Волновое уравнение не имеет единственного решения?!

Виктор КУЛИГИН, Галина КУЛИГИНА, Мария КОРНЕВА
Исследовательская группа «Анализ»

Теорема о нарушении единственности решения

Теорему о существовании и единственности решения задачи Коши можно найти в [1] (стр. 44...46). Логика доказательства приводит к однородному волновому уравнению (77) (см. стр. 45 в [1]), решение которого должно удовлетворять нулевым начальным и граничным условиям (стр. 45 в [1]). Далее идет доказательство, что решение этого уравнения тривиальное и на основании этого делается заключение о единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.

Оказывается, существует множество решений задачи Коши для волнового уравнения. Мы приведем доказательство для свободного пространства (одномерный случай). Это продиктовано следующими соображениями. Во-первых, доказательство не будет перегружено дополнительными деталями. Во вторых, доказательство этого случая не нарушает общности рассуждений и его нетрудно обобщить на случай наличия граничных условий. В третьих, нас интересуют процессы в свободном пространстве (излучение и распространение волн в электродинамике), к которым это доказательство имеет прямое отношение.

Доказательство

Рассмотрим однородное волновое уравнение в безграничном одномерном пространстве с нулевыми начальными условиями.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

Начальные условия: $v = 0$ и $\partial v/\partial t = 0$ при $t = 0$.

Представим теперь функцию v как сумму некоторых двух функций:

$$v = u + f \qquad (2)$$

Подставим это выражение в (1) и перенесем члены, зависящие от f в правую часть уравнения (1).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) \qquad (3)$$

Мы можем выбрать и присвоить функции f определенное выражение. Пусть, например,

$f = (\cos\pi x \cdot \sin at)^4$, когда $-1 < x < 1$ и $0 < t < \pi/a$;

$f = 0$ если $x < -1$ или $x > 1$ и $t > \pi/a$ или $t < 0$.

Функция ограничена f в пространстве и во времени. В этом случае уравнение (3) превращается в неоднородное волновое уравнение, правая часть которого нам известна. Теперь мы можем сформулировать начальные условия для функции u.

Начальные условия:

$$u = -f(x;0) \text{ и } \partial u/\partial t = -\partial f/\partial t \text{ при } t = 0 \qquad (4)$$

Решение уравнения (3) с начальными условиями (4) существует (см., например, [1], стр. 75, выражение (24)). Следовательно, мы имеем окончательный результат – новое, нетривиальное решение однородного волнового уравнения с нулевыми начальными условиями. Запишем общее ненулевое решение однородного волнового уравнения, удовлетворяющего задаче Коши с нулевыми начальными условиями:

$$v = f + u = f(x;t) - \frac{f(x+ct;0) + f(x-ct;0)}{2} -$$

$$- \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \left(\left. \frac{\partial f(\xi;t)}{\partial t} \right|_{t=0} \right) d\xi + \frac{1}{2c} \int_{0}^{t} \left[\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi;\tau) d\xi \right] d\tau, \qquad (5)$$

где $F(\xi;\tau) = -(c^2 \frac{\partial^2 f(\xi;\tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 f(\xi;\tau)}{\partial \tau^2})$.

Функция f не должна быть решением волнового уравнения.

Мы видим, что второе решение *существует* и *отлично от нуля* при $t > 0$. Таким образом, теорема о нарушении единственности решения задачи Коши для волнового уравнения **доказана**.

Применение результатов

Полученное доказательство служит обоснованию метода получения новых решений, описанного в [2], [3] и др. статьях авторов. Оно имеет прямую связь с калибровкой решений в электродинамике [2], [3].

Пусть мы имеем неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F(x;t)$$

с соответствующими начальными условиями: $v = \varphi(x)$ и $\partial v/\partial t = \psi(x)$ при $t = 0$.

Представим решение этого уравнения в форме (2): $v = u + f$.

Оставим в левой части волнового уравнения только члены, зависящие от u. Как и в предыдущем случае мы могли бы задать явный вид функции f (как говорят: «взяв ее с потолка») и получить решение неоднородного уравнения. Но можно поступить иначе. Мы можем наложить на f некоторое условие. Например, мы можем потребовать, чтобы функция f удовлетворяла уравнению Пуассона:

$\partial^2 f / \partial x^2 = F(x;t)$.

Если решение этого уравнения существует (функция $F(x:t)$ интегрируема), то уравнение для функции u определено и определены начальные условия задачи Коши: $u = \varphi(x) - f(x;0)$ и $\partial u/\partial t = \psi(x) - \partial f/\partial t$ при $t = 0$.

Такой метод построения второго решения по существу является *калибровкой решения.* Иными словами, мы ищем решение как сумму выражений, имеющих различную *функциональную* зависимость от координат и времени (запаздывающие потенциалы, мгновеннодействующие потенциалы, потенциалы, удовлетворяющие уравнению теплопроводности и т.д.) Этот метод описан и используется в работах [2], [3].

Следствия, вытекающие из отсутствия единственности решения для электродинамики весьма существенны. Калибровочная (градиентная) инвариантность не имеет места. В общем случае калибровка Лоренца уравнений Максвелла дает решения, отличающиеся от решений в кулоновской калибровке [2], [3]. Однако существует важный частный случай, когда эти калибровки эквивалентны. Он рассмотрен в [4].

Остается добавить, что для уравнений параболического типа (уравнение теплопроводности, уравнение Шредингера и др.) можно доказать аналогичную теорему. Более того, возможно, что нарушение единственности решения имеет место также для уравнений эллиптического типа (например, для задач Дирихле, Неймана и др.).

Источники информации:

Тихонов А.А. и Самарский Н.Н. Уравнения математической физики. – М.: ГИФМЛ, 1954.

Кулигин В.А., Кулигина Г.А., Корнева М.В. Калибровки и поля в электродинамике. / Воронеж. Ун-т. – Воронеж, 1998. Деп. в ВИНИТИ 17.02.98, № 467 – В98.

Kuligin V.A., Kuligina G.A., Korneva M.V. Analysis of the Lorentz's gauge. Canada, Montreal, 2000. – Apeiron, vol. 7, no 1...2.

Кулигин В.А., Кулигина Г.А. Корнева М.В. Однопроводные линии. / Воронеж. Ун-т. – Воронеж, 2002. Деп. в ВИНИТИ 10.06.2002, №1062 – В 2002.

См. также:

Кулигин В.А., Кулигина Г.А., Корнева М.В. Кризис релятивистских теорий, часть 2 (Анализ основ электродинамики). НиТ, 2001.

Кулигин В.А., Кулигина Г.А., Корнева М.В. Безынерциальные заряды и токи, часть 1 (Гипотеза об эквивалентности двух калибровок). НиТ, 2002.

Дата публикации:

22 августа 2002 года

Электронная версия:

© НиТ. Текущие публикации, 1997

Найти