{m_d}, \quad c_s^2 = \frac{1}{m_d} \frac{\partial p}{\partial n_d}. \quad (14)$$

Здесь и далее величины с индексом "0" относятся к невозмущенным значениям, с индексом "1" – к малым возмущениям ( $\mathbf{V}_d$  и  $\mathbf{E}$  сами являются возмущением, невозмущенные значения которых равны 0).

При определении скорости пылевого звука из второго уравнения (14) нужно иметь в виду, что если характерное время колебаний  $\tau_v = 2\pi\omega^{-1}$  значительно превышает характерное время релаксации энергии пылевых частиц в столкновениях с нейтральным газом, то производная берется при постоянной энтропии, а если реализуется противоположный случай, то при постоянной температуре. Отметим, что ГД и кинетический подходы приводят к разным коэффициентам в формуле, связывающей скорость звука заряженных частиц с температурой (см., например, [9]). Вообще говоря, скорость звука также зависит от параметра неидеальности через зависимость давления от этого параметра, но ввиду малого влияния  $c_s$  на дисперсионные соотношения, мы на этом не будем останавливаться. Поэтому далее для оценок будем использовать формулу кинетической теории согласно (5), то есть положим, что  $c_s = c_d$ .

Для установления дисперсионных соотношений будем исходить из диэлектрической проницаемости пылевой плазмы, для определения которой воспользуемся формулой, связывающей полную плотность тока с диэлектрической проницаемостью [9]:

$$\mathbf{J}_\alpha = -i \frac{\omega}{4\pi} (\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \mathbf{E}_\beta, \quad (15)$$

где  $\mathbf{J}_\alpha$ ,  $\mathbf{E}_\beta$  – компоненты векторов плотности тока и напряженности внешнего электрического поля,  $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера,  $\alpha, \beta = x, y, z$ . Полный ток является суммой электронного, ионного токов и тока заряженных пылевых частиц:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_d.$$

Для определения диэлектрической проницаемости пылевой плазмы с учетом переменности заряда пылевых частиц имеем систему, включающую уравнения (11), (12) и уравнения баланса заряда пылевых частиц, баланса числа электронов и ионов:

$$\begin{aligned} \partial Z_d / \partial t + (\mathbf{V}_d \cdot \nabla) Z_d &= -Z_d (\beta_{di} n_i - \beta_{de} n_e), \\ \partial n_e / \partial t + \nabla (n_e \mathbf{V}_e) &= Q_{\text{ion}} + \nu_{\text{ion}} n_e - \beta_{ei} n_i n_e - \\ &\quad - \beta_{de} |Z_d| n_d n_e, \\ \partial n_i / \partial t + \nabla (n_i \mathbf{V}_i) &= Q_{\text{ion}} + \nu_{\text{ion}} n_e - \beta_{ei} n_i n_e - \\ &\quad - \beta_{di} |Z_d| n_d n_i, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $n_e$ ,  $n_i$  – концентрации электронов и ионов, соответственно,  $\mathbf{j}_e \equiv n_e \mathbf{V}_e = -D_e \nabla n_e - \mu_e n_e \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{j}_i \equiv$

$n_i \mathbf{V}_i = -D_i \nabla n_i + \mu_i n_i \mathbf{E}$ ,  $\mu_e$ ,  $\mu_i$  – подвижности электронов и ионов, соответственно,  $\beta_{de} |Z_d|$ ,  $\beta_{di} |Z_d|$  – коэффициенты рекомбинации электронов и ионов на пылевых частицах,  $Q_{\text{ion}}$  – интенсивность объемной ионизации внешним источником, например, пучком быстрых электронов,  $\nu_{\text{ion}}$  – частота ионизации газа собственными электронами плазмы,  $\beta_{ei}$  – коэффициент электрон-ионной рекомбинации.

