С.А. ПОДОСЕНОВ

ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЯ И КЛАССИЧЕСКИЕ ПОЛЯ СВЯЗАННЫХ СТРУКТУР

ИЗДАТЕЛЬСТВО "СПУТНИК+"2000

УДК 530.12:539.12

Пространство, время и классические поля связанных структур. Подосенов С.А. М.: Издательство "СПУТНИК 2000, 445 стр.

В монографии дается подробный анализ трудностей при описании систем отсчета в теории относительности. На основании очевидного утверждения, что при движении релятивистски жесткого тела в однородном силовом поле без начальной скорости никаких деформаций и напряжений в теле не должно возникать, автор приходит к доказательству того, что свойства пространства-времени для наблюдателей, движущихся вместе с телом, изменяются. Пространство-время для этих наблюдателей становится римановым. Из выведенных в книге уравнений структуры следует, что не только теория тяготения Эйнштейна является базисом для понимания структуры пространственно-временных связей. Предлагаемая монография указала и на другие причины возникновения кривизны пространства-времени, не имеющие никакого отношения к общей теории относительности (ОТО). Показано, что любое силовое поле (например, реактивная сила двигателя космического корабля) может привести к искривлению пространства-времени.

В книге рассматривается новое направление исследования силовых полей, не обсуждавшееся в других теориях ранее. Направление основано на сформулированном автором **постулате эквивалентных ситуаций**. Выводы из нового направления позволили пересмотреть некоторые положения классической теории поля, устранив основное противоречие между предположением о точечности заряженных частиц и получающейся при этом их бесконечной собственной энергией. Монография, предполагает знание основ специальной теории относительности (СТО), ОТО и классической теории электромагнитного поля.

Предназначена для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по электродинамике, механике сплошных сред, СТО, ОТО и другим смежным вопросам физики и математики.

Библиогр. 138.

Рецензент: дф-мн, проф. М.И. Киселев

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

О кривизне пространства-времени в современных физических теориях говорят в тех случаях, когда имеют дело с теорией тяготения Эйнштейна. Автор предлагаемой книги указал и на другие причины возникновения кривизны пространства-времени, никак не связанные с общей теорией относительности (ОТО).

Основной трудностью классической (и квантовой) теории электромагнитного поля является противоречие между предположением о точечности заряженных частиц и получающейся при этом их бесконечной собственной энергией. Попытки устранения этой трудности, а также сделанное Дираком теоретическое открытие позитрона и образование пар под действием жестких γ - лучей были связаны с развитием нелинейных теорий Г. Ми (1912 г.), М. Борна и Л. Инфельда (1934 г). Линейные теории не могли объяснить рассеяние света на свете, из них следовала бы обычная суперпозиция полей электромагнитных волн. Однако основания перечисленных нелинейных теорий базируются на произвольном выборе лагранжиана и не обоснованы экспериментом. Они могут претендовать лишь на эвристическое значение. Это является главным пороком данных теорий.

В книге сформулировано новое направление исследований, основанное на **постулате эквивалентных ситуаций**. В результате показано, что искривление пространства-времени - это не привилегия только гравитационного поля. Выводы из нового направления устранили главное противоречие теории поля, связанное с точечностью заряженных частиц и их расходящейся собственной энергией. Предлагаемая в книге новая модель нелинейной теории электромагнитного поля основывается на учете взаимодействия зарядов, создающих поле, с созданным зарядами полем. Однако предлагаемый подход требует выхода за рамки плоского пространства-времени. Исходными уравнениями теории являются уравнения Максвелла, записанные в четырехмерной форме, точно такие же, как и уравнения электродинамики при наличии гравитационного поля. Однако эта сходство является чисто внешним, поскольку метрический тензор не определяется из решений уравнений Эйнштейна и Эйнштейна–Максвелла и гравитационным взаимодействием пренебрегается по сравнению с электромагнитным. Вместо уравнений Эйнштейна для нахождения метрики используются выведенные автором уравнения структуры, устанавливающие связь между кинематическими характеристиками системы отсчета (СО), такими как тензор скоростей деформаций, тензор угловой скорости вращения, 4-ускорения с метрическим тензором СО. Фактически уравнения структуры - это уравнения совместности для существования поля 4-скорости при заданных тензорах скоростей деформаций, угловой скорости вращения и векторов первой кривизны мировых линий частиц базиса СО. Кривизна пространства–времени при этом не связывается, как это делают обычно, с решениями уравнений Эйнштейна при разных тензорах энергии-импульса материи. Полученные системы интегро-дифференциальных и интегральных уравнений для плотностей зарядов и токов для заряженных металлических тел с учетом взаимодействия с полем связанных зарядов, позволили, в принципе, совместно с уравнениями структуры находить геометрию пространства-времени вне и внутри полых заряженных оболочек и проводов. Найденные новые предполагаемые эффекты при расчете электромагнитных полей допускают экспериментальную проверку при настоящем уровне развития науки и техники.

Монография охватывает тридцатилетний период исследований автора по вопросам релятивистских систем отсчета и силовых полей. Часть вопросов нашла свое отражение в статьях, опубликованных в России и за рубежом. Большую часть исследований автор принципиально не публиковал до окончательного осмысливания результатов. Монография выгодно отличается от многих курсов по ОТО и СТО, уклоняющихся обычно от анализа острых коренных проблем. Она представляет непосредственный интерес для специалистов, занимающихся вопросами специальной теории относительности (СТО), ОТО, электродинамикой, механикой сплошных сред, неевклидовыми геометриями и космонавтикой.

Я думаю, что книга ведущего научного сотрудника Всероссийского Научно Исследовательского Института Оптико-Физических Измерений (ВНИИОФИ), действительного члена Нью-Йоркской Академии Наук, члена The Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE) С.А. Подосенова должна занять достойное место среди книг по релятивистской теории систем отсчета и нелинейной электродинамике.

Действительный член РАЕН, дф-мн, проф. В.В. Алексеев

ОТ АВТОРА

Эта книга предлагается для читателей, которым было бы интересно познакомиться как с альтернативным подходом к системам отсчета в теории относительности, так и с неожиданным выводом из этого подхода, позволяющим пересмотреть некоторые положения классической теории поля, устранив основное противоречие между предположением о точечности эаряженных частиц и получающейся при этом их бесконечной собственной энергией.

По системам отсчета в общей теории относительности (ОТО) издана исчерпывающая монография проф. МГУ Ю.С. Владимирова [23], в которой автор утверждает, что вопрос о системах отсчета и их роли в современной теории гравитации в принципе решен. Однако даже в специальной теории относительности (СТО) существуют "темные пятна на которые в современной теории предпочитают не обращать внимания. Именно разбору трудностей и конструктивному выходу из них и посвящена данная книга. Основное достижение книги, на взгляд автора, это создание на основе, предложенного автором **постулата эквивалентных ситуаций**, новой области исследований - установление связи между геометрией пространства-времени и классическими полями связанных структур. Проведенные исследования показали, что кривизна пространства-времени не является прерогативой ОТО Эйнштейна, и любые силовые поля могут приводить к неевклидовым геометриям. Нашли в книге отражение также вопросы, представляющие интерес для специалистов по прикладной электродинамике и релятивистской механике сплошных сред.

Я искренне признателен своим коллегам Ю. Андрееву и М. Фильченкову за постоянный интерес к работе и полезные дискуссии. Я благодарю своих сотрудников из лаборатории "Генерирования и измерения параметров электромагнитных импульсов"ВНИИОФИ С. Альбеткова, М. Денисова, А. Дубровина, С. Милякова, Е. Менькову, О. Михеева, В. Сабельникова, К. Сахарова, Я. Свекиса, В. Туркина, В. Уголева, С. Фролова, Т. Харитонову за благожелательность и поддержку и особенно директора ВНИИОФИ д.т.н. В.С. Иванова, зав. лаб. проф. А.А. Соколова, Н.Ф. Соколову и Я.М. Спектора, без активной помощи которых выпуск книги был бы весьма проблематичен.

С. Подосенов

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы инерциальной навигации с учетом релятивистских поправок для решения требуют привлечения аналитического аппарата релятивистских неинерциальных систем отсчета (НСО). Однако в релятивистской теории не существует единого аналитического определения как систем отсчета, так и правил, устанавливающих переход между ними [1]. Даже при рассмотрении простейших НСО в специальной теории относительности (СТО) таких как равноускоренная и равномерно вращающаяся, приходится сталкиваться с логическими трудностями, которым уделяется мало внимания в работах по системам отсчета. Остановимся более подробно на сути возникающих трудностей на примере равноускоренной НСО.

Принято считать [3], что переход в жесткую равноускоренную НСО осуществляется при помощи известного преобразования Меллера. Однако [4], в СТО не может быть такой ситуации, когда ускорение всех частиц среды в сопутствующей системе отсчета постоянно и одинаково и конгруенция мировых линий жесткая в смысле Борна. Анализ преобразования Меллера показал, что в базисе Ферми–Уолкера, к которому и относятся показания акселерометров [5], ускорения различных частиц не являются одинаковыми, а вычисляются по формуле $a(y) = a_0/(1+a_0 y/c^2)$, где a_0 — ускорение частицы вдоль оси y, находящейся в начале лагранжевой сопутствующей системы координат, c — скорсть света в вакууме. Таким образом, преобразование Меллера не описывают перехода к глобально равноускоренной НСО. Каждая из лагранжевых частиц движется с постоянным ускорением, но эти ускорения не равны друг другу [2].

Альтернативой преобразования Меллера является преобразование Логунова [6], описывающее переход от инерциальной системы отсчета (ИСО) к релятивистской равноускоренной НСО, в которой каждая из лагранжевых частиц базиса движется с постоянным ускорением. Такая система отсчета может быть реализована при рассмотрении заряженной невзаимодействующей одна с другой одинаковыми частицами пыли, движущейся с нулевой начальной скоростью в однородном электрическом поле. Однако, если с помощью стандартной процедуры [7] вычислить трехмерный метрический тензор, заданный на гиперповерхности ортогональной мировым линиям частиц базиса, то можно убедиться, что "физическое"пространственное расстояние между соседними мировыми линиями будет увеличиваться с течением времени. Таким образом, глобально равноускоренная система Логунова не является релятивистски (в смысле Борна) жесткой.

Получили парадоксальный результат. Одинаковая для всех частиц физическая ситуация привела к движению частиц относительно друг друга (система Логунова). Для того чтобы эти частицы были взаимно неподвижны, необходимо к ним прикладывать разные силы (система Меллера).

Парадоксальность такой ситуации можно разобрать еще на одном наглядном примере, не связанном с электродинамикой.

Пусть вдоль оси x одновременно стартуют два одинаковых автомобиля, связанных хрупким невесомым стержнем, который ломается, если в системе отсчета, связанной со стержнем, расстояние между автомобилями изменяется в ту или иную сторону. Оказывается, что стержень ломается, если на участке разгона двигатели машин развивают одинаковую тягу (система Логунова) и не ломается, если второй автомобиль развивает большую мощность, чем первый (система Меллера).

Таким образом, в рамках СТО нельзя построить логически стройную теорию упругости, основанную на отсутствии в твердом теле деформаций и напряжений, если это тело движется свободно в однородном силовом поле. Одинаковые стационарные физические условия для каждой из частиц среды приводят к нестационарной метрике.

С математической точки зрения полученный результат понятен. Если измерять расстояние между соседними мировыми линиями в гиперплоскости $t = \text{const}$ в исходной ИСО, то его постоянство в других гиперповерхностях параллельных исходной означает, что расстояние между этими же мировыми линиями в гиперповерхностях ортогональных этим линиям, будет вообще говоря, изменяться. Исключение представляет случай, когда мировые линии параллельные прямые. Для этого случая равномерного движения твердого тела в отсутствии силового поля расстояние L между мировыми линиями в гиперплоскости $t = \text{const}$ связано с расстоянием L_0 между мировыми линиями на ортогональной им гиперповерхности по хорошо известной формуле $L = L_0(1 - (v/c)^2)^{1/2}$. Очевидно, что если $v = \text{const}$, то постоянство L обеспечивает постоянство L_0, т.е. классически жесткое движение является и релятивистски жестким. Если же скорость $v = v(t)$, то постоянство L не влечет постоянства L_0. Ускоренное движение классически твердого тела приводит к зависящим от времени деформациям, если это тело рассматривать с релятивистских позиций.

Много внимания в литературе уделяется также рассмотрению вращательного движения в теории относительности. При рассмотрении вращающегося диска обычно выбирают неподвижную систему отсчета, в которой вводят цилиндрические координаты r_0, θ_0, z_0, t_0 и переходят к вращающейся системе отсчета r, θ, z, t согласно формулам:

$$r_0 = r, \quad \theta_0 = \theta + \omega t, \quad z_0 = z, \quad t_0 = t,$$

где угловая скорость вращения ω относительно оси z считается постоянной. Хилл [8] (как и ранее Лауэ [9]) указали, что вращающееся тело в этом случае должно иметь конечный радиус, т.к. скорость, изменяющаяся по линейному закону, могла бы в этом случае превысить скорость света c при $r > c/\omega$. По этой причине Хилл пришел к заключению, что закон распределения скоростей с расстоянием должен быть нелинейным. С возражениями против Хилла выступил Розен [10], [11], который указал, что закон распределения скоростей в зависимости от радиуса противоречит критерию жесткого движения в смысле Борна, а поэтому этот закон не годится для твердого тела, а годится лишь для жидкости. Критерий жесткости по Борну приводит к линейному закону распределения скоростей в зависимости от радиуса. Таким образом, в пространстве Минковского не существует жесткой равномерно вращающейся системы отсчета пригодной для любых расстояний от оси вращения.

При определении физического содержания понятия системы отсчета существует в отличие от аналитического полное единство взглядов. Под системой отсчета понимается либо некоторое тело отсчета, либо совокупность бесконечного числа тел, заполняющих пространство, снабженных масштабами и часами. Иная картина имеет место при рассмотрении геометрического отображения системы отсчета и установлении правил перехода между различными системами. Дискуссии по этим вопросам подробно обсуждались в работах В.И. Родичева [1], [12–14], в которых дан полный анализ трудностей, связанных с описанием систем отсчета. В вышедшей обзорной работе [15] работы Родичева трактуются как преждевременные, однако появившиеся в зарубежной печати статьи [16, 17] показывают, что нетрадиционный подход к НСО постепенно начинает привлекать внимание. В частности метрика равноускоренной НСО, предлагаемая в [16, 17], была найдена автором настоящей работы (раздел I) на семь лет ранее [18].

Из разобранных примеров вытекает, что описание жестких НСО в рамках СТО приводит к логическим трудностям, которые, как будет показано ниже, можно преодолеть путем выхода за рамки плоского пространства–времени. Подобные идеи высказывались В.И. Родичевым, но не получили при его жизни окончательного завершения и признания.

Одним из центральных вопросов, рассматриваемых в работе, является установления правил перехода от НСО к ИСО и наоборот. Этим вопросам в работе уделяется много внимания.

Все НСО мы подразделяем на 2 класса:

1. НСО с заданным законом движения.

2. НСО с заданной структурой.

Наиболее распространенный способ перехода от ИСО к НСО, восходящий к работам Эйнштейна [48], связывается с преобразованием координат нелинейным образом содержащим время (т.е с законом движения сплошной среды в переменных Лагранжа, который получается, например, с помощью интегрирования уравнений движения в переменных Эйлера). Такой способ перехода в НСО и различные модификации нашли отражение в работах Зельманова, Иваницкой, Мицкевича, Владимирова и др. Ясно, что если уравнения движения были заданы в пространстве Минковского, то никакими преобразованиями координат, как содержащими, так и не содержащими время нельзя выйти за рамки плоского пространства-времени, т.к. нельзя получить отличный от нуля тензор Римана-Кристоффеля, если в ИСО он отсутствовал. *НСО с такими свойствами мы относим к НСО 1-го класса.*

В НСО 2-го класса требуется не только знание закона движения сплошной среды, но и заранее задаются свойства СО, определяемые тензорами скоростей деформаций, тензорами угловой скорости вращения

При этом оказывается, что пространство Минковского, например, является "тесным чтобы удовлетворить одновременно даже простейшим требованиям: жесткости (в смысле Борна) и равноускоренности.

Например, в плоском пространстве-времени невозможно твердотельное движение ракеты с постоянным ускорением. В согласии с постулатом, что свойства пространства-времени в космическом корабле до и после включения двигателей должны остаться неизменными, мы будем вынуждены констатировать:

а). Что при равноускоренном движении ракета либо рассыплется (потеряет жесткость), либо разные части ракеты должны двигаться с разным ускорением.

б). Если же принять, что все части ракеты движутся с одинаковым ускорением и ракета при этом сохраняет жесткость, то мы с необходимостью должны выйти за рамки пространства Минковского.

При переходе в НСО 1-го класса неявно используется следующий постулат: Включение силового поля оставляет пространство–время плоским. Мы, в духе идей ОТО, сомневаемся, что этот постулат носит универсальный характер и допускаем, что включение силового поля может изменить структуру пространства–времени. При этом *пространство–время будет искривленным только для наблюдателей в НСО, которые испытывают действие сил поля и сил инерции. Наблюдатели, описывающие движение среды, находясь в ИСО, не подвержены действию сил поля и сил инерции, и для них пространство–время остается плоским.*

Т.к. метрика НСО 2-го класса – риманова, то ясно, что никакими координатными преобразованиями, в том числе и содержащими время, нельзя перейти от ИСО пространства Минковского к НСО пространству Римана.

В работе рассмотрено преобразование от НСО к квази–ИСО, которая представляется в виде конгруенции геодезических линий частиц, свободно падающих с нулевой начальной скоростью относительно НСО. Конгруенция геодезических линий не является жесткой и пространственная метрика содержит в явном виде лоренцевы сокращения. Поэтому возникает естественный вопрос: "Почему при преобразованиях Меллера и при переходах между двумя ИСО, отображаемых преобразованиями Лоренца, никаких лоренцевых сокращений не происходит? "

Для ответа на этот вопрос, описан на языке механики сплошной среды переход между произвольными жесткими ИСО и получены преобразования Лоренца общего вида.

Рассмотрена группа квази–ИСО в однородном поле.

НСО Меллера порождается неоднородным силовым полем, но оставляет жестким в пространстве Минковского как каркас НСО, так и каркас ИСО. Равноускоренная НСО порождается однородным силовым полем и имеет жесткий каркас, однако каркас квази–ИСО деформируется с течением времени вдоль направления поля и его пространственно–временная геометрия является римановой. Возникает вопрос о нахождении преобразований между различными квази–ИСО, движущимися одна относительно другой в заданном силовом поле, эквивалентных преобразованию Лоренца для ИСО. Получены преобразования, сохраняющие метрику квази–ИСО форминвариантной, что означает равноправность рассмотренных квази–ИСО. Получен закон движения для различных квази–ИСО, который является аналогом преобразования Лоренца для ИСО и при равном нулю ускорении совпадает с преобразованиями Лоренца.

Рассмотрены вопросы, связанные с измерениями физических величин в квази–ИСО и НСО. Так как метрика квази–ИСО в однородном поле оказалась римановой, то приходится сталкиваться с определенными трудностями при интерпретации измерений каких–либо физических величин, выражаемых через геометрические объекты. В пространстве Римана отсутствует понятие радиуса–вектора, а временная координата не является временем, как это имеет место в пространстве Минковского в галилеевых координатах. Галилеевы координаты являются эталонными, через которые всегда можно выразить физические величины, заданные в произвольных пространственно–временных координатах. Такая возможность обусловлена тождественным равенством нулю тензора Римана–Кристоффеля в пространстве Минковского, что допускает сведение произвольной метрики к галилеевой во всей области пространства–времени. В римановом пространстве такой опорной эталонной метрики не существует. Использование тетрадного формализма не снимает всех трудностей при интерпретации измерений. Хотя тетрадные компоненты тензоров и являются "физическими однако они суть функции пространственно–временных точек, которые не имеют метрического смысла. Таким образом, возникает вопрос об отыскании эталонных "затравочных"координат. Опираясь на "затравочные"координаты плоского пространства–времени, мы построили метрологию НСО в римановом пространстве–времени, что позволило выяснить метрический смысл измеряемых физических величин.

В качестве примера рассмотрено равноускоренное движение космического корабля с "комфортным"ускорением $_0 = 10\ /^2$. Собственное время космонавтов τ связано со временем наблюдателей в ИСО T и временем квази–ИСО t соотношением

$$\tau = \frac{c}{a_0}\sqrt{\left[1 - \exp\Big(2(1-(1+\beta^2)^{1/2})\Big)\right]} = \frac{c}{a_0}\sin(a_0 t/c),$$

которое сильно отличается от собственного времени

$$\tau_m = (c/a_0)\ln\left(\beta + (1+\beta^2)^{1/2}\right)$$

[7] при рассмотрении равноускоренного движения в пространстве Минковского для больших значений $\beta = (_0/)$. Релятивистский эффект сокращения собственного времени значительно более выражен, чем в СТО. Найденная формула более привлекательна, чем в СТО, для дальних межзвездных путешествий. Например, при $\to \infty$, $\tau = c/a_0 = 347.22$ суток. Это означает, что за год жизни космонавта, движущегося равноускоренно с ускорением свободного падения, по часам ИСО пройдет бесконечно большой промежуток времени. Из приведенных формул следует, что при $\to \infty$ в квази–ИСО проходит время $t = \pi c/(2a)$. Из законов движения следует, что двигаясь с ускорением $_0 = 10\ /^2$ за время (по часам космонавта) меньшее 348 суток можно попасть в любую удаленную точку Вселенной, если последнюю, вопреки релятивистской космологии, отнести к пространству Минковского. Близкие результаты были получены в [16], [17], используя (без ссылки) метрику, полученную нами ранее [18].

Следует отметить, что хотя в пространстве Минковского за время $t = c/(2a_0)$ космонавт пролетает бесконечно большое расстояние, однако относительно квази–ИСО длина пути l остается конечной и вычисляется по формуле

$$l = \int_0^t \sqrt{\left(-g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial t}\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)}\,dt = \frac{c^2}{a_0}(1-\cos(a_0 t/c)).$$

При $t = \pi/2_0$ получаем $l = c^2/a_0$. Физический смысл конечности расстояния l относительно квази–ИСО связан с представлением метрики, учитывающей лоренцево сокращение квази–ИСО относительно НСО. Найденные нами эталонные координаты и время, совпадающие с галилеевыми координатами и временем пространства Минковского, позволили ввести в римановом пространстве преимущественную систему координат, построить в этой системе поле тетрад и сформулировать правила преобразования геометрических объектов от равноускоренной НСО к ИСО.

Рассмотрена также жесткая равномерно вращающееся система отсчета, реализуемая в римановом пространстве–времени. Получена система дифференциальных уравнений для компонент метрического тензора. Система уравнений решается численно. Решение применимо для любого расстояния от центра.

Из рассмотренных в работе задач видно, что простейшие НСО можно реализовать в римановом пространстве–времени, однако не исключена возможность, что и риманово пространство–время, как и евклидово, может оказаться "тесным чтобы описать свойства произвольных НСО.

Дается одно из простейших обобщений риманова пространства, называемого пространством метрической связности [50]. В этом пространстве выведены уравнения структуры, которые являются более общими, чем в римановом.

Целью предлагаемой работы является как дальнейшее развитие нетрадиционного подхода к НСО, так и модернизация традиционного.

Для этого был развит неголономный математический аппарат перехода из ИСО к НСО 1-го класса. Необходимость неголономных преобразований вызвана в общем случае несовпадением гиперповерхностей, ортогональных мировым линиям (т.е. "физических"пространств наблюдателей), с гиперповерхностями одновременных относительно НСО событий. Поэтому, несмотря на голономность закона движения сплошной среды, возникли неголономные реперы, связывающие соседние мировые линии базиса в "физическом"пространстве. Отсюда возникновение отличного от нуля объекта неголономности. Развитый аппарат, несмотря на внешнее различие, оказался по существу эквивалентным теории хронометрических инвариантов Зельманова и монадному обобщению Владимирова.

Разработанный математический аппарат для систем 1-го и 2-го класса был использован для построения электродинамики в НСО.

В работе приведены примеры расчета электромагнитных полей в равноускоренной НСО. Сформулирован критерий отсутствия излучения движущимся зарядом или системой зарядов. Показано, что заряд, совершающий гиперболическое движение достаточно долго не излучает электромагнитной энергии, что согласуется с точкой зрения М. Борна, В. Паули и В. Гинзбурга. Найденное нами решение в римановом пространстве–времени является аналогом решения М. Борна в пространстве Минковского. В отличие от решения Борна найденное нами решение не имеет "горизонта за которым образуется волновая зона, поэтому излучение отсутствует во всей области пространства–времени ИСО.

В построенной автором [18] жесткой равномерно вращающейся системе отсчета, реализуемой в римановом пространстве–времени, для заряженных частиц, "вмороженных"во вращающийся диск, также выполняется критерий отсутствия излучения.

Решена задача о распространении электромагнитных волн в равноускоренной НСО и произведено преобразование полей из НСО в ИСО. На основании полученного решения произведен расчет продольного эффекта Допплера и проведено сравнение результатов, получаемых при расчете этого же эффекта с помощью преобразования Меллера. Сравнение приводит к отличным друг от друга результатам, и только эксперимент может установить какой из этих подходов правомерен.

Нетрадиционный подход позволил рассматривать задачи, которые на первый взгляд не имеют никакого отношения к НСО, но на самом деле оказались с ними тесно связанными.

Возникла новая область проблем, названная автором как "Геометрия пространства–времени и классические поля связанных структур". Рассмотрим вкратце суть проблемы.

В классической электродинамике считается, что поле покоящегося в ИСО точечного заряда является кулоновым вне зависимости от того является ли заряд свободным или сумма сил, действующих на заряд, равна нулю. Например, поле от точечного заряда, подвешенного на нити между обкладками заряженного конденсатора, считается независящим от напряжения на обкладках и принимается равным полю от свободного заряда, т.е. считается сферически–симметричным. С другой стороны поле от этого же заряда, подвешенного на нити между обкладками незаряженного конденсатора, но движущегося равноускоренно, так чтобы натяжения нитей в первом и втором случае были равны, для наблюдателя в НСО будет аксиально–симметричным вне зависимости от того или иного метода перехода в НСО. Итак, одинаковая физическая ситуация, в которой находятся заряды (одинаковые натяжения нити) приводит к полям с разной симметрией! Заряд "знает"о причине, вызывающей натяжение. Налицо парадокс, который требует разрешения.

В предлагаемой работе найдено точное решение для поля заряда в равноускоренной НСО, реализуемое в римановом пространстве–времени, что позволяет отыскивать геометрии и поля от заряженных проводников произвольной формы. При этом оказалось, что для тел, заряженных положительно, "релятивистские поправки"малы и справедлива обычная электростатика в пространстве Минковского. Иная ситуация возникает для проводников, заряженных отрицательно или находящихся во внешнем электрическом поле. Причина этого лежит в том, что заряды на поверхности проводников испытывают силы отрицательного давления со стороны создаваемого ими поля. Силы со стороны решетки препятствуют вылету электронов с поверхности металла. Для каждого из электронов на поверхности проводника возникает ситуация аналогичная их "размещениям"в некоторых равноускоренных НСО. Для каждого из электронов "ускорение"будет очевидно нормально поверхности и направлено внутрь проводника. Роль натяжения нити, вызывающей "ускорение,"будет играть сила со стороны решетки. Величина "ускорения"$a_0 = eE/2m$, где E — напряженность поля в данной точке поверхности, e — заряд электрона, m — масса электрона. Каждый из электронов поверхности находится в римановом пространстве–времени, но пространственные трехмерные сечения при этом являются плоскими. Это позволяет найти потенциал от системы зарядов вне проводника, интегрируя по поверхности проводника в плоском пространстве. Тем самым позволяет найти выражение для тензора электромагнитного поля. Уравнения электродинамики совместно с полученными уравнениями структуры, связывающими кинематические характеристики континуума с тензором кривизны, позволяют в принципе, не обращаясь к уравнениям Эйнштейна, находить геометрию пространства–времени, обусловленную электромагнитным полем связанных зарядов.

Такая программа была реализована автором при решении "школьных"задач:

1. Поле заряженной бесконечной тонкой пластины.

2. Поле заряженного металлического шара.

3. Поле заряженной нити и бесконечного цилиндра конечного радиуса.

При этом оказалось, что поле заряженной пластины реализуется в римановом пространстве–времени постоянной кривизны с метрикой подобной метрике полученной автором для равноускоренного движения.

Энергия электрического поля внутри бесконечно длинного цилиндра перпендикулярного плоскости оказалась равной энергии покоя N электронов, расположенных на заряженной поверхности площади S внутри цилиндра. В эту энергию не входит величина заряда Q элемента площади.

Это остается в силе и для плоскости, заряженной положительно, В этом случае роль массы (т.к. позитроны не являются устойчивыми) играет масса атома проводника, потерявшего один электрон.

Таким образом, собственная энергия зарядов на плоскости оказалась равной их энергии покоя!

Найдено точное выражение для поля и геометрии пространства–времени вне заряженного металлического шара. Любопытно отметить, что если между полным зарядом на шаре Q и массой этого заряда M существует соотношение $Q^2/M^2 = k$ и пробными зарядами вне шара q с массами m имеется аналогичная зависимость (k — гравитационная постоянная, а формулы приводятся в системе СГСЕ), то из нашего решения с большой степенью приближения вытекает известное точное решение Райснера–Нордстрема, характеризующее электровакуумное статическое сферически–симметричное совместное решение уравнений Эйнштейна и Максвелла для поля электрически заряженной точечной массы.

Если радиус заряженного шара устремить к нулю, то получим поле точечного заряда. В работе найдено точное выражение для энергии поля точечного заряда W, которое равняется $W = 2Mc^2$. Это выражение устраняет известную главную трудность классической и квантовой электродинамики, приводящей к бесконечной собственной энергии точечного заряда.

Таким образом наш подход делает классическую электродинамику внутренне–непротиворечивой при переходе к любым достаточно малым расстояниям.

Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении поля заряженной нити. Энергия поля отрицательно заряженной нити на единицу длины при плотной упаковке заряда оказалась равной не бесконечности, как при классическом рассмотрении, а энергии покоя N электронных масс, расположенных на единице длины нити.

В рассматриваемой работе предлагаются простейшие эксперименты , которые могли бы подтвердить или опровергнуть данный метод. Например, емкость заряженного отрицательно металлического шара при подаче к нему напряжения (-50) должна возрасти на 0.8%, для шара заряженного положительно емкость практически не должна измениться. Такой же предполагаемый эффект должен иметь место и для емкости плоского конденсатора.

На основе жесткой сферически–симметричной НСО, базисом которой является релятивистски жесткое тело, где скорость звука равна скорости света, а ускорение (в тетрадах) соответствует ньютоновскому, найдена метрика пространства–времени, которая лишь незначительно отличается от метрики Шварцшильда. Расчет известных эффектов ОТО по найденной метрике близок к классическим. Отличие проявляется лишь в расчете смещения перицентра, который составляет 5/6 от шварцшильдовского. Изменение направления луча света при прохождении вблизи центрального тела совпадает с щварцшильдовским. При выводе метрики уравнения Эйнштейна не использовались.

Если в качестве сферически–симметричной НСО выбрать жесткое тело в классическом смысле этого слова, а закон всемирного тяготения Ньютона считать точным, то пространство–время в такой модели окажется римановым с плоским пространственным сечением. Последняя модель менее точно учитывает эффекты ОТО, давая для смещения перигелия планет величину в 3 раза меньшую, а для отклонения света — величину в 2 раза меньшую, чем расчет по метрике Шварцшильда.

Отметим, что предлагаемая метрика не претендует на ревизию ОТО, а лишь устанавливает более тесную связь между законами Ньютона, Гука, Эйнштейна и выведенными автором уравнениями структуры, которые связывают кинематические характеристики континуума такие, как тензор скоростей деформаций, тензор угловой скорости вращения, и векторы первой кривизны мировых линий частиц среды с тензором кривизны пространства–времени. При этом геометрия пространства–времени не требует в общем виде связи с уравнениями Эйнштейна.

Хотя построенная теория релятивистской жесткой равноускоренной НСО и реализуется в римановом пространстве постоянной кривизны, она не связана непосредственно ОТО. Подход при построении НСО базировался на очевидном требовании отсутствия деформаций и напряжений в твердом теле при его поступательном движении в однородном силовом поле.

Однако наличие кривизны пространства–времени стимулирует к поиску связи (если это возможно) с уравнениями Эйнштейна. Метрика найденной НСО сравнивается с полученным автором точным решением системы уравнений Эйнштейна–Максвелла, где в качестве источника в уравнениях Эйнштейна с "космологической постоянной"используется тензор энергии–импульса электромагнитного поля. Роль "космологической постоянной"при этом выполняет величина $\Lambda = {a_0}^2/(2c^4)$, где a_0 — ускорение, c — скорость света. Найденное решение описывает НСО, представляющую собой невзаимодействующую пыль, находящуюся в равновесии в "параллельных"однородных электрическом и гравитационном полях. Любопытно, что между массами m и зарядами e должна существовать зависимость $e^2/m^2 = 2k$, согласно которой частицы, обладающие зарядом протона, должны иметь массу порядка 10^{-6}, что в $2^{1/2}$ меньше, чем у стабильных элементарных черных дыр "максимонов"[21].

Один из разделов посвящен вопросам метрологии в сферически–симметричном гравитационном поле, рассмотренной вкратце автором в [59]. Центральному сферически–симметричному гравитационному полю в пустоте, определяемому из уравнений Эйнштейна, удалось сопоставить некоторое эквивалентное силовое поле в пространстве Минковского и отобразить движение по геодезическим линиям частиц базиса Леметра в пространстве Эйнштейна на движение этого базиса по мировым линиям в пространстве Минковского. Найдено выражение для напряженности поля, в котором движется этот базис, и получено выражение для энергии поля. Не выходя за рамки ОТО, найдена преимущественная система координат, координаты и время которой совпали с координатами и временем в пространстве Минковского. Оказалось, что радиальная координата Шварцшильда r эквивалентна величине радиуса вектора в пространстве Минковского, а временная координата Шварцшильда t не совпадает со временем пространства Минковского T. Отсюда нашел объяснение известный парадокс ОТО, согласно которому "координатная"скорость частиц базиса Леметра стремится к нулю при приближении к гравитационному радиусу, в то время как сила, действующая на частицы при этом (с точки зрения ОТО) стремится к бесконечности.

