О ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ*

(Совместно с Н. Розеном)

В статье дается строгое решение для цилиндрических гравитационных волн. Для удобства читателя в первой части статьи излагается уже известная в основном теория гравитационных волн и их излучения. После того как были получены соотношения, вызывающие сомнение в существовании *строгих* решений для волнообразных гравитационных полей, строго исследуется случай цилиндрических гравитационных волн. При этом оказывается, что строгие решения существуют и что задача сводится к обычным цилиндрическим волнам в эвклидовом пространстве.

I. Приближенное решение задачи о плоских волнах и излучение гравитационных волн

Хорошо известно, что применение приближенного метода интегрирования уравнений гравитационного поля общей теории относительности обнаруживает существование гравитационных волн. Упомянутый метод состоит в следующем. Исходим из уравнений поля

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - T_{\mu\nu}; \tag{1}$$

заменим величины $g_{\mu\nu}$ выражениями:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ при } \mu = \nu, \\ 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

если временнáя координата взята мнимой, как это было сделано Минковским. Предполагается, что величины $\gamma_{\mu\nu}$ малы, т. е. что гравитационное

* *On Gravitational Waves.* (With N. Rosen). J. Franklin Inst., 1937, 223, 43—54.

поле слабое. В уравнениях поля величины $\gamma_{\mu\nu}$ и их производные будут встречаться в различных степенях. Если $\gamma_{\mu\nu}$ всюду достаточно малы по сравнению с единицей, можно получить решение уравнений в первом приближении, пренебрегая в уравнениях (1) более высокими степенями величин $\gamma_{\mu\nu}$ (и их производных) по сравнению с низшими. Если, далее, ввести $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ вместо $\gamma_{\mu\nu}$ с помощью соотношений

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\alpha},$$

то уравнения (1) принимают вид

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu,\alpha\alpha} - \bar{\gamma}_{\mu\alpha,\alpha\nu} - \bar{\gamma}_{\nu\alpha,\alpha\mu} + \bar{\gamma}_{\alpha\alpha,\mu\nu} = -2T_{\mu\nu}. \qquad (3)$$

Специализация вида $g_{\mu\nu}$, содержащаяся в соотношении (2), сохраняется при бесконечно малом преобразовании координат

$$x'_{\mu} = x_{\mu} + \xi^{\mu}, \qquad (4)$$

где ξ^{μ} — произвольные бесконечно малые функции. Поэтому можно задать четыре значения $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ или четыре условия, которым должны удовлетворять $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ наряду с уравнениями (3); это сводится к специальному выбору системы координат, в которой описывается поле. Выберем систему координат обычным образом — с помощью требования

$$\bar{\gamma}_{\mu\alpha,\alpha} = 0. \qquad (5)$$

Легко убедиться в том, что эти четыре условия совместны с приближенными уравнениями гравитационного поля, если дивергенция $T_{\mu\alpha,\alpha}$ тензора $T_{\mu\nu}$ равна нулю, что необходимо предположить согласно специальной теории относительности.

Однако оказывается, что эти условия неполностью определяют систему координат. Если $\gamma_{\mu\nu}$ — решения уравнений (2) и (5), то $\gamma'_{\mu\nu}$, после преобразования типа (4),

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \xi^{\mu}_{,\nu} + \xi^{\nu}_{,\mu}, \qquad (6)$$

также являются решениями, если ξ^{μ} удовлетворяют условиям

$$\left[\xi^{\mu}_{,\nu} + \xi^{\nu}_{,\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\xi^{\alpha}_{,\alpha} + \xi^{\alpha}_{,\alpha})\right]_{,\nu} = 0,$$

или

$$\xi^{\mu}_{,\alpha\alpha} = 0. \qquad (7)$$

Если можно добиться обращения γ-поля в нуль добавлением членов, подобных входящим в соотношение (6), т. е. посредством бесконечно малого преобразования, то описываемое гравитационное поле является лишь фиктивным.

