

Устойчивость и неоднозначное представление ударноволнового разрыва в термодинамически неидеальных средах

А. В. Конюхов, А. П. Лихачев¹⁾, В. Е. Фортов, С. И. Анисимов*, А. М. Опарин⁺

Объединенный институт высоких температур РАН, 125412 Москва, Россия

*Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Московская обл., Россия

⁺Институт автоматизации проектирования РАН, 123056 Москва, Россия

Поступила в редакцию 8 мая 2009 г.

Проводится нелинейный анализ поведения ударной волны на фрагменте ударной адиабаты, допускающем неоднозначное представление ударноволнового разрыва. Рассматриваемый фрагмент включает участок, на котором выполняется условие $L > 1 + 2M$ – один из полученных в линейном приближении критериев неустойчивости ударной волны в средах с произвольным уравнением состояния. Расчеты в модели вязкого теплопроводящего газа показали, что решения с неустойчивой ударной волной не реализуются. В одномерной модели ударная волна распадается на две ударные волны или ударную волну и волну разрежения, распространяющиеся в противоположных направлениях, либо (в области устойчивости) может остаться в исходном состоянии. Выбор решения зависит от параметров ударной волны (положения на ударной адиабате), а также формы и интенсивности ее возмущения. В многомерных 2D и 3D расчетах с периодическим возмущением ударной волны на ее фронте формируется “ячеистая” структура с конечной по величине амплитудой возмущений, не убывающей и не растущей во времени. Такое поведение ударной волны обусловлено возникновением на наклонных участках возмущенной ударной волны тройных конфигураций, взаимодействующих друг с другом в процессе распространения вдоль ее фронта.

PACS: 47.40.–x, 64.10.+h

Введение. В [1] был проведен линейный анализ устойчивости плоской ударной волны (УВ) относительно малых двумерных возмущений ее фронта для сред с произвольным уравнением состояния. В работе было показано, что в рамках используемой постановки возможны три варианта эволюции возмущенной УВ, и были получены условия, при которых эти варианты реализуются:

$$\text{абсолютная устойчивость} - -1 < L < L_A, \quad (1)$$

$$\text{нейтральная устойчивость} - L_A < L < 1 + 2M, \quad (2)$$

$$\text{неустойчивость} - \begin{cases} L < -1 & (3a) \\ L > 1 + 2M^2 & (3б) \end{cases}$$

Те же результаты были получены в работах [3–5], отличавшихся от [1] особенностями линеаризованной постановки и/или используемого математического аппарата. В работе [1] была выявлена принципиаль-

ная роль термодинамической неидеальности среды в проблеме устойчивости ударной волны (напомним, что в идеальном газе плоская УВ абсолютно устойчива всегда [6]).

Позже (см., в частности, [7–11]) было обнаружено, что участки УА, на которых, в соответствии с [1], УВ является неустойчивой, перекрываются участками с неоднозначным представлением ударноволнового разрыва. В этой связи в [11] было высказано предположение, что в реальных условиях неустойчивость УВ не реализуется в силу ее необратимого распада на некоторую совокупность волновых элементов. Допустимые схемы расщепления исходной УВ для каждого из двух условий ее неустойчивости приведены в обзоре [12].

К настоящему времени наиболее полно исследовано поведение УВ при выполнении условия (3а). Это условие отвечает перегибу (в предельном случае – излому) на УА при отрицательном наклоне касательной $(\partial p / \partial V)_H$ и выполняется в реальных веществах в области фазового перехода 1-го рода или при переходе из упругого состояния в пластическое [13]. Из этого условия непосредственно следует, что число Маха в потоке за фронтом УВ (в связанной с ней системе координат) $M > 1$, и, следовательно, на-

¹⁾e-mail: apl@ihed.ras.ru

²⁾Использованы следующие обозначения: $L = j^2(\partial V / \partial p)_H$ – введенный в [1] параметр устойчивости УВ, j – плотность потока вещества через поверхность УВ, индекс H означает дифференцирование вдоль ударной адиабаты (УА), M – число Маха за фронтом УВ в связанной с ней системе координат, θ – степень сжатия вещества в УВ, точное выражение для границы области нейтральной устойчивости $L_A = (1 - M^2 - \theta M^2) / (1 - M^2 + \theta M^2)$ было получено в [2].