Как неоднократно отмечалось ранее (см., например, [10, 11]), коэффициент рекомбинации ионов на пылевых частицах в стационарных условиях близок к ланжевеновскому, поэтому при повышенных давлениях газа положим, что

$$\beta_{di} = 4\pi e \mu_i. \quad (17)$$

Зависимость коэффициента рекомбинации электронов от заряда пылевых частиц зададим согласно аналитической теории зарядки ( $Z_d < 0$ ) [10, 12]:

$$\beta_{de} = 4\pi e \mu_e \exp\left(\frac{Z_d e^2}{T_e R_d}\right). \quad (18)$$

При низких давлениях газа коэффициенты рекомбинации можно задать на основе ПОО, как это делалось, например, в работе [13], в которой исследовалось влияние процесса зарядки на дисперсионные соотношения без учета силы сопротивления нейтрального газа. В стационарном, невозмущенном состоянии  $\mathbf{V}_d = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i = 0$ , а невозмущенные заряд  $Z_{d0}$ , концентрации электронов  $n_{e0}$  и ионов  $n_{i0}$  являются решением системы стационарных уравнений (16) с нулевыми левыми частями. Вообще говоря, невозмущенные значения можно брать из численных расчетов зарядки пылинок, а формулы (17), (18) использовать для вычисления изменений скоростей гибели электронов и ионов на пылевых частицах при изменении параметров плазмы.

После процедуры линеаризации, перехода к фурье-компонентам и несложных преобразований из (16) для возмущений концентрации электронов и ионов находим:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{i1} \\ n_{e1} \end{pmatrix} = \frac{i\mathbf{k}\mathbf{E}}{4\pi e} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= k_{se}^2 + \tilde{S}_e (1 + Z_{d0}\xi) \frac{\gamma_i}{Z_{d0}}, \\ a_{12} &= -i\tilde{\omega}_e + k^2 - k_{ie}^2 + k_{se}^2 \frac{n_{i0}}{n_{e0}} + \\ &\quad + \tilde{S}_e \left[ \frac{n_{d0}}{n_{e0}} - (1 + Z_{d0}\xi) \frac{\gamma_e}{Z_{d0}} \right], \end{aligned}$$

$$b_1 = k_{de}^2 - \frac{\tilde{S}_e \omega_{pd}^2}{Z_{d0} [\omega (\omega + i\nu_d) - k^2 c_s^2]},$$

$$a_{21} = -i\tilde{\omega}_i + k^2 + k_{si}^2 \frac{n_{e0}}{n_{i0}} + \tilde{S}_i \left( \frac{n_{d0}}{n_{i0}} + \frac{\gamma_i}{Z_{d0}} \right),$$

$$a_{22} = -k_{ii}^2 + k_{si}^2 - \tilde{S}_i \frac{\gamma_{de}}{Z_{d0}},$$

$$b_2 = -k_{di}^2 - \frac{\tilde{S}_i \omega_{pd}^2}{Z_{d0} [\omega (\omega + i\nu_d) - k^2 c_s^2]}, \quad \tilde{\omega}_\sigma = \frac{\omega}{D_\sigma},$$

$$k_{s\sigma}^2 = \frac{\beta_{ei} n_{\sigma 0}}{D_\sigma}, \quad \xi = \frac{e^2}{R_d T_e}, \quad \gamma_\sigma = \frac{iS}{\omega + i\nu_{ch}} \frac{n_{d0}}{n_{\sigma 0}}, \quad \sigma = e, i;$$

$$S \equiv S_{e0} = S_{i0}, \quad S_{e0} = -\beta_{de0} Z_{d0} n_{e0}, \quad S_{i0} = -\beta_{di} Z_{d0} n_{i0}.$$

Характерное время зарядки пылевых частиц определяется выражением

$$\nu_{ch} = -\beta_{di} n_{i0} \frac{Z_{d0} e^2}{R_d T_e}.$$

Отметим, что мы изучаем пылеакустические волны, которые бывают только продольными, поэтому в уравнения (13) входят только продольные составляющие волнового вектора и направленной скорости пылевых частиц. С учетом сказанного, из уравнений (13) находим

$$\mathbf{J}_d = e Z_{d0} \mathbf{V}_d n_{d0} = \frac{i\omega \mathbf{E}}{4\pi} \frac{\omega_{pd}^2}{\omega (\omega + i\nu) - k^2 c_s^2}. \quad (20)$$

Используя разность второго и третьего уравнений (16), после линеаризации и перехода к фурье-компонентам для суммы электронной и ионной плотностей тока получаем:

$$\mathbf{k} \mathbf{J}_{ei} = \omega e (n_{i1} - n_{e1} + Z_{d1} n_{d0}). \quad (21)$$