Принимая во внимание соотношения (2), можно записать уравнения гравитационного поля для пустого пространства в виде

$$\left.\begin{aligned}\bar{\gamma}_{\mu\nu,\alpha\alpha} &= 0,\\ \gamma_{\mu\alpha,\alpha} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Плоские гравитационные волны, распространяющиеся в направлении положительной оси x_1, получаются, если взять $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ в виде $\varphi(x_1+ix_4)$ $(=\varphi(x_1-t))$, причем эти $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ должны удовлетворять условиям:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\gamma}_{11}+i\bar{\gamma}_{14} &= 0,\\ \bar{\gamma}_{41}+i\bar{\gamma}_{44} &= 0,\\ \bar{\gamma}_{21}+i\bar{\gamma}_{24} &= 0,\\ \bar{\gamma}_{31}+i\bar{\gamma}_{34} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Соответственно (бегущие) плоские гравитационные волны наиболее общего вида можно подразделить на три типа:

а) чисто продольные волны:

только $\bar{\gamma}_{11}$, $\bar{\gamma}_{14}$, $\bar{\gamma}_{44}$ отличны от нуля;

б) полупродольные, полупоперечные волны:

только $\bar{\gamma}_{21}$ и $\bar{\gamma}_{24}$, или только $\bar{\gamma}_{31}$ и $\bar{\gamma}_{34}$ отличны от нуля;

в) чисто поперечные волны:

только $\bar{\gamma}_{22}$, $\bar{\gamma}_{23}$, $\bar{\gamma}_{33}$ отличны от нуля.

На основе предыдущих замечаний можно, далее, показать, что любая волна типа «а» или типа «б» представляет собой фиктивное поле, т. е. поле, которое может быть получено посредством бесконечно малого преобразования из эвклидова поля ($\bar{\gamma}_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}=0$).

Проведем доказательство на примере волны типа «а». Если φ — соответствующая функция аргумента x_1+ix_4, то, согласно условиям (9), следует положить

$$\bar{\gamma}_{11}=\varphi, \quad \bar{\gamma}_{14}=i\varphi, \quad \bar{\gamma}_{44}=-\varphi,$$

и, следовательно, также

$$\gamma_{11}=\varphi, \quad \gamma_{14}=i\varphi, \quad \gamma_{44}=-\varphi.$$

Если теперь выбрать ξ^1 и ξ^4 (при $\xi^2=\xi^3=0$) так, что

$$\xi^1=\chi(x_1+ix_4),\qquad \xi^4=i\chi(x_1+ix_4),$$

то получим

$$\xi^1+\xi^4_{,1}=2\chi',\qquad \xi^1_{,4}+\xi^4_{,1}=2i\chi',\qquad \xi^4_{,4}+\xi^4_{,4}=-2\chi'.$$

Это согласуется со значениями, приведенными выше для γ_{11}, γ_{14}, γ_{44}, если выбрать $\chi'=\frac{1}{2}\varphi$. Тем самым показано, что эти волны являются фиктивными. Аналогичное доказательство может быть проведено для волн типа «б».

Далее, мы хотим показать, что тип «в» также содержит фиктивные поля, а именно, те, у которых $\bar\gamma_{22}=\bar\gamma_{33}\neq 0$, $\bar\gamma_{23}=0$. Соответствующими значениями $\gamma_{\mu\nu}$ являются $\gamma_{11}=\gamma_{44}\neq 0$, все остальные компоненты равны нулю. Такую волну можно получить, положив $\xi'=\chi$, $\xi^4=-i\chi$, т. е. посредством бесконечно малого преобразования эвклидова пространства. Соответственно, в качестве реальных волн остаются только оба типа чисто поперечных волн, неисчезающими компонентами которых являются

$$\gamma_{22}=-\gamma_{33} \tag{в$_1$}$$

или

$$\gamma_{23}. \tag{в$_2$}$$

Однако из закона преобразования тензоров следует, что оба эти типа волн могут быть преобразованы один в другой путем пространственного вращения системы координат вокруг оси x_1 на угол $\frac{\pi}{4}$. Они представляют просто разложение на составляющие чисто поперечной волны (единственной, имеющей реальный смысл). Тип (в$_1$) характеризуется тем, что его компоненты не изменяются при преобразованиях

$$x_2'=-x_2,\qquad x_1'=x_1,\qquad x_3'=x_3,\qquad x_4'=x_4$$

или

$$x_3'=-x_3,\qquad x_1'=x_1,\qquad x_2'=x_2,\qquad x_4'=x_4,$$

в противоположность типу (в$_2$), т. е. волны типа (в$_1$) симметричны относительно плоскостей x_1x_2 и x_1x_3.