рушается одно из условий эволюционности УВ [14]. Более того, в начале участка УА с $L < -1$ производная $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ отрицательна, то есть существование ударных волн сжатия с конечным состоянием в этой области невозможно. Очевидно, что такая УВ, возникнув по естественным причинам или будучи созданной искусственно, должна мгновенно распасться. Сложнее прогнозировать поведение УВ в области неоднозначного представления, выходящей за пределы участка $L < -1$ в сторону больших давлений, на котором выбор между исходной УВ и распадной конфигурацией не связан с термодинамическими ограничениями. Эксперименты, проведенные в основном для УА с изломом [13], и численные расчеты [15–18] показывают, что выбирается именно распадное решение, представляющее собой, по терминологии [19], комбинированную волну сжатия (КВС). Если УА является гладкой, а конечное состояние исходной УВ находится в области термодинамической аномальности $(\partial^2 p / \partial V^2)_S < 0$, то при распаде формируется неполная КВС, состоящая из УВ, отвечающей начальной точке участка неустойчивости (3а), и примыкающей к ней изэнтропической (“расходящейся”) волны сжатия. При выходе из этой области формируется вторая (замыкающая) УВ, движущаяся в том же направлении, что и первая, но с большей скоростью (полная КВС). В случае УА с изломом участок $L < -1$ стягивается в точку, а волна сжатия вырождается в участок однородного течения (так называемая двухволновая структура) [12, 13, 17]. С приближением к границе участка неоднозначности скорости ударных волн в КВС выравниваются, и за ее пределами может существовать только исходная УВ.

Хотя выполнение второго условия неустойчивости УВ $L > 1 + 2M$ не сталкивается с принципиальными термодинамическими ограничениями, примеров его выполнения в реальных средах пока не найдено (есть основания полагать, что оно может реализоваться в пористых средах типа аэрогелей). В то же время изучение поведения УВ в области ее неоднозначности, включающей участок УА с $L > 1 + 2M$, представляет безусловный фундаментальный интерес как часть проблемы устойчивости плоской УВ и может быть полезно для идентификации этого явления при его реализации в будущих экспериментах.

1. Построить УА с участком, удовлетворяющим условию (3б), позволяет модельное уравнение состояния [15], но при его использовании в расчетах возникают вычислительные проблемы. В данной работе для анализа поведения УВ используется модификация этого уравнения состояния в виде

$$e(p, V) = (1 - \exp(-p^2) + \varepsilon V p^2)(4 - \exp(-(4 - V)^2)), \quad (4)$$

позволяющая в известной степени преодолеть упомянутые трудности (ε – малый положительный параметр, варьирование которого позволяет моделировать S -образный изгиб ударной адиабаты (в переменных $p - u$) и изменять протяженность участка $L > 1 + 2M$).

В последующем анализе рассматривается ударная адиабата с координатами начальной точки $p_0 = 0.1$, $V_0 = 5.49$, построенная на основе (4) при $\varepsilon = 10^{-3}$ (рис.1). На участке EF выполняется условие (3б) не-

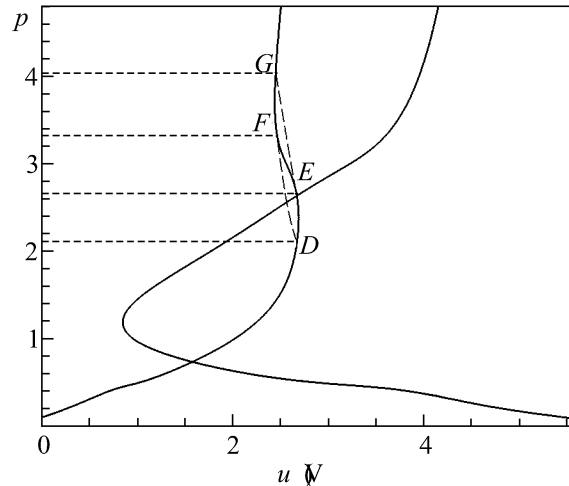


Рис.1. Ударная адиабата с координатами начальной точки $p_0 = 0.1$, $V_0 = 5.49$, построенная в $p-V$ и $p-u$ координатах на основе УРС (4) при $\varepsilon = 10^{-3}$