На основе найденных формул предсказан следующий эффект:

скорость света, испускаемого с поверхности земли перпендикулярно поверхности, должна быть меньше скорости света, падающего из бесконечности перпендикулярно поверхности на 11.2 км/сек.

Рассмотрено отображение на пространство Минковского известного решения Толмана, из которого в частности вытекает, что при плотности вещества близкой к критической, Вселенная по часам "модели"имеет значительно больший "возраст чем по часам "оригинала". Известно, что понятие "расстояния"в космологии не имеет однозначного смысла и не имеется ни одного "расстояния которое можно было бы назвать "правильным"[49]. Предлагаемый в работе метод позволяет считать "правильными"евклидовы расстояния для закрытой и открытой моделей. Исследования показали, что связь между ОТО, СТО и законом всемирного тяготения Ньютона оказалось более тесной, чем обычно предполагается.

Таким образом, настоящая работа является с одной стороны попыткой развития нетрадиционного подхода к НСО, а с другой стороны на базе НСО возникла совершенно новая область проблем, которая приводит к пересмотру некоторых положений классической теории поля. В согласии с выше изложенным, даже простейшие электростатические поля искривляют геометрию пространства–времени.

Предлагаемая работа является попыткой установления связей между геометрией пространства–времени и классическими полями связанных структур.

Глава 1

НСО С ЗАДАННОЙ СТРУКТУРОЙ

Изложение материала начнем с рассмотрения СО с нетрадиционных позиций, акцентируя основное внимание на причине возникновения кривизны пространства-времени НСО.

1. Уравнения структуры НСО

Обычно при описании свойств произвольных деформируемых систем отсчета в виде сплошной среды считается заданным либо поле 4-скоростей (точка зрения Эйлера), либо закон движения сплошной среды, устанавливающий связь между переменными Эйлера и Лагранжа. Пространство - время считается либо плоским - в случае СТО, либо римановым - в случае общей теории относительности (ОТО). Если гравитационным взаимодействием между частицами можно пренебречь, а внешняя сила, действующая на тело, не является гравитационной, то для описания движения тела применяется релятивистская механика СТО. Иными словами, принято считать, что любые внешние негравитационные поля не искривляют пространства - времени НСО, оставляя ее пространственно - временную геометрию плоской. Искривляются, быть может, только "пространственные сечения геометрия которых в общем случае перестает быть евклидовой. Такая точка зрения является наиболее распространенной в научной литературе по теории относительности и разделяется большинством исследователей.

Несколько в стороне от стандартной трактовки стоят указанные во введении работы В.И. Родичева и работа А.А. Власова [19]. В [19], рассматривая теорию роста кристаллических, плазменных и биологических структур с сохранением их подобия, автор пришел к результату, что рост таких структур возможен в неевклидовом пространстве - времени.

Наш подход базируется на развитии и модернизации идей Родичева и Власова и состоит в следующем:

Пусть в плоском пространстве - времени Минковского с сигнатурой $(+---)$ покоится сплошная среда. В некоторый момент времени $t = t_0$ включается силовое поле любой природы (кроме гравитационного) и сплошная среда приходит в движение. Каковы будут свойства пространства - времени после включения силового поля? Согласно ортодоксальной трактовке свойства пространства - времени останутся неизменными [48].

Наш ответ на этот вопрос будет не столь категоричен и зависит от местонахождения наблюдателя. Если наблюдатель рассматривает движение среды из ИСО, то для него свойства пространства - времени останутся неизменными. Для наблюдателя, связанного с движущейся средой, т.е. находящегося в НСО, свойства пространства - времени могут в общем случае изменяться . Мы допускаем, что включение силового поля для наблюдателя в НСО может изменить свойство пространства - времени, превратив его в искривленное в пределах мировой трубки.

Итак, для наблюдателя из НСО после включения силового поля сплошная среда будет двигаться в некотором пространстве - времени, структуру которого мы хотим определить по заданной структуре силового поля, а также по таким характеристикам континуума как тензор скоростей деформаций $\Sigma_{\mu\nu}$, тензор угловой скорости вращения , $\Omega_{\mu\nu}$ векторам первой кривизны мировых линий частиц среды F_μ .

Переходим к математической постановке задачи. Для движущейся сплошной среды в четырехмерном пространстве - времени с сигнатурой $(+---)$ справедливо разложение

$$\nabla_\mu V_\nu = \Sigma_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu} + V_\mu F_\nu, \tag{1.1}$$

где V_μ - поле 4 - скорости, удовлетворяющее условию нормировки

$$g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 1, \tag{1.2}$$

$g_{\mu\nu}$ - метрический тензор в системе отсчета Эйлера,

$$\Sigma_{\mu\nu} = \nabla_{(\mu} V_{\nu)} - V_{(\mu} F_{\nu)}, \tag{1.3}$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} V_{\nu]} - V_{[\mu} F_{\nu]}, \tag{1.4}$$

$$F_\mu = V^\nu \nabla_\nu V_\mu. \tag{1.5}$$

Круглые скобки, окружающие индексы, служат знаком симметрирования, а квадратные - знаком альтернирования. Греческие индексы могут принимать значения от нуля до трех, латинские от единицы до трех.

Разложение (1.1) можно трактовать с двух точек зрения :

1. Считать, что поле 4 - скорости V_μ известно, например, в результате интегрирования релятивистского уравнения Эйлера или Навье - Стокса при заданной плоской метрике. В этом случае характеристики континуума $\Sigma_{\mu\nu}$, $\Omega_{\mu\nu}$, F_μ могут быть получены по формулам (1.3-1.5), а разложение (1.1) выступает как математическое тождество.

2. Считать заданными функциями $\Sigma_{\mu\nu}$, $\Omega_{\mu\nu}$, F_μ. В этом случае разложение (1.1) превращается в систему дифференциальных уравнений относительно V_ν и $g_{\mu\nu}$. Так как число уравнений системы (1.1) и (1.2) превосходит число неизвестных функций, то то должны выполняться условия интегрируемости. Условием интегрируемости для компонент 4 - скоростей будет соотношение

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x^\epsilon \partial x^\sigma} = \frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\epsilon}. \tag{1.6}$$

Для нахождения связи между геометрическими и кинематическими характеристиками континуума вычислим в явном виде выражение

$$2\nabla_{[\epsilon}\nabla_{\sigma]} V_\nu = 2\partial_{[\epsilon}\partial_{\sigma]} V_\nu + \left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\epsilon\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\nu}}{\partial x^\epsilon} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\rho_{\epsilon\nu} - \Gamma^\mu_{\epsilon\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} \right) V_\mu,$$

из которого следует с учетом (1.1-1.6), что

$$R^\mu_{\epsilon\sigma,\nu} V_\mu = 2\nabla_{[\epsilon}\Sigma_{\sigma]\nu} + 2\nabla_{[\epsilon}\Omega_{\sigma]\nu} + 2\nabla_{[\epsilon}(V_{\sigma]} F_\nu). \tag{1.7}$$

Интегрирование системы (1.1), (1.7), где $R^\mu_{\epsilon\sigma,\nu}$ - тензор кривизны, выражаемый через метрический тензор обычным образом, дает решение задачи о геометрии пространства - времени, в которой реализуется НСО с заданной структурой. Уравнения (1.7) назовем уравнениями структуры НСО [18].

2. Релятивистская жесткая равноускоренная НСО

В качестве НСО в классической механике Ньютона часто используются равноускоренные системы отсчета. Рассмотрим такие системы с релятивистских позиций.

Описание жестких равноускоренных НСО в классической механике не вызывает никаких затруднений. Поле скоростей v_a такой системы можно определить из уравнений в декартовых координатах

$$\frac{\partial v_a}{\partial x_b} + \frac{\partial v_b}{\partial x_a} = 0$$
$$\frac{\partial v_a}{\partial x_b} - \frac{\partial v_b}{\partial x_a} = 0$$

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{\partial v_a}{\partial t} + v_b \frac{\partial v_a}{\partial x_b} = a_a = \text{const}. \tag{2.1}$$

Первое уравнение (2.1) означает равенство нулю тензора скоростей деформаций, т.е. соответствует жесткому движению. Второе отражает отсутствие вращений, т.е. равенство нулю тензора угловой скорости, а третье отражает постоянство ускорения. Решение (2.1) имеет вид

$$v_a = a_a t + v_{0a}, \tag{2.2}$$

где v_{0a} - начальная скорость. Если ускорение постоянно по направлению, а по величине зависит от времени, то решение (2.1) получается в форме

$$v_a = \int_0^t a_a(\tau) d\tau + v_{0a}. \tag{2.3}$$

Итак, классическая ньютонова механика допускает поступательное твердотельное движение с произвольным зависящим от времени ускорением. Если твердое тело поместить в однородное переменное силовое поле, то в процессе его движения никаких деформаций (а, следовательно, и напряжений) не возникает. Невзаимодействующие друг с другом одинаковые частицы пыли, помещенные в такое поле, при равных начальных скоростях движутся так же, как и твердое тело.

Чтобы обобщить классическую концепцию жесткого движения, Борн ввел определение, согласующееся со СТО и ОТО. Согласно этому определению, движение континуума называется жестким (в смысле Борна), если для любой пары частиц тела ортогональный интервал между соответствующими парами мировых линий частиц среды остается постоянным в течение движения. При этом, ортогональный интервал есть расстояние между двумя мировыми линиями частиц, измеренное вдоль бесконечно малой гиперповерхности, ортогональной к обеим мировым линиям частиц. Разница между классическим и релятивистским условиями жесткости состоит в выборе пространственных гиперповерхностей, вдоль которых измеряются расстояния между мировыми линиями частиц тела. При классическом рассмотрении в качестве гиперповерхностей выступают гиперплоскости одновременных событий. Недостатком классического рассмотрения жесткости является нековариантность этого условия относительно преобразований Лоренца, связывающего различные ИСО друг с другом. Очевидно, что гиперплоскости одновременности в одной из ИСО не являются гиперплоскостями одновременности в другой. В то время как борновское условие жесткости лишено этого недостатка. Ортогональность гиперповерхности мировым линиям частиц в одной из ИСО автоматически выполняется и в любых других ИСО. Отсюда понятно, что классически жесткое движение в общем случае не совпадает с движением жестким в смысле Борна. Математически условие жесткости по Борну эквивалентно обращению в нуль релятивистского тензора скоростей деформаций $\Sigma_{\mu\nu}$. Поэтому следовало ожидать, что при релятивистском рассмотрении, если положить $\Sigma_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} = 0$ и определить в согласии с [7] "релятивистское равноускоренное движение, как прямолинейное движение, при котором остается постоянной величина ускорения F в собственной (в каждый данный момент времени) системе отсчета то то мы получим в результате поле 4 - скорости V_μ релятивистской жесткой НСО в СТО.

Такая программа была реализована автором в работе [4]. В качестве собственной системы отсчета использовалась система тетрад удовлетворяющая переносу Ферми - Уолкера [20], в базисе которого задавалось постоянное ускорение. При этом оказалось, что такое движение не может быть реализовано в пространстве Минковского, т.к. полученная система уравнений оказалась несовместной.

Таким образом, в отличие от классической, в релятивистской механике континуума не может быть такой ситуации, когда ускорение всех частиц в сопутствующей системе постоянно и одинаково и конгруенция мировых линий частиц среды жесткая в смысле Борна. Математически это означает , что если в правой части (1.7) положить $\Sigma_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} = 0$, а величину $g_{\mu\nu}F^\mu F^\nu = \mathrm{const}$, то левая часть не обратится в нуль. Следовательно, в пространстве Минковского, где тензор кривизны тождественно равен нулю, не существует жесткой глобально равноускоренной НСО.

Равноускоренная система Меллера может быть реализована по схеме [4], если считать, что одна из лагранжевых частиц, находящаяся в начальный момент времени в начале эйлеровой системы координат, движется с постоянным ускорением в сопутствующей тетраде, а остальные лагранжевы частицы движутся таким образом, чтобы конгруенция мировых линий всех частиц остается жесткой по Борну . Однако, как было отмечено во введении, каждая из лагранжевых частиц движется хотя и с постоянным ускорением, но эти ускорения не равны друг другу. (Более подробно эти вопросы будут обсуждаться далее при рассмотрении релятивистской теории упругости.)

Следовательно , пространство Минковского оказывается "тесным чтобы удовлетворить одновременно критериям жесткости и равноускоренности.

В связи с этим обстоятельством возникает вопрос. Как будет двигаться совокупность одинаковых невзаимодействующих друг с другом частиц, если их поместить в постоянное однородное силовое поле, когда начальные скорости всех частиц равны нулю?

Для конкретности рассмотрим движение заряженной невзаимодействующей пыли в постоянном однородном электрическом поле.

Такая задача решена в [6]. В отличие от системы Меллера, каждая из частиц движется с постоянным в собственной системе отсчета ускорением [7] и их совокупность образует базис релятивистской равноускоренной НСО [6]. Однако такая НСО не является релятивистски жесткой. Факт возникновения зависящих от времени деформаций при движении в однородном поле на наш взгляд очень трудно осмыслить, т.к. одинаковые для любых частиц базиса физические условия привели к движению частиц друг относительно друга.

Для нахождения метрики Логунова или метрики Меллера, рассмотренных выше, исходят из псевдоевклидова интервала, заданного в переменных Эйлера в виде

$$dS^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \tag{2.4}$$

где $x^0 = ct$, x^1 , x^2 , x^3 - декартовы координаты, а закон движения сплошной среды дается для метрик Логунова как:

$$x^1(y^1, t) = y^1 + (c^2/a_0)[\sqrt{1 + {a_0}^2 t^2/c^2} - 1],$$

$$x^2 = y^2, \qquad x^3 = y^3, \qquad x^0 = y^0 \tag{2.5}$$

или

$$x^1(y^1, \tau) = y^1 + c^2/a_0[\cosh(a_0\tau/c) - 1],$$

$$x^2 = y^2, \quad x^3 = y^3, \quad t = (c/a_0)\sinh(a_0\tau/c), \tag{2.6}$$

где в (2.5) в качестве временного параметра используется время в ИСО , а в (2.6) τ - собственное время. Подстановка (2.5) и (2.6) в (2.4) дает соответственно [6]

$$dS^2 = \frac{c^2 dt^2}{1 + {a_0}^2 t^2/c^2} - 2\frac{a_0 t dt dy^1}{(1 + {a_0}^2 t^2/c^2)^{1/2}}$$

$$-(dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2, \tag{2.7}$$

$$dS^2 = c^2(d\tau)^2 - 2\sinh(a_0\tau/c) c d\tau dy^1 - (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2, \tag{2.8}$$

Если из метрик (2.7), (2.8) согласно работе [7] построить трехмерный метрический тензор $\gamma_{kl} = -g_{kl} + g_{0k}g_{0l}/g_{00}$, то для квадратов "физического расстояния "получим соответственно

$$dl^2 = (1 + {a_0}^2 t^2/c^2)(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2, \tag{2.9}$$

$$dl^2 = \cosh^2(a_0\tau/c)(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2. \tag{2.10}$$

Из последних формул следует, что метрика Логунова, как и отмечалось, не является жесткой.

Для преобразования Меллера закон движения имеет вид

$$x^1(y^1, T) = y^1 \cosh(a_0 T/c) + c^2/a_0[\cosh(a_0 T/c) - 1],$$

$$x^2 = y^2, \quad x^3 = y^3, \quad t = c/a_0(1 + a_0 y^1/c^2)\sinh(a_0 T/c), \quad y^0 = cT, \tag{2.11}$$

а метрика Меллера выражается элементом интервала

$$dS^2 = (1 + a_0 y^1/c^2)^2 c^2 (dT)^2 - (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2. \tag{2.12}$$

Выражая в законах движения (2.5), (2.6), (2.11) лагранжевы координаты через эйлеровы, приходим от метрик Логунова и Меллера к псевдоевклидову интервалу (2.4).

Наш подход при построении релятивистской жесткой равноускоренной НСО базируется на требовании отсутствия деформаций в твердом теле при его поступательном движении в однородном поле. Подход объединяет свойства системы Логунова (равноускоренность) и Меллера (жесткость), но при этом внутри мировой трубки пространство - время перестает быть плоским. Математически задача сводится к решению системы (1.1) при условиях, что

$$\Sigma_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} = 0, \quad g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 1, \quad g_{\mu\nu}F^\mu F^\nu = -{a_0}^2/c^4 \tag{2.13}$$

и системы (1.7) с учетом (1.3) и (1.4) при условии, что ускорение $_0$ и скорость света c постоянны. Система (1.1) в переменных Эйлера сводится к виду

$$\nabla_\mu V_\nu = V_\mu F_\nu \tag{2.14}$$

Ее решение проще искать в лагранжевой сопутствующей системе отсчета, в которой

$$V_k = V^k = 0, \qquad V^0 = {g_{00}}^{-1/2}, \qquad V_0 = {g_{00}}^{1/2}. \tag{2.15}$$

Пусть для определенности среда движется вдоль эйлеровой координаты x^1. Тогда метрику НСО в координатах Лагранжа будем искать в виде

$$dS^2 = D(X^1)(dX^0)^2 - A(X^1)(dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2. \tag{2.16}$$

Независимость коэффициента $A(X^1)$ метрики от временной координаты эквивалентно равенству нулю тензора скоростей деформаций, а отсутствие в метрике компонент g_{0k} эквивалентно отсутствию вращений [24]. Решение системы (2.14) приводит к соотношению

$$A(X^1) = \frac{c^4}{4a_0^2 D^2}\left(\frac{dD}{dX^1}\right)^2. \tag{2.17}$$

Подстановка (2.17) в уравнения структуры (1.7) обращает их в тождества. Если сделать преобразование лагранжевых координат X^i в другие лагранжевы координаты y^i по формулам

$$dy^1 = A^{1/2}dX^1, \quad X^0 = y^0, \quad X^2 = y^2, \quad X^3 = y^3,$$

то находим для метрики равноускоренной НСО выражение

$$dS^2 = \exp\left(\frac{2a_0 y^1}{c^2}\right)(dy^0)^2 - (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2. \tag{2.18}$$

где ускорение a_0 направлено вдоль оси y^1 [18]. В равноускоренности НСО (2.18) можно убедиться непосредственно

$$F^1 = \frac{DV^1}{dS} = \frac{dV^1}{dS} + \Gamma^1_{00}\left(V^0\right)^2 = \frac{1}{g_{00}}\Gamma^1_{00} = -\frac{g^{11}}{2g_{00}}\frac{\partial g_{00}}{\partial y^1} = \frac{a_0}{c^2}. \tag{2.19}$$

Остальные компоненты 4-ускорения равны нулю. Найдем геометрию пространства-времени НСО, воспользуясь известной формулой для тензора кривизны [7]

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial y^\alpha \partial y^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial y^\beta \partial y^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial y^\alpha \partial y^\gamma}\right)$$

$$+g_{\mu\nu}\Big(\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\nu}_{\alpha\delta}-\Gamma^{\mu}_{\beta\delta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma}\Big)=g_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{.\beta,\gamma\delta}\quad , \tag{2.20}$$

где символы Кристоффеля $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ вычисляются по формулам

$$\Gamma_{\mu,\alpha\beta}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial y^{\beta}}+\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial y^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y^{\mu}}\Big)\quad , \tag{2.21}$$

$$\Gamma^{\mu}_{.\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\gamma}\Big(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial y^{\beta}}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial y^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\Big), \tag{2.22}$$

Одна независимая компонента тензора кривизны, вычисленная по метрике (2.18), имеет вид

$$R_{10,10}=-\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial {y^1}^2}-\frac{1}{2g_{00}}\Big(\frac{\partial g_{00}}{\partial y^1}\Big)^2\Big]=-\frac{{a_0}^2}{c^4}\exp\Big(\frac{2a_0y^1}{c^2}\Big)\quad . \tag{2.23}$$

Для компонент тензора Риччи $R_{\beta\gamma}=g^{\alpha\gamma}R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ имеем

$$R_{00}=-R_{10,10},\quad R_{11}=-\frac{{a_0}^2}{c^4},\quad R_{10}=0. \tag{2.24}$$

Для скалярной кривизны получаем

$$R=2\frac{{a_0}^2}{c^4}. \tag{2.25}$$

Таким образом, релятивистскую жесткую равноускоренную НСО можно реализовать в пространстве постоянной кривизны.

Если вместо метрики (2.18) в правую часть (2.23) подставить $g_{00}=(1+a_0y^1/c^2)^2$, соответствующую метрике Меллера, то $R_{10,10}=0$, что и следовало ожидать, так как метрика Меллера, выражаемая интервалом (2.12), получена из псевдоевклидова интервала (2.4) путем преобразования координат (закона движения в переменных Лагранжа) (2.11). В нашем случае совместное требование жесткости и равноускоренности не обратило в нуль правой части уравнений структуры (1.7), что и привело к возникновению отличного от нуля тензора Римана-Кристоффеля. Приведенные здесь формулы (2.18), (2.23) получены автором в работе [18] и повторены в [16, 17].

Так как выведенные в этом параграфе соотношения (2.18 - 2.25) являются ключевыми для дальнейшего понимания, то обсудим их более подробно с позиций "здравого"смысла. Рассмотрим в качестве примера космический корабль, двигатели которого развивают постоянную тягу. Массу корабля в собственной системе для простоты считаем неизменной. Ясно, что при работающих двигателях корпус корабля деформируется, но эти деформации при постоянной реактивной силе не будут зависеть от времени, что математически эквивалентно равенству нулю тензора скоростей деформаций. Можно считать экспериментально доказанным фактом, что при постоянной тяге космический корабль не рассыпается (т.е. движется как жесткое в смысле Борна тело). Пусть вдоль корабля от носа к корме закреплен набор одинаковых акселерометров. Зададимся вопросом о показаниях этих приборов. Ясно, что с позиций "здравого"смысла показания акселерометров при рассмотренных условиях должны совпадать! Таким образом, "здравый"смысл с необходимостью приводит к тому, что геометрия пространства-времени внутри корабля - риманова и имеет интервал (2.18)!

Релятивист - ортодокс, связывающий переход в равноускоренную НСО с преобразованием Меллера, должен увидеть, что показания акселерометров должны уменьшаться от кормы корабля к носу по закону

$$a(y) = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0 y}{c^2}},$$

где a_0 ускорение кормы космического корабля, а y - координата вдоль корабля с началом координат на корме. Элемент интервала при этом должен выражаться соотношением (2.12).

Ясно, что с позиций "здравого"смысла разность ускорений в разных точках твердого тела, движущегося поступательно, кажется странной, но только эксперимент должен решить какая же из точек зрения имеет право на существование. Ссылки на "здравый"смысл в научных исследованиях не всегда оправданы, так как нет определения какой смысл считать "здравым".

3. Переход от НСО к КВАЗИ-ИСО

Метрика (2.18) равноускоренной НСО в лагранжевых сопутствующих координатах реализуется в пространстве - времени постоянной кривизны. Встает вопрос, каков должен быть элемент интервала (2.18) в переменных Эйлера x^μ, и каков должен быть закон движения сплошной среды в переменных Лагранжа

$$x^\mu = x^\mu(y^\nu), \tag{3.1}$$

чтобы индуцировать метрику (2.18)? Для нашего случая (2.18) переход к переменным Эйлера не может привести к псевдоевклидову интервалу, поскольку тензор Римана - Кристоффеля отличен от нуля.

Эйлеровы координаты (2.4) можно связать с некоторым жестким телом, линии времени которого совпадают с мировыми линиями частиц этого тела. Эти мировые линии параллельны и их векторы первой кривизны (4 -ускорения) равны нулю. Равенство нулю поля векторов первой кривизны является инвариантным фактором. Таким образом, рассматриваемая эйлерова ИСО относительно любой НСО имеет поле нулевых векторов первой кривизны, т.е. конгруенция мировых линий ИСО относительно любой НСО является геодезической.

Так как вопрос о переходе от ИСО к НСО и обратно является у нас одним из центральных , то обсудим его более подробно.

Пусть в пространстве Минковского покоятся два сорта частиц и пусть частицы одного сорта и разных сортов не взаимодействуют друг с другом. При этом, в каждой физической точке пространства находятся по одной частице разного сорта . Пусть в момент времени $t = t_0$ включается силовое поле, которое действует только на частицы второй группы и не взаимодействует с частицами первой. Под действием силового поля приходят в движение частицы второй группы и их мировые линии искривляются, в то время как частицы первой группы не приобретают ускорения и их мировые линии остаются геодезическими. В качестве наглядного примера с частицами первой группы свяжем систему тонких жестких параллельных стержней, покоящихся в пространстве Минковского , а с частицами второй группы систему полых труб, надетых на стержни и могущих перемещаться по стержням без трения. При этом с внешним полем взаимодействуют только трубы. До включения силового поля мировые линии труб и стержней совпадали и являлись базисом ИСО в пространстве Минковского . После включения силового поля мировые линии обеих групп частиц уже не будут совпадать . Наиболее распространенный способ перехода от ИСО к НСО, восходящий к работам Эйнштейна, связывается с преобразованием координат нелинейным образом содержащим время. При этом неявно используется следующий постулат:

Включение силового поля оставляет пространство - время плоским.

Мы, в духе идей ОТО, сомневаемся, что этот постулат носит универсальный характер и допускаем, что включение силового поля может изменить структуру пространства - времени. При этом пространство - время будет искривленным только для наблюдателей в НСО, которые испытывают действие сил поля и сил инерции. Наблюдатели, описывающие движение среды, находясь В ИСО, не подвержены действию сил поля и сил инерции, и для них пространство - время остается плоским. Хотя частицы первой группы (стержни) не приобретают ускорения под действием силового поля , образуя базис ИСО, однако косвенное влияние они испытывают. Мировые линии этих частиц для наблюдателей в ИСО совпадают с параллельными линиями времени пространства Минковского. Эти же мировые линии с точки зрения наблюдателей из НСО вовсе не обязаны быть параллельными друг другу. Выясним, как изменяется геометрия ИСО для наблюдателей из НСО после включения силового поля, если геометрия НСО задается интервалом (2.18) . Иными словами, мы хотим найти преобразование от равноускоренной НСО к ИСО. Так как на стержни силовое поле не действует то каждая из частиц имеет равное нулю 4 - ускорение относительно любой системы отсчета, т.е. движется по геодезической. По отношению к базису НСО (2.18) имеем для каждой из частиц ИСО уравнения движения

$$\frac{d^2y^\mu}{dS^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{dy^\sigma}{dS}\frac{dy^\nu}{dS} = 0, \tag{3.2}$$

где символы Кристоффеля $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ вычисляются по метрике (2.18) обычным способом. Считая, что частицы базиса ИСО относительно НСО движутся вдоль оси y^1, получим

$$-\frac{d}{dS}\Big(\frac{dy^1}{dS}\Big) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial y^1}\Big(\frac{dy^0}{dS}\Big)^2. \tag{3.3}$$

Кроме того из (2.18) имеем интеграл движения

$$1 + \Big(\frac{dy^1}{dS}\Big)^2 = g_{00}\Big(\frac{dy^0}{dS}\Big)^2. \tag{3.4}$$

Система уравнений (3.3) , (3.4) имеет решение

$$\frac{dy^1}{dS} = -\tan(a_0S/c^2), \qquad y^1 = x^1 + \frac{c^2}{a_0}\ln\ |\cos(a_0S/c^2)\ | \,. \tag{3.5}$$

$$\frac{dy^0}{dS} = \frac{\exp(-a_0x^1/c^2)}{\cos^2(a_0S/c^2)}, \qquad y^0 = \frac{c^2}{a_0}\tan(a_0S/c^2)\exp(-a_0x^1/c^2). \tag{3.6}$$

При выводе учли, что при $S = 0$, $dy/dS = 0$, а лагранжевы координаты y^1 каждой из частиц базиса НСО в начальный момент совпадают с эйлеровыми x^1, которые при интегрировании системы выступали как постоянные интегрирования. Величина $S/c = x^0/c = t$ выступает в качестве координатного времени ИСО, рассмотренной в римановом пространстве - времени. ИСО в пространстве Минковского имеет, как будет показано ниже, другое координатное время.

Подстановка (3.5) и (3.6) в (2.18) при условии, что $y^2 = x^2$, $y^3 = x^3$ дает для элемента интервала ИСО

$$dS^2 = c^2dt^2 - \cos^2(a_0t/c)(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{3.7}$$

Итак, найденная ИСО совпадает с синхронной системой отсчета, в которой линии времени совпадают с геодезическими линиями частиц первой группы. Следуя терминологии [12-14], назовем синхронную нежесткую ИСО, геодезические которой не параллельны, как квази - ИСО, оставляя за жесткой ИСО в пространстве Минковского ее прежнее название . Разрешив систему алгебраических уравнений (3.5), (3.6) относительно x^1, x^0, получим закон движения сплошной среды в переменных Лагранжа равноускоренной НСО относительно квази - ИСО, что дает

$$x^1 = y^1 - \frac{c^2}{2a_0}\ln\left|1 - \frac{{a_0}^2{y^0}^2}{c^4}\exp(2a_0y^1/c^2)\right|,$$

$$x^0 = \frac{c^2}{a_0}\arcsin\left(\frac{a_0y^0}{c^2}\exp(a_0y^1/c^2)\right). \tag{3.8}$$

Подстановка (3.8) в (3.7) снова приводит к интервалу (2.18).

Закон движения (3.8) можно представить в другой форме, принятой в нерелятивистской механике сплошных сред

$$x^1 = y^1 - \frac{c^2}{a_0}\ln\ |\cos(a_0t/c)\ |, \qquad t = t. \tag{3.9}$$

Дифференцирование (3.9) по t дает скорость v^1 каждой из лагранжевых частиц

$$v^1 = c\tan(a_0t/c), \qquad v = \sqrt{(-g_{11}v^1v^1)} = c\sin(a_0t/c). \tag{3.10}$$

Величина этой скорости v не превосходит скорости света и достигает ее за конечный промежуток времени $t_1 = c/(2a_0)$. Отличные от нуля символы Кристоффеля по метрике (3.7) имеют вид

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\cos^2(a_0t/c), \qquad \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\ln\,\cos^2(a_0t/c). \tag{3.11}$$

4 - скорости частиц V^μ могут быть вычислены с помощью закона движения (3.8) по формуле

$$V^\mu = \Theta\frac{\partial x^\mu}{\partial y^0}, \tag{3.12}$$

где скалярный множитель Θ определяется из условия нормировки 4-скорости. Поле 4 - скорости в переменных Эйлера сведется к виду

$$V_1 = -\sin(a_0t/c), \quad V^0 = V_0 = \frac{1}{\cos(a_0t/c)}, \quad \Theta = \exp(-a_0y^1/c^2). \tag{3.13}$$

С помощью формул (3.13) и метрики (3.7) можно убедиться, что тензор скоростей деформаций $\Sigma_{\mu\nu}$ (1.3) и тензор угловой скорости вращения $\Omega_{\mu\nu}$ (1.4) обращаются в нуль, а величина 4 - ускорения $g_{\mu\nu}F^{\mu}F^{\nu} = -a_0^2/c^4$ (1.5) постоянна.

Итак, метрика (3.7) описывает квази - ИСО в римановом пространстве - времени, а поле 4 - скоростей (3.13) описывает движение равноускоренной НСО в переменных Эйлера относительно этой квази - ИСО. Из формул (3.7) и (3.10) следует, что выражение для элемента интервала можно представить в форме

$$dS^2 = c^2dt^2 - (1 - v^2/c^2)(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{3.14}$$

содержащей в явном виде лоренцево сокращение длины квази - ИСО по отношению к наблюдателю из НСО. Если решать систему уравнений (3.4), (3.5), используя метрику Меллера (2.12), а затем перейти в ИСО в согласии с развиваемой здесь схемой, то приходим к интервалу (2.4), не содержащему никаких лоренцевых сокращений. Поэтому возникает естественный вопрос: "Почему при преобразованиях Меллера и при переходах между двумя ИСО, отображаемых преобразованиями Лоренца, никаких лоренцевых сокращений в отличие от (3.14) не происходит?"Для ответа на этот вопрос опишем на языке механики сплошной среды переход между произвольными жесткими ИСО.

4. Переход между жесткими ИСО

Как принято считать, переход от одной жесткой ИСО к другой , движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно, осуществляется с помощью преобразований Лоренца. При рассмотрении перехода от НСО к квази - ИСО и обратно мы считали для простоты, что в начальный момент обе системы были неподвижны одна относительно другой. Для двух различных ИСО это утверждение лишено содержания, так как относительный покой в начальный момент будет покоем в любой момент времени. Математически, движущаяся жесткая ИСО относительно неподвижной задается (1.1) при $\Sigma_{\mu\nu} = 0$, $\Omega_{\mu\nu} = 0$, $F_{\mu} = 0$. Решение имеет вид $V^{\mu} = (const)^{\mu}$, а в переменных Лагранжа получаем закон движения в виде

$$x^{\mu} = V^{\mu}S + \tilde{y}^{\mu}, \tag{4.1}$$

где $\tilde{y}^{\mu}$ - постоянные, нумерующие точки сплошной среды, переменные Лагранжа , $S = \tau$, τ - собственное время. Если выбрать вектор $\tilde{y}^{\mu}$, в начальной гиперплоскости $S = 0$ ортогональной V_{μ}, то $V_{\mu}\tilde{y}^{\mu} = 0$ и из (4.1) получим

$$x^k = V^kS + \tilde{y}^k, \qquad x^0 = V^0S + V_k\tilde{y}^k/V_0. \tag{4.2}$$

Подстановка (4.2) в (2.4) с переходом к 3 - скорости v_k приводит к выражению

$$dS^2 = (dy^0)^2 - (\delta_{kl} - v_kv_l/c^2)d\tilde{y}^kd\tilde{y}^l. \tag{4.3}$$

Если в исходной ИСО выбрать ось x^1 в направлении скорости движущейся системы, то убеждаемся, что в (4.3) , как и в (3.14), присутствуют в явном виде лоренцево сокращение вдоль направления движения. Если от лагранжевых координат $\tilde{y}^k$ перейти к другим лагранжевым координатам y^k с помощью формул $\tilde{y}^1 = V^0y^1$, $\tilde{y}^2 = y^2$, $\tilde{y}^3 = y^3$, то вместо закона движения (4.2) получим преобразования Лоренца, а интервал (4.3) сводится к галилееву виду (2.4).