Теперь, отыскав решение системы (19) и подставив его в (21), из (15) получим выражение для продольной диэлектрической проницаемости, приравняв которое нулю окончательно получим дисперсионное уравнение

$$\epsilon_L = 1 - \frac{\omega_{pd}^2}{\omega (\omega + i\nu_d) - k^2 c_s^2} + \frac{(b_1 a_{22} - b_2 a_{12})(1 + \gamma_i) - (b_2 a_{11} - b_1 a_{21})(1 + \gamma_e)}{a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}} = 0. \quad (22)$$

Это уравнение можно рассматривать как кубическое уравнение от переменной  $k^2$ , решение которого дает три дисперсионные кривые  $k(\omega) = k_R(\omega) + ik_I(\omega)$ , либо как уравнение четвертой степени от частоты,

которое, в свою очередь, приводит к четырем дисперсионным кривым  $\omega(k) = \omega_1(k) - i\omega_2(k)$ . Отметим, что задание действительного волнового вектора соответствует задаче о собственных колебаниях плазмы, при этом действительная часть частоты  $\omega_1$  определяет собственную частоту колебаний с заданной пространственной формой, а мнимая часть  $\omega_2$ , в зависимости от знака, определяет затухание или усиление колебаний. А задание действительного значения частоты соответствует задаче о распространении в плазме волн, генерируемых с этой частотой. В этом случае действительная часть волнового вектора определяет фазовую скорость  $v_{ph} = \omega/k_R$ , а мнимая часть  $k_I$ , в зависимости от знака, определяет затухание или усиление волны с расстоянием.

Далее учтем, что как характерное рекомбинационное время электронов и ионов  $\tau_{rec} \approx \sqrt{2\beta_{ei} Q_{ion}}$ , так и характерное время зарядки пылевых частиц  $\tau_{ch} = \nu_{ch}^{-1}$  много меньше обратной плазменной частоты пылевой компоненты, поэтому в коэффициентах  $a_{ij}$  уравнения (22) можно положить  $\omega = 0$ . В этом случае дисперсионное уравнение (22) принимает вид

$$\omega(\omega + i\nu_d) = k^2 \left[ c_s^2 + \omega_{pd}^2 \left( \frac{\bar{\theta}_1}{k^2 + \bar{k}_1^2} + \frac{\bar{\theta}_2}{k^2 + \bar{k}_2^2} \right) \right], \quad (23)$$

где новые постоянные экранирования, дополнительно учитывающие гибель электронов и ионов в плазме на пылевых частицах, определяются соотношением

$$\bar{k}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left( \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4D_\alpha} \right), \quad (24)$$

где

$$\alpha = \alpha_0 + (1 + \gamma_i) (k_{di}^2 - \varkappa_i^2) + (1 + \gamma_e) (k_{de}^2 + \varkappa_e^2),$$

$$\alpha_0 = k_{se}^2 \frac{n_{i0}}{n_{e0}} + k_{si}^2 \frac{n_{e0}}{n_{i0}} - k_{ie}^2 + \varkappa_-^2 + \tilde{S}_i \frac{n_{d0}}{n_{i0}},$$

$$D_\alpha = (1 + \gamma_i) \left[ k_{de}^2 (k_{si}^2 - k_{ii}^2) + k_{di}^2 \left( k_{se}^2 \frac{n_{i0}}{n_{e0}} - k_{ie}^2 \right) \right] +$$

$$+ (1 + \gamma_e) \left( k_{de}^2 k_{si}^2 \frac{n_{e0}}{n_{i0}} + k_{di}^2 k_{se}^2 \right) -$$

$$+ \left[ (1 + \gamma_e) \frac{Z_d n_{d0}}{n_{i0}} + \gamma_i - \gamma_e \right] (k_{de}^2 \varkappa_i^2 + k_{di}^2 \varkappa_e^2).$$

Величины  $\gamma_\sigma$  ( $\sigma = e, i$ ) в рассматриваемом случае становятся действительными:

$$\gamma_\sigma = \frac{S}{\nu_{ch}} \frac{n_{d0}}{n_{\sigma 0}} = \frac{R_d T_e}{e^2} \frac{n_{d0}}{n_{\sigma 0}}.$$

Параметры  $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$  равны:

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\bar{k}_1^2 - \alpha_0}{\bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2}, \quad \bar{\theta}_2 = \frac{\alpha_0 - \bar{k}_2^2}{\bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2}. \quad (25)$$

Дисперсионное уравнение (23) отличается от (8) только переопределенными значениями постоянных экранирования и величин  $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ . Это указывает на то, что процессы гибели электронов и ионов на пылевых частицах меняют потенциал их взаимодействия. Действительно, рассмотрение задачи об экранировании выбранной пылевой частицы подтверждают этот вывод.