Исследуем теперь излучение волн в рамках приближенных (линеаризованных) уравнений гравитационного поля. Система уравнений, которую надо проинтегрировать, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\bar\gamma_{\mu\nu,\alpha\alpha}&=-2T_{\mu\nu},\\ \bar\gamma_{\mu\alpha,\alpha}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Предположим, что физическая система, описываемая тензором $T_{\mu\nu}$, находится вблизи от начала координат. Тогда поле определяется формально так же, как электромагнитное поле определяется системой электромагнитных токов. Обычным решением является решение в виде запаздывающих потенциалов

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{[T_{\mu\nu}]_{(t-r)}}{r} dv. \tag{11}$$

Здесь r означает пространственное расстояние рассматриваемой точки от элемента объема, $t = x_4/i$ — рассматриваемый момент времени.

Если рассматривать материальную систему, находящуюся в объеме с размерами, малыми по сравнению с r_0 — расстоянием рассматриваемой точки от начала координат, а также малыми по сравнению с длинами излучаемых волн, то можно заменить r на r_0, что дает

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi r_0} \int [T_{\mu\nu}]_{(t-r_0)} dv,$$

или

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi r_0} \left[\int T_{\mu\nu} dv\right]_{(t-r_0)}. \tag{12}$$

Компоненты $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ тем точнее аппроксимируются плоской волной, чем больше выбранное значение r_0. Если рассматриваемую точку выбрать вблизи от оси x_1, то нормаль волны параллельна направлению x_1, и только компоненты $\bar{\gamma}_{22}$, $\bar{\gamma}_{23}$, $\bar{\gamma}_{33}$ отвечают, согласно предыдущему, истинной гравитационной волне. Соответствующие интегралы (12) для излучающей системы, состоящей из движущихся друг относительно друга масс, не имеют, взятые сами по себе, простого смысла. Заметим, однако, что T имеет смысл взятой с обратным знаком плотности энергии, которая в случае медленного движения практически совпадает с плотностью массы в смысле обычной механики. Как будет показано, интегралы (12) могут быть выражены через эту величину. Это можно сделать благодаря существованию закона сохранения энергии-импульса физической системы

$$T_{\mu\alpha,\alpha} = 0. \tag{13}$$

Умножая второе из этих уравнений на x_2, а четвертое — на $\frac{1}{2} x_2^2$ и интегрируя по всей системе, получаем два интегральных соотношения, которые вместе дают

$$\int T_{22} dv = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \int x_2^2 T_{44} dv. \tag{13a}$$

Аналогично получаем

$$\int T_{33}dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\int x_3^2 T_{44}dv,$$

$$\int T_{23}dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\int x_2 x_3 T_{44}dv.$$

Отсюда видно, что производные по времени от моментов инерции определяют излучение гравитационных волн, если весь метод приближенных уравнений оправдан. В частности, видно также, что случай волн, симметричных относительно плоскостей x_1x_2 и x_1x_4, мог бы быть реализован с помощью упругих колебаний материальной системы, обладающей теми же свойствами симметрии. Примером могут служить две равные массы, соединенные пружиной и колеблющиеся навстречу друг другу в направлении, параллельном оси x_3.

Из закона сохранения энергии следует, что система, излучающая гравитационные волны, должна излучать и энергию, что приводит к затуханию движения. Тем не менее можно представить себе и случай незатухающих колебаний, если предположить, что кроме волн, излучаемых системой, имеется еще второе концентрическое волновое поле, распространяющееся внутрь, которое сообщает системе столько же энергии, сколько уносят расходящиеся волны. Тогда будет существовать незатухающий механический процесс, происходящий внутри системы стоячих волн.