Итак, в случае ИСО интервал сводится к галилееву виду простым переобозначением номеров лагранжевых частиц, учитывающий лоренцево сокращение с помощью постоянного множителя $V_0 = 1/(1-v^2/^2)^{1/2}$. Для (3.14) этого очевидно сделать в принципе нельзя, т.к. метрика (3.14) - риманова. Из формул (4.2) и из факта, что лоренцевы сокращения длин происходят вдоль направлений параллельных скорости $\vec{v}$ движущейся ИСО, можно получить преобразования Лоренца общего вида, когда $\vec{v}$ не совпадает с координатными осями исходной ИСО. Для этого воспользуемся очевидными тождествами

$$\tilde{y}^k = \tilde{y}^k_{\parallel} + \tilde{y}^k_{\perp}, \quad \tilde{y}^k_{\parallel} = \tilde{y}^p v^k v^p/v^2, \quad \tilde{y}^k_{\perp} = \tilde{y}^p(\delta^{kp} - v^k v^p/v^2), \tag{4.4}$$

где $\tilde{y}^k_{\parallel}$ - вектор параллельный скорости $\vec{v}$, а $\tilde{y}^k_{\perp}$ -вектор перпендикулярный $\vec{v}$. По аналогии с проделанным выше , переходим к другим лагранжевым координатам y^k с помощью замены : $\tilde{y}^k_{\parallel} = V^0 y^k_{\parallel}$, $\tilde{y}^k_{\perp} = y^k_{\perp}$. В результате приходим к соотношению

$$\tilde{y}^k = y^k - y^p \frac{v^k v^p}{v^2} + y^p \frac{v^k v^p}{v^2} V^0. \tag{4.5}$$

Из (4.5) и (4.2) имеем соотношения

$$\vec{r} = \vec{R} + \frac{\vec{v}\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \Big(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\Big)\frac{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{R})}{v^2},$$

$$t = \frac{\tau + (\vec{v}\cdot\vec{R})/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{4.6}$$

совпадающие с формулами Лоренца общего вида [1], [3], а интервал (4.3) преобразуется к галилееву виду. Таким образом, при переходах между двумя ИСО преобразования (4.6) и (4.2) физически эквивалентны, т.к. связаны одно с другим простой заменой номеров у лагранжевых координат. В (3.14) такой прием не проходит, т.к. скорость v явно зависит от времени. В отличие от переходов между двумя ИСО в пространстве Минковского, нечувствительность к лоренцеву сокращению преобразования Меллера связана с неоднородностью ускорений частиц базиса. Совокупность двух факторов: лоренцева сокращения ИСО с точки зрения наблюдателя из НСО и удлинения расстояния между мировыми линиями НСО в плоскости одновременных событий ИСО (на гиперповерхности ортогональной мировым линиям в НСО эти расстояния сохраняются) приводит их к взаимной компенсации. Хотя переход от НСО Меллера к ИСО и связан с преобразованием координат в пространстве Минковского нелинейным образом содержащим время, однако эта система не является глобально равноускоренной. Поэтому вывод работы [16], "что среди жестких систем отсчета с одним измерением в плоском пространстве - времени допустимы только равноускоренные и инерциальные системы отсчета"с нашей точки зрения справедлив лишь для инерциальных.

5. Группа КВАЗИ-ИСО в однородном поле

НСО Меллера порождается неоднородным силовым полем, но оставляет жестким в пространстве Минковского как каркас НСО, так и каркас ИСО. НСО (2.18) порождается однородным силовым полем и имеет жесткий каркас, однако каркас квази - ИСО деформируется с течением времени вдоль направления поля и его пространственно - временная геометрия является римановой. Возникает вопрос о нахождении преобразований между различными квази - ИСО, движущимися одна относительно другой в заданном силовом поле, эквивалентных преобразованию Лоренца для ИСО.

Чтобы найти закон движения одной квази - ИСО относительно другой, будем попрежнему исходить из системы (3.3) (3.4), считая, однако, что при $S = 0$ величины начальных скоростей базиса квази - ИСО одинаковы и отличны от нуля. Под трехмерной скоростью v^k частиц базиса квази - ИСО относительно НСО, как и в стационарном гравитационном поле [7], будем понимать трехмерный вектор, определяемый равенством

$$v^k = \frac{cdy^k}{(g_{00})^{1/2}(dy^0 + (g_{0k}/g_{00})dy^k)}, \tag{5.1}$$

вытекающим из измерения скорости по собственному времени НСО, определенному по часам, которые синхронизованы вдоль траекторий частиц базиса квази - ИСО.

Вектор скорости для метрики (2.18) приводится к виду

$$v^1 = c\exp(-\frac{a_0 y^1}{c^2})\frac{dy^1}{dy^0}, \qquad v = \sqrt{\gamma_{11}v^1v^1}. \tag{5.2}$$

Интегрирование системы (3.3), (3.4) дает

$$\frac{dy^1}{dS} = -\tan(a_0S/c^2 +{}_1), \quad y^1 = \frac{c^2}{a_0}\Big[\ln\ |\cos(a_0S/c^2 +{}_1)\ | + c_2\Big]. \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered}\frac{dy^0}{dS} = \frac{\exp(-c_2)}{\cos^2(a_0S/c^2 + c_1)},\\ y^0 = \frac{c^2}{a_0}\Big[\tan(a_0S/c^2 + c_1) + c_3\Big]\exp(-c_2),\\ y^2 = z^2, \quad y^3 = z^3, \quad s = z^0,\end{gathered} \tag{5.4}$$

где постоянные интегрирования c_1, c_2, c_3 определим из начальных условий.

Из (5.2) - (5.4) следует, что

$$v^1 = -c\sin(a_0S/c^2 + c_1). \tag{5.5}$$

Пусть при $S = 0$, $v^1/c = -\beta = \text{const}$. Откуда находим

$$\sin c_1 = \beta. \tag{5.6}$$

Пусть далее при $S = 0$ лагранжевы координаты y^1 базиса НСО связаны с эйлеровыми координатами z^1 базиса квази - ИСО по закону

$$y^1(0) = f(z^1, \beta), \quad c_2 = \frac{af}{c^2} - \ln|\cos c_1|. \tag{5.7}$$

Откуда

$$y^1 = \frac{c^2}{a_0} \ln\left|\frac{\cos(a_0 S/c^2 +{}_1)}{\cos c_1}\right| + f(z^1, \beta). \tag{5.8}$$

Для нахождения функции $f(z^1, \beta)$ (при интегрировании системы (3.3) и (3.4) эта функция выступает как постоянная интегрирования) и c_3 используем известный факт, что метрику произвольной квази - ИСО можно свести к синхронной, так что:

$$\tilde{g}_{00}(z^\alpha) = \frac{\partial y^\mu}{\partial z^0}\frac{\partial y^\nu}{\partial z^0} g_{\mu\nu} = g_{00}\left(\frac{\partial y^0}{\partial z^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial y^1}{\partial z^0}\right)^2 = 1,$$

$$\tilde{g}_{01}(z^\alpha) = \frac{\partial y^0}{\partial z^0}\frac{\partial y^0}{\partial z^1} g_{00} - \frac{\partial y^1}{\partial z^0}\frac{\partial y^1}{\partial z^1} = 0,$$

$$\tilde{g}_{11}(z^\alpha) = g_{00}\left(\frac{\partial y^0}{\partial z^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial y^1}{\partial z^1}\right)^2 = -\left(\frac{\partial f}{\partial z^1}\right)^2 \cos^2(a_0 z^0/c^2 + c_1). \tag{5.9}$$

Из равенства $\tilde{g}_{01} = 0$ вытекает соотношение

$$\frac{2}{a_0}\frac{\partial c_3}{\partial z^1} = c_3 \frac{\partial f}{\partial z^1}, \tag{5.10}$$

интегрирование которого дает

$$c_3 = \exp\left(\frac{a_0 f}{c^2}\right)\psi(\beta), \tag{5.11}$$

где $\psi(\beta)$ произвольная функция. Функции $f(z^1, \beta)$ и $\psi(\beta)$ можно найти из принципа соответствия , т.е. из требования, что при равном нулю ускорении a_0 метрики (3.7) и искомая были связаны преобразованием Лоренца. В результате находим

$$\psi(\beta) = -\tan c_1, \qquad f(z^1, \beta) = \frac{z^1}{\cos c_1}. \tag{5.12}$$

Закон движения базиса квази - ИСО относительно НСО имеет вид

$$y^1 = \frac{c^2}{a_0} \ln\left|\frac{\cos(a_0 z^0/c^2 + c_1)}{\cos c_1}\right| + \frac{z^1}{\cos c_1},$$

$$y^0 = \frac{c^2}{a_0}\cos c_1 \exp\left(-\frac{a_0 z^1}{c^2 \cos c_1}\right)$$

$$\left[\tan\left(a_0 z^0/c^2 + c_1\right) - \tan c_1 \exp\left(\frac{a_0 z^1}{c^2 \cos c_1}\right)\right],$$

$$\sin c_1 = v_0/c = \beta. \tag{5.13}$$

Если в (5.13) перейти к пределу $a_0 \to 0$, то получим выражение, совпадающее с преобразованием Лоренца.

$$y^1 = \frac{z^1 - \beta z^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y^0 = \frac{z^0 - \beta z^1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.14}$$

При $c^1 = 0$, $z^\alpha = x^\alpha$ получим (3.5), (3.6). Используя закон движения (5.13) и метрику (2.18), находим для элемента интервала выражение

$$dS^2 = (dz^0)^2 - \frac{\cos^2(a_0 z^0/c^2 + c^1)}{\cos^2 c_1}(dz^1)^2 - (dz^2)^2 - (dz^3)^2. \tag{5.15}$$

Закон движения одной квази - ИСО относительно другой можно найти , если исключить из (5.13), (3.5) и (3.6) y^1 и y^0. В результате получим

$$x^0 = \frac{c^2}{a_0}\arcsin[\sin\tilde{z}^0 - \tan c_1 \cos\tilde{z}^0 \exp(\tilde{z}^1)],$$

$$x^1 = \frac{c^2}{a_0}\Big[\tilde{z}^1 - \ln|\cos c_1 U|\Big]$$

$$U = \sqrt{1 + 2\tan\tilde{z}^0 \tan c_1 \exp(\tilde{z}^1) - \tan^2 c_1 \exp(2\tilde{z}^1)},$$

$$\tilde{z}^0 = a_0 z^0/c^2 + c_1, \quad \tilde{z}^1 = \frac{a_0 z^1}{c^2\cos c_1}, \quad x^2 = z^2, \quad x^3 = z^3. \tag{5.16}$$

Формулы (5.16) отображают переход между двумя квази - ИСО, одна из которых в начальный момент покоилось относительно НСО, а другая имела отличную от нуля начальную скорость. Переход к пределу при $a_0 \to 0$ снова приводит к преобразованию Лоренца.

$$x^1 = \frac{z^1 - \beta z^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x^0 = \frac{z^0 - \beta z^1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.17}$$

Если в законе движения (5.16) ввести преобразование координат вида

$$z^0 + c_1 c^2/a_0 = u^0, \qquad z^1/\cos c_1 = u^1, \qquad z^2 = u^2, \qquad z^3 = u^3, \tag{5.18}$$

тогда метрика (5.15) примет вид

$$dS^2 = (du^0)^2 - \cos^2(a_0 u^0/c^2)(du^1)^2 - (du^2)^2 - (du^3)^2. \tag{5.19}$$

Заменив в законе движения (5.16) безразмерные координаты $\tilde{z}^0$ и $\tilde{z}^1$ и выразив через u^0 и u^1 в виде $\tilde{z}^0 = a_0 u^0/c^2$, $\tilde{z}^1 = a_0 u^1/c^2$, получаем преобразования, сохраняющие метрику (3.7) форминвариантной, в чем можно убедиться, сравнив (3.7) и (5.19).

Поэтому можно сформулировать обобщенный принцип относительности для квази - ИСО, аналогичный принципу относительности для равноускоренных систем, сформулированному Логуновым [6]:

Для любой квази - ИСО в однородном силовом поле найдется набор других квази - ИСО, в которых метрики форминвариантны. Вследствие чего все физические уравнения в этих квази - ИСО имеют один и тот же вид, а потому никакими физическими опытами нельзя установить в какой из таких квази - ИСО мы находимся.

Это означает равноправность рассмотренных квази - ИСО.

Закон движения двух различных квази - ИСО, оставляющих метрики форминвариантными, может быть представлен в виде

$$x^0 = \frac{c^2}{a_0}\arcsin\left[\sin\left(\frac{u^0 a_0}{c^2}\right) - \tan c_1 \cos\left(\frac{u^0 a_0}{c^2}\right)\exp\left(\frac{a_0 u^1}{c^2}\right)\right],$$

$$x^1 = u^1 - \frac{c^2}{a_0}\ln|\cos c_1 P|,$$

$$P = \sqrt{1 + 2\tan\left(\frac{u^0 a_0}{c^2}\right)\tan c_1 \exp\left(\frac{a_0 u^1}{c^2}\right) - \tan^2 c_1 \exp\left(\frac{2a_0 u^1}{c^2}\right)}. \tag{5.20}$$

Закон движения (5.20) для различных квази - ИСО - аналог преобразования Лоренца для ИСО.

6. Эталонные координаты в квази - ИСО

Так как метрика квази - ИСО в однородном поле оказалась римановой, то приходится сталкиваться с определенными трудностями при интерпретации измерений каких - либо физических величин, выражаемых через геометрические объекты. В пространстве Римана отсутствует понятие радиуса - вектора, а временная координата не является временем, как это имеет место в пространстве Минковского в галилеевых координатах. Галилеевы координаты являются эталонными, через которые всегда можно выразить физические величины, заданные в произвольных пространственно - временных координатах. Такая возможность обусловлена тождественным равенством нулю тензора Римана - Кристоффеля в пространстве Минковского, что допускает сведение произвольной метрики к галилеевой во всей области пространства - времени. В римановом пространстве такой опорной эталонной метрики не существует. Использование тетрадного формализма не снимает всех трудностей при интерпретации измерений. Хотя тетрадные компоненты тензоров и являются "физическими однако они суть функции пространственно - временных точек, которые не имеют метрического смысла.

Рассматривая метрику квази - ИСО (3.7), можно убедиться, что при $a_0 = 0$ она переходит в метрику пространства Минковского , заданную в галилеевых координатах. Однако отсюда не следует, что x^k и t эталонные координаты и время заданной квази - ИСО. Оставаясь в рамках квази - ИСО, можно и при том бесчисленным способом так "перенумеровать"пространственно - временные координаты $t = f(z^k, T)$, $x^K = \phi(z^r)$ (в согласии с А.Л.Зельмановым [24] указанные преобразования не выводят за рамки квази - ИСО), что новая метрика также будет совпадать с галилеевой при $_0 = 0$.

Таким образом, возникает вопрос об отыскании эталонных "затравочных"координат для метрики (3.7). В разделе 3 для установления соответствия между НСО и квази - ИСО мы рассмотрели две группы частиц : одна из которых (первая) не подвержена действию силового поля (система параллельных жестких стержней). С этой системой мы связали галилееву систему координат в пространстве Минковского. Другая группа частиц, подверженная действию силового поля, которую мы связали с системой полых труб, скользящим по стержням с постоянным ускорением. При этом оказалось, что метрика для наблюдателей в НСО риманова. Рассматривая с позиций наблюдателей из НСО движение стержней относительно труб как конгруенцию геодезических, мы установили, что геометрия такой квази - ИСО также риманова. С ортодоксальной точки зрения законы движения (3.5), (3.6) можно трактовать как переход из НСО в квази - ИСО, а (3.8) как переход из квази - ИСО в НСО. Из развитой нами схемы эти слова означают фактически, что наблюдатель, оставаясь в НСО, проводит свои измерения в координатах квази - ИСО (3.7). Геометрические объекты, заданные в аффинных реперах НСО, выражаются через аффинные реперы квази - ИСО при помощи законов движения (3.5), (3.6).

Для выяснения метрического смысла координат (3.7) нужно установить соответствие между ИСО (2.4) и квази - ИСО (3.7).

Отвлекаясь от метрических свойств, рассмотрим элементарное многообразие [25]. Как известно, в элементарном многообразии можно ввести координатную сетку, нумерующую элементы многообразия, задавать тензоры, кривые, поверхности. Но отсутствие связности не позволяет сравнивать геометрические объекты в различных точках, а отсутствие метрики не позволяет определять длину дуги кривой. Для превращения многообразия в пространство нужно задать или объект связности (тогда многообразие превращается в пространство аффинной связности), или метрический тензор (тогда многообразие превращается в риманово пространство), или независимо и то, и другое. Число различных пространств, которые могут быть построены на данном многообразии, произвольно. Однако нас интересует случай, когда многообразие содержит два пространства: пространство Минковского, базисом которого являются частицы первой группы (стержни) с метрикой (2.4) и пространство Римана, базисом которого являются эти же самые частицы (стержни), которые рассматриваются движущиеся по геодезическим относительно НСО, а метрика задается соотношением (3.7). Присвоим частицам первой группы одинаковые с точки зрения обеих пространств номера, что математически эквивалентно введению общей трехмерной пространственной координации в пространстве Минковского и Римана. Аналогичным образом одинаковые номера (лагранжевы координаты) припишем с точки зрения двух пространств и частицам второй группы. Связь между временными координатами пространства Минковского и Римана найдем из совпадения законов движения частиц среды в переменных Лагранжа. Фактически последнее означает, что движущиеся и неподвижные наблюдатели при встрече в любых точках пространства "увидят"в точках пересечения одну и ту же "картину ". Т.е., если с точки зрения движущегося наблюдателя его частица с номером n пересеклась с неподвижной частицей номера m, то и наблюдатель на неподвижной частице m придет к такому же заключению. Математически это означает, что факт пересечения частиц m и n является инвариантным. Приравнивание лагранжевых и эйлеровых координат в законах движения (2.5) и (3.9), с предварительной заменой в (2.5) t на T, где T - мировое время в пространстве Минковского, приводит к соотношению, связывающему эталонное время T с мировым временем t квази - ИСО.

$$t = \frac{c}{a_0}\arccos\Big[\exp\Big(1-\sqrt{1+\frac{{a_0}^2T^2}{c^2}}\Big)\Big]. \tag{6.1}$$

После чего интервал квази - ИСО (3.7) можно переписать в эталонных координатах пространства Минковского

$$\begin{gathered}
dS^2 = g_{00}c^2dT^2 - g_{11}(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2,\\
g_{00} = \frac{\beta^2\exp\Big(2(1-(1+\beta^2)^{1/2})\Big)}{(1+\beta^2)\Big[1-\exp\Big(2(1-(1+\beta^2)^{1/2})\Big)\Big]},\\
g_{11} = \exp\Big(2(1-(1+\beta^2)^{1/2})\Big), \qquad \beta = \frac{a_0T}{c}.
\end{gathered} \tag{6.2}$$

Собственное время НСО (2.18), которое определим как и в случае статических гравитационных полей [7] по правилу

$$\tau = \frac{1}{c}(g_{00})^{1/2}y^0$$

получается из соотношений (3.8), (3.9), (6.1).

$$\tau = \frac{c}{a_0}\sqrt{\Big[1-\exp\Big(2(1-(1+\beta^2)^{1/2})\Big)\Big]} = \frac{c}{a_0}\sin(a_0t/c). \tag{6.3}$$

Итак, опираясь на "затравочные"координаты плоского пространства - времени, мы построили метрологию НСО в римановом пространстве - времени, что позволяет выяснить метрический смысл измеряемых физических величин. При $a_0 \to 0$ метрика (6.2) (как и (3.7)) переходит в галилееву, однако в отличие от (3.7) координатная сетка (6.2) является эталонной.

Парадокс часов и расстояний

В качестве примера рассмотрим равноускоренное движение космического корабля с "комфортным"ускорением $_0 = 10\ /^2$. Собственное время космонавтов τ связано со временем наблюдателей в ИСО соотношением (6.3), которое сильно отличается от собственного времени $\tau_m = (c/a_0)\ln\left(\beta + (1+\beta^2)^{1/2}\right)$ [7] при рассмотрении равноускоренного движения в пространстве Минковского для больших значений $(_0/)$. В согласии с (6.3) релятивистский эффект сокращения собственного времени значительно более выражен, чем в СТО. Формула (6.3) более "оптимистична чем в СТО, для дальних межзвездных путешествий. Например, при $\to \infty$, $\tau = c/a_0 = 347.22$ суток. Это означает, что меньше, чем за год жизни космонавта, движущегося равноускоренно с ускорением равным ускорению свободного падения на поверхности земли, по часам ИСО пройдет бесконечно большой промежуток времени. Из (6.1), (6.3) следует, что при $\to \infty$ в квази - ИСО проходит время $t = \pi c/(2a_0)$. Из законов движения (2.5) и (3.9) следует, что двигаясь с ускорением $_0 = 10\ /^2$ за время (по часам астронавта) меньшее 348 суток можно попасть в любую удаленную точку Вселенной, если последнюю , вопреки релятивистской космологии, отнести к пространству Минковского.

Следует отметить, что хотя в пространстве Минковского за время $t = \pi c/(2a_0)$ космонавт пролетает бесконечно большое расстояние, однако относительно квази - ИСО длина пути l остается конечной и вычисляется по формуле

$$l = \int_0^t \sqrt{\left(-g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial t}\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)}\,dt = \frac{c^2}{a_0}(1 - \cos(a_0 t/c)). \tag{6.4}$$

которая получена из метрики (3.7) и закона движения (3.9). При $t = \pi/2_0$ получаем $l = c^2/a_0$. Физический смысл конечности расстояния l относительно квази - ИСО связан с представлением метрики (3.7) в форме (3.14), учитывающей лоренцево сокращение квази - ИСО относительно НСО.

Если для расчета расстояния воспользоваться воспользоваться формулой (6.4) с метрикой (2.4) и законом движения (2.5) с заменой $t \to T$, то получим

$$l_1 = \int_0^T \sqrt{\left(-g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial T}\frac{\partial x^1}{\partial T}\right)}\,dT = \frac{c^2}{a_0}\left(\sqrt{1 + \frac{a_0^2 T^2}{c^2}} - 1\right). \tag{6.5}$$

Хотя в нерелятивистском приближении обе формулы приводят к одинаковому результату $l = a_0 t^2/2$, $l_1 = a_0 T^2/2$, однако для больших значений T они сильно отличаются друг от друга.

В согласии с (3.10) собственное время космонавта, вычисляемое по формуле (6.3), с одной стороны ограничено скоростью света c в вакууме, а с другой - в точности совпадает с классической формулой нерелятивистской ньютоновской механики

$$\tau = \frac{v}{a_0}. \tag{6.6}$$

Достижение предельной скорости c, как отмечено выше, происходит за конечное время по часам космонавта и за бесконечное время по часам в ИСО. При времени $\tau > c/a_0$ полученное решение перестает быть справедливым , т.к. выводит космонавта за "пределы"пространства - времени Минковского.

Сравним найденные нами результаты с теорией хронометрических инвариантов Зельманова [24].

Для хронометрического вектора трехмерной скорости u^1 имеем [53]

$$u^1 = \frac{cg_{00}^{1/2}dx^1}{g_{0k}dx^k} = \frac{cdx^1}{g_{00}^{1/2}dT} = c\tan(a_0 t/c), \tag{6.7}$$

а его величина дается формулой

$$u = \sqrt{\left(\frac{g_{i0}g_{j0}}{g_{00}} - g_{ij}\right)u^i u^j} = c\sin(a_0 t/c), \tag{6.8}$$

что совпадает с (3.10).

В качестве конкретного примера рассмотрим полет космического аппарата в какую либо из звездных систем. Пусть путь ракеты пролегает вблизи звездной системы Проксима-Центавра, расстояние до которой четыре световых года. Допустим, что двигатели ракеты во все время полета развивают постоянную (в собственной системе отсчета) тягу и ракета движется с комфортным для астронавтов ускорением 10 $/c^2$, создавая тем самым в ракете поле тяготения, аналогичное земному. Вычислим, какой промежуток времени по земным часам и часам астронавтов займет полет до промежуточной звездной системы Проксима-Центавра, мимо которой пролетают космонавты, двигаясь равноускоренно. Вычисление будем проводить двумя способами:

1. Стандартным способом для релятивистского равноускоренного прямолинейного движения с постоянным ускорением a_0 в собственной (в данный момент времени) системе отсчета [7].

2. Способом, предложенном нами.

Рассмотрим первый способ:

1. Допустим, что в начальный момент времени пространства Минковского ракета с нулевой начальной скоростью стала двигаться равноускоренно вдоль оси x из начала координат. Тогда ее смещение $x(T)$ в любой момент времени T определяться хорошо известной формулой [7], совпадающей с (6.5)

$$x(T) = l_1 = \int_0^T \sqrt{\left(-g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial T}\frac{\partial x^1}{\partial T}\right)}\, dT = \frac{c^2}{a_0}\left(\sqrt{1 + \frac{a_0^2 T^2}{c^2}} - 1\right). \tag{6.9}$$

Пусть через время T_1 по часам пространства Минковского ракета пролетает мимо звездной системы Проксима-Центавра (ближайшая Центавра). Тогда имеет место очевидное равенство

$$cT_0 = x(T_1), \quad T_0 = 4\,.$$

Разрешив алгебраическое уравнение (6.9), находим

$$T_1 = T_0\sqrt{1+\frac{2c}{a_0T_0}} = 1.215T_0 = 4.86\,. \tag{6.10}$$

Собственное время астронавтов τ_1, пролетающих мимо указанной звездной системы, дается соотношением [7]

$$\tau_1 = \frac{c}{a_0}\,\mathrm{arsinh}\,\frac{a_0T_1}{c} = 0.555T_0 = 2.22\,. \tag{6.11}$$

Величина скорости $v(T_1)$ пролета ракеты в момент T_1

$$v(T_1) = \frac{a_0T_1}{\sqrt{1+\frac{a_0^2T_1^2}{c^2}}} = 0.981c. \tag{6.12}$$

2. Решим эту же самую задачу, используя наш способ расчета, считая что после включения двигателя ракеты пространство-время внутри мировой трубки ракеты искривляется. Очевидно, что при любом способе расчета факт, что ракета "попала в цель"(например, к несчастью, столкнулась с метеоритом), является инвариантным фактом. В принципе не может быть такой ситуации, когда одна и та же ракета при одном способе расчета потерпела крушение, а при другом - продолжала безаварийный полет. Однако момент времени столкновения зависит от способа расчета. Из инвариантности факта пересечения двух частиц вне зависимости от метода расчета нами была получена формула (6.1). К счастью, ракета в нашей задаче летела без аварий и из формулы (6.1), (6.10) найдем связь между временем, прошедшим в квази – ИСО t_1 и временем ИСО T_1, соответствующих нахождению космического корабля в одной и той же точке пространства

$$t_1 = \frac{c}{a_0}\arccos\Big[\exp\Big(1-\sqrt{1+\frac{{a_0}^2T_1^2}{c^2}}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{c}{a_0}\arccos\Big[\exp\Big(-\frac{a_0T_0}{c}\Big)\Big] = 0.37T_0 = 1.48\,. \tag{6.13}$$

Собственное время астронавтов τ_2 для нашего случая в согласии с (6.3) имеет вид

$$\tau_2 = \frac{c}{a_0}\sin(a_0t_1/c) = 0.238T_0 = 0.952\; = 347.17\,. \tag{6.14}$$

Проведем анализ полученных результатов.

Из рассмотренного следует, что наш способ расчета приводит к заниженному времени путешествия астронавтов по сравнению с СТО. Следует отметить, что после прохождения времени полета 347 суток время для астронавта как бы останавливается. Если для преодоления дистанции в 4 световых года астронавту понадобилось 347.17 суток, то для преодоления много больших расстояний ему требуется 347.22 сутки. Итак, за последние 72 минуты астронавт, двигаясь равноускоренно с ускорением $10\,/^2$, преодолевает практически любые расстояния в пространстве Минковского в сотни тысяч световых лет. Максимальная длина, которую может преодолеть астронавт относительно квази - ИСО, двигаясь с ускорением $10\,/^2$ за бесконечное относительно ИСО время, и за равное относительно квази - ИСО 347 суток 1 час и 12 минут, равна $c^2/a_0 = 9\cdot 10^{12}$, что чуть меньше светового года, равного $9.46 \cdot 10^{12}$. Это связано с лоренцевыми сокращениями квази - ИСО относительно движущейся ракеты (3.14). Пространство квази - ИСО при скорости ракеты, стремящейся к скорости света, как бы сжимается (лоренцево сокращение) навстречу космическому кораблю, что и приводит к заметному отличию пройденного пути в ИСО и квази - ИСО. В СТО, двигаясь относительно ИСО, астронавт в любой момент времени имеет точно такую же координату, что и относительно квази - ИСО. Путь относительно ИСО совпадает с координатой x, вдоль которой движется ракета. Путь $c^2/a_0 = 9 \cdot 10^{12}$ относительно квази - ИСО не совпадает с координатой x, а соответствует бесконечно большому пути относительно ИСО.

Отметим, что основной и непреодолимой трудностью рассмотрения равноускоренного движения в СТО является нестационарность пространственной метрики в сопутствующей системе отсчета. Например, для рассмотренного выше случая движения космического корабля, длина ракеты в системе отсчета, связанной с ней, должна возрастать, что следует из формул (2.9) и (2.10). Из этих формул следует, что первоначальная длина ракеты L_0 при подлете ракеты к созвездию Проксима-Центавра должна возрасти до величины L, определяемой формулой

$$L = L_0\sqrt{1 + \frac{a_0^2 T_1^2}{c^2}} = 5.2 L_0. \tag{6.15}$$

Возрастание длины ракеты в 5.2 раза весьма трудно объяснимо. В нашем случае такого парадокса не происходит, и ракета сохраняет свою длину неизменной, двигаясь как жесткое в смысле Борна тело.

Окончательный же ответ на вопрос применимости той или иной теории может дать только опыт.

7. Переход от НСО к ИСО и от НСО к НСО

Найденные нами эталонные координаты и время, совпадающие с галилеевыми координатами и временем пространства Минковского, позволяют ввести в римановом пространстве преимущественную систему координат. Т.к. метрика (6.2) ортогональна, то для построения поля тетрад можно векторы орторепера $\vec{e}_\alpha$ совместить с векторами аффинного репера и поле тетрад записать в виде:

$$e^\mu_{(\alpha)} = \frac{\delta^\mu_\alpha}{\sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}}, \qquad e^{(\alpha)}_\mu = \delta^\alpha_\mu \sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}, \tag{7.1}$$

где суммирование по α отсутствует. Тетрадные компоненты тензоров совпадают с "физическими". Например, для трехмерной скоростью $u^{(k)}$, рассмотренной в предыдущем разделе, при рассмотрении движения космонавта, находим

$$u^{(k)} = c\frac{dx^{(k)}}{dx^{(0)}} = c\frac{e^{(k)}_\mu dx^\mu}{e^{(0)}_\nu dx^\nu}. \tag{7.2}$$

Для рассматриваемого нами случая находим

$$u^{(1)} = c\frac{\sqrt{|g_{11}|}dx^1}{\sqrt{|g_{00}|}dx^0} = c\sin\left(\frac{a_0 t}{c}\right) \tag{7.3}$$

Итак, можно сформулировать следующие правила преобразования геометрических объектов от равноускоренной НСО к эталонной квази - ИСО :

1. Пусть, например, в результате решения уравнений Максвелла, записанных, как и в ОТО, с использованием метрики (2.18), найден тензор поля $F_{\mu\nu}(y^\alpha)$.

2. С помощью закона движения (3.5), (3.6) тензор поля преобразуется к квази - ИСО , определяемой метрикой (3.7).

3. С помощью преобразования временной координаты (6.1) определяется тензор поля в эталонной квази - ИСО.

4. Используя поле тетрад (7.1), находятся физические компоненты тензора поля $F_{(\alpha)(\beta)}(x^\mu)$ в эталонных координатах (6.2).

Однако рассмотренные 4 пункта еще не исчерпывают правил перехода от НСО к ИСО. Эти правила отображают лишь переход от НСО к квази - ИСО. Переход от квази - ИСО к ИСО связан с переходом от пространства Римана к пространству Минковского.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим движение заряженной пыли в однородном электрическом поле, заданном в квази - ИСО (3.7). Под постоянным однородным электрическим полем будем понимать постоянство компонент тензора поля $F_{\alpha\beta}$, заданного "физическими "или тетрадными компонентами. В частности, если имеется только электрическое поле $\vec{E}$, направленное вдоль оси x^1, то отличными от нуля будут только компоненты

$$F_{(0)(1)} = -F_{(1)(0)} = E = \mathrm{const}. \tag{7.4}$$

Отличные от нуля компоненты тензора поля в аффинном репере с использованием (7.1) имеют вид

$$F_{01} = -F_{10} = E\cos(a_0 x^0/c^2), \tag{7.5}$$

которые, как легко проверить , удовлетворяют уравнениям Максвелла в пустоте, записанным в общековариантной форме для метрики (3.7). Уравнения Максвелла в квази - ИСО или НСО с заданными метрическими тензорами эквивалентны по форме уравнениям Максвелла при наличии гравитационного поля и имеют вид [7]

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\varepsilon} + \frac{\partial F_{\varepsilon\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\varepsilon}}{\partial x^\mu} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\Big) = -\frac{4\pi}{c}j^\mu. \tag{7.6}$$

Используя (7.6), получаем

$$\sqrt{-g} = \cos(a_0x^0/c^2), \quad F^{01} = g^{00}g^{11}F_{01} = -\frac{E}{\cos(a_0x^0/c^2)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}F^{10})}{\partial x^0} \equiv 0, \tag{7.7}$$

что и доказывает сделанное выше утверждение.