устойчивости ударной волны по отношению к малым периодическим возмущениям. На границах этого участка $L = 1 + 2M$, из чего следует, что $(\partial u / \partial p)_H = (\partial u / \partial p)_S$, то есть точки E и F являются точками касания УА и соответствующих адиабат Пуассона. Точка D характеризуется тем, что проведенная из нее ударная адиабата (на рисунке показана пунктиром) касается исходной УА в точке F . Адиабата Пуассона, касающаяся исходной ударной адиабаты в точке E , пересекает ее в точке G . Следует отметить, что ударные адиабаты, имеющие начальные точки на участке DG , и изэнтропы в этой области геометрически близки, поэтому ударная адиабата, выходящая из точки E , пересекает исходную ударную адиабату в окрестности точки G , а изэнтропа, проходящая через точку F , пересекает исходную ударную адиабату вблизи точки D .

Из анализа пересечений вторичных ударных адиабат и изэнтроп с рассматриваемой УА следует, что внутри фрагмента ударной адиабаты DG , включа-

ющего в себя участок EF неустойчивости $УВ$ $L > > 1 + 2M$, решение задачи об ударноволновом разрыве является неоднозначным и, кроме одиночной $УВ$, может быть представлено в виде $\overleftarrow{ST\overrightarrow{S}}$ на участке DE , $\overleftarrow{ST\overrightarrow{S}}$ или $\overleftarrow{ST\overrightarrow{R}}$ на участке EF и $\overleftarrow{ST\overrightarrow{R}}$ на участке FG (здесь S – ударная волна, T – контактный разрыв, R – волна разрежения, стрелкой указано направление движения волны относительно контактного разрыва).

2. Вопрос о реализуемости того или иного варианта решения в области его неединственности исследовался численно в рамках модели вязкого теплопроводящего газа с использованием уравнения состояния (4). Задача решалась в безразмерном виде в 1D, 2D и 3D постановках. Тензор вязких напряжений и плотность теплового потока определялись выражениями

$$\tau = \frac{1}{Re} \left(\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right), \quad (5)$$

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{RePr} \nabla i, \quad (6)$$

где i – энтальпия. В (5) пренебрегается второй вязкостью, модельный характер выражения (6) связан с калорическим видом УРС (4).

Для определения невязких потоков через границы ячейки использовалась TVD схема второго порядка точности с разностями против потока, построенная на основе [20] с расширением [21] на случай произвольного уравнения состояния. Аппроксимация членов уравнений, связанных с учетом вязкости и теплопроводности, проводилась в рамках стандартной симметричной схемы второго порядка точности. Введение физической диффузии и диссипации позволяет в известной степени подавить влияние на решение численных эффектов, связанных с перемещением $УВ$ по сетке, но не определяет, как отмечалось в [22], выбор той или иной волновой конфигурации в области неединственности решения. В расчетах вне зависимости от размерности задачи использовались сетки с постоянным шагом h . Величина шага $h = 0.002$ и сеточное число Рейнольдса $Re_h = 3.5$ выбирались из условия разрешения структуры $УВ$ (не менее 10 шагов сетки), число Прандтля Pr полагалось равным 1.

3. В рамках одномерной постановки рассмотрены две задачи о поведении ударноволнового разрыва в области его неоднозначного представления, отличающиеся видом задаваемого возмущения. В первой из них начальные условия имели следующий вид:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (\rho_0, u_0, p_0), & x \leq -\delta \\ (\rho_1, u_1, p_1), & x \geq \delta \end{cases}, \quad (7)$$

где параметры с индексами “0” и “1” отвечают соотношениям Гюгонио. $УВ$ движется по неподвижной среде в отрицательном направлении оси x . На интервале $-\delta < x < \delta$ задается гладкое монотонное сглаживание разрыва, которое можно рассматривать как слабое структурное возмущение фронта $УВ$ в начальный момент времени. Величина δ задавалась равной 10^{-2} (пять шагов сетки). На входной и выходной границах расчетной области задавались неотражающие граничные условия.