Математически это связано со следующим обстоятельством, выясненным в свое время Ритцем и Тетроде. Интегрирование волнового уравнения

$$\Box \varphi = -4\pi\rho$$

с помощью *запаздывающего* потенциала

$$\varphi = \int \frac{[\rho]_{(t-r)}}{r} dv$$

математически не является единственной возможностью. Можно провести это интегрирование также с помощью «опережающего» потенциала

$$\varphi = \int \frac{[\rho]_{(t+r)}}{r} dv,$$

или же с помощью наложения решений обоих типов, например

$$\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{[\rho]_{(t+r)} + [\rho]_{(t-r)}}{r} dv.$$

Последняя возможность соответствует отсутствию затухания — случаю стоячей волны.

Следует отметить, что можно получить волны, генерируемые описанным выше образом, сколь угодно точно аппроксимирующие плоские волны. Их можно получить, например, путем предельного перехода, предполагая, что источник волн все более и более удаляется от рассматриваемой точки, причем переменный момент инерции тела должен одновременно пропорционально возрастать.

II. Строгое решение для цилиндрических волн

Выберем координаты x_1, x_2 в меридиональной плоскости так, чтобы через $x_1 = 0$ проходила ось вращения, а x_2 изменялась от 0 до бесконечности. Пусть x_3 — угловая координата, определяющая положение меридиональной плоскости. Пусть также поле симметрично относительно каждой плоскости $x_2 = \text{const}$ и относительно каждой меридиональной плоскости. Требуемая симметрия приводит к обращению в нуль всех компонент $g_{\mu\nu}$, содержащих один, и только один, индекс 2; то же справедливо и для индекса 3. В таком гравитационном поле только компоненты

$$g_{11},\ g_{22},\ g_{33},\ g_{44},\ g_{14}$$

могут быть отличны от нуля. Для удобства выберем все координаты вещественными. Далее можно преобразовать координаты x_1, x_4 так, чтобы удовлетворить еще двум условиям. В качестве этих условий возьмем

$$\left.\begin{aligned} g_{14} &= 0, \\ g_{11} &= -g_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Легко показать, что это можно сделать, не вводя никаких особенностей.

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} -g_{11} = g_{44} &= A, \\ -g_{22} &= B, \\ -g_{33} &= C, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $A, B, C > 0$.

В этих обозначениях вычисление дает

$$\left.\begin{aligned}
2\left(R_{11}-\frac{1}{2}g_{11}R\right) &= \frac{B_{44}}{B}+\frac{C_{44}}{C}-\frac{1}{2}\left[\frac{B_4^2}{B^2}+\frac{C_4^2}{C^2}-\frac{B_4C_4}{BC}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)+\frac{B_1C_1}{BC}+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right)\right],\\
\frac{2A}{B}\left(R_{22}-\frac{1}{2}g_{22}R\right) &= \frac{A_{44}}{A}+\frac{C_{44}}{C}-\frac{A_{11}}{A}-\frac{C_{11}}{C}+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left[\frac{C_1^2}{C^2}-\frac{C_4^2}{C^2}+\frac{2A_1^2}{A^2}-\frac{2A_4^2}{A^2}\right],\\
\frac{2A}{C}\left(R_{33}-\frac{1}{2}g_{33}R\right) &= \frac{A_{44}}{A}+\frac{B_{44}}{B}-\frac{A_{11}}{A}-\frac{B_{11}}{B}+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left[\frac{2A_1^2}{A^2}-\frac{2A_4^2}{A^2}+\frac{B_1^2}{B^2}-\frac{B_4^2}{B^2}\right],\\
2\left(R_{44}-\frac{1}{2}g_{44}R\right) &= \frac{B_{11}}{B}+\frac{C_{11}}{C}-\frac{1}{2}\left[\frac{B_1^2}{B^2}+\frac{C_1^2}{C^2}-\frac{B_1C_1}{BC}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right)+\frac{B_4C_4}{BC}+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)\right],\\
2R_{14} &= \frac{B_{14}}{B}+\frac{C_{14}}{C}-\frac{1}{2}\left[\frac{B_1B_4}{B^2}+\frac{C_1C_4}{C^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right)+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)\right],
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