Каждая из частиц пыли в электрическом поле движется по закону

$$mc\frac{DV^\mu}{ds} = \frac{e}{c}F^\mu{}_\nu V^\nu. \tag{7.8}$$

Если начальные скорости всех частиц нулевые, то можно убедиться, что из поля 4-скоростей (3.13) с помощью с помощью связности (3.11) и формул (1.1) - (1.5) могут быть получены соотношения

$$V^\mu \nabla_\mu V_\nu = F_\nu = V^\mu \Big(\frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\epsilon_{\mu\nu} V_\epsilon \Big), \quad F_0 = \frac{a_0}{c^2} \tan(a_0 t/c),$$
$$F_1 = -\frac{a_0}{c^2}, \quad \Sigma_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} = 0, \quad g_{\mu\nu} F^\mu F^\nu = -\frac{{a_0}^2}{c^4}.$$

Полученные соотношения при найденном тензоре поля (7.5) обращают в тождество (7.8), если справедливо равенство

$$a_0 = \frac{eE}{m}. \tag{7.9}$$

Итак, мы доказали, что найденная нами равноускоренная жесткая НСО может соответствовать движению заряженной пыли в однородном постоянном электрическом поле, заданном в псевдоримановом пространстве - времени. Выясним структуру этого электромагнитного поля с точки зрения наблюдателя, связанного с движущимися зарядами и использующего координаты НСО (2.18). Используя закон движения (3.8), находим

$$\tilde{F}_{\alpha\beta}(y^\gamma) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} F_{\mu\nu}.$$

Тензор поля в НСО имеет отличные от нуля компоненты

$$\tilde{F}_{01} = E \exp(a_0 y^1/c^2). \tag{7.10}$$

Вычисляя "физические"тетрадные компоненты тензора поля по формуле

$$\tilde{F}_{(\alpha)(\beta)} = e^\mu_{(\alpha)} e^\nu_{(\beta)} \tilde{F} \mu\nu \tag{7.11}$$

, получим отличные от нуля значения

$$\tilde{F}_{(0)(1)} = E = \mathrm{const}. \tag{7.12}$$

Сравнивая полученные компоненты с аналогичными в квази - ИСО, убеждаемся, что электрическое поле в обоих случаях остается неизменным. Рассмотренная ситуация аналогична той, при которой электрическое поле не меняется и при преобразованиях Лоренца, когда скорость движущейся системы направлена вдоль вектора электрического поля .

Таким образом, на движение заряженной пыли в однородном электрическом поле можно смотреть с позиции двух наблюдателей:

1. Наблюдатель находится в жесткой ИСО пространства Минковского, в которой выбраны галилеевы координаты. В согласии с наиболее распространенной в настоящее время трактовкой движение заряженной пыли для него происходит по закону (2.5), (2.6) и при переходе к НСО приводит к метрике (2.7), (2.8).

2. Наблюдатель находится в НСО, а использует для своего движения координаты квази - ИСО (3.7) или эталонные координаты (6.2). Движение пыли для него происходит по закону (3.8) (или (2.5), если выбрать общую с галилеевой координатную сетку). Переход от координат квази - ИСО к координатам НСО приводит к метрике (2.18).

Подчеркнем, что фраза "Наблюдатель находится в НСО, а использует для описания процессов координаты квази - ИСО"с ортодоксальной точки зрения эквивалентна фразе

"Наблюдатель находится в ИСО". Это связано с тем обстоятельством, что при обычном подходе свойства пространства - времени до и после включения силового поля постулируются неизменными как для наблюдателя в ИСО, так и для наблюдателя в НСО. С нашей точки зрения под переходом ИСО - НСО и обратно подразумевается установление правил, связывающих геометрические объекты, заданные в пространстве Минковского (2.4), с этими же объектами, заданными в пространстве Римана. Как отмечено в [1], вряд ли можно здесь найти универсальное правило, которое пригодно для всех случаев. Например, в римановом пространстве есть геометрический объект - тензор Римана - Кристоффеля, который в пространстве Минковского тождественно равен нулю. Таким образом, установив выше четыре правила перехода от НСО к квази - ИСО (в рамках риманова пространства - времени), мы не сделали последнего самого трудного шага - не установили правила перехода из квази - ИСО (6.2) в ИСО (2.4), заданных в общей координации - эталонных (галилеевых) координатах.

Для установления последнего соответствия геометрия не может дать однозначной рекомендации без связи с физическими предположениями [1]. Поэтому при преобразованиях физических величин, связанных переходом ИСО - НСО и обратно, требуется выяснить является ли отображаемый геометрический объект инвариантом соответствия, либо не является. Это зависит от его строения, т.е. от характера зависимости объекта от метрики.

Компоненты вектора смещения dx^{μ} - в общей координации - инварианты соответствия, а их величины не являются таковыми, поскольку метрические тензоры элементов интервалов (6.2) и (2.4) в общей координации не равны друг другу. Отсюда следует, что при переходе ИСО - НСО элемент интервала в общем случае не сохраняется. Выбрав в пространстве Минковского (2.4) и пространстве Римана (6.2) совпадающие инвариантные тетрады, отражающие тот факт, что физические реперы принадлежат как ИСО, так и квази - ИСО, определим некоторый вектор $\vec{A}$ как инвариантный, если тетрадные компоненты этого вектора в (2.4) равны тетрадным компонентам этого вектора в (6.2) [1]. При этом в (2.4) аффинные реперы совпадают с полем инвариантных тетрад . Таким образом, к четырем пунктам, описывающим переход от НСО к квази - ИСО, добавляется "пятый пункт"

5. Для геометрических объектов, являющихся инвариантом соответствия, тетрадные компоненты в квази - ИСО (6.2), вычисленные с помощью тетрад (7.1), равны аффинным компонентам ИСО (2.4).

Последний пункт позволяет замкнуть цепочку перехода НСО - ИСО. В частности, тензор электромагнитного поля в разобранном последнем примере является инвариантом соответствия, и однородное постоянное поле в тетрадах квази - ИСО (7.11) является однородным и постоянным полем в аффинном репере ИСО (2.4).

Следует отметить, что вычисление "физических"или тетрадных компонент тензора энергии - импульса, когда сопутствующие тетрады совпадают с соответствующими координатными осями (калибровка Ламе [22], [23]), приводит во всех случаях к выражению, совпадающему с тензором энергии - импульса постоянного однородного электрического поля в ИСО пространства Минковского, где одна из осей выбрана в направлении поля.

Переход НСО $\to$ НСО

Рассмотрим переход от одной НСО к другой.

Пусть в пространстве Минковского напряженность поля отрицательно заряженной плоскости 2, а в пространстве Римана $D_1 =$, но сама плоскость движется вниз с ускорением $_0 = -/m$. В качестве системы отсчета выберем электронную "пыль подвешенную к плоскости на невесомых нитях. Тогда натяжения нитей в обоих случаях одинаковы и равны $= 2$. Если нити разорвать , то частицы пыли будут удаляться от плоскости в соответствии с уравнением движения (7.8)

$$mc\frac{DV^\mu}{ds} = \frac{e}{c}F^\mu{}_\nu V^\nu.$$

Интегрирование уравнения движения для первого случая приводит к закону движения (2.6) и метрике (2.8) (с заменой $_0$ на $2a_0$).

Для второго случая нужно раскрыть абсолютную производную с использованием метрики (2.18) (с отрицательным знаком в экспоненте) и воспользоваться решением уравнений Максвелла (7.6) для метрики (2.18) (с учетом знака).

Решение уравнений Максвелла имеет вид

$$F_{01} = E_1 = D_1 \exp\left(-\frac{a_0 y^1}{c^2}\right) = D_1\sqrt{g_{00}}, \quad D_1 = E = \text{const}. \tag{7.13}$$

Раскрытие абсолютной производной с учетом условия нормировки 4-скорости (1.2) приводит к уравнению

$$\frac{dV^1}{dS} - \frac{a_0}{c^2}\left(1 + {V^1}^2\right) = \frac{eE}{mc^2}\sqrt{1 + {V^1}^2} \tag{7.14}$$

Полагая $eE/m = a_0$, $a_0/c^2 = \alpha$, ищем стационарное решение для поля скоростей в переменных Эйлера в виде

$$V^1 = \tan x(S) \tag{7.15}$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{dV^1}{dS} = \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{dS} = \alpha\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x}\right). \tag{7.16}$$

Решение (7.16) при условии, что при $x = 0$, $S = 0$, имеет вид

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \alpha S, \tag{7.17}$$

а для поля V^1 находим

$$V^1 = \frac{dy^1}{dS} = \frac{2\alpha S}{1 - \alpha^2 S^2}. \tag{7.18}$$

Нулевую компоненту V^0 4-скорости определим из условия нормировки, что с использованием (7.18) приводит к уравнению.

$$V^0 = \frac{dy^0}{dS} = \frac{1 + \alpha^2 S^2}{1 - \alpha^2 S^2}\exp\left(\frac{a_0 y^1}{c^2}\right). \tag{7.19}$$

Решение системы (7.18) и (7.19) при условии, что при $S = 0$ начальные координаты $y^1 = x^1$, приводит к закону движения в переменных Лагранжа

$$y^1 = x^1 - \frac{c^2}{a_0} \ln\left|1 - \frac{{a_0}^2 S^2}{c^4}\right|, \qquad y^0 = \frac{S \exp(a_0 x^1/c^2)}{1 - {a_0}^2 S^2/c^4}, \tag{7.20}$$

где x^1 - начальные координаты частиц пыли , S/c - собственное время . Если полученный закон движения сплошной среды в переменных Лагранжа подставить в элемент (2.18) (с отрицательным знаком в экспоненте), то получим для элемента интервала выражение

$$d\tilde{S}^2 = dS^2 - (1 - S^2\alpha^2){dx^1}^2 - 2\alpha S dS dx^1 - {dx^2}^2 - {dx^3}^2. \tag{7.21}$$

От перекрестных членов в метрике (7.21) можно избавиться, если использовать хронометрическое преобразование $S = \tau \exp(a_0 x^1/c^2)$, которое, как известно [24], не выводит за рамки рассматриваемой системы отсчета. Тогда получим с точностью до переобозначений $y^0 \to \tau$, $y^k \to x^k$ метрику (2.18) с положительным знаком в экспоненте. Этот результат можно было ожидать и без вычислений, т.к. найденный закон движения в рамках риманова пространства соответствует переходу от НСО с отрицательным ускорением, направленным по нити к плоскости, к НСО с положительным ускорением, направленным по направлению силы со стороны поля от плоскости. Это следует и непосредственно из закона движения в нерелятивистском приближении, представимом в виде

$$y^1 = x^1 + a_0 t^2,$$

который описывает как меняется разность координат между двумя частицами, если они движутся по одной прямой в разные стороны с одинаковым по величине но различным по направлению ускорением a_0.

Таким образом, "механическая"эквивалентность в статике не приводит к эквивалентности в динамике. Итак, из разобранной задачи следует, что совместное решение уравнений структуры (1.7) и уравнений Максвелла допускает два решения: одно в пространстве Минковского, а другое - Римана. Первое решение приводит к нарушению жесткости при движении в однородном поле , а второе - не приводит.

8. Релятивистская, жесткая, равномерно вращающаяся СО

При рассмотрении вращающегося диска обычно выбирают неподвижную систему отсчета, в которой вводят цилиндрические координаты r_0, φ_0, z_0, t_0 и переходят к вращающейся системе отсчета r, φ, z, t согласно формулам:

$$r_0 = r, \quad \varphi_0 = \varphi + \Omega t, \quad z_0 = z, \quad t_0 = t,$$

где угловая скорость вращения Ω относительно оси z считается постоянной.

Элемент интервала имеет вид

$$dS^2 = \left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2. \tag{8.1}$$

Формула справедлива, если $r\Omega/c < 1$. В работах [8], [11], [51] обсуждаются другие распределения скоростей, которые ограничивают линейную скорость вращения диска при $r \to \infty$ величиной скорости света c, а при $\Omega r/c \ll 1$ дают $v = \Omega r$. Однако критерию жесткости как классическому, так и релятивистскому (в смысле Борна) удовлетворяет только обычный закон распределения $v = \Omega r$, $\Omega = const$, приводящий к интервалу (1). Требование существования жесткого по Борну решения для любых r при условии, что $v(r) < c$ не может быть выполнено в пространстве Минковского.

Найдем метрику жесткой релятивистской равномерно вращающейся НСО с помощью нашего метода, полагая в формулах (1.1) и (1.7) тензор скоростей деформаций $\Sigma_{\mu\nu} = 0$ и требуя постоянства инварианта, характеризующего релятивистское обобщение квадрата угловой скорости вращения диска ω.

$$\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} = \frac{2\omega^2}{c^2} = \text{const}. \tag{8.2}$$

В лагранжевой сопутствующей системе отсчета, связанной с вращающимся диском, имеем

$$\begin{aligned}
V^1 = V^2 = V^3 = 0, \quad V^0 = D^{-1/2}, \quad V_1 = V_3 = 0, \quad V_2 = -PV^0 \\
dS^2 = D(r)c^2dt^2 - 2P(r)cdtd\varphi - dz^2 - r^2d\varphi^2 - dr^2, \\
g_{00} = D, \quad g_{02} = -P, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -1, \\
\det \parallel g_{\mu\nu} \parallel = g = -P^2 - r^2D \equiv -K, \quad g^{00} = \frac{r^2}{K}, \quad g^{02} = -\frac{P}{K} \\
g^{11} = -1, \quad g^{22} = -\frac{D}{K}, \quad \Omega_{12} = -\frac{\omega K^{1/2}}{cD^{1/2}},
\end{aligned}$$

$$F^1 = \frac{1}{2D}\frac{dD}{dr}, \quad F^2 = F^3 = F^0 = 0. \tag{8.3}$$

Система (1.1) сводится к единственному независимому уравнению

$$\frac{P}{D}\frac{dD}{dr} - \frac{dP}{dr} = -2\frac{\omega}{c}\Big(Dr^2 + P^2\Big)^{1/2}. \tag{8.4}$$

Уравнения системы (1.7) после довольно громоздких вычислений сводятся либо к уравнению (8.4), либо удовлетворяются тождественно, либо дают

$$\frac{dD}{dr} - = -2\frac{\omega}{c}DP\Big(Dr^2 + P^2\Big)^{-1/2}. \tag{8.5}$$

Условие (8.2) эквивалентно постоянству величины хронометрически инвариантного вектора угловой скорости, который в наших обозначениях определяется в согласии с [24], как

$$\omega^i = -\frac{c}{\gamma^{1/2}}e^{ijk}\Omega_{jk}, \quad e^{123} = 1, \tag{8.6}$$

где $\gamma = det \parallel \gamma_{kl} \parallel$, а пространственная метрика γ_{kl} строится из (8.3) обычным образом [7] по формуле

$$\gamma_{kl} = -g_{kl} + \frac{g_{0k}g_{0l}}{g_{00}}. \tag{8.7}$$

Условие (8.2) является также следствием постоянства величины угловой скорости в сопутствующих тетрадах [51].

Величины релятивистской ω и классической угловой скорости Ω связаны соотношением

$$\omega = \Omega\left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

Если объявить в уравнениях (8.4) и (8.5) постоянной не ω, а Ω, то решение (8.4) и (8.5) приводят к метрике (8.1), реализованной в плоском пространстве-времени, но имеющую ограниченную область существования. Если бы мы попытались в преобразовании $\varphi' = \varphi + \Omega(r)t$ выбрать такое $\Omega(r)$, что $\Omega(r)r < c$, то такое распределение скоростей противоречило бы критерию жесткости, приводя к нестационарной метрике.

В нашем случае для метрики (8.3) существует стационарное решение, применимое для всей области $0 \le r \le \infty$, но реализуемое в римановом пространстве-времени.

Решения системы (8.4), (8.5) в квадратурах получить не удалось. Численный анализ показал, что при $\omega r/c \ll 1$ метрика (8.3) совпадает с метрикой (8.1). При величинах $\omega r/c \gg 1$ система (8.4), (8.5) допускает асимптотическое решение

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2\omega r}{c}\right), \quad P = \frac{\alpha c}{\omega}. \tag{8.8}$$

Для $\omega r/c > 10$ $D_0 = 5$, $\alpha = 1.7$. Для любых конечных значений r метрики (8.3) справедливы известные соотношения, накладываемые на компоненты метрического тензора в системах отсчета, которые могут быть осуществлены с помощью реальных тел [7]. В частности $g_{00} > 0$, определитель g, составленный из компонент метрического тензора, отрицателен, а квадратичная форма, задающая квадрат элемента пространственного расстояния существенно положительна.

Центростремительное ускорение во вращающейся НСО определяется формулой

$$a = c^2 F^1 = -\frac{\omega c P}{\sqrt{Dr^2 + P^2}}, \tag{8.9}$$

которая при малых r переходит в классическую, а при $r \to \infty$ дает $a = -\omega c$. Вычисление независимых отличных от нуля компонент тензора кривизны с учетом (8.3), (8.4), (8.5) приводит к соотношениям

$$R_{10,10} = -\frac{\omega^2 D}{Kc^2}\left[2P^2 - Dr^2 + \frac{DP^2 r^2}{K}\right] - \frac{\omega D^2 P r}{cK^{3/2}},$$

$$R_{20,20} = -\frac{\omega D r}{cK^{1/2}}\left[\frac{\omega D r^3}{cK^{1/2}} - P\right],$$

$$R_{12,10} = \frac{P\omega D r}{cK}\left[\frac{P}{K^{1/2}} - \frac{\omega r}{c}\left(2 + \frac{Dr^2}{K}\right)\right],$$

$$R_{12,12} = \frac{\omega^2 D^2 r^6}{K^2 c^2} - 2\frac{\omega D r^3 P}{cK^{3/2}} + \frac{P^2}{K}. \tag{8.10}$$

Скалярная кривизна $R = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\nu\beta}$ имеет вид

$$R = \frac{2DP^2}{K^2}\left\{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\left[2 + \frac{Dr^2}{K}\left(1 - \frac{r^2 D}{P^2}\right)\right]\right.$$

$$+\frac{\omega r P}{K^{1/2}c}\left(1-\frac{2Dr^2}{P^2}\right)\Bigg\}. \qquad (8.11)$$

Для элемента пространственного расстояния во вращающейся системе отсчета имеем, используя (8.7),

$$dl^2 = dr^2 + \left(1+\frac{P^2}{r^2D}\right)r^2d\varphi^2 + dz^2. \qquad (8.12)$$

Риманов тензор кривизны поверхности $z = \text{const}$ имеет одну независимую компоненту

$${}_{12,12} = -\frac{P^2}{K} + \frac{\omega^2r^2}{c^2}\left[\frac{P^2}{Dr^2} - \frac{2K}{r^2D} + \frac{P^2-Dr^2}{K}\left(2-\frac{P^2}{K}\right)\right]$$

$$+\frac{\omega r P}{cK^{3/2}}\left(2Dr^2 - P^2\right). \qquad (8.13)$$

Гауссова кривизна поверхности Γ вычисляется по формуле

$$\Gamma = \frac{{}_{12,12}}{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}. \qquad (8.14)$$

Вычисления дают

$$\Gamma = -\frac{DP^2}{K^2} - 2\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^2P^2}{c^2K} + \frac{DP\omega r}{K^{5/2}c}\left(2Dr^2-P^2\right)$$

$$+\left(2-\frac{P^2}{K}\right)\left(P^2-Dr^2\right)\frac{D\omega^2r^2}{c^2K}. \qquad (8.15)$$

При $r\to\infty$ гауссова кривизна $\Gamma = -\omega^2/c^2$.

Любопытно отметить, что для фиксированных значений углов φ метрика на вращающемся диске сведется к виду

$$dS^2 = D(r)c^2dt^2 - dz^2 - dr^2, \qquad (8.16)$$

которая для больших расстояний от оси вращения при использовании (8.8) и (8.9) сводится к виду (2.18) при $a_0 = -\omega c$.

$$dS^2 = D_0\exp\left(-\frac{2\omega r}{c}\right)c^2dt^2 - dz^2 - dr^2, \qquad (8.17)$$

Это не является неожиданным, поскольку частицы на вращающемся диске на больших расстояниях находятся в однородном поле центробежных сил инерции. Знак минус означает, что центростремительное ускорение противоположно направлению радиуса. Несовпадение метрики на больших расстояниях в общем случае связано с тем, что в переменных Эйлера для равноускоренного движения (2.18) поле скоростей параллельно полю ускорений, а для вращающего диска поле скоростей и ускорений перпендикулярны друг другу.

Рассмотрим более подробно отличия полученного нами решения для метрики от принятого в ортодоксальной теории (8.1). Для этого исследуем в деталях систему уравнений

(8.4) и (8.5). Для удобства анализа введем следующие безразмерные переменные и функции:

$$x \equiv \frac{\omega r}{c}, \quad D \equiv Z, \quad Y \equiv \frac{Px}{r}. \tag{8.18}$$

В этих обозначениях система уравнений (8.4) и (8.5) примет вид

$$\frac{dY}{dx} = \frac{2Zx^2}{\sqrt{Zx^2 + Y^2}}, \tag{8.19}$$

$$\frac{dZ}{dx} = -\frac{2ZY}{\sqrt{Zx^2 + Y^2}}. \tag{8.20}$$

После введения новой функции U, определяемой из соотношения

$$U \equiv \frac{Y}{x\sqrt{Z}}, \tag{8.21}$$

система уравнений расщепляется и сводится к виду

$$\frac{dU}{dx} + \frac{U}{x} = \frac{2 + U^2}{\sqrt{1 + U^2}}, \tag{8.22}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dx} = -\frac{2U}{\sqrt{1 + U^2}}. \tag{8.23}$$

И, наконец, после замены

$$v \equiv \frac{U}{\sqrt{1 + U^2}} \tag{8.24}$$

система представляется в форме

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x}(1 - v^2) = (2 - v^2)(1 - v^2), \tag{8.25}$$

$$Z = D = \exp\Bigl(-2\int v dx\Bigr). \tag{8.26}$$

Выясним физический смысл функции $v(x)$. Очевидно, что пространственный элемент интервала (8.12) может быть переписан в виде

$$dl^2 = dr^2 + \frac{1}{1 - v^2}r^2 d\varphi^2 + dz^2. \tag{8.27}$$

В ортодоксальной теории этот же элемент интервала имеет вид

$$dl^2 = dr^2 + \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}r^2 d\varphi^2 + dz^2. \tag{8.28}$$

Из сопоставления выражений (8.27) и (8.28) можно сделать вывод, что в нашем случае $v(x)$ это безразмерная линейная скорость точек жесткого диска относительно некоторой квази-ИСО, заданной в римановом пространстве- времени. Займемся анализом уравнения (8.25). Для малых v, пренебрегая квадратом скорости по сравнению с единицей, получаем

$v = x$, что в точности совпадает с классическим результатом ортодоксальной теории. Решение для $D(x)$ в этом случае сводится к виду

$$D = \exp\Big(-2\int v dx\Big) = \exp(-x^2) = 1 - x^2, \qquad (8.29)$$

что также эквивалентно классическому выражению (8.1).

Из анализа (8.25) следует, что для $x \to \infty$ уравнение имеет решение $v = 1$. Это решение резко отличается от классического жесткого диска, где поле скоростей на бесконечности неограниченно велико. График численного решения (8.25) по виду напоминает график гиперболического тангенса или деформированной ступенчатой функции для $x > 0$. Для больших x функцию $v(x)$ можно искать в виде

$$v(x) = 1 - \psi(x), \quad \psi(x) \ll 1. \qquad (8.30)$$

Пренебрегая ψ^2 по сравнению с единицей, получаем для функции $\psi(x)$ асимптотическое уравнение

$$\frac{d\psi}{dx} = 2\psi\frac{1-x}{x}. \qquad (8.31)$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\psi = \psi_0 x^2 e^{-2x}, \quad v(x) = 1 - \psi_0 x^2 e^{-2x}, \qquad (8.32)$$

где ψ_0 - некоторая постоянная.

Асимптотическое решение для функции $D(x)$ имеет вид

$$D(x) = D_0 \exp\Big(-2x - e^{-2x}(x^2 + x + 1/2)\Big), \qquad (8.33)$$

где постоянная $D_0 = 5$ определена раннее (8.8) (в отличие от (8.8) мы удержали в (8.33) следующие члены разложения). Для функции $P(x)$ находим асимптотическое выражение

$$P = \sqrt{\frac{D_0}{\psi_0}}\frac{c}{\omega}, \quad \psi_0 = 1.73, \qquad (8.34)$$

где для вычисления постоянной ψ_0 использовали (8.8).

Рассмотрим распространение световых лучей по замкнутому контуру по отношению к вращающемуся диску. Пусть лучи распространяются по окружности навстречу друг другу, а источник находится на вращающемся диске. Как известно, [7] на вращающемся диске часы не могут быть однозначно синхронизированы во всех точках. Поэтому, производя синхронизацию вдоль замкнутого контура и возвращаясь в исходную точку, мы получим время, отличающееся от первоначального на величину

$$\Delta t = -\frac{1}{c}\oint \frac{g_{02}}{g_{00}} d\varphi = \frac{2\pi}{c}\frac{vr}{\sqrt{1-v^2}} \exp\Big(\int v dx\Big). \qquad (8.35)$$

Известно, что скорость света всегда равна c, если использовать естественное время, связанное с естественной геометрией на диске [110] (подробнее эти вопросы будут рассмотрены в следующей главе). Поэтому встречные лучи света для источника, расположенного на диске, возвращаются к источнику одновременно по естественному времени.

Очевидно, что за время прохождения лучей сам диск повернется на некоторый угол. Поэтому встречный луч по отношению к вращающемуся диску проходит меньший путь до встречи с источником, чем луч, распространяющийся вдоль скорости вращения. Разность времен обхода Δt_0 по отношению к неподвижной СО будет равна удвоенной величине Δt.

$$\Delta t_0 = \frac{4\pi}{c}\frac{vr}{\sqrt{1-v^2}}\exp\Big(\int v dx\Big). \tag{8.36}$$

В нерелятивистском приближении для малых скоростей диска $v = x$ найденный результат совпадает с результатом известного опыта Саньяка [110].

$$\Delta t_0 = \frac{4\omega S}{c^2}, \tag{8.37}$$

где S - площадь диска. В ультрарелятивистском случае имеем

$$\Delta t_0 = \frac{4\pi}{\omega}\frac{\alpha}{D_0}\exp(2x). \tag{8.38}$$

При стандартном рассмотрении ультрарелятивистское рассмотрение неприемлемо в принципе.

Можно однако и в плоском пространстве-времени задать вращательное движение инвариантным относительно преобразований Лоренца способом, применимым для любого расстояния от центра. Скорость вращения при этом ограничена на бесконечности скоростью света c. Правда в этом случае будет нарушен релятивистский критерий жесткости по Борну. В работе [51] такая программа была реализована автором. Для удобства сравнения следуем принятым в [51] обозначениям. Для описания движения используем галилееву координатную сетку $\{x_\mu\}$, $\mu = 1,2,3,4$, $x_4 = ict$. Условимся, что греческие индексы здесь будут изменяться от единицы до четырех, а латинские - от единицы до трех. Допускаем, что ось вращения совпадает с x_3. В каждой точке построим тетраду $h_\mu(\alpha)$ так, что для каждой частицы среды $\vec{h}(4)$ совпадает с вектором 4 - скорости V_μ, т.е.

$$ih_\mu(4) = V_\mu. \tag{8.39}$$

Из равенства (8.39) следует, что

$$ih_\mu(4)h_\mu(a) = i\delta(4a) = V(a) = 0, \tag{8.40}$$

т.е. по отношению к локальной тетраде, заданной равенством (8.39), среда покоится.

Поле 4 - скорости вращающегося континуума зададим по закону

$$V_a = V(r)\epsilon_{ak}n_k, \quad V_3 = 0, \quad V_4 = \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ V(r) = \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$a,k = 1,2, \quad n_k = \frac{x_k}{r}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \epsilon_{ak} = -\epsilon_{ka},\ \epsilon_{12} = 1. \tag{8.40}$$

Здесь $v(r)$ искомая величина трехмерной скорости вращения. Ввиду выбранной в этом разделе сигнатуры, тензор угловой скорости вращения $\omega_{\mu\nu}$ отличается знаком от (1.4) и заменой ковариантных производных на частные.

$$\omega_{\mu\nu} = -\partial_{[\mu}V_{\nu]} - V_{[\mu}F_{\nu]}, \tag{8.41}$$

Переходя к тетрадному представлению, имеем

$$\omega(ab) = -\partial_{[\mu} V_{\nu]} h_\mu(a) h_\nu(b). \tag{8.42}$$

Будем считать, что $\vec{h}(3)$ совпадает по направлению с осью x_3, а $h_a(2)$ с n_a.

$$\vec{h}(3) \cdot \vec{h}_\nu = \delta_\nu(3), \quad \vec{h}_2 \cdot \vec{h}_a = h_a(2) = n_a. \tag{8.43}$$

В силу выбора $\vec{h}(3)$ в антисимметричной матрице $\omega(ab)$ $(a, b = 1, 2)$ имеется лишь одна независимая компонента, характеризующая угловую скорость вращения вокруг оси $\vec{h}(3)$ в локально сопутствующей тетраде. Используя предыдущие соотношения и условие

$$h_\mu(\alpha) h_\nu(\beta) = \delta(\alpha\beta), \tag{8.44}$$

получим

$$h_\mu(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -iV_4 n_2 & iV_4 n_1 & 0 & iV \\ n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iV_4 n_2 & iV n_1 & 0 & -iV_4 \end{pmatrix}, \tag{8.45}$$

где в (8.45) ε - номер строки, μ - номер столбца. Полагая в соотношении (8.42)

$$\omega(ab) = \frac{\omega_0}{c} \epsilon(ab), \quad \epsilon(ab) = -\epsilon(ba), \quad \epsilon(12) = 1, \tag{8.46}$$

получим формулу, которая задает вращение инвариантным относительно преобразования Лоренца способом. В последней формуле ω_0 характеризует величину угловой скорости в локально сопутствующей тетраде. Возвращаясь от тетрадного представления к галилееву, имеем

$$\omega(ab) = \frac{\omega_0}{c} [h_\mu(1) h_\nu(2) - h_\mu(2) h_\nu(1)]. \tag{8.47}$$

Заметим, что при фиксированных $\vec{h}(3)$ и $\vec{h}(4)$, которые задают вращение, векторы $\vec{h}(1)$ и $\vec{h}(2)$ определены неоднозначно. Однако можно доказать, что правая часть равенства (8.47) не зависит от ориентации $\vec{h}(1)$ и $\vec{h}(2)$. Преобразование, не изменяющее тетрадных векторов $\vec{h}(3)$ и $\vec{h}(4)$ есть вращение тетрадных векторов $\vec{h}(1)$ и $vech(2)$ в плоскости $x_1 x_2$. Матрицей $\alpha(\varepsilon'\varepsilon)$ этого преобразования является матрица поворота в плоскости $x_1 x_2$ на угол ϕ

$$\alpha(\varepsilon'\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.48}$$

$$h_\mu(\varepsilon') = \alpha(\varepsilon'\varepsilon) h_\mu(\varepsilon) =$$

$$\begin{pmatrix} -iV_4 n_2 \cos\phi + n_1 \sin\phi & iV_4 n_1 \cos\phi + n_2 \sin\phi & 0 & iV\cos\phi \\ iV_4 n_2 \sin\phi + n_1 \cos\phi & -iV_4 n_1 \sin\phi + n_2 \cos\phi & 0 & -iV\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iV n_2 & iV n_1 & 0 & -iV_4 \end{pmatrix}. \tag{8.49}$$

Можно убедиться, что преобразованные тетрады $h_\mu(\varepsilon')$ не изменяют правой части равенства (8.47). Полученные соотношения имеют простой физический смысл. Действительно, для описания вращения используются два тетрадных вектора: $\vec{h}(3)$, определяющий направление оси вращения, и $\vec{h}(4)$, совпадающий с направлением 4-скорости. Направление двух остальных векторов может быть произвольным.

Рассмотрим некоторые частные случаи вращения. Определим релятивистское равномерное вращение, при котором остается постоянной величина угловой скорости в локально сопутствующей тетраде. Полагая в формуле (8.46) $\omega_0 = \mathrm{const}$, используя предыдущие соотношения, находим

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} + \frac{V^3}{r} = -\frac{2i\omega_0 V_4}{c}. \tag{8.50}$$

Для трехмерной скорости v получаем

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 2\omega_0(1 - v^2/c^2). \tag{8.51}$$

Аналогичное уравнение из других соображений получено в работах [8], [11]. Решение уравнения (8.51) при условии, что $v(0) = 0$ имеет вид

$$v(r) = \frac{c^2}{2\omega_0}\frac{d}{dr}\ln\left|I_0\left(\frac{2\omega_0 r}{c}\right)\right|, \tag{8.52}$$

где $I_0(x)$ - цилиндрическая функция Бесселя в общепринятых обозначениях [82]. Для малых значений аргумента, воспользуясь разложением

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2!^2}\frac{x^4}{2^4} + ...$$

и ограничиваясь двумя членами разложения, получим

$$v(r) = \frac{\omega_0 r}{1 + \omega_0^2 r^2/c^2} \approx \omega_0 r. \tag{8.53}$$

Если $\omega_0 r/c \gg 1$, то воспользуясь известной асимптотической формулой

$$I_\nu(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^x,$$

получим

$$v \approx c\left(1 - \frac{c}{4\omega_0 r}\right) < c. \tag{8.54}$$

Таким образом, найденная формула (8.52) дает правильное значение для малых скоростей, совпадающей с классической формулой вращения твердого тела. Для больших расстояний скорость вращения нигде не не превосходит скорости света, стремясь к последней на бесконечности.