Результаты проведенных в этой постановке параметрических расчетов представлены на рис.2, на

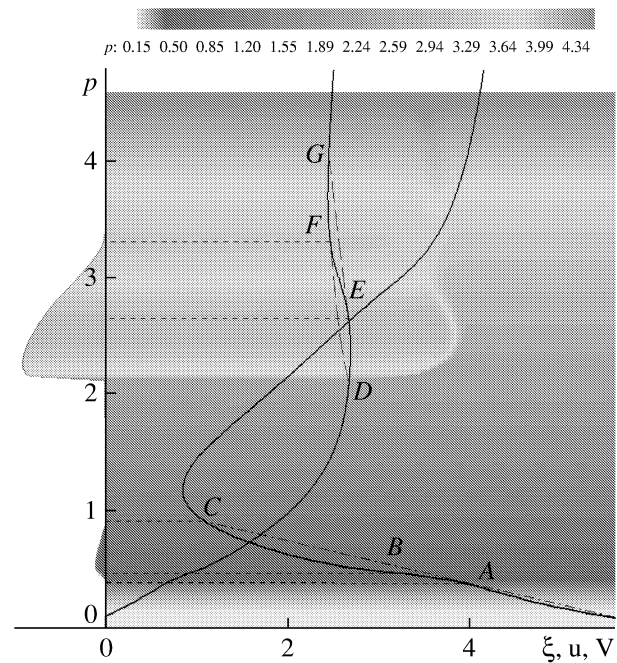


Рис.2. Результаты параметрических одномерных расчетов при слабом структурном возмущении фронта $УВ$

котором показаны автомодельные решения для давления в различных точках ударной адиабаты. По оси абсцисс отложена автомодельная координата $\xi = x/Dt$, где D – скорость распространения невозмущенной $УВ$ относительно неподвижной среды. По оси ординат отложено давление за фронтом ударной волны. Значение давления в поле течения показано цветом в соответствии с прилагаемой цветовой шкалой. На рис.3 представлены результаты индивидуальных расчетов при разных интенсивностях исходной $УВ$.

Видно, что на участке DF реализуется распад исходного $УВ$ разрыва с образованием двух расходящихся ударных волн (интересно, что в цитируемом в [22] частном сообщении Вэндрофа именно эта кон-

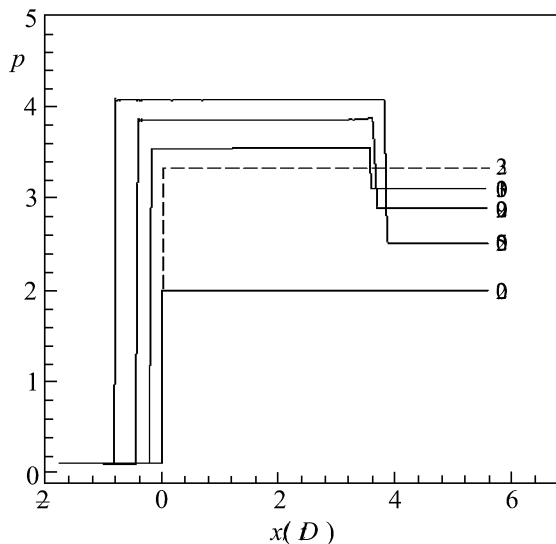


Рис.3. Результаты индивидуальных одномерных расчетов при слабом структурном возмущении фронта УВ

фигурация полагается более вероятной). На участке FG УВ не распадается и остается устойчивой.

Во второй из рассмотренных одномерных задач начальные условия отличались от описанных выше слабым, но конечным возмущением параметров за УВ, задаваемым в виде приходящей на фронт УВ со стороны ударно сжатого газа слабой волны сжатия или разрежения:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (\rho_0, u_0, p_0), & x \leq -\delta \\ (\rho_1 + \Delta\rho, u_1 + \Delta u, p_1 + \Delta p), & x \geq \delta \end{cases}.$$

Задаваемое возмущение давления $|\Delta p/p_1| \leq 0.05$, возмущения плотности и скорости определялись в акустическом приближении: $\Delta\rho = \Delta p/c_1^2$, $\Delta u = -\Delta p/\rho_1 c_1 - 1$, где c_1 – изэнтропическая скорость звука за фронтом невозмущенной ударной волны.