В случае малости влияния пылевой компоненты на свойства плазмы, то есть при выполнении условий  $n_d Z_d \ll n_{e0}, n_d Z_d \ll n_{i0}$ , всеми членами, содержащими стоки и параметры  $\gamma_e, \gamma_i$  в (24), (25), можно пренебречь. В этом случае соотношение (24) переходит в выражение для определения постоянных экранирования, приведенное в [6, 4], а (25) перейдет в (3). Следовательно, дисперсионное уравнение (23) в случае малого влияния пылевой компоненты на параметры плазмы перейдет в (8).

**4. Обсуждение.** Численные расчеты показали, что дисперсионные кривые практически не меняются при пренебрежении частотой в членах  $(\omega + i\nu_{ch})$ , поэтому далее все расчеты проведены без учета задержки в изменении заряда пылевых частиц при изменении параметров плазмы. Анализ дисперсионных уравнений (8), (23) показывает, что они имеют решение  $\omega(k)$  с отличной от нуля действительной частью только при выполнении условия  $2\omega_{pd} > \nu_d$ .

На рис.3 приведены дисперсионные кривые коллективных колебаний для условий плазмы в положительном столбе в пылевых экспериментах [14] в аргоне, вычисленные из уравнения (22) относительно  $\omega$ , причем показаны действительная и мнимая части частоты только для решения с наименьшей мнимой частью, то есть с наименьшим затуханием в плазме. Видно, что с коэффициентом трения, вычисленным из выражения (14) для пылевых частиц с плотностью  $1.5 \text{ г/см}^3$  (сделанных из меламинформальдегида – такие частицы широко используются в пылевых экспериментах), мы получаем только мнимые решения, поэтому в плазме несамостоятельного разряда при этих условиях будут наблюдаться только затухающие пылевые волны (см. [3]). Это связано с большим значением коэффициента сопротивления пылевых частиц в аргоне и с сильным экранированием. Но нужно отметить, что сила Стокса соответствует движению уединенной сферической частицы, а для случая коллективного движения пылевых частиц коэффициент  $\nu_d$  может быть и меньше (подробнее см.