Представляет интерес рассмотреть вопрос о пространственном расстоянии во вращающейся системе отсчета. Примем по определению, что угловая скорость $\Omega(r)$ с линейной скоростью $v(r)$ по формуле

$$\Omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \frac{c^2}{2\omega_0 r}\frac{d}{dr}\ln\left|I_0\left(\frac{2\omega_0 r}{c}\right)\right| \tag{8.55}$$

Выбирая неподвижную систему отсчета с цилиндрическими координаты r_0, φ_0, z_0, t_0 и переходя к вращающейся системе отсчета r, φ, z, t согласно формулам:

$$r_0 = r, \quad \varphi_0 = \varphi + \Omega(r)t, \quad z_0 = z, \quad t_0 = t,$$

где угловая скорость вращения $\Omega(r)$ относительно оси z считается зависящей от r, получим для элемента интервала

$$dS^2 = \left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\right)c^2 dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 -$$

$$-2r^2 t\frac{d\Omega}{dr}(d\varphi + \Omega dt) - dr^2\left(1 + r^2 t^2 \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)^2\right) \tag{8.56}$$

Элемент пространственного интервала dl^2 определим по формуле (8.7), что дает

$$dl^2 = dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2\left[1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2} + r^2 t^2 \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)^2\right] + 2r^2 dr d\varphi t \frac{d\Omega}{dr}}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}. \tag{8.57}$$

Из последней формулы следует, что расстояние между соседними мировыми линиями частиц среды зависит от времени, т.е. найденная конгруенция мировых линий вращающего диска не является жесткой в смысле Борна, что мы и утверждали раньше. Таким образом, в плоском пространстве-времени принципиально невозможно во всей области ввести жесткую равномерно вращающуюся СО.

Рассмотрим еще один экзотический случай вращения без "вращений т.е. случай потенциального в локальной тетраде поля скоростей (8.40), порожденного бесконечной нитью радиуса $r = r_0$, совпадающей с осью x_3. В силу потенциальности из соотношения (8.46) следует

$$\omega(ab) = 0, \quad r > r_0. \tag{8.58}$$

Последнее соотношение в локальной тетраде аналогично классическому выражению

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v} = 0, \tag{8.59}$$

что говорит об отсутствии вращений в среде. Иными словами, каждый элемент среды, двигаясь по окружности, сохраняет ориентацию в пространстве неизменной.

Уравнение (8.50) сведется к виду

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} + \frac{V^3}{r} = 0, \tag{8.60}$$

решение которого при $r > r_0$ имеет вид

$$V = \frac{r_0}{r\sqrt{1 - r_0^2/r^2}}, \tag{8.61}$$

откуда следует что трехмерная скорость имеет вид

$$v = c\frac{r_0}{r}, \quad v_a = v\epsilon_{ab}n_b. \tag{8.62}$$

Последний результат совпадает с решением, полученным в [1] другим способом.

В заключение раздела рассмотрим движение по окружности материальной точки. 4-скорость материальной точки зададим при помощи соотношения (8.40), считая, что $v = v(r,t)$. 4-ускорение в СТО определяется равенством

$$\frac{dV_\mu}{dS} = a_\mu, \quad dS = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{8.63}$$

Переход к сопутствующим тетрадам, используя соотношение (8.45), дает

$$h_\mu(b)\frac{dV_\mu}{dS} = \frac{a_0(b)}{c^2}, \tag{8.64}$$

где $a_0(b)$ - трехмерное ускорение в сопутствующей тетраде, складывающееся в общем случае из нормального и тангенциального ускорения. Раскрытие выражения (8.64) приводит к соотношениям

$$-\frac{V^2}{r} = \frac{a_0(2)}{c^2}, \quad i\frac{\partial V}{\partial x_4} = \frac{a_0(1)}{c^2}. \tag{8.65}$$

Полагая в (8.65) нормальное ускорение $a_0(2) = -\omega_0(r,t)^2 r$, получаем

$$V = \frac{\omega_0(r,t)r}{c}, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial t} = \frac{a_0(1)}{r} = \epsilon_0(r,t). \tag{8.66}$$

Откуда

$$v(r,t) = \frac{\omega_0 r}{\sqrt{1 + o_0^2 r^2/c^2}}, \tag{8.67}$$

где ω_0 определяется из соотношения (8.66), если задать в явном виде величину углового ускорения $\epsilon_0(r,t)$. В частности, если $\epsilon_0 = 0$, то формула (8.67) определяет величину скорости движения материальной точки по окружности радиуса r с постоянной в локальной тетраде угловой скоростью ω_0. Если $\epsilon_0 = \epsilon_0(t)$ и при $t = 0$ имеем $\omega_0 = 0$, то

$$v(r,t) = \frac{r\int_0^t \epsilon_0(x)dx}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{c^2}\left[\int_0^t \epsilon_0(x)dx\right]^2}}. \tag{8.68}$$

Если рассмотреть в частности равноускоренное в локальной тетраде движение с постоянным угловым ускорением $\epsilon_0 = \text{const}$, то получим

$$v(r,t) = \frac{\epsilon_0 r t}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon_0^2 r^2 t^2}{c^2}}} \tag{8.69}$$

Из анализа полученных формул следует, что при любых расстояниях от оси вращения скорость вращающегося тела или материальной точки не превосходит скорости света в вакууме. Применение локально сопутствующих тетрад для описания движения как сплошной среды, так и материальной точки позволяет релятивистски инвариантным способом сводить задачи динамики к задачам статики. Причем геометрические объекты в локально сопутствующих тетрадах имеют такой же физический смысл, что и геометрические объекты, заданные в галилеевой координатной системе при классическом рассмотрении.

9. НСО в пространстве метрической связности

Из рассмотренных примеров видно, что простейшие НСО можно реализовать в римановом пространстве-времени. Однако систему уравнений (1.1), (1.7) в общем случае нельзя проинтегрировать, так как число независимых уравнений больше числа неизвестных функций. Следовательно, не исключена возможность, что и риманово пространство-время, как и евклидово, может оказаться "тесным"чтобы описать свойства произвольных НСО.

Одним из простейших обобщений риманова пространства является пространство метрической связности [50], в котором связность и метрический тензор удовлетворяют условию согласования

$$\nabla_\mu g_{\lambda\nu} = \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} = 0, \tag{9.1}$$

что означает, что при параллельном перенесении сохраняются длины векторов и углы между ними.

Из (9.1) следует, что

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} + T^{..\nu}_{\mu\lambda}, \tag{9.2}$$

$$\tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma}\Big(\partial_\mu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\lambda}\Big), \tag{9.3}$$

$$T^{..\nu}_{\mu\lambda} = S^{..\nu}_{\mu\lambda} - S^{\nu.}_{\lambda.\mu} + S^{\nu..}_{.\mu\lambda}, \tag{9.4}$$

$$S^{..\nu}_{\mu\lambda} \equiv \Gamma^\nu_{[\mu\lambda]}. \tag{9.5}$$

Очевидно, что метрическая связность (9.2) однозначно определена заданием метрики и тензора кручения $S^{..\nu}_{\mu\lambda}$. Из (9.1) - (9.4) следует важное соотношение

$$\tilde{\nabla}_\mu g_{\lambda\nu} = \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} = 0. \tag{9.6}$$

Здесь $\tilde{\nabla}_\mu$ ковариантная производная, вычисляемая с помощью символов Кристоффеля (9.3).

В пространстве метрической связности условия интегрируемости (1.6) вместо системы (1.7) дают

$$R^\mu_{\varepsilon\sigma,\nu.} V_\mu - 2S^\mu_{\varepsilon\sigma.} a_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\varepsilon} a_{\sigma]\nu}, \quad a_{\sigma\nu} \equiv \nabla_\sigma V_\nu. \tag{9.7}$$

$$-R^\mu_{\varepsilon\sigma,\nu.} = 2\partial_{[\varepsilon}\Gamma^\mu_{\sigma]\nu} + 2\Gamma^\mu_{[\varepsilon|\gamma|}\Gamma^\gamma_{\sigma]\nu}. \tag{9.8}$$

В согласии с работой [52], выражение (9.8) представим в виде

$$-R^\mu_{\varepsilon\sigma,\nu.} = -\tilde{R}^\mu_{\varepsilon\sigma,\nu.} + 2\tilde{\nabla}_{[\varepsilon} T^\mu_{\sigma]\nu}$$

$$+2T^\mu_{[\varepsilon|\gamma|.} T^\gamma_{\sigma]\nu.} + 2S^\gamma_{\varepsilon\sigma.} T^\mu_{\gamma\nu.}. \tag{9.9}$$

Из (1.1), (9.7), (9.9) следует

$$\tilde{R}^\mu_{\varepsilon\sigma,\nu.} V_\mu = 2\tilde{\nabla}_{[\varepsilon} a_{\sigma]\nu} - 2T^\mu_{[\varepsilon|\nu|.} a_{\sigma]\mu}$$

$$+2V_\mu\Big(\tilde{\nabla}_{[\varepsilon} T^\mu_{\sigma]\nu.} + T^\mu_{[\varepsilon|\gamma|.} T^\gamma_{\sigma]\nu.} S^\gamma_{\varepsilon\sigma.} T^\mu_{\gamma\nu.}\Big), \tag{9.10}$$

где $\tilde{R}^{\mu}_{\varepsilon\sigma,\nu.}$ — тензор Римана- Кристоффеля, вычисляемый обычным образом с помощью кристоффелевой связности (9.3).

Уравнения (1.1) в пространстве метрической связности имеют вид

$$\tilde{\nabla}_{\mu} V_{\nu} = T^{\varepsilon}_{\mu\nu.} V_{\varepsilon} + \Sigma_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu} + V_{\mu} F_{\nu}. \tag{9.11}$$

Последние два уравнения, в которых заданными функциями являются тензоры скоростей деформаций, угловой скорости вращения и векторы первой кривизны мировых линий частиц среды, представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $g_{\mu\nu}$, V^{μ}, $S^{\mu}_{\nu\lambda}$.

Глава 2

НСО В ЗАДАННОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

В этой главе, в отличие от предыдущей, не задается заранее структура НСО, приводящая в общем случае к выходу за рамки плоского пространства-времени, а рассматривается движение сплошной среды (базиса НСО) в плоском пространстве Минковского в заданном силовом поле. Однако и в этом случае возникает *относительная кривизна пространства-времени*, обусловленная несовпадением гиперповерхности ортогональной мировым линиям частиц базиса с гиперповерхностью одновременности. Разработке неголономного математического аппарата и его применению посвящена эта глава.

10. Относительный тензор кривизны НСО в СТО в переменных Лагранжа

В предыдущих разделах было показано, что переход из ИСО в НСО в случае задания не только силового поля, действующего на частицы среды, но также и наложения условий на кинематические характеристики континуума, требует в общем случае выхода за рамки плоского пространства - времени. Однако, если не накладывать на характеристики континуума дополнительных условий, а ограничиться лишь интегрированием уравнений движения, например, в плоском пространстве - времени, то никакого выхода за рамки плоского пространства - времени не происходит. При использовании неголономных преобразований возникающий в неголономных координатах тензор кривизны в пространстве Минковского также тождественно равен нулю. Однако этот нулевой тензор может быть разбит на две ненулевые части, одна из которых выражается через символы Кристоффеля обычным образом, с использованием вместо частных производных производных по направлениям, а другая зависит от характеристик движущейся среды [38], [39].

Системам отсчета в теории гравитации в научной литературе уделяется большое внимание. Наиболее полно эти вопросы обсуждаются в монографиях В.И. Родичева [1], О.С. Иваницкой [22] и Ю.С. Владимирова [23], где приводится и обширная библиография.

Предлагаемый нами подход отображения НСО из ИСО *при заданной метрике и заданному закону движения сплошной* среды близок к теории хронометрических инвариантов (ТХИ) А.Л. Зельманова [24] и его монадному обобщению [23]. Суть метода отображения НСО из ИСО состоит в отыскании правил преобразования геометрических объектов, заданных в галилеевых координатах пространства Минковского (переменных Эйлера), через аффинные реперы лагранжевой сопутствующей НСО. "Пространственные"реперы такой НСО лежат в гиперповерхностях, ортогональных мировым линиям частиц среды, (неголономных при наличии вращений), а временные векторы совпадают с полем 4 - скоростей V^μ, касательных мировым линиям.

Переходим к математической постановке задачи.

Пусть закон движения сплошной среды в произвольном силовом поле в пространстве Минковского определяется уравнениями

$$x^\mu = \Psi^\mu(y^{\hat{k}}, \xi^{\hat{0}}), \tag{10.1}$$

где x^μ - эйлеровы координаты, а $y^{\hat{k}}$ - лагранжевы координаты, постоянные вдоль каждой фиксированной мировой линии, $(1/c)\xi^{\hat{0}}$ - некоторый временной параметр, например, собственное время. Условимся, что индексы μ принадлежат эйлеровым координатам, а индексы $\hat{\mu}$ - лагранжевым. Дифференцируя (10.1) по $y^{\hat{k}}$ и $\xi^{\hat{0}}$, в каждой точке пространства-времени получим аффинный репер. Отметим, что временной $\partial x^\mu/\partial\xi^{\hat{0}}$ и пространственные $\partial x^\mu/\partial y^{\hat{k}}$ векторы в общем случае не ортогональны друг другу. Однако из соотношения (10.1) могут быть построены реперы, у которых "временной"и "пространственные"векторы ортогональны, но эти реперы не являются результатом дифференцирования 4-радиуса вектора по лагранжевым координатам $y^{\hat{k}}$ и $\xi^{\hat{0}}$. Эти реперы неголономны, и соответствующие им коэффициенты Ламе имеют вид

$$h^\mu_{\hat{k}} = \Big(\delta^\mu_\varepsilon - V^\mu V_\varepsilon\Big)\frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial y^{\hat{k}}}, \quad h^\mu_{\hat{0}} = \frac{\partial\Psi^\mu}{\partial\xi^{\hat{0}}} = V^\mu,$$

$$h^{\hat{k}}_\mu = \frac{\partial y^{\hat{k}}}{\partial x^\mu}, \quad h^{\hat{0}}_\mu = V_\mu. \tag{10.2}$$

Для неголономных координат коэффициенты связности $\Gamma^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ в пространстве Минковского можно представить в виде [50]

$$\Gamma^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = h^{\hat{\sigma}}_\varepsilon \frac{\hat{\partial} h^\varepsilon_{\hat{\beta}}}{\hat{\partial} y^{\hat{\alpha}}} = -h^\varepsilon_{\hat{\beta}} \frac{\hat{\partial} h^{\hat{\sigma}}_\varepsilon}{\hat{\partial} y^{\hat{\alpha}}}, \tag{10.3}$$

где всюду в дальнейшем под символом $\hat{\partial}/\hat{\partial} y^{\hat{\alpha}}$ будем понимать производные по направлениям, определяемые как

$$\frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial} y^{\hat{0}}} = \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}\xi^{\hat{0}}} = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial} y^{\hat{k}}} = h^\mu_{\hat{k}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{10.4}$$

В формуле (10.3) предполагается, что в пространстве Минковского выбраны галилеевы координаты. Для произвольных криволинейных координат формула для связности примет вид

$$\Gamma^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -h^\varepsilon_{\hat{\beta}} \frac{\hat{\partial} h^{\hat{\sigma}}_\varepsilon}{\hat{\partial} y^{\hat{\alpha}}} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} h^{\hat{\sigma}}_\mu h^\nu_{\hat{\beta}} h^\lambda_{\hat{\alpha}}, \tag{10.3a}$$

где $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ - связность в пространстве Минковского. Из коэффициентов Ламе образуем объект неголономности $C^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$.

$$C^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}.} = -\Gamma^{\hat{\sigma}}_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}]} = \frac{1}{2}\Big(h^\varepsilon_{\hat{\beta}} \frac{\hat{\partial} h^{\hat{\sigma}}_\varepsilon}{\hat{\partial} y^{\hat{\alpha}}} - h^\varepsilon_{\hat{\alpha}} \frac{\hat{\partial} h^{\hat{\sigma}}_\varepsilon}{\hat{\partial} y^{\hat{\beta}}}\Big) = \frac{1}{2} h^\nu_{\hat{\alpha}} h^\varepsilon_{\hat{\beta}} \Big(\frac{\partial h^{\hat{\sigma}}_\varepsilon}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h^{\hat{\sigma}}_\nu}{\partial x^\varepsilon}\Big). \tag{10.5}$$

Следуя Схоутену [50], для неголономных преобразований связность $\Gamma^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ представим в форме

$$\Gamma^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \left\{ {\hat{\sigma} \atop \hat{\alpha}\hat{\beta}} \right\} + T^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}, \quad T^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -C^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + g_{\hat{\alpha}\hat{\varepsilon}} g^{\hat{\sigma}\hat{\nu}} C^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\beta}\hat{\nu}.} + g_{\hat{\beta}\hat{\varepsilon}} g^{\hat{\sigma}\hat{\nu}} C^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\alpha}\hat{\nu}.}. \tag{10.6}$$

Если вычислить тензор Римана-Кристоффеля в пространстве Минковского, то он тождественно равен нулю. Ясно, что переход в лагранжеву сопутствующую НСО с помощью коэффициентов Ламе (10.2) не делает тензор кривизны отличным от нуля, а приводит к тождеству [50]

$$R^{\cdot\cdot\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 2\hat{\partial}_{[\hat{\alpha}}\Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}} + 2\Gamma^{\hat{\mu}}_{[\hat{\alpha}|\hat{\varepsilon}|}\Gamma^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}} + 2C^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\varepsilon}\hat{\gamma}} \equiv 0. \tag{10.7}$$

Из (10.6) и (10.7) следует

$$\hat{R}^{\cdot\cdot\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = -2\hat{\nabla}_{[\hat{\alpha}}T^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}} - 2T^{\hat{\mu}}_{[\hat{\alpha}|\hat{\varepsilon}|}T^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}} - 2C^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}T^{\hat{\mu}}_{\hat{\varepsilon}\hat{\gamma}}. \tag{10.8}$$

В соотношении (10.8) тензор кривизны вычисляется с помощью символов Кристоффеля $\left\{ {\hat{\sigma} \atop \hat{\alpha}\hat{\beta}} \right\}$, полученных из метрических коэффициентов

$$\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = g_{\mu\nu}h^{\mu}_{\hat{\alpha}}h^{\nu}_{\hat{\beta}}, \quad \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}} = 1, \quad \hat{g}_{\hat{0}\hat{k}} = 0, \tag{10.9}$$

где $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор в эйлеровых координатах пространства Минковского. Символы Кристоффеля вычисляются обычным способом с заменой частных производных производными по направлениям, а оператор $\hat{\nabla}_{\hat{\alpha}}$ вычисляется с помощью кристоффелевой связности.

Таким образом неголономные преобразования привели к отличному от нуля тензору кривизны, вычисляемому с помощью кристоффелевой части связности (10.6).

Как будет следовать далее из анализа уравнений движения, тензор кривизны $\hat{R}^{\cdot\cdot\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ можно назвать *относительным тензором кривизны НСО*.

Для неголономных координат имеют место следующие коммутационные соотношения [50]

$$\frac{\hat{\partial}^2}{\partial y^{\hat{\beta}}\partial y^{\hat{\alpha}}} - \frac{\hat{\partial}^2}{\hat{\partial} y^{\hat{\alpha}}\hat{\partial} y^{\hat{\beta}}} = 2C^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\frac{\hat{\partial}}{\partial y^{\hat{\gamma}}}. \tag{10.10}$$

Конкретный вид объекта неголономности зависит от выбранных коэффициентов Ламе, которые определяются в зависимости от выбора временного параметра вдоль мировых линий частиц базиса. Например, если в качестве временного параметра выбрать собственное время, как это было сделано в (10.2), то вычисление объекта неголономности приводит к соотношениям

$$C^{\hat{0}}_{\hat{k}\hat{l}} = \Omega_{\hat{k}\hat{l}}, \quad 2C^{\hat{0}}_{\hat{0}\hat{k}} = F_{\hat{k}}, \quad C^{\hat{k}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0, \tag{10.11}$$

где

$$\Omega_{\hat{k}\hat{l}} = \Omega_{\mu\nu}h^{\mu}_{\hat{k}}h^{\nu}_{\hat{l}}, \quad F_{\hat{k}} = F_{\mu}h^{\mu}_{\hat{k}}. \tag{10.12}$$

При получении (10.12) можно воспользоваться соотношениями (1.4) и (1.5), в которых тензор угловой скорости вращения и вектор 4 - ускорения рассматриваются в эйлеровых координатах пространства Минковского и проектируются с помощью параметров Ламе в сопутствующую лагранжеву НСО. Для объекта неголономности (10.11) коммутационные соотношения (10.10) сводятся к виду

$$\frac{\hat{\partial}^2}{\partial y^{\hat{k}}\partial y^{\hat{l}}} - \frac{\hat{\partial}^2}{\partial y^{\hat{l}}\partial y^{\hat{k}}} = 2\Omega_{\hat{l}\hat{k}}\frac{\hat{\partial}}{\partial y^{\hat{0}}}, \quad \frac{\hat{\partial}^2}{\partial y^{\hat{k}}\partial y^{\hat{0}}} - \frac{\hat{\partial}^2}{\partial y^{\hat{0}}\partial y^{\hat{k}}} = F_{\hat{k}}\frac{\hat{\partial}}{\partial y^{\hat{0}}}. \tag{10.13}$$

Коммутационные соотношения (10.13) эквивалентны коммутационным соотношениям ТХИ Зельманова [54]. Из вида метрики (10.9), разложения (10.6) и коэффициентов Ламе (10.2) получаем

$$\left\{ \begin{matrix} \hat 0 \\ \hat 0 \hat 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \hat k \\ \hat 0 \hat 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \hat 0 \\ \hat 0 \hat k \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} \hat 0 \\ \hat k \hat l \end{matrix} \right\} = -\Sigma_{\hat k \hat l},$$

$$\left\{ \begin{matrix} \hat k \\ \hat n \hat l \end{matrix} \right\} = \lambda^{\hat k}_{\hat n \hat l}, \quad \left\{ \begin{matrix} \hat k \\ \hat 0 \hat n \end{matrix} \right\} = \Sigma^{\hat k}_{\hat n}, \quad T^{\hat 0}_{\hat 0 \hat k.} = -F_{\hat k}, \quad T^{\hat k}_{\hat 0 \hat 0.} = F^{\hat k},$$

$$T^{\hat k}_{\hat m \hat l.} = T_{\hat m \hat l, \hat k} = T^{\hat 0}_{\hat k \hat 0.} = 0, \quad T^{\hat k}_{\hat 0 \hat l.} = T^{\hat k}_{\hat l \hat 0} = \Omega^{\hat k}_{\hat l.}, \quad T^{\hat 0}_{\hat k \hat l} = -\Omega_{\hat k \hat l}. \tag{10.14}$$

Так как

$$\Sigma_{\hat k \hat l} + \Omega_{\hat k \hat l} = h^{\nu}_{\hat k} h^{\mu}_{\hat l} \nabla_{\mu} V_{\nu}, \tag{10.15}$$

то можно показать, дифференцируя по $y^{\hat 0}$, что имеет место следующее кинематическое тождество

$$\frac{\hat\partial}{\hat\partial y^{\hat 0}} \Big(\Sigma_{\hat k \hat l} + \Omega_{\hat k \hat l} \Big) \equiv \hat g^{\hat m \hat n} \Big(\Sigma_{\hat l \hat n} + \Omega_{\hat l \hat n} \Big) \Big(\Sigma_{\hat k \hat m} + \Omega_{\hat k \hat m} \Big) + \hat\nabla_{\hat k} F_{\hat l} - F_{\hat k} F_{\hat l}, \tag{10.16}$$

откуда, альтернируя, имеем

$$\frac{\hat\partial}{\hat\partial y^{\hat 0}} \Omega_{\hat k \hat l} \equiv \hat\nabla_{[\hat k} F_{\hat l]}. \tag{10.17}$$

Симметрирование выражения (10.16) дает

$$\frac{\hat\partial}{\hat\partial y^{\hat 0}} \Sigma_{\hat k \hat l} \equiv \hat g^{\hat m \hat n} \Big(\Sigma_{\hat l \hat n} + \Omega_{\hat l \hat n} \Big) \Big(\Sigma_{\hat k \hat m} + \Omega_{\hat k \hat m} \Big) + \hat\nabla_{(\hat k} F_{\hat l)} - F_{\hat k} F_{\hat l}. \tag{10.18}$$

Хотя относительный тензор кривизны НСО вычисляется с помощью символов Кристоффеля так же, как и обычный тензор кривизны в римановом пространстве, однако при выражении связности через метрический тензор используются не обычные частные производные, а производные по направлениям. Поэтому относительный тензор кривизны обладает специфическими особенностями, которые возникают из-за некоммутативности производных по направлениям. Например, известное тождество Риччи будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\hat R^{\cdot\cdot\hat\mu}_{\hat\alpha\hat\beta,\hat\gamma} + \hat R^{\cdot\cdot\hat\mu}_{\hat\beta\hat\gamma,\hat\alpha} + \hat R^{\cdot\cdot\hat\mu}_{\hat\gamma\hat\alpha,\hat\beta} \\ &= 2\Bigg[C^{\hat\sigma}_{\hat\alpha\hat\beta.} \left\{ \begin{matrix} \hat\mu \\ \hat\sigma\hat\gamma \end{matrix} \right\} + C^{\hat\sigma}_{\hat\beta\hat\gamma.} \left\{ \begin{matrix} \hat\mu \\ \hat\sigma\hat\alpha \end{matrix} \right\} + C^{\hat\sigma}_{\hat\gamma\hat\alpha.} \left\{ \begin{matrix} \hat\mu \\ \hat\sigma\hat\beta \end{matrix} \right\} \Bigg] \end{aligned} \tag{10.18a}$$

Для тождества Бианки имеем выражение

$$\begin{aligned} &\hat\nabla_{\hat\varepsilon} \hat R^{\cdot\cdot\hat\mu}_{\hat\alpha\hat\beta,\hat\gamma} + \hat\nabla_{\hat\alpha} \hat R^{\cdot\cdot\hat\mu}_{\hat\beta\hat\varepsilon,\hat\gamma} + \hat\nabla_{\hat\beta} \hat R^{\cdot\cdot\hat\mu}_{\hat\varepsilon\hat\alpha,\hat\gamma} \\ &= 2C^{\hat\sigma}_{\hat\varepsilon\hat\alpha.} \hat R^{\cdot\cdot\hat\mu}_{\hat\beta\hat\sigma,\hat\gamma} + 2C^{\hat\sigma}_{\hat\alpha\hat\beta.} \hat R^{\cdot\cdot\hat\mu}_{\hat\varepsilon\hat\sigma,\hat\gamma} + 2C^{\hat\sigma}_{\hat\beta\hat\varepsilon.} \hat R^{\cdot\cdot\hat\mu}_{\hat\alpha\hat\sigma,\hat\gamma}, \end{aligned} \tag{10.19}$$

для доказательства которого удобно перейти в локально геодезическую систему координат.

Тензор кривизны (10.8) можно представить в другой эквивалентной форме

$$\hat{R}^{\cdot\cdot\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}} = 2\hat{\partial}_{[\hat{\alpha}} \left\{ \begin{matrix} \hat{\mu} \\ \\ \hat{\beta}]\hat{\gamma} \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} \hat{\mu} \\ \\ [\hat{\alpha}|\hat{\varepsilon}| \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \hat{\varepsilon} \\ \\ \hat{\beta}]\hat{\gamma} \end{matrix} \right\} + 2C^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}.} \left\{ \begin{matrix} \hat{\mu} \\ \\ \hat{\varepsilon}\hat{\gamma} \end{matrix} \right\}$$

$$\equiv K^{\cdot\cdot\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}} + 2C^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}.} \left\{ \begin{matrix} \hat{\mu} \\ \\ \hat{\varepsilon}\hat{\gamma} \end{matrix} \right\}. \tag{10.20}$$

$K^{\cdot\cdot\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}}$ не является тензором относительно голономных преобразований лагранжевых переменных, хотя по виду не отличается от обычного тензора кривизны. Однако замена частных производных производными по направлениям приводят к изменению трансформационных свойств.

Так как мы рассматриваем два рода ковариантных производных $\hat{\nabla}_{\hat{\alpha}}$ и $\tilde{\nabla}_{\hat{\alpha}}$, вычисляемых соответственно с помощью кристоффелевой части связности (10.6) и полной неголономной связности (10.3), то должны выполняться условия согласования. Можно доказать, что таким условием согласования является непосредственно проверяемое соотношение

$$\tilde{\nabla}_{\hat{\alpha}}\hat{g}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = \hat{\nabla}_{\hat{\alpha}}\hat{g}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 0. \tag{10.21}$$

Проведем дальнейший анализ относительного тензора кривизны. Рассмотрим выражение

$$0 = \hat{\nabla}_{[\hat{\alpha}}\hat{\nabla}_{\hat{\mu}]}\hat{g}_{\hat{\lambda}\hat{\nu}} = C^{\hat{\gamma}}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}.}\frac{\hat{\partial}\hat{g}_{\hat{\lambda}\hat{\nu}}}{\hat{\partial}y^{\hat{\gamma}}} - K_{\hat{\alpha}\hat{\mu},(\hat{\lambda}\hat{\nu})}. \tag{10.22}$$

Используя (10.20), находим

$$\hat{R}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},(\hat{\gamma}\hat{\mu})} = 0. \tag{10.23}$$

Свертывая (10.18) по $\hat{\mu}$ и $\hat{\gamma}$, получим

$$\hat{R}_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}]} = C^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}.} \left\{ \begin{matrix} \hat{\mu} \\ \\ \hat{\sigma}\hat{\mu} \end{matrix} \right\} + C^{\hat{\sigma}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}.} \left\{ \begin{matrix} \hat{\gamma} \\ \\ \hat{\sigma}\hat{\alpha} \end{matrix} \right\} + C^{\hat{\sigma}}_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}.} \left\{ \begin{matrix} \hat{\gamma} \\ \\ \hat{\sigma}\hat{\beta} \end{matrix} \right\}. \tag{10.24}$$

Из (10.25) следует, что относительный тензор Риччи не является симметричным. Отсутствие симметрии тензора Риччи косвенно связано с тем, что

$$\hat{R}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}\hat{\mu}} \neq \hat{R}_{\hat{\gamma}\hat{\mu},\hat{\alpha}\hat{\beta}}. \tag{10.25}$$

Образуем тензор, обладающий такими же свойствами симметрии, как и обычный тензор Римана-Кристоффеля. Для этого построим тензор

$$\tilde{R}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}\hat{\mu}} = \frac{1}{2}\Big(\hat{R}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}\hat{\mu}} + \hat{R}_{\hat{\gamma}\hat{\mu},\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Big), \tag{10.26}$$

обладающий такими же свойствами симметрии, как и тензор Римана-Кристоффеля. Воспользуясь предыдущими формулами, можно показать, что построенный тензор удовлетворяет обычному тождеству Риччи

$$\tilde{R}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}\hat{\mu}} + \tilde{R}_{\hat{\beta}\hat{\gamma},\hat{\alpha}\hat{\mu}} + \tilde{R}_{\hat{\gamma}\hat{\alpha},\hat{\beta}\hat{\mu}} = 0, \tag{10.27}$$

из которого вытекает симметрия тензора Риччи $\tilde{R}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. Отметим равенство

$$\hat{R}_{\hat{\beta}\hat{\mu},\hat{\gamma}\hat{\alpha}} - \hat{R}_{\hat{\gamma}\hat{\alpha},\hat{\beta}\hat{\mu}} = C^{\hat{0}}_{\hat{\gamma}\hat{\beta}.} \frac{\hat{\partial}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}}}{\hat{\partial}y^{\hat{0}}} +$$

$$+ C^{\hat{0}}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}.} \frac{\hat{\partial}\hat{g}_{\hat{\gamma}\hat{\mu}}}{\hat{\partial}y^{\hat{0}}} + C^{\hat{0}}_{\hat{\mu}\hat{\gamma}.} \frac{\hat{\partial}\hat{g}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}}{\hat{\partial}y^{\hat{0}}} + C^{\hat{0}}_{\hat{\alpha}\hat{\mu}.} \frac{\hat{\partial}\hat{g}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}}{\hat{\partial}y^{\hat{0}}}. \tag{10.28}$$

Вычисление компонент тензора кривизны $\tilde{R}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}\hat{\mu}}$ дает

$$\tilde{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{q}} = \Omega_{\hat{q}\hat{b}}\Omega_{\hat{a}\hat{c}} - \Omega_{\hat{q}\hat{a}}\Omega_{\hat{b}\hat{c}} - 2\Omega_{\hat{a}\hat{b}}\Omega_{\hat{c}\hat{q}},$$

$$\tilde{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{0}} = 2\hat{\nabla}_{[\hat{a}}\Omega_{\hat{b}]\hat{c}} + 2\Omega_{\hat{a}\hat{b}}F_{\hat{c}} - \frac{1}{2}F_{\hat{b}}\Sigma_{\hat{a}\hat{c}} + \frac{1}{2}F_{\hat{a}}\Sigma_{\hat{c}\hat{b}},$$

$$\tilde{R}_{\hat{0}\hat{b},\hat{c}\hat{0}} = F_{\hat{b}}F_{\hat{c}} - \hat{\nabla}_{(\hat{b}}F_{\hat{c})} - 2\Sigma^{\hat{n}}_{(\hat{b}}\Omega_{\hat{c})\hat{n}} + \Omega_{\hat{n}\hat{c}}\Omega^{\hat{n}}_{\hat{b}.}. \tag{10.29}$$

Пространственные компоненты относительного тензора кривизны могут быть представлены в форме

$$\tilde{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{q}} = \breve{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{q}} - 2\Sigma_{\hat{q}[\hat{a}}\Sigma_{\hat{b}]\hat{c}}, \tag{10.30}$$

где $\breve{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{q}}$ - трехмерный тензор кривизны на гиперповерхности ортогональной мировым линиям частиц среды. Эта гиперповерхность неголономна при наличии вращений. Из (10.29) и (10.30) находим

$$\breve{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{q}} = 2\Sigma_{\hat{q}[\hat{a}}\Sigma_{\hat{b}]\hat{c}} + \Omega_{\hat{q}\hat{b}}\Omega_{\hat{a}\hat{c}} - \Omega_{\hat{q}\hat{a}}\Omega_{\hat{b}\hat{c}} - 2\Omega_{\hat{a}\hat{b}}\Omega_{\hat{c}\hat{q}}. \tag{10.31}$$

При отсутствии вращений (10.31) переходит в выражение полученное ранее автором из других соображений [46].