Полученные результаты представлены на рис.4. При $\Delta p > 0$ решение имеет тот же вид, что и в рассмотренном выше случае: УВ распадается на участке DF с образованием конфигурации $\overleftarrow{S}T\overrightarrow{S}$ и остается неизменной на участке FG (рис.4а, б). При $\Delta p < 0$ внутри интервала EG УВ расщепляется на расходящиеся ударную волну и волну разрежения (рис.4б, в), а на участке DE распад не происходит (рис.4а). Штриховая линия соответствует исходной УВ, отклонение сплошных кривых от штриховой линии характеризует интенсивность возмущения.

Из полученных результатов следует, что коэффициент отражения приходящих на ударную волну со стороны сжатого вещества конечных возмущений положителен, включая и диапазон $L > 1 + 2M$. Это находится в противоречии с результатами линейной те-

ории [1, 2], согласно которой коэффициент отражения акустических волн, падающих нормально на поверхность УВ, должен быть в данном диапазоне отрицателен (см., например, [12]). Несоответствие связано с тем, что из трех возможных решений задачи о распаде разрыва реализуется не исходная УВ, как подразумевается в линейной теории, а одно из двух других альтернативных решений. Волна сжатия отражается волной сжатия с переходом точки, соответствующей исходной УВ, на участок FG , волна разрежения отражается волной разрежения с переходом на участок DE . И в первом, и во втором случаях коэффициент отражения много больше единицы, и решения можно интерпретировать как вынужденный распад УВ, инициированный приходящим на ударную волну конечным возмущением. Следует отметить, что большие значения коэффициента отражения делают принципиально возможными одномерные колебания параметров УВ с поочередным переходом ударной волны с нижнего устойчивого участка DE на верхний FG и обратно при наличии за фронтом УВ отражающей поверхности, в частности, поршня. Однако, как будет показано ниже, такие переходы могут быть связаны не только с нормальными, но и с поперечными волнами, распространяющимися вдоль поверхности УВ со стороны сжатого вещества.

4. Рассмотрим поведение ударной волны в области ее неоднозначного представления в дву- и трехмерной постановках. Начальные условия задачи задавались в следующем виде:

$$(\rho, \mathbf{v}, p) = \begin{cases} (\rho_0, \mathbf{v}_0, p_0), & x \leq \xi - \delta \\ (\rho_1, \mathbf{v}_1, p_1), & x > \xi + \delta \end{cases}, \quad (8)$$

где ξ – пространственное возмущение фронта УВ, задаваемое как периодическая функция поперечных координат: $\xi = \xi(y) = A \cos(2\pi y)$ (двухмерная постановка) или $\xi = \xi(y, z) = A \cos(2\pi y) \cos(2\pi z)$ (трехмерная постановка), амплитуда возмущения $A = 0.02$. Как и в одномерном случае, на интервале $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ разрыв сглаживался гладкой монотонной функцией. На входной и выходной границах расчетной области задавались неотражающие граничные условия, на боковых границах – периодические. Расчеты проводились в прямоугольной расчетной области, определенное по длине периода число Рейнольдса $Re_\lambda = 1750$. Пример решения показан на рис.5, 6. Параметры УВ соответствуют точке на ударной адиабате, расположенной на участке DE в области неоднозначного представления ударноволнового разрыва с теоретической возможностью распада на две расходящиеся ударные волны.