где индексами у членов в правой части обозначено дифференцирование. Если взять в качестве уравнений поля эти выражения, приравненные нулю, заменить второе и третье их суммой и разностью, и ввести в качестве новых переменных

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \ln A,\\
\beta &= \frac{1}{2}\ln(B/C),\\
\gamma &= \frac{1}{2}\ln(BC),
\end{aligned}\right\} \quad (15а)$$

то получим:

$$2\gamma_{44}+\frac{1}{2}[\beta_4^2+3\gamma_4^2+\beta_1^2-\gamma_1^2-2\alpha_1\gamma_1-2\alpha_4\gamma_4]=0, \quad (17)$$

$$2(\alpha_{11}-\alpha_{44})+2\gamma_{11}-2\gamma_{44}+[\beta_1^2+\gamma_1^2-\beta_4^2-\gamma_4^2]=0, \quad (18)$$

$$\beta_{11} - \beta_{44} + [\beta_1\gamma_1 + \beta_4\gamma_4] = 0, \tag{19}$$

$$2\gamma_{11} + \frac{1}{2}[\beta_1^2 + 3\gamma_1^2 + \beta_4^2 - \gamma_4^2 - 2\alpha_1\gamma_1 - 2\alpha_4\gamma_4] = 0, \tag{20}$$

$$2\gamma_{14} + [\beta_1\beta_4 + \gamma_1\gamma_4 - 2\alpha_1\gamma_4 - 2\alpha_4\gamma_1] = 0. \tag{21}$$

Первое и четвертое уравнения этой группы дают

$$\gamma_{11} - \gamma_{44} + (\gamma_1^2 - \gamma_4^2) = 0. \tag{22}$$

Подстановка

$$\gamma = \ln \sigma, \qquad \sigma = (BC)^{1/2} \tag{23}$$

приводит к волновому уравнению

$$\sigma_{11} - \sigma_{44} = 0, \tag{24}$$

имеющему решение

$$\sigma = f(x_1 + x_4) + g(x_1 - x_4), \tag{25}$$

где f и g — произвольные функции. Уравнение (18) сводится к уравнению:

$$\alpha_{11} - \alpha_{44} + \frac{1}{2}(\beta_1^2 - \beta_4^2 + \gamma_4^2 - \gamma_1^2) = 0. \tag{18a}$$

Тогда из уравнения (17) видно, что γ не может всюду обращаться в нуль.

Теперь необходимо выяснить, существуют ли волнообразные процессы, для которых γ не равно нулю. Заметим, что такой волнообразный процесс представляется в первом приближении «волнообразной» функцией β, т. е. β-функцией, зависимость которой от x_1 и x_4 обнаруживает максимумы и минимумы; того же следует ожидать и для строгого решения. В отношении γ известно, что $e^\gamma = \sigma$ удовлетворяет волновому уравнению (24) и потому принимает вид (25). Однако из этого не следует с необходимостью «волнообразный» характер этой величины. Действительно, мы покажем, что γ не может иметь минимумов.

Наличие такого минимума означало бы существование минимумов у функций f и g из (25). В точке минимума (x_1, x_4) должно было бы быть $\gamma_1 = \gamma_4 = 0$, $\gamma_{11} \geqq 0$, $\gamma_{44} \geqq 0$. Но, согласно соотношениям (17) и (20), это невозможно. Следовательно, γ не имеет минимумов, т. е. не имеет волнообразного характера, а изменяется (по крайней мере, в области пространства, произвольно протяженной в одном направлении) монотонно. Рассмотрим теперь такую область пространства.