Введем ряд полезных в дальнейшем тождеств

$$\hat{V}_{\hat{\alpha}} = h^{\mu}_{\hat{\alpha}}V_{\mu} = \delta^{\hat{0}}_{\hat{\alpha}}, \quad \tilde{\nabla}_{[\hat{\alpha}}\tilde{\nabla}_{\hat{\beta}]}\hat{V}_{\hat{\gamma}} = 0 =$$

$$= \hat{\nabla}_{[\hat{\alpha}}\tilde{\nabla}_{\hat{\beta}]}\hat{V}_{\hat{\gamma}} - T^{\hat{\epsilon}}_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}].}\tilde{\nabla}_{\hat{\epsilon}}\hat{V}_{\hat{\gamma}} - T^{\hat{\epsilon}}_{[\hat{\alpha}|\hat{\gamma}|.}\tilde{\nabla}_{\hat{\beta}]}\hat{V}_{\hat{\epsilon}},$$

$$\tilde{\nabla}_{\hat{k}}\hat{V}_{\hat{l}} = \Sigma_{\hat{k}\hat{l}} + \Omega_{\hat{k}\hat{l}}, \quad \tilde{\nabla}_{\hat{0}}\hat{V}_{\hat{l}} = F_{\hat{l}}, \quad \tilde{\nabla}_{\hat{k}}\hat{V}_{\hat{0}} = \tilde{\nabla}_{\hat{0}}\hat{V}_{\hat{0}} = 0. \tag{10.32}$$

Из (10.32) следует

$$\hat{\nabla}_{[\hat{a}}\Sigma_{\hat{b}]\hat{c}} + \hat{\nabla}_{[\hat{a}}\Omega_{\hat{b}]\hat{c}} = -\Omega_{\hat{a}\hat{b}}F_{\hat{c}}. \tag{10.33}$$

Произведя циклическую перестановку индексов $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ в (10.33), получим два дополнительные тождества, складывая которые с (10.33), имеем тождество

$$\hat{\nabla}_{\hat{a}}\Omega_{\hat{b}\hat{c}} + \hat{\nabla}_{\hat{b}}\Omega_{\hat{c}\hat{a}} + \hat{\nabla}_{\hat{c}}\Omega_{\hat{a}\hat{b}} + F_{\hat{a}}\Omega_{\hat{b}\hat{c}} + F_{\hat{b}}\Omega_{\hat{c}\hat{a}} + F_{\hat{c}}\Omega_{\hat{a}\hat{b}} \equiv 0. \tag{10.34}$$

Аналогичное тождество получено в работе [24]. Используя выражения (10.18) и (10.33), запишем (10.29) в виде

$$\tilde{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{0}} = -\hat{\nabla}_{[\hat{a}}\Sigma_{\hat{b}]\hat{c}} - \frac{1}{2}F_{\hat{b}}\Sigma_{\hat{a}\hat{c}} + \frac{1}{2}F_{\hat{a}}\Sigma_{\hat{c}\hat{b}},$$

$$\tilde{R}_{\hat{0}\hat{b},\hat{c}\hat{0}} = -\frac{\hat{\partial}\Sigma_{\hat{b}\hat{c}}}{\hat{\partial}y^{\hat{0}}} + \Sigma^{\hat{n}}_{\hat{c}}\Sigma_{\hat{b}\hat{n}}. \tag{10.35}$$

Из (10.29) и (10.35) следует, что для жестких в смысле Борна безвихревых НСО относительный тензор кривизны равен нулю. Для компонент тензора Риччи имеем [1]

$$\tilde{R}_{\hat{b}\hat{c}} = -\frac{\hat{\partial}\Sigma_{\hat{b}\hat{c}}}{\hat{\partial}y^{\hat{0}}} + \Sigma^{\hat{n}}_{\hat{n}}\Sigma_{\hat{b}\hat{c}} + 2\Sigma^{\hat{n}}_{\hat{c}}\Sigma_{\hat{b}\hat{n}} + \breve{R}_{\hat{b}\hat{c}}$$
$$\equiv F_{\hat{b}}F_{\hat{c}} - \hat{\nabla}_{(\hat{b}}F_{\hat{c})} - 2\Sigma^{\hat{n}}_{(\hat{b}}\Omega_{\hat{c})\hat{n}} + \Omega_{\hat{n}\hat{b}}\Omega^{\hat{n}}_{\hat{c}.},$$
$$\tilde{R}_{\hat{b}\hat{0}} = -\hat{\nabla}_{\hat{a}}\Omega^{\hat{a}}_{\hat{b}.} - 2\Omega_{\hat{a}\hat{b}}F^{\hat{a}} - \frac{1}{2}F_{\hat{a}}\Sigma_{\hat{a}\hat{b}} + \frac{1}{2}F_{\hat{b}}\Sigma^{\hat{c}}_{\hat{c}}$$
$$\equiv \hat{\nabla}_{\hat{a}}\Sigma^{\hat{a}}_{\hat{b}} - \hat{\nabla}_{\hat{b}}\Sigma^{\hat{a}}_{\hat{a}} + \frac{1}{2}F_{\hat{b}}\Sigma^{\hat{a}}_{\hat{a}} - \frac{1}{2}F^{\hat{a}}\Sigma_{\hat{a}\hat{b}},$$
$$\tilde{R}_{\hat{0}\hat{0}} = -\frac{\hat{\partial}\Sigma^{\hat{b}}_{\hat{b}}}{\hat{\partial}y^{\hat{0}}} - \Sigma_{\hat{n}\hat{c}}\Sigma^{\hat{n}\hat{c}} \equiv F_{\hat{n}}F^{\hat{n}} - \hat{\nabla}_{\hat{n}}F^{\hat{n}} + \Omega_{\hat{n}\hat{b}}\Omega^{\hat{b}\hat{n}}. \tag{10.36}$$

Для скалярной кривизны получим

$$\tilde{R} = 2F_{\hat{n}}F^{\hat{n}} - 2\hat{\nabla}_{\hat{n}}F^{\hat{n}} - \Omega_{\hat{n}\hat{b}}\Omega^{\hat{b}\hat{n}}. \tag{10.37}$$

Из тождества (10.19) найдем укороченное тождество Бианки.

$$\hat{\nabla}_{\hat{\alpha}}\left(\tilde{R}^{\hat{\epsilon}\hat{\alpha}} - \frac{1}{2}\hat{g}^{\hat{\epsilon}\hat{\alpha}}\tilde{R}\right) = -\hat{\nabla}_{\hat{\alpha}}\hat{R}^{[\hat{\epsilon}\hat{\alpha}]}$$
$$+2C^{\hat{\epsilon}}_{.\hat{\alpha}\hat{\sigma}}\left(\hat{R}^{\hat{\sigma}\hat{\alpha}} + \hat{R}^{[\hat{\sigma}\hat{\alpha}]}\right) + C_{\hat{\beta}\hat{\alpha},\hat{\sigma}}\hat{R}^{\hat{\epsilon}\hat{\sigma},\hat{\beta}\hat{\alpha}}. \tag{10.38}$$

Из выражения (10.38) видно, что тензор Эйнштейна для НСО, стоящий в круглых скобках в левой части равенства, существенно отличается от тензора Эйнштейна в ОТО, для которого правая часть равенства тождественно равна нулю.

Сравним полученные результаты с результатами А.Л. Зельманова [24], введя для удобства сравнения обозначения, используемые в [24].

$$\hat{g}_{\hat{a}\hat{b}} = -h_{ab}, \quad \Sigma_{\hat{a}\hat{b}} = -\frac{1}{c}D_{ab}, \quad \Omega_{\hat{c}\hat{\alpha}} = -A_{ca}, \quad \Sigma^{\hat{a}}_{\hat{a}} = \frac{1}{c}D,$$
$$\Sigma^{\hat{n}}_{\hat{c}} = \frac{1}{c}D^{n}_{c}, \quad \Omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{c}.} = \frac{1}{c}A^{a}_{c.}, \quad F_{\hat{b}} = \frac{1}{c^2}F_b, \quad F^{\hat{a}} = -\frac{1}{c^2}F^a,$$
$$\frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}y^{\hat{k}}} = \frac{{}^*\partial}{\partial x^k}, \quad \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}y^{\hat{0}}} = \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t}. \tag{10.38a}$$

Используя соотношения (10.36), получим следующие тождества в обозначениях Зельманова

$$\frac{{}^*\partial D_{ik}}{\partial t} - \left(D_{ij} + A_{ij}\right)\left(D^j_k + A^j_{k.}\right) + DD_{ik} - D_{ij}D^j_k$$
$$+3A_{ij}A^j_{k.} + \hat{\nabla}_{(i}F_{k)} - \frac{1}{c^2}F_iF_k + c^2\breve{R}_{ik} \equiv 0,$$
$$\hat{\nabla}_j\left(h^{ij}D - D^{ij} - A^{ij}\right) + \frac{2}{c^2}F_iA^{ij} \equiv 0,$$

[1]Отметим во избежание недоразумений, что тензоры кривизны разными авторами определяются с точностью до знака. Например, в [7] и [25] тензоры кривизны совпадают и отличаются знаком от тензора кривизны, используемого нами в этом разделе на основе [50]. Тензор Риччи в [50], [25] и нашем случае получается при помощи свертки по первому и четвертому индексам, а в [7] производится свертка по первому и третьему индексам. Поэтому тензоры Риччи и скалярная кривизна в [7], [50] и в нашем случае совпадают, а от [25] отличаются знаком.

$$\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D_{jk}D^{kj} + A_{jk}A^{kj} + \hat{\nabla}_j F^j - \frac{1}{c^2}F_j F^j \equiv 0. \tag{10.39}$$

Левые части тождеств в (10.39) представляют компоненты тензора Риччи, задающие левую часть уравнений Эйнштейна в ТХИ. В нашем случае эти компоненты равны нулю. Полученный результат не является неожиданным. Исходное пространство, в котором изучалось движение сплошной среды, было плоским пространством Минковского. Возникновение отличного от нуля относительного тензора кривизны обусловлено разделением нулевого неголономного тензора кривизны плоского пространства-времени на две ненулевых части.

Если бы исходное пространство было римановым, что имеет место в ОТО, то в левой части равенства (10.8) добавился бы тензор кривизны исходного пространства, заданный в неголономной сопутствующей лагранжевой НСО. Это должно было привести и к изменению некоторых кинематических тождеств. В частности, в правой части тождества (10.33) добавится член

$$\tilde{\nabla}_{[\hat{a}}\tilde{\nabla}_{\hat{b}]}\hat{V}_{\hat{c}} = -\frac{1}{2}R^{\hat{0}}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}.}.$$

Произведя в новом тождестве свертку по $\hat{a}$ и $\hat{c}$, поднимая индекс $\hat{b}$, получим выражение $R^{\hat{b}\hat{0}}$ компоненты тензора Риччи в теории Зельманова.

Целью предлагаемого в этом разделе исследования является выделение вклада в кривизну пространства-времени, обусловленного неинерциальностью наблюдателей, движущихся вместе с средой в произвольном силовом поле. Так как поле 4-скоростей V_μ появилось, как результат интегрирования релятивистского уравнения движения сплошной среды в плоском пространстве- времени, то разложение (1.1) выступает в качестве математического тождества. Хотя закон движения сплошной среды в переменных Лагранжа (10.1) голономен, однако "пространственные"векторы аффинных реперов, соединяющие соседние лагранжевы частицы, не могут появиться как результат дифференцирования 4-радиуса вектора x^μ по лагранжевым координатам $y^{\hat{k}}$, так как гиперповерхность одновременных событий, когда в качестве временного параметра используется собственное время, не ортогональна мировым линиям частиц среды. Поэтому из физического требования "размещения"пространственных реперов на ортогональной мировым линиям гиперповерхности, возникает отличный от нуля объект неголономности.

Вид объекта неголономности зависит и от выбора временного параметра. Для элемента интервала с помощью (1.10) и (9.10) находим

$$dS^2 = dy^{\hat{0}^2} + g^*_{\mu\nu}\frac{\partial\Psi^\mu}{\partial y^{\hat{n}}}\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial y^{\hat{k}}}dy^{\hat{n}}dy^{\hat{k}}, \quad g^*_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu. \tag{10.40}$$

$g^*_{\mu\nu}$ - проекционный оператор в пространстве Минковского, проектирующий тензоры на ортогональную мировым линиям частиц базиса гиперповерхность.

$$dy^{\hat{0}} = d\xi^{\hat{0}} + V_\mu\frac{\partial\Psi^\mu}{\partial y^{\hat{n}}}dy^{\hat{n}} = V_\mu dx^\mu. \tag{10.41}$$

Из (10.41) видно, что $dy^{\hat{0}}$ не является полным дифференциалом, т.е. $y^{\hat{0}}$ - неголономная координата.

Элемент интервала (10.40) эквивалентен разбиению в сопутствующей НСО четырехмерного интервала на две части, одна из которых $dy^{\hat{0}} = V_\mu dx^\mu$ есть элемент времени наблюдателя, движущегося вместе с средой, а другая - элемент трехмерного интервала на ортогональной мировым линиям частиц среды гиперповерхности. Аналогичное разбиение приводится в [24] и [40]. Так как в сопутствующей НСО справедливы очевидные соотношения

$$V^{\hat{k}} = h^{\hat{k}}_{\mu} V^{\mu} = \frac{dy^{\hat{k}}}{d\xi^{\hat{0}}} = 0,$$

$$V_{\hat{k}} = V_{\mu} \frac{\partial \Psi^{\mu}}{\partial y^{\hat{k}}} = g_{\hat{k}\hat{\alpha}} V^{\hat{\alpha}} = g_{\hat{k}\hat{0}} V^{\hat{0}} = \frac{g_{\hat{k}\hat{0}}}{\sqrt{g_{\hat{0}\hat{0}}}}, \tag{10.42}$$

то элемент пространственного интервала в лагранжевой сопутствующей НСО имеет вид

$$dl^2 = \Big(\frac{g_{\hat{n}\hat{0}} g_{\hat{k}\hat{0}}}{g_{\hat{0}\hat{0}}} - g_{\hat{n}\hat{k}}\Big) dy^{\hat{n}} dy^{\hat{k}}. \tag{10.43}$$

Элемент интервала (10.43) совпадает с хорошо известным соотношением [7]. Отметим, что соотношения (10.42) и (10.43) являются общими и не зависят от конкретного вида параметров Ламе (10.2).

Построенный нами относительный тензор кривизны является тензором относительно неголономных преобразований. Представляет интерес построить относительный тензор кривизны, который соответствует обычному общековариантному тензору Римана-Кристоффеля относительно произвольных голономных преобразований.

В согласии с (10.6) неголономная связность раскладывается на кристоффелеву часть связности и сумму объектов неголономности. При этом кристоффелева часть связности вычисляется через метрический тензор (10.9) по формуле

$$\left\{ {\hat{\sigma} \atop \hat{\alpha}\hat{\beta}} \right\} = \frac{1}{2} \hat{g}^{\hat{\sigma}\hat{\gamma}} (\hat{\partial}_{\hat{\alpha}} \hat{g}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} + \hat{\partial}_{\hat{\beta}} \hat{g}_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}} - \hat{\partial}_{\hat{\gamma}} \hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}),$$

$$\hat{\partial}_{\hat{\alpha}} \equiv \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial} y^{\hat{\alpha}}}. \tag{10.44}$$

Очевидно, что связность (10.44) отличается от обычной голономной связности тем, что в связности (10.44) вместо частных производных стоят производные по направлениям. Исходя из определения производной по направлениям, имеем с использованием (10.2)

$$\hat{\partial}_{\hat{\alpha}} = h^{\mu}_{\hat{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial y^{\hat{\alpha}}} + L_{\hat{\alpha}} \frac{\partial}{\partial s}, \quad L_{\hat{\alpha}} \equiv \hat{V}_{\hat{\alpha}} - V_{\hat{\alpha}},$$

$$\hat{V}_{\hat{\alpha}} = h^{\mu}_{\hat{\alpha}} V_{\mu} = \delta^{\hat{0}}_{\hat{\alpha}}, \quad V_{\hat{\alpha}} = V_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\hat{\alpha}}}, \tag{10.45}$$

где дифференцирование по $y^{\hat{0}}$ эквивалентно дифференцированию по $\xi^{\hat{0}}$ или по длине s вдоль мировых линий базиса.

Из (10.45) следует, что $L_{\hat{0}} = 0$.

Из (10.6) и (10.45) находим

$$\left\{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}\right\} = \tilde{\Gamma}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}} + \tilde{T}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}, \quad \tilde{T}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = L_{\hat{\beta}}\Sigma_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}} + L_{\hat{\alpha}}\Sigma_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} - L_{\hat{\gamma}}\Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}},$$

$$\Sigma_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}}{\partial s}, \quad \Sigma_{\hat{0}\hat{0}} = \Sigma_{\hat{0}\hat{k}} = 0, \tag{10.46}$$

где $\tilde{\Gamma}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}}$ - голономная кристоффелева связность, вычисляемая по метрике (10.9). На основе проведенного анализа неголономная связность, определяемая разложением (10.6), может быть представлена в виде

$$\Gamma^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \tilde{\Gamma}^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + \Pi^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}, \quad \Pi^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = T^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + \tilde{T}^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}. \tag{10.47}$$

Заменив в формуле (10.7) неголономную связность $\Gamma^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ на сумму связностей из (10.47), получим с учетом (10.45) и (10.6) разложение

$$R^{\cdot\cdot\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 2\partial_{[\hat{\alpha}}\tilde{\Gamma}^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}} + 2\partial_{[\hat{\alpha}}\Pi^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}}$$

$$+2L_{[\hat{\alpha}}\frac{\partial \Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}}}{\partial s} + 2\Gamma^{\hat{\mu}}_{[\hat{\alpha}|\hat{\varepsilon}|}\Gamma^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}} + 2C^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\varepsilon}\hat{\gamma}} \equiv 0. \tag{10.48}$$

Из разложения (10.48) можно выделить в явном виде член вида

$$\tilde{K}^{\cdot\cdot\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 2\partial_{[\hat{\alpha}}\tilde{\Gamma}^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}} + 2\tilde{\Gamma}^{\hat{\mu}}_{[\hat{\alpha}|\hat{\varepsilon}|}\tilde{\Gamma}^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}}, \tag{10.49}$$

который соответствует обычному общековариантному относительно голономных преобразований тензору Римана-Кристоффеля. Из (10.48) и (10.49) имеем

$$-\tilde{K}^{\cdot\cdot\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 2\nabla_{[\hat{\alpha}}\Pi^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}} + 2\Pi^{\hat{\mu}}_{[\hat{\alpha}|\hat{\varepsilon}|}\Pi^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}} + 2C^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\varepsilon}\hat{\gamma}} + 2L_{[\hat{\alpha}}\frac{\partial \Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}]\hat{\gamma}}}{\partial s}. \tag{10.50}$$

По поводу формулы (10.50) необходимо сделать следующие замечания:

1. Ковариантная производная в правой части (10.50) вычисляется обычным образом (как для тензора) по голономной кристоффелевой связности от объекта $\Pi^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, который не является тензором относительно голономных преобразований.

2. Все величины, входящие в правую часть равенства (тождества) (10.50), также не являются тензорами относительно голономных преобразований, однако их комбинация является общековариантным тензором.

Таким образом, в лагранжевой сопутствующей системе отсчета можно ввести в общей координации три связности: абсолютную неголономную связность $\Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\varepsilon}\hat{\gamma}}$, вычисляемую по формуле (10.3), относительную неголономную связность $\left\{ {\hat{\sigma} \atop \hat{\alpha}\hat{\beta}} \right\}$, задаваемую с помощью разложения (10.6) и относительную голономную связность $\tilde{\Gamma}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}}$, получаемую из разложения (10.46).

Ясно, что это возможно только в том случае, если ковариантные производные от метрического тензора (10.9) для каждой из связностей равны нулю. Докажем, что это именно так. Используя формулы (10.3) и (10.9), подставляя их в выражение

$$\tilde{\nabla}_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \hat{\partial}_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - \Gamma^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}}\hat{g}_{\hat{\nu}\hat{\beta}} - \Gamma^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}\hat{\beta}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\nu}}, \tag{10.51}$$

убеждаемся, что $\tilde{\nabla}_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \equiv 0$.

Используя разложение (10.6) находим с помощью (10.51)

$$\hat{\nabla}_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \tilde{\nabla}_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + T^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}}\hat{g}_{\hat{\nu}\hat{\beta}} + T^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}\hat{\beta}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\nu}}. \tag{10.52}$$

Так как сумма двух тензоров аффинной деформации связности [2] в последней формуле дает ноль, то $\hat{\nabla}_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \tilde{\nabla}_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0$. Наконец из равенства

$$\nabla_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \hat{\nabla}_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + T^*_{\hat{\mu}\hat{\alpha},\hat{\beta}} + T^*_{\hat{\mu}\hat{\beta},\hat{\alpha}} - 2L_{\hat{\mu}}\Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}},$$

$$T^*_{\hat{\mu}\hat{\alpha},\hat{\beta}} = L_{\hat{\mu}}\Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + L_{\hat{\alpha}}\Sigma_{\hat{\mu}\hat{\beta}} - L_{\hat{\beta}}\Sigma_{\hat{\mu}\hat{\alpha}} \tag{10.53}$$

следует, что

$$T^*_{\hat{\mu}\hat{\alpha},\hat{\beta}} + T^*_{\hat{\mu}\hat{\beta},\hat{\alpha}} - 2L_{\mu}\Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0. \tag{10.54}$$

Поэтому имеем окончательно

$$\tilde{\nabla}_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \hat{\nabla}_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \nabla_{\hat{\mu}}\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0. \tag{10.55}$$

Развитый в этом параграфе математический аппарат, описывающий свойства лагранжевых сопутствующих систем отсчета с заданным законом движения (10.1), предполагал, что в (10.1) в качестве временного параметра фигурировало собственное время. Однако часто при описании перехода из ИСО в НСО используется другой временной параметр, например, время ИСО. Поэтому интересно разработать такой аппарат, который был бы пригоден для произвольного временного параметра. Будем считать, в (10.1), что $\xi^{\hat{0}}$ - произвольный временной параметр. Для 4 - скорости V^{μ} в переменных Лагранжа справедливо соотношение

$$V^{\mu} = \Theta\frac{\partial\Psi^{\mu}}{\partial\xi^{\hat{0}}}, \tag{10.56}$$

где множитель Θ определяется из условия нормировки 4 - скорости на единицу.

$$\Theta^2 = \frac{1}{g_{\mu\nu}\frac{\partial\Psi^{\mu}}{\partial\xi^{\hat{0}}}\frac{\partial\Psi^{\nu}}{\partial\xi^{\hat{0}}}}, \tag{10.57}$$

Соответствующие коэффициенты Ламе имеют вид

$$h^{\mu}_{\hat{k}} = \left(\delta^{\mu}_{\varepsilon} - V^{\mu}V_{\varepsilon}\right)\frac{\partial\Psi^{\varepsilon}}{\partial y^{\hat{k}}}, \quad h^{\mu}_{\hat{0}} = \frac{\partial\Psi^{\mu}}{\partial\xi^{\hat{0}}} = \frac{V^{\mu}}{\Theta},$$

$$h^{\hat{k}}_{\mu} = \frac{\partial y^{\hat{k}}}{\partial x^{\mu}}, \quad h^{\hat{0}}_{\mu} = \Theta V_{\mu}. \tag{10.58}$$

Для неголономных координат коэффициенты связности $\Gamma^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ в пространстве Минковского можно представить в виде (10.3) и разложения (10.6) Из коэффициентов Ламе образуем объект неголономности $C^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ (10.5). Конкретный вид объекта неголономности зависит от

[2] Отметим, что в отличие от $\Pi^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ объекты $T^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ являются тензорами относительно неголономных преобразований. Для доказательства достаточно вычислить ковариантные производные произвольного вектора по связностям $\Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\varepsilon}\hat{\gamma}}$ и $\left\{ {}^{\hat{\mu}}_{\hat{\varepsilon}\hat{\gamma}} \right\}$ и произвести вычитание одной производной из другой.

выбранных коэффициентов Ламе, которые определяются в зависимости от выбора временного параметра вдоль мировых линий частиц базиса. Для случая (10.58) находим

$$C^{\hat{0}}_{\hat{k}\hat{l}} = \Theta\Omega_{\hat{k}\hat{l}}, \quad 2C^{\hat{0}}_{\hat{0}\hat{k}} = F_{\hat{k}} - \frac{\hat{\partial}\ln\Theta}{\partial y^{\hat{k}}}, \quad C^{\hat{k}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0, \tag{10.59}$$

где

$$\Omega_{\hat{k}\hat{l}} = \Omega_{\mu\nu}h^{\mu}_{\hat{k}}h^{\nu}_{\hat{l}}, \quad F_{\hat{k}} = F_{\mu}h^{\mu}_{\hat{k}}. \tag{10.60}$$

Метрические коэффициенты для параметров Ламе (10.58), имеют вид

$$\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = g_{\mu\nu}h^{\mu}_{\hat{\alpha}}h^{\nu}_{\hat{\beta}}, \quad \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{1}{\Theta^2}, \quad \hat{g}_{\hat{0}\hat{k}} = 0, \tag{10.61}$$

где $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор в эйлеровых координатах пространства Минковского. Символы Кристоффеля вычисляются обычным способом с заменой частных производных производными по направлениям, а оператор $\hat{\nabla}_{\hat{\alpha}}$ вычисляется с помощью кристоффелевой связности. Коммутационные соотношения для производных по направлениям даются общими формулами, (10.10), которые для нашего случая дают

$$\frac{\hat{\partial}^2}{\partial y^{\hat{k}}\partial y^{\hat{l}}} - \frac{\hat{\partial}^2}{\partial y^{\hat{l}}\partial y^{\hat{k}}} = 2\Theta\Omega_{\hat{l}\hat{k}}\frac{\hat{\partial}}{\partial y^{\hat{0}}} = 2\Omega_{\hat{l}\hat{k}}\frac{\partial}{\partial s},$$

$$\frac{\hat{\partial}^2}{\partial y^{\hat{k}}\partial y^{\hat{0}}} - \frac{\hat{\partial}^2}{\partial y^{\hat{0}}\partial y^{\hat{k}}} = \Big(F_{\hat{k}} - \frac{\hat{\partial}\ln\Theta}{\partial y^{\hat{k}}}\Big)\frac{\hat{\partial}}{\partial y^{\hat{0}}} = \frac{1}{\Theta}\Big(F_{\hat{k}} - \frac{\hat{\partial}\ln\Theta}{\partial y^{\hat{k}}}\Big)\frac{\partial}{\partial s}. \tag{10.62}$$

Для компонент тензора аффинной деформации связности находим

$$T_{\hat{0}\hat{k},\hat{0}} = -\Big(F_{\hat{k}} - \frac{\hat{\partial}\ln\Theta}{\partial y^{\hat{k}}}\Big)\frac{1}{\Theta^2}, \quad T_{\hat{0}\hat{0},\hat{k}} = \Big(F_{\hat{k}} - \frac{\hat{\partial}\ln\Theta}{\partial y^{\hat{k}}}\Big)\frac{1}{\Theta^2},$$

$$T_{\hat{m}\hat{l},\hat{k}} = T_{\hat{k}\hat{0},\hat{0}} = 0, \quad T_{\hat{0}\hat{l},\hat{k}} = T_{\hat{l}\hat{0},\hat{k}} = \frac{1}{\Theta}\Omega_{\hat{l}\hat{k}}, \quad T_{\hat{k}\hat{l},\hat{0}} = -\frac{1}{\Theta}\Omega_{\hat{k}\hat{l}}. \tag{10.63}$$

Построение относительного неголономного и голономного тензора кривизны производится по тем же правилам, что и ранее. Производные по направлениям связаны с частными производными формулой

$$\hat{\partial}_{\hat{\alpha}} = h^{\mu}_{\hat{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial y^{\hat{\alpha}}} + L_{\hat{\alpha}}\frac{\partial}{\partial \xi^{\hat{0}}},$$

$$L_{\hat{\alpha}} \equiv \Big(\delta^{\hat{0}}_{\hat{\alpha}} - \Theta V_{\hat{\alpha}}\Big), \quad V_{\hat{\alpha}} = V_{\mu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\hat{\alpha}}}. \tag{10.64}$$

В согласии с (10.6) неголономная связнось раскладывается на кристоффелеву часть связности и сумму объектов неголономности. При этом кристоффелева часть связности вычисляется через метрический тензор (10.9) по формуле (10.44) Очевидно, что связность (10.44) отличается от обычной голономной связности тем, что в связности (10.44) вместо частных производных стоят производные по направлениям. Исходя из определения производной по направлениям, с использованием (10.2) и (10.64) находим

$$\Big\{\hat{\alpha}\hat{\beta}, \hat{\gamma}\Big\} = \tilde{\Gamma}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}} + \tilde{T}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}},$$

$$\tilde{T}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = \frac{1}{\Theta}\Big[L_{\hat{\beta}}\Sigma_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}} + L_{\hat{\alpha}}\Sigma_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} - L_{\hat{\gamma}}\Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Big],$$

$$\Sigma_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}} = \frac{1}{2}\Theta\frac{\partial \hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}}{\partial \xi^{\hat{0}}}, \quad \Sigma_{\hat{0}\hat{0}} = \Sigma_{\hat{0}\hat{k}} = 0, \tag{10.65}$$

где $\tilde{\Gamma}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}}$ - голономная кристоффелева связность, вычисляемая по метрике (10.61), для которой имеем

$$\tilde{\Gamma}_{\hat{0},\hat{k}\hat{l}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \hat{g}_{\hat{k}\hat{l}}}{\partial \xi^{\hat{0}}}, \quad \tilde{\Gamma}_{\hat{0},\hat{0}\hat{l}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}}{\partial y^{\hat{l}}}, \quad \tilde{\Gamma}_{\hat{0},\hat{0}\hat{0}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}}{\partial y^{\hat{0}}},$$
$$\tilde{\Gamma}_{\hat{n},\hat{0}\hat{l}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{g}_{\hat{n}\hat{l}}}{\partial y^{\hat{0}}}, \quad \tilde{\Gamma}_{\hat{n},\hat{0}\hat{0}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}}{\partial y^{\hat{n}}}, \quad \tilde{\Gamma}^{\hat{n}}_{\hat{k}\hat{l}} = \tilde{\Lambda}^{\hat{n}}_{\hat{k}\hat{l}}, \tag{10.65a}$$

где $\tilde{\Lambda}^{\hat{n}}_{\hat{k}\hat{l}}$ трехмерные символы Кристоффеля, образованные из трехмерного тензора $\hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}} = -\hat{g}_{\hat{k}\hat{l}}$.

Относительный голономный тензор кривизны может быть вычислен по формулам (10.49) или (10.50). Расчет по формуле (10.49) приводит к соотношениям

$$-\tilde{K}_{\hat{0}\hat{k},\hat{l}\hat{m}} = \sqrt{\hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}}(\nabla_{\hat{m}}\Sigma_{\hat{k}\hat{l}} - \nabla_{\hat{l}}\Sigma_{\hat{k}\hat{m}}),$$
$$\tilde{K}_{\hat{i}\hat{k},\hat{l}\hat{m}} = P_{\hat{i}\hat{k},\hat{l}\hat{m}} - (\Sigma_{\hat{k}\hat{l}}\Sigma_{\hat{i}\hat{m}} - \Sigma_{\hat{k}\hat{m}}\Sigma_{\hat{i}\hat{l}}),$$
$$-\tilde{K}_{\hat{0}\hat{k},\hat{0}\hat{m}} = -\hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}\Big(\frac{\partial \Sigma_{\hat{k}\hat{m}}}{\partial s} - \hat{g}^{\hat{q}\hat{r}}\Sigma_{\hat{k}\hat{q}}\Sigma_{\hat{m}\hat{r}}\Big)$$
$$-\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}}{\partial y^{\hat{k}}\partial y^{\hat{m}}} - \frac{1}{2}\hat{g}^{\hat{0}\hat{0}}\frac{\partial \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}}{\partial y^{\hat{l}}}\frac{\partial \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}}{\partial y^{\hat{m}}} - \Lambda^{\hat{n}}_{\hat{k}\hat{m}}\frac{\partial \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}}{\partial y^{\hat{n}}}\Big]. \tag{10.65b}$$

Как следует из (10.65), для жестких в смысле Борна движений (т.е. при $\Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0$) голономные и неголономные символы Кристоффеля совпадают, однако относительные неголономные и голономные тензоры кривизны отличны друг от друга за счет неголономной добавки (см. (10.20)).

В качестве примера рассмотрим движение классически жесткого тела с законом движения

$$x^a = \int_0^t v(\tau)\,d\tau + y^a, \quad x^0 = ct = \xi^{\hat{0}}. \tag{10.66}$$

Здесь в качестве временного параметра $\xi^{\hat{0}}$ выбрано время ИСО. Элемент относительного интервала может быть построен из метрических коэффициентов (10.61)

$$d\tilde{S}^2 = \frac{1}{\Theta^2}d\xi^{\hat{0}^2} + g^*_{\mu\nu}\frac{\partial \Psi^\mu}{\partial y^{\hat{n}}}\frac{\partial \Psi^\nu}{\partial y^{\hat{k}}}dy^{\hat{n}}dy^{\hat{k}}, \quad g^*_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu. \tag{10.67}$$

$g^*_{\mu\nu}$ - проекционный оператор в пространстве Минковского, проектирующий тензоры на ортогональную мировым линиям частиц базиса гиперповерхность.