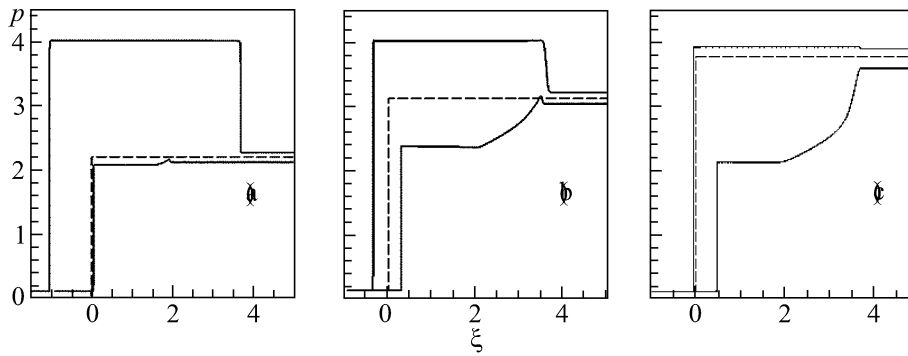


Рис.4. Результаты одномерных расчетов при возмущении параметров за УВ. Штриховая линия соответствует исходной УВ, отклонение сплошных кривых от штриховой линии характеризует интенсивность возмущения

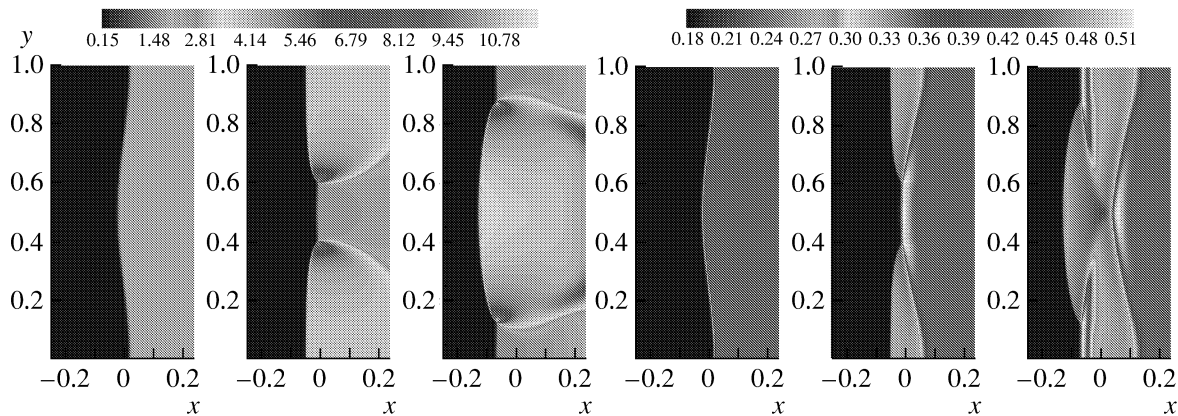


Рис.5. Начальная стадия двухмерного решения при периодическом возмущении фронта УВ: слева – в терминах давления, справа – в терминах плотности

На рис.5 показана начальная стадия решения (слева – в терминах давления, справа – в терминах плотности). В точках вогнутости фронта (по отношению к направлению распространения ударной волны) под действием приходящих от соседних участков фронта слабых возмущений начинается расщепление УВ фронта на конфигурацию $\overleftarrow{S}T\overrightarrow{S}$, диагностируемое по повышению давления за фронтом УВ до значений, соответствующих участку FG .

На участках выпуклости фронта, куда приходят слабые волны разрежения, расщепление на начальном этапе не наблюдается. В результате формируются поперечные волны, распространяющиеся вдоль фронта УВ со стороны ударно сжатого вещества. В узловой точке трехволновой конфигурации происходит скачкообразное “переключение” локальных параметров за фронтом УВ с участка DE на участок FG , мнущая диапазон $L > 1 + 2M$. В тыловой части поперечных волн, которым соответствуют выпуклые участки фронта, наблюдается обратный переход, в результате которого локальные параметры УВ принимают значения, близкие к нижней границе неоднозначно-

го представления разрыва. Интенсивность поперечных волн с течением времени монотонно возрастает, достигая насыщения за время, равное нескольким циклам колебаний (рис.6: слева – давление, справа – плотность).

Обнаруженный автоколебательный режим УВ характеризуется тем, что является периодическим, незатухающим, и имеет конечную амплитуду изменения параметров, перекрывающую диапазон EF , на котором реализуется условие неустойчивости УВ $L > 1 + 2M$.