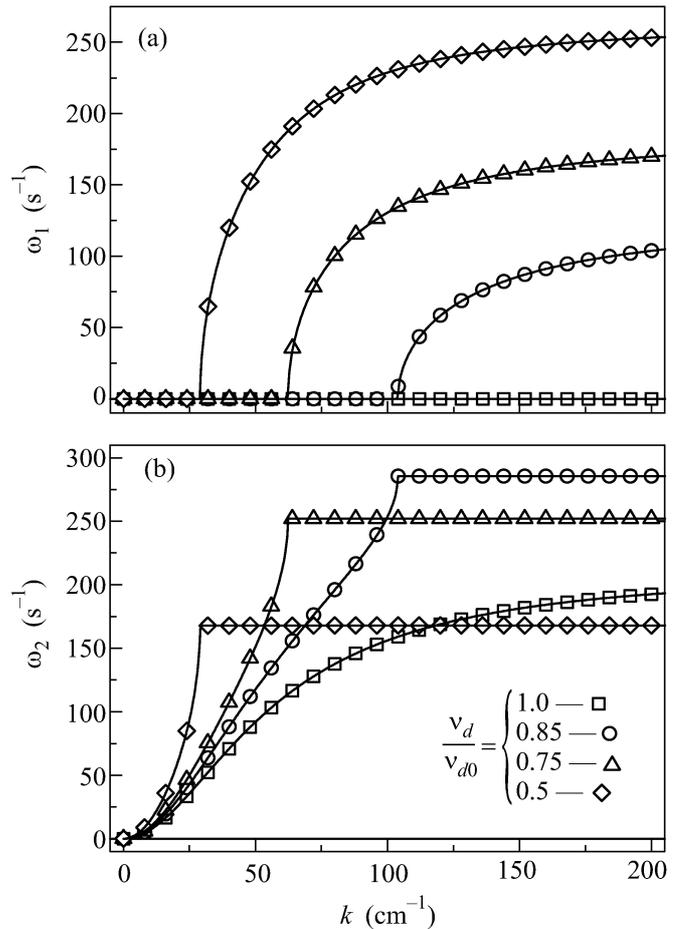


Рис.3. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частоты частоты от волнового вектора в аргоне при  $n_d = 10^5 \text{ см}^{-3}, Q_{\text{ion}} = 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}, T_e = 1 \text{ эВ}, R_d = 10 \text{ мкм} (n_{e0} = 1.123 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}, n_{i0} = 5.717 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}, Z_d = -4.594 \cdot 10^4, \nu_{d0} = 672.1 \text{ с}^{-1}, \omega_{pd} = 311.84 \text{ с}^{-1}, \bar{k}_1 = 850.782 \text{ см}^{-1}, \bar{k}_2 = 45.273 \text{ см}^{-1}, k_d = 633.905 \text{ см}^{-1})$ . Отношения  $\frac{\nu_d}{\nu_{d0}}$  указаны на рисунке. Точки – расчет с учетом производных по времени в уравнениях баланса электронов и ионов в (22), сплошные линии – без учета из уравнения (23)

[8]). Также обратим внимание на то, что коэффициент сопротивления обратно пропорционален массе пылевых частиц и при их заданном размере может быть легко уменьшен на порядок выбором материала пылевых частиц с большей плотностью, например, свинца, золота и т.д.

На рис.3 представлены дисперсионные кривые, полученные с уменьшенными коэффициентами сопротивления. Видно, что при уменьшении значения коэффициента всего на 15% или более появляются решения дисперсионного уравнения с частотой, имеющей действительную часть, поэтому возможно

наблюдение вынужденных колебаний пылевой плазмы. На рис.3 показаны решения уравнения (23) с наименьшей мнимой частью, которые хорошо согласуются с решениями (22), то есть производные по времени от заряда пылевых частиц и концентраций электронов в уравнениях зарядки и баланса не влияют на спектр ПАВ. А пренебрежение влиянием пылевой компоненты на плотность плазмы, то есть замена уравнения (23) на (8) приводит к заметному изменению дисперсионных кривых. Это указывает на важность учета стоков электронов и ионов на пылевые частицы.

На рис.4 приведены зависимости волнового вектора от частоты в аргоне при трех разных давлениях. Видно, что даже при малых частотах нет линейной зависимости  $k_R(\omega)$ . Приведенная на рис.4 кар-