Относительный элемент интервала $d\tilde{S}^2$ отличается от абсолютного элемента интервала (10.40) нормирующим множителем перед временным коэффициентом и, что более существенно, вместо неголономного элемента $dy^{\hat{0}}$, определяемого из (10.41), входит голономный элемент $d\xi^{\hat{0}} = cdt$. Ясно, что абсолютный и относительный интервалы не равны по величине. Использование метрики для абсолютного интервала, полученного с помощью неголономных преобразований, приводит к нулевому неголономному тензору кривизны, из которого с помощью процедуры, разобранной выше, получаются отличные от нуля неголономные и голономные тензоры кривизны.

Нормирующий множитель $1/\Theta^2$ можно вычислить по формуле (10.57). Использование закона движения (10.66) приводит квадрат элемента интервала (10.66) к виду

$$d\tilde{S}^2 = \frac{1}{V_0^2}dx^{0^2} - (\delta_{nk} + V_n V_k)dy^n dy^k. \tag{10.68}$$

Соотношение (10.68) из других соображений было получено ранее В.И. Родичевым [1], в которое вместо лагранжевых координат y^k входили эйлеровы координаты ^{k} и движение не считалось обязательно классически жестким.

Для частного случая падения в центрально-симметричном поле Солнца из бесконечности жесткого ящика, имеющего на бесконечности нулевую скорость, формула для интервала, аналогичная (10.68), приведена в известной книге А. Зоммерфельда [83] со ссылкой на неопубликованную работу Ленца. Исходя из этой формулы, Зоммерфельд получил интервал в форме Шварцшильда, используя в первом приближении закон Ньютона.

Интервал (10.68) в форме Родичева можно получить из интервала (10.67) и для произвольного закона движения сплошной среды вида

$$x^a = \Psi^a(y^{\hat{k}}, x^0), \quad x^0 = ct = \xi^{\hat{0}}, \tag{10.69}$$

если ввести следующее обозначение [38]

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial y^{\hat{n}}}dy^{\hat{n}} = dX^k, \tag{10.70}$$

которое означает, что элемент, соединяющий две близкие лагранжевы частицы, рассматривается в координатах Эйлера в фиксированный момент времени t. Именно так поступают в классической механике сплошных сред при выводе тензора деформаций в лагранжевой сопутствующей СО.

Для произвольного движения сплошной среды в виде (10.69) элемент относительного интервала в переменных Лагранжа имеет вид

$$d\tilde{S}^2 = \frac{1}{V_0^2}d\xi^{\hat{0}^2} - (\delta_{mn} + V_m V_n)\frac{\partial \Psi^m}{\partial y^{\hat{l}}}\frac{\partial \Psi^n}{\partial y^{\hat{k}}}dy^{\hat{l}}dy^{\hat{k}}. \tag{10.71}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи СО, реализуемых с помощью закона движения (10.69) и метрики (10.71)

1. Равномерно вращающаяся СО.

В отличие от релятивистской жесткой НСО, рассмотренной в предыдущем разделе, и реализуемой в римановом пространстве-времени, будем следовать стандартному методу перехода [7].

Выберем неподвижную систему отсчета, в которой введем цилиндрические координаты r_0, φ_0, z_0, t_0 и перейдем к вращающейся системе отсчета r, φ, z, t согласно формулам:

$$r_0 = r, \quad \varphi_0 = \varphi + \Omega t, \quad z_0 = z, \quad t_0 = t,$$

где угловая скорость вращения Ω относительно оси z считается постоянной.

Перейдя от галилеевых координат в (10.71) к цилиндрическим, получим выражение для относительного интервала во вращающейся НСО в виде. Элемент интервала имеет вид

$$d\tilde{S}^2 = \Big(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\Big)c^2 dt^2 - dr^2 - \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} - dz^2. \tag{10.72}$$

Для сравнения приводим величину интервала при стандартном рассмотрении

$$dS^2 = \Big(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\Big)c^2 dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2. \tag{10.73}$$

Обе формулы справедливы, если $r\Omega/c < 1$ и удовлетворяют критерию жесткости как классическому, так и релятивистскому (в смысле Борна). Однако между метриками имеется существенное различие: метрика (10.72) реализуется в римановом пространстве времени, а метрика (10.73) - в плоском пространстве Минковского. При $t = \mathrm{const}$ метрика (10.72) соответствует элементу "физического"пространственного интервала во вращающейся системе отсчета в согласии с формулой (10.43). В (10.72) в отличие от (10.73) отсутствуют g_{0k} компоненты метрического тензора, что означает возможность синхронизовать часы вдоль любого замкнутого контура [7].

Связь между истинным τ временем и временем пространства Минковского t у обеих метрик одинакова.

$$d\tau^2 = \Big(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\Big)dt^2 \tag{10.74}$$

Обе метрики, в отличие от релятивистской жесткой НСО, справедливы лишь для конечных расстояний от оси вращения.

Метрика (10.72) допускает простое геометрическое толкование.

Элемент относительного интервала, так же как и в ИСО в декартовых координатах, определяется по теореме Пифагора для псевдориманова пространства времени: из квадрата собственного времени (умноженного на квадрат скорости света) вычитается квадрат элемента "физической"длины.

2. Релятивистская (нежесткая) равноускоренная НСО.

Как доказано в главе 1, в пространстве Минковского не существует такого закона движения, который бы приводил к одновременному выполнению двух условий: релятивистской жесткости и равноускоренности. Поэтому в качестве равноускоренной СО рассмотрим движение заряженной пыли в постоянном электрическом поле, приводящей к метрике Логунова (2.7), (2.8).

Подстановка закона движения (2.5) в формулу (10.71) (заменив в (10.71) $y^{\hat{k}} \to y^k$) приводит к элементу интервала в виде

$$d\tilde{S}^2 = \frac{c^2 dt^2}{1 + {a_0}^2 t^2/c^2} - (1 + {a_0}^2 t^2/c^2)(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2. \tag{10.75}$$

Подстановка закона движения (2.6) в (10.71) (с заменой $\Theta = 1$, $t \to \tau$) приводит к квадрату интервала

$$d\tilde{S}^2 = c^2 d\tau^2 - \cosh^2\Big(\frac{a_0 \tau}{c^2}\Big)(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2. \tag{10.76}$$

Формула (10.75) была получена из других соображений В.И. Родичевым [1], правда, в координатах Эйлера, а не Лагранжа, как в нашем случае. Ясно, что (10.76) может быть получена из (10.75) простым преобразованием времени, которое в согласии с (2.6) определяется равенством $t = (c/a_0)\sinh(a_0\tau/c)$.

Анализ формул (10.75) и (10.76) и сравнение с аналогичными соотношениями (2.7) и (2.8) показывает, что элементы относительных интервалов (как и в случае вращательного движения) вычисляются в согласии с теоремой Пифагора для псевдориманова пространства, когда из квадрата собственного времени (умноженного на квадрат скорости света) вычитается квадрат элемента "физической"длины, заданный соотношениями (2.9) и (2.10).

Метрики Логунова (2.7) и (2.8), получаемая из псевдоевклидова интервала (2.4) с помощью законов движения (2.5) и (2.6), содержат отличные от нуля g_{01} компоненты метрического тензора. С нашей точки зрения это означает, что для наблюдателей, находящихся в ИСО и использующих координаты НСО, гиперплоскость $t = \mathrm{const}$ в (2.7) и гиперповерхность $\tau = const$ в (2.8) не ортогональны мировым линиям частиц базиса.

Наблюдатели, находящиеся в НСО вместе с синхронизованными часами, показывающими собственное время τ, вне зависимости от их "желания"в любой момент времени располагаются в "физическом"пространстве, т.е. на ортогональной мировым линиям частиц базиса гиперповерхности. В геометрии системы отсчета с $\hat{g}_{\hat{0}\hat{k}} = 0$ и $\hat{g}_{\hat{0}\hat{0}} = 1$ называются полугеодезическими [25] или синхронными [7]. В синхронных системах отрезки времени, вырезаемые из конгруенции мировых линий частиц базиса двумя соседними гиперповерхностями ортогональными мировым линиям, для всех мировых линий частиц одинаковы. Поэтому в "физическом"пространстве синхронизованные в начальный момент времени часы должны идти синхронно!

Отсюда следует очевидный вывод.

В синхронных системах отсчета гиперповерхности, ортогональные мировым линиям частиц базиса, являются гиперповерхностями одновременности.

Синхронные СО в римановом пространстве-времени адекватны ИСО в пространстве Минковского.

То, что геометрия пространства-времени для наблюдателей, "падающих"свободно вместе с часами в однородном поле, является синхронной, можно получить из следующих простых рассуждений.

Пусть в начальный момент времени до включения силового поля все часы покоились друг относительно друга и показывали одинаковое время. После включения силового поля, одинаково действующего на каждые из часов, часы "портились"одинаковым образом. Так как по определению часы "все время"находились в "физическом"пространстве (т.е. на ортогональной мировым линиям часам гиперповерхности) в одинаковой ситуации, то их показания в "физическом"пространстве должны совпадать. Т.е гиперповерхность, ортогональная мировым линиям, должна совпадать с синхронной.

Здесь может возникнуть вполне справедливый вопрос.

Почему метрика (2.18) для жесткой равноускоренной НСО в отличии от близкой по смыслу метрики (10.76) не является синхронной?

Ответом на этот вопрос является то, что эти метрики описывают различные характеристики пространства-времени. Метрика (2.18) связана с абсолютной, а метрика (10.76) - с относительной геометрией пространства-времени.

В частности ускорения каждой из частиц для метрики (2.18) постоянны в сопутствующей СО, в то время как ускорения частиц для метрики (10.76) равны нулю и все частицы движутся по геодезическим линиям, но в искривленном пространстве-времени.

Например, вычисление относительного тензора кривизны для метрики (10.76) приводит к отличию от нуля одной (с точностью до перестановки индексов) компоненты.

$$\hat{R}^{\hat{0}}_{\hat{0}\hat{1},\hat{1}.} = -\frac{a_0^2}{c^4}\cosh\left(\frac{a_0\xi^{\hat{0}}}{c^2}\right) \tag{10.77}$$

Для скалярной кривизны получим

$$\hat{R} = -2\frac{a_0^2}{c^4} \tag{10.77}$$

Аналогичная ситуация имеет место и при рассмотрении вращательного движения, где часы, *находящиеся на одинаковом расстоянии от оси вращения,* должны показывать одинаковое собственное время.

В согласии со стандартной точки зрения [7], синхронизация у часов, находящихся в одинаковых физических условиях, т.е. на одинаковом расстоянии от оси вращения **отсутствует**. При нашем рассмотрении *для относительного интервала* такого "парадокса"не возникает.

Математический переход к относительному интервалу можно осуществить и совершенно элементарным способом, взяв в метрике (10.40) величину $dy^{\hat{0}}$ при фиксированном значении лагранжевой координаты частицы $y^{\hat{k}}$ в (10.41). Это приводит к интервалу

$$d\tilde{S}^2 = d\xi^{\hat{0}^2} + g^*_{\mu\nu}\frac{\partial\Psi^\mu}{\partial y^{\hat{n}}}\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial y^{\hat{k}}}dy^{\hat{n}}dy^{\hat{k}}, \quad g^*_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu, \tag{10.78}$$

длина которого в общем случае не равна длине интервала (10.40). Таким образом, с нашей точки зрения интервал для наблюдателей в НСО (т.е. относительный интервал (10.78)) отличается от интервала для наблюдателей в ИСО, использующего координаты НСО (т.е (10.40). Из развитого математического аппарата, позволяющего выделить из нулевого неголономного тензора кривизны, голономный, следует, что вычисленный из метрики относительного интервала обычный тензор Римана-Кристоффеля, в общем случае отличен от нуля.

11. Закон сложения ускорений, относительный тензор кривизны НСО в пространстве Минковского

Физический смысл введения относительного тензора кривизны можно выяснить на основе анализа движения частицы в произвольном силовом поле в НСО.

Пусть в пространстве Минковского в некотором силовом поле движется сплошная среда. Поле 4 - скорости среды в переменных Эйлера - V^μ. В этом же пространстве в другом силовом поле движется частица, 4 - скорость которой U^μ не совпадает с V^μ. Требуется определить закон движения частицы относительно среды.

Переход в НСО осуществляем с помощью параметров Ламе (10.2), используя уравнение движения

$$h^{\hat{\mu}}_\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tilde{S}} = \frac{1}{m_0 c} h^{\hat{\mu}}_\alpha f^\alpha. \tag{11.1}$$

В формуле (11.1) m_0 - масса покоя частицы, f^α - 4 - сила. Из формул (10.2) - (10.6), используя равенства

$$\hat{\nabla}_{\hat{\mu}} h^\nu_{\hat{\alpha}} = h^\nu_{\hat{\gamma}} T^{\hat{\gamma}}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}.}, \quad \tilde{\nabla}_{\hat{\mu}} h^\nu_{\hat{\alpha}} = 0 \tag{11.2}$$

после простых преобразований получим

$$\frac{d\hat{U}^{\hat{\mu}}}{d\tilde{S}} + \left\{ {\hat{\mu} \atop \hat{\alpha}\hat{\beta}} \right\} \hat{U}^{\hat{\alpha}} \hat{U}^{\hat{\beta}} = \frac{1}{m_0 c} f^{\hat{\mu}} - T^{\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}.} \hat{U}^{\hat{\alpha}} \hat{U}^{\hat{\beta}}. \tag{11.3}$$

Если рассматриваемая частица принадлежит к одной из частиц базиса НСО, то $U^\mu = V^\mu$ и из (10.14) следует обращение в ноль правой части (11.3). Иными словами, для наблюдателей в сопутствующей НСО относительные векторы первой кривизны мировых линий частиц базиса равны нулю, а относительная кривизна пространства-времени отлична от нуля. Распишем уравнения (11.3) по компонентам, воспользуясь очевидным соотношением

$$d\tilde{S}^2 = dy^{\hat{0}^2} - dl^2 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dy^{\hat{0}^2}, \tag{11.3}$$

где u - величина относительной скорости частицы. Используя выражения (10.14) и обозначения (10.38a), получим уравнения движения относительно НСО в виде удобном для сравнения с близкой по содержанию работой Зельманова [54]

$$\frac{dE}{d\tau} + m D_{\hat{i}\hat{k}} u^{\hat{i}} u^{\hat{k}} - m F_{\hat{i}} u^{\hat{i}} = c^2 V_\mu f^\mu \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{11.4}$$

$$\frac{dp^{\hat{k}}}{d\tau} + \lambda^{\hat{k}}_{\hat{n}\hat{l}} p^{\hat{n}} u^{\hat{l}} + 2m(D^{\hat{k}}_{\hat{i}} + A^{\hat{k}}_{\hat{i}\cdot}) u^{\hat{i}} - m F^{\hat{k}} = c f^{\hat{k}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{11.5}.$$

В формулах (11.4) и (11.5) введены следующие обозначения:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad p^{\hat{i}} = \frac{m_0 u^{\hat{i}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad m = \frac{E}{c^2}, \quad d\tau = \frac{dy^{\hat{0}}}{c}, \tag{11.6}$$

где E - относительная (хронометрически инвариантная (х.и.) [54]) энергия частицы, m - относительная (х.и.) масса, $p^{\hat{i}}$ - относительный (х.и.) импульс. Левые части равенств (11.4) и (11.5) тождественны левым частям равенств в мировых уравнениях движения работы [54]. Равенство правых частей можно легко доказать. Действительно, для голономных реперов, получаемых из (10.1) в сопутствующей НСО справедливо равенство

$$V_\mu f^\mu = \hat{f}^{\hat{0}} = V_{\hat{0}} f^{\hat{0}} + V_{\hat{k}} f^{\hat{k}} = \sqrt{g_{\hat{0}\hat{0}}} f^{\hat{0}} + \frac{g_{\hat{0}\hat{k}}}{\sqrt{g_{\hat{0}\hat{0}}}} f^{\hat{k}} = g_{\hat{0}\hat{\alpha}} f^{\hat{\alpha}} = \frac{f_{\hat{0}}}{\sqrt{g_{\hat{0}\hat{0}}}}, \tag{11.7}.$$

использование которого доказывает совпадение правых частей уравнений (11.4) и работы [54]. Доказательство для (11.5) аналогично. Таким образом, несмотря на различие предложенного нами метода перехода в НСО с методом Т.Х.И., уравнения движения относительно НСО совпали.

Уравнение (11.3) после свертки с $h^{\alpha}_{\hat{\mu}}$ можно записать в пространстве Минковского в форме, ковариантной относительно произвольных голономных преобразований эйлеровых координат. Используя (10.14), после простых преобразований получим

$$h^{\alpha}_{\hat{\mu}}\frac{\hat{D}\hat{U}^{\hat{\mu}}}{d\tilde{S}} \equiv K^{\alpha} = \frac{f^{\alpha}}{m_0 c} - 2g^{\alpha\beta}(U^{\nu}V_{\nu})U^{\sigma}\nabla_{[\sigma}V_{\beta]}. \qquad (11.8).$$

В соотношении (11.8) K^{α} - относительное 4-ускорение частицы относительно НСО в координатах ИСО, ортогональное 4-скорости U_{α}, $f^{\alpha}/(m_0 c)$ - абсолютное 4-ускорение частицы, последний член в (11.8) содержит переносное ускорение и ускорение Кориолиса. Таким образом, соотношение (11.8) есть спецрелятивистский закон сложения ускорений, переходящий в классический при нерелятивистском приближении.

Отметим, что относительное 4-ускорение появилось в результате вычисления абсолютной производной в НСО от относительной 4-скорости частицы с помощью кристоффелевой части связности (10.6). По этой причине тензор кривизны (10.8) $\hat{R}^{\cdot\cdot\cdot\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ можно назвать *относительным тензором кривизны НСО*. Воспользуясь легко проверяемым равенством,

$$\hat{\nabla}_{\hat{\nu}}T^{\hat{\gamma}}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}.} = \tilde{\nabla}_{\hat{\nu}}T^{\hat{\gamma}}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}.} - T^{\hat{\gamma}}_{\hat{\nu}\hat{\varepsilon}.}T^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}.} + T^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\nu}\hat{\mu}.}T^{\hat{\gamma}}_{\hat{\varepsilon}\hat{\lambda}.} + T^{\hat{\varepsilon}}_{\hat{\nu}\hat{\lambda}.}T^{\hat{\gamma}}_{\hat{\mu}\hat{\varepsilon}.}, \qquad (11.9)$$

тензор кривизны (10.8) можно переписать в виде

$$\hat{R}^{\cdot\cdot\cdot\hat{\gamma}}_{\hat{\nu}\hat{\mu}\hat{\lambda}} = -2\tilde{\nabla}_{[\hat{\nu}}T^{\hat{\gamma}}_{\hat{\mu}]\hat{\lambda}.} - 2T^{\hat{\varepsilon}}_{[\hat{\nu}|\hat{\lambda}|.}T^{\hat{\gamma}}_{\hat{\mu}]\hat{\varepsilon}.}. \qquad (11.10)$$

Используя равенство (11.2), свертывая тензор кривизны (11.10) с помощью коэффициентов Ламе, получим выражение для относительного тензора кривизны в пространстве Минковского.

$$h^{\sigma}_{\hat{\gamma}}h^{\hat{\nu}}_{\alpha}h^{\hat{\mu}}_{\beta}h^{\hat{\lambda}}_{\delta}\hat{R}^{\cdot\cdot\cdot\hat{\gamma}}_{\hat{\nu}\hat{\mu},\hat{\lambda}} = R^{\cdot\cdot\cdot\sigma}_{\alpha\beta,\delta} = -2\partial_{[\alpha}T^{\sigma}_{\beta]\delta.} - 2T^{\varepsilon}_{[\alpha|\delta|.}T^{\sigma}_{\beta]\varepsilon.}. \qquad (11.11)$$

При этом тензор $T^{\varepsilon}_{\nu\mu.}$ в пространстве Минковского имеет вид

$$T^{\varepsilon}_{\nu\mu.} = F^{\varepsilon}V_{\nu}V_{\mu} - V^{\varepsilon}(\Omega_{\nu\mu} + F_{\mu}V_{\nu}) + V_{\nu}\Omega^{\varepsilon}_{\mu.} + V_{\mu}\Omega^{\varepsilon}_{\nu.}. \qquad (11.12)$$

Этот тензор после преобразований можно представить в виде

$$T_{\nu\mu,\varepsilon} = \frac{1}{2}[F_{\nu\mu}V_{\varepsilon} + F_{\varepsilon\nu}V_{\mu} + F_{\varepsilon\mu}V_{\nu}], \quad F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\nu}V_{\mu]}. \qquad (11.13)$$

Итак, в результате разделения нулевого неголономного тензора кривизны на две ненулевые части, в плоском пространстве-времени возникло тензорное поле относительного тензора кривизны НСО, которое нельзя уничтожить никакими голономными преобразованиями как содержащими, так и не содержащими время. Отметим, что в формуле (11.11) при использовании в пространстве Минковского криволинейных координат частные производные заменяются на ковариантные.

Хотя по внешнему виду относительный тензор кривизны (11.11) напоминает тензор Римана-Кристоффеля, однако вместо коэффициентов связности (не тензоров) в него входят истинные тензоры аффинной деформации связности, определенные в (10.6) и выраженные в эйлеровых координатах пространства Минковского (11.13). В качестве примера рассмотрим нерелятивистское, безвихревое движение пыли в ньютоновском поле тяжести. В относительном тензоре кривизны и относительном тензоре Риччи будем сохранять члены с множителем не выше, чем $1/c^2$. В этом приближении имеем из (10.29) и (10.36)

$$\tilde{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{q}} = 0, \quad \tilde{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{0}} \approx 0, \quad \tilde{R}_{\hat{0}\hat{b},\hat{c}\hat{0}} \approx -\hat{\nabla}_{(\hat{b}}F_{\hat{c})},$$

$$\tilde{R}_{\hat{b}\hat{c}} \approx -\hat{\nabla}_{(\hat{b}}F_{\hat{c})}, \quad \tilde{R}_{\hat{b}\hat{0}} \approx 0, \quad \tilde{R}_{\hat{0}\hat{0}} \approx -\hat{\nabla}_{\hat{n}}F^{\hat{n}}. \tag{11.14}$$

Так как $F^{\hat{b}}$ - пространственные компоненты 4-ускорения, то в нерелятивистском случае при движении в поле Ньютона $F^{\hat{b}} = a^{\hat{b}}/c^2$, где $a^{\hat{b}}$ - обычное трехмерное ускорение. Из уравнения Пуассона получим

$$-\hat{\nabla}_{\hat{n}}a^{\hat{n}} = 4\pi k\rho, \tag{11.15}$$

где k - гравитационная постоянная, ρ - плотность среды. В результате имеем

$$\tilde{R}_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{4\pi k\rho}{c^2}, \quad \tilde{R}_{\hat{b}\hat{0}} = 0, \quad \tilde{R}_{\hat{b}\hat{c}} = -\frac{1}{c^2}\hat{\nabla}_{(\hat{b}}F_{\hat{c})}. \tag{11.16}$$

Первое и второе равенство в выражении (11.16) совпадают с соответствующими уравнениями Эйнштейна в синхронной системе отсчета, последнее - не совпадает.

Рассмотрим простейшие свойства относительного тензора кривизны в пространстве Минковского. Из выражения (11.13) для тензора аффинной деформации связности $T^{\varepsilon}_{\nu\mu.}$ в пространстве Минковского следует, что для безвихревых движений он имеет вид

$$T^{\varepsilon}_{\nu\mu.} = F^{\varepsilon}V_{\nu}V_{\mu} - V^{\varepsilon}F_{\mu}V_{\nu} = g^{\varepsilon\sigma}V_{\nu}\Big(\frac{\partial V_{\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\Big). \tag{11.17}$$

Если безвихревое движение является жестким, то это приводит к обращению в нуль относительного тензора кривизны. Таким образом, поступательное движение релятивистски жесткого тела не приводит к появлению относительной кривизны пространства-времени.

Для произвольных движений относительный тензор Риччи можно представить в виде

$$R^{\beta\gamma} = -\frac{\partial T^{\beta\gamma\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial F^{\gamma}}{\partial x_{\beta}} + \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega^{\alpha\varepsilon}V^{\beta}V^{\gamma} - \Omega^{\gamma\varepsilon}F_{\varepsilon}V^{\beta}. \tag{11.18}$$

Скалярная относительная кривизна R вычисляется по формуле

$$R = -2\frac{\partial F^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} + \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega^{\alpha\varepsilon}. \tag{11.19}$$

Относительный тензор Эйнштейна $G^{\beta\gamma}$ дается выражением

$$G^{\beta\gamma} = -\frac{\partial T^{\beta\gamma\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial F^{\gamma}}{\partial x_{\beta}} + \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega^{\alpha\varepsilon}V^{\beta}V^{\gamma}$$

$$-\Omega^{\gamma\varepsilon}F_{\varepsilon}V^{\beta} + g^{\beta\gamma}\frac{\partial F^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{1}{2}g^{\beta\gamma}\Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega^{\alpha\varepsilon}. \tag{11.20}$$

Для безвихревых движений относительные тензоры Риччи и Эйнштейна могут быть представлены в виде

$$R^{\beta\gamma} = \frac{\partial(F^{\gamma\alpha}V^{\beta})}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial F^{\gamma}}{\partial x_{\beta}}. \tag{11.21}$$

$$G^{\beta\gamma} = \frac{\partial(F^{\gamma\alpha}V^{\beta})}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial F^{\gamma}}{\partial x_{\beta}} + g^{\beta\gamma}\frac{\partial F^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 2\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\Big(g^{*\beta[\gamma}F^{\alpha]}\Big), \tag{11.22}$$

где $g^{*\beta\gamma}$ - проекционный оператор, введенный в (10.40). Из (11.22) видно, что относительный тензор Эйнштейна для безвихревых движений, тождественно удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial G^{\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}} \equiv 0, \tag{11.23}$$

однако не является симметричным.

12. Относительный тензор кривизны НСО в механике Ньютона

Исследуем в ньютоновском приближении метрику пространства-времени для наблюдателей, движущихся вместе с средой, пренебрегая всюду величиной v^2/c^2 по сравнению с единицей. В этом приближении метрика (10.40) сводится к виду

$$dS^2 = {}^2dt^2 - \delta_{mn}\frac{\partial\Psi^m}{\partial y^{\hat{k}}}\frac{\partial\Psi^n}{\partial y^{\hat{l}}}dy^{\hat{k}}dy^{\hat{l}}. \tag{12.1}$$

В метрике (12.1) в качестве эйлеровых координат ИСО выбраны декартовы координаты, в которых $g_{mn} = -\delta_{mn}$, t - ньютоново абсолютное время. Следует отметить, что *метрика (12.1) в общем случае риманова с плоским пространственным сечением.* Этот результат на первый взгляд является неправдоподобным, однако метрика (12.1) допускает простое геометрическое и физическое толкование.

В качестве примера рассмотрим нежесткий стержень, элементы которого движутся вдоль оси стержня с разными скоростями. Вблизи стержня параллельно ему движется частица со скоростью, превосходящей скорости частиц стержня. Условимся, что наблюдатели на стержне в качестве времени используют часы ИСО пространства Минковского. Пусть показания часов, когда частица поравнялась с задним концом стержня t_1, а в момент обгона часы показывали t_2. Время, затраченное на обгон, равно $(t_2 - t_1)$. Ясно, что *относительную длину мировой линии частицы*, при обгоне стержня, можно вычислить по теореме Пифагора. *Относительная длина мировой линии частицы*, когда стержень имеет бесконечно малые размеры, дается формулой (12.1). Элемент интервала (12.1) получается из псевдоевклидова интервала (2.4) с помощью закона движения $x^n = \Psi^n(y^{\hat{k}}, t)$, а дифференциал от x^n вычисляется при фиксированном значении t, т.е. не является полным. Поэтому квадрат элемента интервала, получаемого вычитанием из квадрата временного элемента квадрата пространственного элемента, заданного в лагранжевой сопутствующей НСО, в общем случае приводит неевклидову пространству-времени с плоским пространственным сечением.

Обычно при переходе из ИСО в НСО рассматривают *элемент абсолютной длины мировой линии частицы.* Элемент интервала получается из псевдоевклидова интервала (2.4) с помощью закона движения $x^n = \Psi^n(y^{\hat{k}}, t)$, а дифференциал от x^n является полным. Поэтому квадрат элемента (в отличие от (12.1)) содержит члены, зависящие от абсолютной скорости частицы, изменяется g_{00} компонента и появляются отличные от нуля g_{0k} компоненты метрического тензора. Однако пространство-время при этом остается плоским. Очевидно, что *абсолютная длина мировой линии рассматриваемой частицы* не равна *относительной длине мировой линии этой частицы.*

Пространственная метрика в лагранжевой сопутствующей НСО в согласии с (12.1) имеет вид

$$\hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}} = \delta_{mn}\frac{\partial\Psi^m}{\partial y^{\hat{k}}}\frac{\partial\Psi^n}{\partial y^{\hat{l}}}. \tag{12.2}$$

Как известно из механики сплошной среды [44]

$$\frac{d\hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}}}{dt} = 2\hat{\sigma}_{\hat{k}\hat{l}}, \tag{12.3}$$

где $\hat{\sigma}_{\hat{k}\hat{l}}$ тензор скоростей деформаций в сопутствующей СО. Так как лагранжевы $y^{\hat{k}}$ при движении каждой частицы остаются неизменными, то $dy^{\hat{k}}/dt = 0$, и поэтому

$$\frac{d\hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}}}{dt} = \frac{\partial\hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}}}{\partial t} + \frac{\partial\hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}}}{\partial y^{\hat{m}}}\frac{dy^{\hat{m}}}{dt} = \frac{\partial\hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}}}{\partial t} = 2\hat{\sigma}_{\hat{k}\hat{l}}. \tag{12.4}$$

Рассмотрим движение разряженного газа в ньютоновском поле тяжести, используя уравнение движения в форме Эйлера и уравнение неразрывности.

$$\frac{\partial v_a}{\partial t} + v^k\frac{\partial v_a}{\partial x^k} = g_a, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^a}(\rho v^a) = 0. \tag{12.5}$$

Дифференцируя уравнение (12.5) по x^b, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{ab} + \omega_{ab}) + (\sigma_{kb} + \omega_{kb})(\sigma_{ak} + \omega_{ak}) + v^k\frac{\partial}{\partial x^k}(\sigma_{ab} + \omega_{ab}) = \frac{\partial g_a}{\partial x^b}, \tag{12.6}$$

или

$$\frac{d}{dt}(\sigma_{ab} + \omega_{ab}) + (\sigma_{kb} + \omega_{kb})(\sigma_{ak} + \omega_{ak}) = \frac{\partial g_a}{\partial x^b}, \tag{12.7}$$

где

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_a}{\partial x^b} + \frac{\partial v_b}{\partial x^a}\Big), \quad \omega_{ab} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_a}{\partial x^b} - \frac{\partial v_b}{\partial x^a}\Big) \tag{12.8}$$

В (12.8) σ_{ab}, ω_{ab} - тензоры деформаций и угловой скорости вращения в нерелятивистской механике в переменных Эйлера.

Свертывая (12.6) по a, b, получим в переменных Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\sigma}^{\hat{a}}_{\hat{a}} + \hat{\sigma}^{\hat{k}}_{\hat{b}}\hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{k}} = \frac{\partial g_a}{\partial x^a}. \tag{12.9}$$

Рассмотрим случай, когда среда движется без вращений $\omega_{ab} = 0$. Тогда

$$\sigma_{ab} = \frac{\partial v_a}{\partial x^b} = \frac{\partial v_b}{\partial x^a}, \quad \frac{\partial\sigma^b_a}{\partial x^b} = \frac{\partial\sigma^b_b}{\partial x^a}.$$

Последнее соотношение в лагранжевых переменных сводится к виду

$$\hat{\nabla}_{\hat{b}}\hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{a}} - \hat{\nabla}_{\hat{a}}\hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{b}} = 0, \tag{12.10}$$

где ковариантные производные вычисляются по метрике (12.2). Для вычисления тензора Риччи воспользуемся метрикой (12.1) и результатом [7] для синхронной системой отсчета с плоской пространственной метрикой.

$$\hat{R}_{\hat{0}\hat{0}} = -\frac{1}{c^2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\sigma}^{\hat{a}}_{\hat{a}} + \hat{\sigma}^{\hat{k}}_{\hat{b}}\hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{k}}\Big), \tag{12.11}$$

$$\hat{R}_{\hat{0}\hat{a}} = \frac{1}{c}\Big(\hat{\nabla}_{\hat{b}}\hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{a}} - \hat{\nabla}_{\hat{a}}\hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{b}}\Big), \tag{12.12}$$

$$\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{c^2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\sigma}_{\hat{a}\hat{b}}) + \hat{\sigma}_{\hat{a}\hat{b}}\hat{\sigma}^{\hat{k}}_{\hat{k}} - 2\hat{\sigma}^{\hat{k}}_{\hat{a}}\hat{\sigma}_{\hat{b}\hat{k}}\Big). \tag{12.13}$$

Можно показать, что при отсутствии вращений справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\sigma}_{\hat{a}\hat{b}} = \Big(\frac{d\sigma_{kl}}{dt} + 2\sigma_{ml}\sigma_{mk}\Big)\frac{\partial\Psi^k}{\partial y^{\hat{a}}}\frac{\partial\Psi^l}{\partial y^{\hat{b}}}, \tag{12.14}$$

используя которое, имеем для выражения (2.13) соотношение

$$\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{c^2}\Big(\frac{d\sigma_{kl}}{dt} + \sigma_{kl}\sigma^m_m\Big)\frac{\partial\Psi^k}{\partial y^{\hat{a}}}\frac{\partial\Psi^l}{\partial y^{\hat{b}}}. \tag{12.15}$$

Учитывая (2.7), находим при отсутствии вращений

$$\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{c^2}\Big(\frac{\partial g_k}{\partial x^l} + \sigma_{kl}\sigma^m_m - \sigma_{km}\sigma^m_l\Big)\frac{\partial\Psi^k}{\partial y^{\hat{a}}}\frac{\partial\Psi^l}{\partial y^{\hat{b}}}. \tag{12.16}$$

Среда, движущаяся в собственном поле тяжести, имеет $g_a = \partial\phi/\partial x^a$, где ϕ - потенциал поля тяжести, удовлетворяющий уравнению Пуассона. Из соотношений (12.9), уравнения Пуассона находим для (12.11)

$$\hat{R}_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{4\pi k\rho}{c^2}. \tag{12.17}$$

Соотношение (12.12) с учетом (12.10) дает

$$\hat{R}_{\hat{0}\hat{a}} = 0. \tag{12.18}$$

Выражение (2.16) в совокупности с уравнением Пуассона представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{4\pi\rho k}{c^2}\hat{\gamma}_{\hat{a}\hat{b}} + \hat{F}_{\hat{a}\hat{b}}, \quad \hat{F}_{\hat{a}\hat{b}} = \Big(\frac{\partial g^m}{\partial x^m}\delta_{kl} + \frac{\partial g_k}{\partial x^l}$$
$$+\sigma_{kl}\sigma^m_m - \sigma_{km}\sigma^m_l\Big)\frac{\partial\Psi^k}{\partial y^{\hat{a}}}\frac{\partial\Psi^l}{\partial y^{\hat{b}}}. \tag{12.19}$$

Соотношения (12.17) - (12.19) при условии, что в последнем выражении $\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}} = 0$, представляют собой уравнения Эйнштейна, записанные в синхронной системе отсчета для пылевидной материи [7]. Очевидно, что в общем случае $\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}} \neq 0$, так как в одном и том же силовом поле конгруенции мировых линий частиц среды обладают большим произволом.