Осредненные характеристики ударной волны в автоколебательном режиме заметно отличаются от параметров невозмущенной УВ. Отличие в скорости УВ вдоль ее возмущенного фронта имеет порядок отличия в скорости невозмущенной УВ на нижней и верхней границах области неоднозначного представления FG . Интересно, что в нижней части области неоднозначного представления (ниже точки $p_1 = 3$) многомерные колебания фронта приводят к росту средней скорости распространения УВ по сравнению с невозмущенным состоянием, а в верхней части, напро-

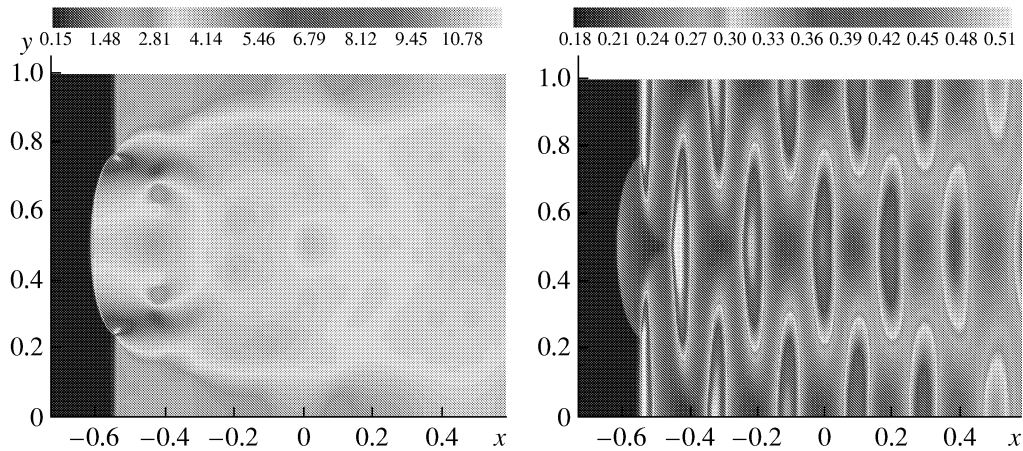


Рис.6. Двумерное решение при периодическом возмущении фронта УВ на стадии насыщения: слева – в терминах давления, справа – в терминах плотности

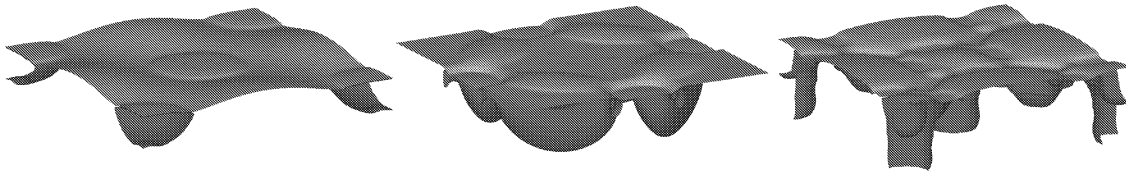


Рис.7. Трехмерное решение при периодическом возмущении фронта УВ в терминах поверхностей равного давления: три последовательных момента времени

тив, к уменьшению. Следует также отметить низкое число Маха течения после УВ (в системе отсчета, связанной с фронтом), слабую адиабатическую сжимаемость вещества в состоянии за фронтом ударной волны, большие вариации плотности с характерным рисунком энтропийных волн. Частицы вещества, пересекающие фронт с локальными параметрами ударной волны, соответствующими участку FG , имеют меньшую плотность, чем частицы вещества, пересекающие фронт УВ при меньших давлениях за фронтом. Это обусловлено положительным наклоном ударной адиабаты в переменных $p-V$ на участке $L > 1 + 2M$. Низкое число Маха после УВ также связано с условиями реализуемости неравенства $L > 1 + 2M$. Можно полагать, что наблюдаемые особенности решения связаны не с видом используемого модельного уравнения состояния, а с особенностями рассматриваемого участка УА.

Представленные на рис.7 результаты трехмерных расчетов показывают, что пространственный характер возмущения не приводит к качественным изменениям решения.