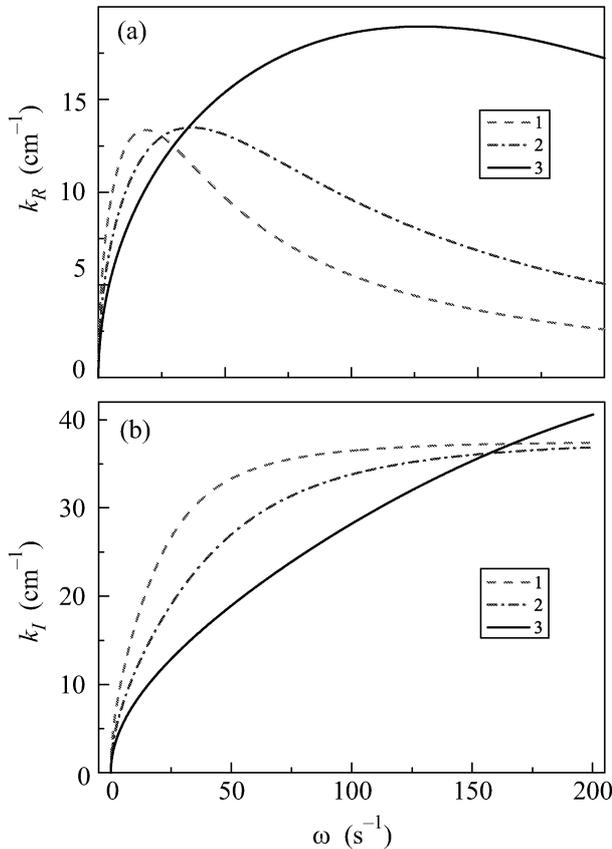


Рис.4. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей волнового вектора от частоты в аргоне для  $\nu_d = 0.85\nu_{d0}$  из дисперсионного уравнения (22): 1 –  $p = 100$  торр,  $\bar{k}_1 = 510.517 \text{ см}^{-1}$ ,  $\bar{k}_2 = 36.689 \text{ см}^{-1}$ ,  $Z_d = -1.8597 \cdot 10^4$ ,  $\omega_{pd} = 126.242 \text{ с}^{-1}$ ,  $\nu_d = 525.953 \text{ с}^{-1}$ ; 2 –  $p = 200$  торр,  $\bar{k}_1 = 607.133 \text{ см}^{-1}$ ,  $\bar{k}_2 = 36.123 \text{ см}^{-1}$ ,  $Z_d = -2.6199 \cdot 10^4$ ,  $\omega_{pd} = 177.845 \text{ с}^{-1}$ ,  $\nu_d = 551.135 \text{ с}^{-1}$ ; 3 –  $p = 760$  торр,  $\bar{k}_1 = 850.782 \text{ см}^{-1}$ ,  $\bar{k}_2 = 45.273 \text{ см}^{-1}$ ,  $Z_d = -4.5938 \cdot 10^4$ ,  $\omega_{pd} = 311.836 \text{ с}^{-1}$ ,  $\nu_d = 571.290 \text{ с}^{-1}$

тина похожа на экспериментальные результаты [15]: 1) имеется максимум на кривых  $k_R(\omega)$ , причем положение максимума сдвигается в сторону меньших частот с уменьшением давления, как и в [15]; 2) кривые  $k_I(\omega)$  с ростом частоты выходят на насыщение, а значения мнимых частей волнового вектора превышают значения действительных частей.

**Заключение.** В настоящей работе впервые развита теория пылеакустических волн в неравновесной пылевой плазме с учетом двухэкспоненциального вида потенциала взаимодействия пылевых частиц. Это привело к появлению новых закономерностей в поведении ПАВ, которые не описываются известными теориями. Показано, что теория колебаний и пылеакустических волн в пылевой плазме на основе гидродинамического подхода и на основе метода моментов при малых параметрах неидеальности приводят к одному и тому же дисперсионному соотношению. Установлено, что учет влияния пылевой компоненты на свойства плазмы приводит к заметному изменению параметров потенциала взаимодействия пылевых частиц, но вид дисперсионного уравнения для пылеакустических волн при этом остается неизменным. Нужно отметить, что двухэкспоненциальный вид потенциала взаимодействия получен в рамках модели ячеек Зейтца-Вигнера, поэтому в случае сильного влияния пылевой компоненты на свойства пылевой плазмы эта модель требует уточнения.

Настоящая работа выполнена при поддержке Роснауки (ГК # 02.740.11.5096, грант # НШ-3239.2010.2) и Министерства образования и науки Испании (проект №ENE2007-67406-C01&C02/FTN).

1. N. N. Rao, P. K. Shukla, and M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
2. F. Melandsø, *Phys. Plasmas* **3**, 3890 (1996).
3. P. K. Shukla and B. Eliasson, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 25 (2009)
4. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот и др., *ЖЭТФ* **132**, 949 (2007).
5. G. Kalman, M. Rosenberg, and H. E. DeWitt, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 6030 (2000).
6. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот и др., *ЖЭТФ* **131**, 164 (2007).
7. I. М. Tkachenko, *Book of Abstracts of the Int. Conf. Operator Theory and Applications in Mathematical Physics*, Bedlewo, Poland, 2002, p. 20.
8. P. C. Reist, *Aerosol Science and Technology*, New York, McGraw-Hill, Inc., 2nd Ed., 1993, p.68.

9. В. Д. Шафранов, *Электромагнитные волны в плазме*. Сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. М.А. Леонтовича, М.: Госатомиздат, 1963, т.3, с.3–140.
10. А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. В. Филиппов, *Физика плазмы* **27**, 155 (2001).
11. А. Ф. Паль, А. О. Серов, А. Н. Старостин и др., *ЖЭТФ* **119**, 271 (2001).
12. И. А. Белов, А. С. Иванов, Д. А. Иванов и др., *ЖЭТФ* **117**, 105 (2000).
13. N. N. Rao, *Phys. Plasmas* **6**, 4414 (1999).
14. А. В. Филиппов, В. Н. Бабичев, Н. А. Дятко и др., *ЖЭТФ* **129**, 386 (2006).
15. J. V. Pieper, J. Goree, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3137 (1996).