Полезно установить, при каких преобразованиях координат x_1 и x_4 система уравнений (14) остается инвариантной. Для этой инвариантности необходимо и достаточно, чтобы преобразование удовлетворяло уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_4} = \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Следовательно, мы можем произвольно выбрать $\bar{x}_1(x_1, x_4)$ так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{x}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_4^2} = 0, \qquad (26a)$$

и тогда система (26) определит соответствующее $\bar{x}_4$. Поскольку e^{γ} инвариантно относительно этого преобразования и также удовлетворяет волновому уравнению, существует такое преобразование, при котором $\bar{x}_1$ соответственно равно или пропорционально e^{γ}. В новой системе координат имеем

$$e^{\gamma} = ax_1$$

или

$$\gamma = \ln a + \ln x_1. \qquad (27)$$

Если вместо γ подставить в (17) — (27) это выражение для γ, то уравнения приводятся к эквивалентной системе:

$$\beta_{11} - \beta_{44} + \frac{1}{x_1}\beta_1 = 0, \qquad (28)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}x_1(\beta_1^2 + \beta_4^2) - \frac{1}{2x_1} \qquad (29)$$

и

$$\alpha_4 = x_1\beta_1\beta_4. \qquad (30)$$

Уравнение (28) представляет собой уравнение для цилиндрических волн в трехмерном пространстве, если под x_1 понимать расстояние от оси вращения. При заданном β уравнения (29) и (30) определяют функцию α с точностью до (произвольной) аддитивной постоянной, в то время как γ уже определено равенством (27).

Чтобы волны можно было считать волнами в эвклидовом пространстве, решения, отвечающие эвклидову пространству в случае поля, не зависящего от x_4, должны удовлетворять этим уравнениям. Такое поле описывается равенствами

$$A = 1, \qquad B = 1, \qquad C = x_1^2,$$

если обозначить через x_3 угол поворота вокруг оси вращения. Эти значения дают

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\ln x_1, \quad \gamma = \ln x_1,$$

откуда и видно, что уравнения (27) — (30) действительно удовлетворяются.

Мы должны еще исследовать, существуют ли *стационарные* волны, т. е. волны, чисто периодические во времени.

Непосредственно ясно, что для β такие решения существуют. Хотя такое ограничение несущественно, мы рассмотрим случай, когда изменение β во времени синусоидально. Пусть β имеет вид

$$\beta = X_0 + X_1 \sin \omega x_4 + X_2 \cos \omega x_4,$$

где X_0, X_1, X_2 — функции только x_1. Тогда из уравнения (30) следует, что α периодично в том и только в том случае, когда интеграл

$$\int \beta_1 \beta_4 dx_4,$$

взятый по целому числу периодов, обращается в нуль.

В случае стационарного колебания, описываемого функцией

$$\beta = X_0 + X_1 \sin \omega x_4,$$

это условие действительно выполняется, поскольку

$$\int \beta_1 \beta_4 dx_4 = \int (X_0' + X_1' \sin \omega x_4)\, \omega X_1 \cos \omega x_4 dx_4 = 0.$$

С другой стороны, в общем случае, включающем случай бегущих волн, для этого интеграла получается значение

$$\frac{1}{2}(X_1 X_2' - X_2 X_1')\, \omega T,$$

где T — промежуток времени, по которому берется интеграл. Это значение, вообще говоря, не равно нулю. На расстояниях x_1 от $x_1 = 0$, больших по сравнению с длинами волн, и в области, содержащей большое число волн, бегущая волна с хорошим приближением может быть представлена в виде

$$\beta = X_0 + a \sin \omega (x_4 - x_1),$$

где a — постоянная (происходящая от функции, слабо зависящей от x_1). В этом случае $X_1 = a \cos \omega x_1$, $X_2 = -a \sin \omega x_1$, так что интеграл может быть (приблизительно) представлен в виде: $-\frac{1}{2} a\omega^2 T$. Таким образом, он не может обращаться в нуль и имеет всегда один и тот же знак. Следовательно, бегущие волны вызывают вековое изменение метрики.

Это явление обусловлено переносом энергии волнами, связанным с непрерывным изменением во времени гравитирующей массы, локализованной на оси $x_1 = 0$.

Примечание. Вторая часть настоящей статьи была значительно изменена мной после отъезда Н. Розена в Россию, поскольку мы вначале ошибочно интерпретировали наши формальные результаты. Я хочу поблагодарить моего коллегу проф. Робертсона за его дружескую помощь в выяснении первоначальной ошибки. Я благодарю также Гоффмана за любезную помощь при переводе.

А. Эйнштейн.