Расчеты, выполненные при одинаковом сеточном числе Рейнольдса $Re_h = \rho_0 D h / \eta = 3.5$ и различных значениях физического числа Рейнольдса, рассчитан-

ных по периоду $Re_\lambda = 875$, $Re_\lambda = 1750$, $Re_\lambda = 3500$, показывают сходимость к единственному решению.

Выводы. Численное моделирование поведения УВ с вязкой структурой с использованием модельного уравнения состояния показывает, что в области неоднозначного представления разрыва, перекрывающей участок $L > 1 + 2M$, вместо одной из полученных в одномерных решениях волновых конфигураций реализуются незатухающие многомерные колебания УВ с образованием ячеистой структуры фронта. Амплитуда колебаний локальных параметров УВ перекрывает участок УА, на котором выполняется условие неустойчивости УВ $L > 1 + 2M$.

Волны, наблюдаемые на поверхности УВ в области ее неоднозначного представления, по-видимому, объясняются “переключением” локальных параметров УВ между допустимыми волновыми конфигурациями. В этой связи прослеживается аналогия с ячеистой структурой детонационных волн в предельном случае, когда поперечные волны инициируют переключение локальных параметров УВ между значениями, соответствующими “равновесной” ударной адиабате и ударной адиабате, построенной при условии заморозки химических реакций. В отличие от детонационных волн, в рассматриваемом слу-

чае “переключение” происходит между различными участками равновесной ударной адиабаты.

Таким образом, в рамках используемых моделей неустойчивые ударные волны, предсказываемые линейной теорией [1, 2], не реализуются в силу их принадлежности к области неединственности решения и выбора других (устойчивых) волновых конфигураций. Этот вывод находится в полном соответствии с предположением [12].

Работа выполнена в рамках Программ фундаментальных исследований Президиума РАН “Исследование вещества в экстремальных условиях” и “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация”, а также Российского фонда фундаментальных исследований, грант # 08-08-01067-а.

1. С. П. Дьяков, *ЖЭТФ* **27**, 288 (1954).
2. В. М. Конторович, *ЖЭТФ* **33**, 1525 (1957).
3. J. J. Eгpenbeck, *Phys. Fluids* **5**, 1181 (1962).
4. G. W. Swan and G. R. Fowles, *Phys. Fluids* **18**, 28 (1975).
5. J. W. Bates, *Phys. Fluids* **19**, 094102 (2007).
6. A. E. Roberts, Los Alamos Scientific Laboratory Report No LA-299 (1945).
7. Г. Я. Галин, Докл. АН СССР **120**, 730 (1958).
8. C. S. Gardner, *Phys. Fluids* **6**, 1366 (1963).
9. G. R. Fowles and A. F. P. Houwing, *Phys. Fluids* **27**, 1982 (1984).
10. С. А. Егорушкин, Изв. АН СССР, МЖГ №6, 147 (1982).
11. Н. М. Кузнецов, *ЖЭТФ* **88**, 470 (1985).
12. Н. М. Кузнецов, УФН **159**, 493 (1989).
13. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, М.: Наука, 1966.
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.
15. А. Л. Ни, С. Г. Сугак, В. Е. Фортов, ТВТ **24**, 564 (1986).
16. В. А. Гущин, А. П. Лихачев, Н. Г. Нечипоренко и др., Сб. *Новое в численном моделировании: алгоритмы, вычислительные эксперименты, результаты*, М.: Наука, 2000, стр.165.
17. А. В. Конюхов, А. П. Лихачев, А. М. Опарин и др., *ЖЭТФ* **125**, 927 (2004).
18. А. В. Конюхов, А. П. Лихачев, В. Е. Фортов и др., Сб. *Физика экстремальных состояний вещества – 2008*, Изд. ИПХФ РАН, г. Черногловка, 2008, стр.124.
19. Г. Я. Галин, Изв. АН СССР, МЖГ №3, 164 (1975).
20. P. L. Roe, *J. Comput. Phys.* **43**, 357 (1981).
21. P. Glaister, *J. Comput. Phys.* **74**, 382 (1988).
22. R. Menikoff and B. J. Plohr, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 75 (1989).