Выясним при каких частных условиях геометрия НСО, определяемая законами ньютоновой механики, и геометрия синхронной системы отсчета для пылевидной материи, определяемая уравнениями Эйнштейна, совпадают. Из вида метрики (12.2) следует, что искомые решения уравнения Эйнштейна справедливы в случае плоских пространственных сечений. А совпадение решений уравнений Эйнштейна с решениями ньютоновской механики возможно, если на конгруенции мировых линий частиц базиса наложить ограничение

$$\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}} = 0. \tag{12.20}$$

Исследуем сферически-симметричные движения сплошной среды, поле скоростей которых в переменных Эйлера в декартовых координатах есть

$$v_a = v(r,t)n_a, \quad n_a = \frac{x_a}{r}, \quad n_a n_a = 1. \tag{12.21}$$

Используя уравнения Эйлера (12.5), условия симметрии (12.21), получим для системы (12.20) выражение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta\phi, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^2}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} = \Delta\phi. \tag{12.22}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения этой системы:

1. Для радиального движения разряженной среды в ньютоновском центрально- симметричном поле тяжести, создаваемом массивным телом, центр масс которого расположен в начале координат, имеем

$$\Delta\phi = 0, \quad \phi = -\frac{kM_0}{r}, \quad v^2 = 2kM_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + v_0^2, \tag{12.23}$$

где M_0 - масса тела, создающего поле, v_0 - значение скорости при $r = r_0$. Из совместности выражений (12.22) и (12.23) получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad v^2 = 2kM_0\frac{1}{r}. \tag{12.24}$$

Решение (12.24) есть частный случай (12.23) при условии, что среда на бесконечности покоится. Интегрируя (12.24), получаем

$$r = \pm\left(\frac{3c}{2}\right)^{2/3} F^{1/3}(t_0 - t)^{2/3}, \quad F \equiv \frac{2kM_0}{c^2} = r_g, \tag{12.25}$$

где r_g - гравитационный радиус. Отметим, что в последнем соотношении скорость света c введена искусственно для удобства сравнения с другими результатами и в результате в этой формуле она сокращается, как и должно быть при интегрировании уравнений движения в нерелятивистской механике. Выбор знака зависит характера движения частиц. При движении по радиусу к центру выбирается знак "плюс"и знак "минус"при расширении от центра. Постоянная t_0 выбирается из требования, что при $t = 0$ должно быть $r = r_0$, где r_0 - лагранжева координата. Очевидно, что при падении частиц на центр текущий радиус лагранжевой частицы $r(r_0, t)$ уменьшается поэтому $t < t_0$.

Метрика (12.1) в сферической системе координат имеет вид

$$dS^2 = {}^2dt^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial r_0}\right)^2 dr_0^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{12.26}$$

Используя закон движения (12.25), полагая

$$R \equiv \frac{2}{3}\frac{{r_0}^{3/2}}{{r_g}^{1/2}}, \tag{12.27}$$

имеем для элемента интервала выражение

$$dS^2 = {}^2dt^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(R - ct)\right]^{2/3}} -$$

$$-\left[\frac{3}{2}(R-ct)\right]^{4/3} {r_g}^{2/3}(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2), \tag{12.28}$$

которое в точности совпадает с известной метрикой Леметра в ОТО [7]. Для нашего случая элемент интервала метрики Леметра означает квадрат относительной длины мировой мировой линии пробной частицы, движущейся относительно свободно падающих по радиусу к центру невзаимодействующих друг с другом частиц в ньютоновском центрально-симметричном поле тяжести. При этом, падающие частицы, имеющие на бесконечности нулевую скорость, образуют базис НСО. Характер сил, действующих на пробную частицу, не имеет значения.

Хотя метрика (12.28) и тождественна с соответствующей метрикой из ОТО, однако в нашем случае координаты и время, определяющие метрику, имеют ясный метрический смысл, чего в принципе не может быть в ОТО. Например, время падения T частицы базиса от начального значения радиуса r_1 до текущего значения $r(r_1,T)$ является конечной величиной и определяется формулой

$$T=\frac{2}{3}\left[\frac{r_1}{c}\left(\frac{r_1}{r_g}\right)^{1/2}-\frac{r}{c}\left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2}\right], \tag{12.29}$$

которая соответствует формуле из ОТО, когда в качестве времени используется собственное время частицы [60]. В нашем случае роль собственного времени играет ньютоновское время t.

Более подробно мы обсудим эти вопросы позднее при рассмотрении моделирования полей гравитации.

2. Следуя работам [7], [60], рассмотрим ньютоновскую однородную изотропную космологическую модель, для которой имеем

$$v(r,t)=H(t)r. \tag{12.31}$$

Систему (12.22), учтя уравнения Эйлера, запишем в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t}=-4\pi k\rho, \quad \frac{3}{r}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v^2}{r^2}+\frac{2v}{r}\frac{\partial v}{\partial r}=-4\pi k\rho. \tag{12.32}$$

Из уравнений (12.31), (12.32) находим

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-4\pi k\rho, \quad \frac{\partial H}{\partial t}+H^2=-\frac{4}{3}\pi k\rho. \tag{12.33}$$

Откуда

$$H^2=\frac{8}{3}\pi k\rho, \tag{12.34}$$

что соответствует случаю расширения при плотности равной критической. Так как закон эволюции Вселенной в ньютоновском приближении выведен в [60] для произвольной плотности, то воспользуясь результатами [60] для нашего случая, находим закон расширения

$$r=r_0\left(\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}\right)^{2/3}, \tag{12.35}$$

где $(t_0 - t_\infty)$ - "возраст"однородной модели Вселенной. Подстановка (12.35) в (12.26) приводит к выражению для квадрата интервала

$$dS^2 = {}^2dt^2 - \left(\frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty}\right)^{4/3}\Big[dr_0^2 - {r_0}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\Big], \tag{12.36}$$

которое соответствует модели с плоским (евклидовым) пространством ОТО.

Самым странным результатом, полученном в этом разделе, является тот, что точные решения уравнений Эйнштейна содержатся в качестве частных случаев нерелятивистской механики Ньютона, а не наоборот, как принято считать.

Глава 3

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В НСО

В этой главе рассматривается электродинамика как в СО с заданным законом движения, так и в СО с заданной структурой. Проводится параллельное сравнение для решений в "равноускоренной"системе Меллера и полученной нами в главе 1 равноускоренной жесткой НСО в пространстве постоянной кривизны. Формулируется критерий стационарности, на основе которого рассматривается один из "вечных вопросов физики о поле при равномерно ускоренном движении заряда. Обсуждаются вопросы распространения электромагнитных волн, эффект Допплера и преобразования полей.

13. Электродинамика в НСО с заданным законом движения

Разработанную в разделе 10, теорию перехода в произвольную НСО, определяемую законом движения (10.1), применим для преобразования уравнений электродинамики из ИСО в НСО.

Уравнения Максвелла в пустоте в декартовых координатах ИСО имеют вид [7]

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu}, \quad \partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0, \quad F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}. \tag{13.1}$$

В соотношениях (13.1) $F^{\mu\nu}$ - тензор электромагнитного поля, j^{μ} - четырехмерный вектор тока, A^{μ} - 4-потенциал.

Переход в НСО, осуществляемый с помощью (10.1), (10.2) приводит к уравнениям

$$\tilde{\nabla}_{\hat{\nu}} \tilde{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} \tilde{j}^{\hat{\mu}}, \quad \tilde{\nabla}_{\hat{\alpha}} \tilde{F}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} + \tilde{\nabla}_{\hat{\beta}} \tilde{F}_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}} + \tilde{\nabla}_{\hat{\gamma}} \tilde{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0,$$

$$\tilde{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + 2C^{\hat{0}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{A}_{\hat{0}}, \quad \hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 2\hat{\partial}_{[\hat{\mu}} \hat{A}_{\hat{\nu}]}, \quad \hat{A}_{\hat{\nu}} = h^{\mu}_{\hat{\nu}} A_{\mu}, \tag{13.2}$$

где

$$\tilde{F}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = h^{\mu}_{\hat{\beta}} h^{\nu}_{\hat{\gamma}} F_{\mu\nu}, \quad \tilde{j}^{\hat{\mu}} = h^{\hat{\mu}}_{\nu} j^{\nu}. \tag{13.2a}$$

Из формулы (13.2) следует, что абсолютный тензор электромагнитного поля $\tilde{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ раскладывается на относительный тензор электромагнитного поля и "переносный". Относительный тензор поля $\hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ может быть также представлен в виде

$$\hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 2\hat{\partial}_{[\hat{\mu}} \hat{A}_{\hat{\nu}]} = 2\hat{\nabla}_{[\hat{\mu}} \hat{A}_{\hat{\nu}]}, \tag{13.3}$$

где $\hat{\nabla}$ вычисляется с помощью кристоффелевой части связности (10.6). "Переносный"тензор поля есть произведение скалярного потенциала $\hat{A}_{\hat{0}}$ с объектом неголономности, т.е содержит информацию об ускорении и вращении СО в согласии с (10.11). Отметим, что разбиение тензора поля на две части весьма условно, т.к. информация о поле в виде скалярного потенциала содержится и в "переносном"поле. Распишем уравнения Максвелла более подробно.

Первое уравнение (13.2) представим в форме

$$\breve{\nabla}_{\hat{\nu}}\tilde{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{\nabla}_{\hat{\nu}}\tilde{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + T^{\hat{\mu}}_{\hat{\gamma}\hat{\nu}}\tilde{F}^{\hat{\nu}\hat{\gamma}} + T^{\hat{\gamma}}_{\hat{\gamma}\hat{\nu}}\tilde{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\frac{4\pi}{c}\tilde{j}^{\hat{\mu}},$$
$$\hat{\nabla}_{\hat{\nu}}\tilde{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}}\frac{\hat{\partial}(\sqrt{-\hat{g}}\tilde{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}})}{\hat{\partial}y^{\hat{\nu}}}.$$

Откуда после несложных преобразований получим

$$\frac{\hat{\partial}\hat{F}^{\hat{k}\hat{0}}}{\hat{\partial}\xi^{\hat{0}}} + \breve{\nabla}_{\hat{l}}(\hat{F}^{\hat{k}\hat{l}} + 2\Omega^{\hat{k}\hat{l}}\hat{A}_{\hat{0}}) - \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}y^{\hat{0}}}(F^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}}) - F_{\hat{l}}(\hat{F}^{\hat{k}\hat{l}} + 2\Omega^{\hat{k}\hat{l}}\hat{A}_{\hat{0}})$$
$$+\Sigma^{\hat{l}}_{\hat{l}}(\hat{F}^{\hat{k}\hat{0}} - F^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}}) = -\frac{4\pi}{c}\tilde{j}^{\hat{k}},$$

$$\breve{\nabla}_{\hat{k}}(\hat{F}^{\hat{0}\hat{k}} + F^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}}) + \Omega_{\hat{k}\hat{l}}(\hat{F}^{\hat{k}\hat{l}} + 2\Omega^{\hat{k}\hat{l}}\hat{A}_{\hat{0}}) = -4\pi\rho^{*}(U_{\mu}V^{\mu}), \tag{13.4}$$

где $\breve{\nabla}_{\hat{k}}$ - ковариантная производная, вычисляемая с помощью трехмерной кристоффелевой связности, ρ^{*} - скалярная плотность заряда, $j^{\mu} = c\rho^{*}U^{\mu}$. Как известно, потенциалы A^{μ} определяются неоднозначно. Например, известные условия Лоренца, которые в галилеевых координатах имеют вид

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0, \tag{13.5}$$

сведутся в НСО к виду

$$\frac{\hat{\partial}\hat{A}^{\hat{0}}}{\hat{\partial}\xi^{\hat{0}}} + \breve{\nabla}_{\hat{k}}\hat{A}^{\hat{k}} + \Sigma^{\hat{k}}_{\hat{k}}\hat{A}^{\hat{0}} - F_{\hat{k}}\hat{A}^{\hat{k}} = 0. \tag{13.6}$$

Введем трехмерный вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$, вектор электрической индукции $\vec{D}$, вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и вектор магнитной индукции $\vec{B}$ в согласии с определениями, заимствованными из уравнений Максвелла в НСО для заданного гравитационного поля [7] с заменой частных производных производными по направлениям.

$$E_{\hat{k}} = \tilde{F}_{\hat{0}\hat{k}}, \quad B_{\hat{k}\hat{l}} = \tilde{F}_{\hat{k}\hat{l}}, \quad D^{\hat{k}} = -\sqrt{\hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}}\tilde{F}^{\hat{0}\hat{k}}, \quad H^{\hat{k}\hat{l}} = \sqrt{\hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}}\tilde{F}^{\hat{k}\hat{l}} \tag{13.7}$$

В отличие от [7] метрика у нас синхронна и определяется соотношением (10.9). Векторные операции вводим в согласии с определениями:

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})^{\hat{a}} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}\Big(\frac{\hat{\partial}E_{\hat{c}}}{\hat{\partial}y^{\hat{\beta}}} - \frac{\hat{\partial}E_{\hat{\beta}}}{\hat{\partial}y^{\hat{c}}}\Big), \quad H^{\hat{a}} = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}H_{\hat{b}\hat{c}},$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}}(F_{\hat{a}}E_{\hat{b}} - F_{\hat{b}}E_{\hat{a}}) = \vec{F}\times\vec{E}, \quad \Omega^{\hat{a}} = -\frac{}{2\sqrt{\gamma}}e^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}\Omega_{\hat{b}\hat{c}},$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{H})^{\hat{a}} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}\Big(\frac{\hat{\partial}H_{\hat{c}}}{\hat{\partial}y^{\hat{\beta}}} - \frac{\hat{\partial}H_{\hat{\beta}}}{\hat{\partial}y^{\hat{c}}}\Big), \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}y^{\hat{a}}}(\sqrt{\gamma}E^{\hat{a}}). \tag{13.8}$$

В (13.8)

$$\eta_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = \sqrt{\gamma} e_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}, \quad \eta^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}, \quad e^{123} = e_{123} = 1,$$

где $\eta_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}$ - единичный антисимметричный тензор в криволинейных координатах.

На основе сделанных замечаний, уравнения Максвелла (13.2) в системе отсчета, связанной с движущимися зарядами по закону (10.1), на которые действуют произвольные силы (не обязательно электромагнитного происхождения), сведутся к виду.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{(\partial \sqrt{\gamma} \vec{H})}{\partial \xi^{\hat{0}}} - \vec{F} \times \vec{E}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{2}{c} \vec{\Omega} \cdot \vec{H} + 4\pi \rho^*,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{(\partial \sqrt{\gamma} \vec{E})}{\partial \xi^{\hat{0}}} - \vec{F} \times \vec{H}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\frac{2}{c} \vec{\Omega} \cdot \vec{E}. \tag{13.9}$$

Уравнения Максвелла дополняются уравнениями неразрывности, выражающими закон сохранения заряда.

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{(\partial \sqrt{\gamma} \rho^*)}{\partial \xi^{\hat{0}}} = 0. \tag{13.10}$$

Заметим, что в отличие от общих уравнений Максвелла (13.2), пригодных для произвольной НСО, не обязательно связанной с движущимися зарядами, в уравнениях (13.9) (ввиду сопутствия) отсутствует пространственная компонента 4 - тока, которую следует добавить при рассмотрении общего случая.

Найденная нами трехмерная форма уравнений Максвелла, полученная с помощью неголономных преобразований, совпала с 3-мерной хронометрически инвариантной формой, приведенной в книге Н.В. Мицкевича [53].

Для решения системы уравнений Максвелла удобно ввести потенциалы электромагнитного поля. Для перехода от напряженностей полей к потенциалам приведем, полученные нами некоторые нужные формулы из неголономного векторного анализа. Для произвольного трехмерного векторного поля $\vec{a}(y^{\hat{\alpha}})$ и скалярного поля $\phi(y^{\hat{\alpha}})$ справедливы следующие соотношения:

$$(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}))^{\hat{k}} = (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}))^{\hat{k}} - \Delta a^{\hat{k}} + \breve{R}^{\hat{k}}_{\hat{l}} a^{\hat{l}} + 2\Omega^{\hat{k}\hat{n}} \frac{\partial a_{\hat{n}}}{\partial \xi^{\hat{0}}},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 2\frac{\vec{\Omega}}{c} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^{\hat{0}}}, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 2\frac{\Omega^{\hat{k}}}{c} \frac{\partial a_{\hat{k}}}{\partial \xi^{\hat{0}}},$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^{\hat{0}}} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\hat{0}}} (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \frac{D}{c} \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{F} \times \frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^{\hat{0}}},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^{\hat{0}}} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\hat{0}}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \frac{D}{c} (\vec{F} \cdot \vec{a}) - \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^{\hat{0}}} - \frac{\vec{a}}{c} \cdot \vec{\nabla} D. \tag{13.11}$$

Величины, входящие в (13.11) определены в (10.38а).

В согласии с определением (13.7), представим напряженности для электрического и магнитного полей в векторной форме через потенциалы в виде

$$(\vec{E})^{\hat{k}} = -\gamma^{\hat{k}\hat{l}} \frac{\partial \hat{A}_{\hat{l}}}{\partial \xi^{\hat{0}}} - (\vec{\nabla} \hat{A}_{\hat{0}})^{\hat{k}} - (\vec{F} \hat{A}_{\hat{0}})^{\hat{k}}. \tag{13.12}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{\hat{A}} + 2\frac{\vec{\Omega}}{c}\,\hat{A}_{\hat{0}}. \tag{13.13}$$

Выражения (13.12) и (13.13) обращают в тождества первое и четвертое из уравнений (13.9). Это, впрочем, следует и непосредственно из (13.1), когда второе из уравнений (13.1) удовлетворяется тождественно, если тензор электромагнитного поля выразить через запаздывающие потенциалы в виде $F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}$.

Два других уравнения Максвелла из (13.9) выразим через запаздывающие потенциалы. Для этого учтем соотношения (13.11), а также кинематические тождества (10.17), (10.34), которые представим в векторном виде

$$\frac{2}{c\sqrt{\gamma}}\frac{(\partial\sqrt{\gamma}\vec{\Omega})}{\partial\xi^{\hat{0}}} - \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\Omega} - \vec{\Omega}\cdot\vec{F} = 0. \tag{13.14}$$

Учитывая также условия Лоренца (13.6), после довольно утомительных преобразований получим

$$\begin{gathered}\Box\hat{A}_{\hat{0}} + \frac{\partial}{\partial\xi^{\hat{0}}}(\vec{F}\cdot\vec{\hat{A}} + \frac{D}{c}\hat{A}^{\hat{0}}) + \frac{1}{c}\vec{\hat{A}}\cdot\vec{\nabla}D + \frac{D}{c}(\vec{F}\cdot\vec{\hat{A}}) + \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{\hat{A}}}{\partial\xi^{\hat{0}}} \\ -\frac{2}{c}\hat{\nabla}_{\hat{a}}(\hat{A}_{\hat{k}}D^{\hat{a}\hat{k}}) - \vec{\nabla}(\hat{A}^{\hat{0}}\vec{F}) = \frac{4\Omega^2}{c^2}\hat{A}_{\hat{0}} + \frac{2\vec{\Omega}}{c}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{\hat{A}}] + 4\pi\rho^*.\end{gathered} \tag{13.15}$$

$$\begin{gathered}\Box\hat{A}^{\hat{k}} - \hat{\nabla}^{\hat{k}}\Big(\frac{\partial\hat{A}_{\hat{0}}}{\partial\xi^{\hat{0}}} + \vec{F}\cdot\vec{\hat{A}} + \frac{D}{c}\hat{A}^{\hat{0}}\Big) + \breve{R}^{\hat{k}}_{.\hat{l}}\hat{A}^{\hat{l}} + 2\Omega^{\hat{k}\hat{n}}\frac{\partial\hat{A}_{\hat{n}}}{\partial\xi^{\hat{0}}} \\ +\Big[\vec{\nabla}\times\Big(\frac{2\hat{A}_{\hat{0}}\vec{\Omega}}{c}\Big)\Big]^{\hat{k}} = -\frac{D}{c}\Big(\frac{2}{c}D^{\hat{k}}_{\hat{l}}\hat{A}^{\hat{l}} + \frac{\partial\hat{A}^{\hat{k}}}{\partial\xi^{\hat{0}}} + \hat{\nabla}^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}} + F^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}}\Big) \\ -\frac{\partial}{\partial\xi^{\hat{0}}}\Big[\frac{2}{c}D^{\hat{k}}_{\hat{l}}\hat{A}^{\hat{l}} + \hat{\nabla}^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}} + F^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}}\Big] - \Big[\vec{F}\times\Big[\vec{\nabla}\times\vec{\hat{A}}\Big]\Big]^{\hat{k}} - \frac{2\hat{A}_{\hat{0}}}{c}\Big[\vec{F}\times\vec{\Omega}\Big]^{\hat{k}}.\end{gathered} \tag{13.16}$$

В формулах (13.15) и (13.16)

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial\xi^{\hat{0}2}} - \gamma^{\hat{k}\hat{l}}\hat{\nabla}_{\hat{k}}\hat{\nabla}_{\hat{l}} \tag{13.17}$$

хронометрически инвариантный пространственно-ковариантный оператор Даламбера, а тензор $\breve{R}_{\hat{b}\hat{c}} = \gamma^{\hat{a}\hat{q}}\breve{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{q}}$, где $\breve{R}_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}\hat{q}}$ трехмерный тензор кривизны, определяемый из соотношения (10.31). Выведенные уравнения справедливы в произвольной деформируемой НСО, связанной с движущимися зарядами, образующими континуум. Ясно, что решать уравнения в НСО в общем виде затруднительно, однако в некоторых частных случаях проводить исследование в НСО значительно проще и нагляднее, чем в ИСО.

14. Критерий стационарности в НСО с заданным законом движения

Представляет интерес исследование уравнений Максвелла в релятивистски жестких НСО, определяемых как

$$\Sigma_{\hat{k}\hat{l}} = -\frac{1}{c}D_{\hat{k}\hat{l}} = 0. \tag{14.1}$$

Это приводит уравнения Максвелла к виду

$$\Box\hat{A}_{\hat{0}} + \frac{\partial}{\partial\xi^{\hat{0}}}(\vec{F}\cdot\vec{\hat{A}}) + \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{\hat{A}}}{\partial\xi^{\hat{0}}} - \vec{\nabla}(\hat{A}^{\hat{0}}\vec{F})$$

$$= \frac{4\Omega^2}{c^2}\hat{A}_{\hat{0}} + \frac{2\vec{\Omega}}{c}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{\hat{A}}] + 4\pi\rho^*. \tag{14.2}$$

$$\Box\hat{A}^{\hat{k}} - \hat{\nabla}^{\hat{k}}\Big(\frac{\partial\hat{A}_{\hat{0}}}{\partial\xi^{\hat{0}}} + \vec{F}\cdot\vec{\hat{A}}\Big) + \breve{R}^{\hat{k}}_{.\hat{l}}\hat{A}^{\hat{l}}$$

$$+2\Omega^{\hat{k}\hat{n}}\frac{\partial\hat{A}_{\hat{n}}}{\partial\xi^{\hat{0}}} + \Big[\vec{\nabla}\times\Big(\frac{2\hat{A}_{\hat{0}}\vec{\Omega}}{c}\Big)\Big]^{\hat{k}} =$$

$$-\frac{\partial}{\partial\xi^{\hat{0}}}\Big[\hat{\nabla}^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}} + F^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}}\Big] - \Big[\vec{F}\times\Big[\vec{\nabla}\times\vec{\hat{A}}\Big]\Big]^{\hat{k}} - \frac{2\hat{A}_{\hat{0}}}{c}\Big[\vec{F}\times\vec{\Omega}\Big]^{\hat{k}}. \tag{14.2a}$$

Выясним, какими свойствами должна обладать жесткая НСО с "вмороженными"в нее зарядами, чтобы система Максвелла допускала в ней независящие от времени решения? (Мы считаем, что внешние поля отсутствуют и поле определяется только "вмороженными"зарядами). Очевидно, что уравнения Максвелла могут иметь стационарные относительно жесткой НСО решения, если характеристики, определяющие НСО, не зависят от времени $\xi^{\hat{0}}$ явно. Т.е. наряду с равенством нулю тензора скоростей деформаций (14.1) должны выполняться условия:

$$\frac{\partial\Omega_{\hat{k}\hat{l}}}{\partial\xi^{\hat{0}}} = 0, \quad \frac{\partial F_{\hat{\alpha}}}{\partial\xi^{\hat{0}}} = 0. \tag{14.3}$$

В согласии с тождеством (10.17), (14.3) и равенствами $F_{\hat{0}} = 0$, $\Omega_{\hat{0}\hat{\alpha}} = 0$ имеем

$$\frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}y^{\hat{0}}}\Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \equiv \hat{\nabla}_{[\hat{\alpha}}F_{\hat{\beta}]} = \hat{\partial}_{[\hat{\alpha}}F_{\hat{\beta}]} = \tilde{\nabla}_{[\hat{\alpha}}F_{\hat{\beta}]} = 0. \tag{14.4}$$

Откуда

$$h^{\hat{\alpha}}_{\mu}h^{\hat{\beta}}_{\nu}\tilde{\nabla}_{[\hat{\alpha}}F_{\hat{\beta}]} = 0, \tag{14.5}$$

что дает

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial F_\nu}{\partial x^\mu} = 0. \tag{14.6}$$

Равенство (14.6) определяет лоренц-ковариантное условие стационарности возможных решений уравнений Максвелла.

Умножая (14.6) на V^ν, получим при условии, что $\Sigma_{\mu\nu} = 0$ равенство

$$\frac{dF_\mu}{dS} + F_\nu F^\nu V_\mu - F^\alpha\Omega_{\alpha\mu} = 0. \tag{14.7}$$

Введем 4-вектор силы g^μ, определяемый равенством

$$g^\mu \equiv \frac{2e^2}{3c}\Big(\frac{dF^\mu}{dS} + F_\nu F^\nu V^\mu - F^\alpha\Omega^{\mu}_{\alpha.}\Big) \tag{14.8}$$

и назовем его обобщенной силой радиационного трения. В этом равенстве e - заряд частицы, "вмороженной"в НСО, (для простоты рассматриваем только одинаковые частицы).

Для одного заряда, движущегося поступательно, $\Omega_{\mu\nu} = 0$ и обобщенная сила g^μ переходит в обычную силу торможения излучением [7]. Если электромагнитное поле в НСО стационарно, то $g^\mu = 0$.

Выясним, какие простейшие НСО удовлетворяют сформулированным условиям стационарности.

а). Рассмотрим прямолинейное, жесткое по Борну, равноускоренное (для каждой фиксированной частицы среды) движение континуума. Такому движению, как было показано в разделе 2, удовлетворяет поступательное перемещение среды, получаемое с помощью преобразования Меллера.

Для преобразования Меллера закон движения имеет вид (2.11) а метрика Меллера выражается элементом интервала (2.12), при этом роль времени T выполняет параметр, нумерующий ортогональные мировым линиям частиц базиса гиперповерхности [4]. Так как при преобразованиях Меллера пространственные векторы, соединяющие две любые близкие лагранжевы частицы, все время остаются в "физическом"пространстве, то переход в НСО Меллера, в согласии развиваемой нами схемой перехода, можно осуществить с помощью голономных преобразований (частный случай неголономных). Однако, в целях общности изложения получим с помощью формул (10.2) с учетом, что $V_\varepsilon \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial y^{\hat{k}}} = 0$, а 4 - скорость $V^\mu = \Theta \frac{\partial \Psi^\mu}{\partial \xi^{\hat{0}}}$, $\xi^{\hat{0}} = cT$, следующие коэффициенты преобразования:

$$h^\mu_{\hat{k}} = \frac{\partial \Psi^\mu}{\partial y^{\hat{k}}}, \quad h^\mu_{\hat{0}} = \Theta \frac{\partial \Psi^\mu}{\partial \xi^{\hat{0}}} = V^\mu, \quad h^{\hat{k}}_\mu = \frac{\partial y^{\hat{k}}}{\partial x^\mu},$$
$$h^{\hat{0}}_\mu = V_\mu, \quad \Theta = \frac{1}{1 + \frac{a_0 y^{\hat{1}}}{c^2}}, \quad \hat{g}_{\hat{k}\hat{l}} = -\delta_{\hat{k}\hat{l}}, \quad \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}} = 1,$$

$$F^{\hat{1}} = \frac{a_0}{c^2}\Theta, \quad F^{\hat{2}} = F^{\hat{3}} = 0, \quad F_{\hat{k}} = \frac{\hat{\partial} \ln \Theta}{\hat{\partial} y^{\hat{k}}}. \tag{14.9}$$

Отметим, что псевдоевклидовость интервала (14.9), (в отличие от интервала Меллера (2.12)) обусловлена очевидным равенством

$$ds^2 = \frac{(d\xi^{\hat{0}})^2}{\Theta^2}, \tag{14.10}$$

справедливым вдоль каждой из фиксированных мировых линий частиц базиса.

Как показано в работе [4], поле 4 - скорости базиса Меллера в пространстве Минковского в переменных Эйлера может быть представлено в виде

$$V^1 = \frac{a_0 t}{c\sqrt{\left(1 + \frac{a_0 x^1}{c^2}\right)^2 - \frac{{a_0}^2 t^2}{c^2}}}. \tag{14.11}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что (14.11) удовлетворяет условию стационарности (14.6). Следовательно, уравнения Максвелла в такой НСО допускают стационарные решения.

Стационарные уравнения Максвелла в такой НСО могут быть получены из формул (14.2), (14.2a) и формул (13.11).

$$\Delta \hat{A}_{\hat{0}} + \vec{\nabla}(\hat{A}^{\hat{0}} \vec{F}) = -4\pi\rho^*. \tag{14.12}$$

$$\Delta \vec{\hat{A}} + \vec{\nabla}\Big(\vec{F} \cdot \vec{\hat{A}}\Big) = \Big[\vec{F} \times \Big[\vec{\nabla} \times \vec{\hat{A}}\Big]\Big]. \tag{14.12a}$$

Условие Лоренца (13.6) для стационарных решений сводится к виду

$$+\breve{\nabla}_{\hat{k}} \hat{A}^{\hat{k}} - F_{\hat{k}} \hat{A}^{\hat{k}} = 0. \tag{14.13}$$

Для дальнейшего анализа воспользуемся тождеством (10.16), которое для случая жестких безвихревых движений эквивалентно

$$\hat{\nabla}_{\hat{k}} F_{\hat{l}} \equiv F_{\hat{k}} F_{\hat{l}}. \tag{14.14}$$

Т.к. для метрики Меллера $\breve{\nabla}_{\hat{k}} = \hat{\nabla}_{\hat{k}}$, то, сравнивая (14.13) и (14.14), находим решение для векторного потенциала $\hat{A}^{\hat{k}}$ в виде

$$\hat{A}^{\hat{k}} = \alpha F^{\hat{k}}, \quad \alpha = \text{const}. \tag{14.15}$$

Из соотношений (13.13), (13.14) и решения (14.15) следует, что заряды, "вмороженные"в жесткую безвихревую НСО, для которой справедливы условия стационарности (14.6), не создают в этой системе магнитного поля, т.е.

$$\vec{H} = 0. \tag{14.16}$$

Рассмотрим решение уравнения (14.2) для частного случая точечного заряда, помещенного в начало координат НСО. Вместо тетрадной временной компоненты $\hat{A}_{\hat{0}} = h^{\mu}_{\hat{0}} V_{\mu}$ из (14.9), введем аффинную временную компоненту $\hat{A}'_{\hat{0}} = \hat{A}_{\hat{0}}/\Theta$, для которой уравнение (14.12) сведется к виду

$$\frac{\partial^2 \hat{A}'_{\hat{0}}}{\partial y^{\hat{k}} \partial y^{\hat{k}}} + F_{\hat{k}} \frac{\partial \hat{A}'_{\hat{0}}}{\partial y^{\hat{k}}} = -4\pi Q \delta(y^{\hat{1}}) \delta(y^{\hat{2})} \delta(y^{\hat{3}}). \tag{14.16a}$$

Решение уравнения (14.16а) в сопутствующих системах Меллера и Уиттекера получено Ц.И. Гуцунаевым (см. [34] и библиографию к ней). Для нашего случая имеем

$$\hat{A}'_{\hat{0}} = \frac{Q a_0}{c^2} \frac{\rho^2 + (y^{\hat{1}} + c^2/a_0)^2 + c^4/{a_0}^2}{\Big\{\Big[\rho^2 + (y^{\hat{1}} + c^2/a_0)^2 - c^4/{a_0}^2\Big]^2 + 4c^4/{a_0}^2\rho^2\Big\}^{1/2}}, \tag{14.16b}$$

где $\rho^2 = (y^{\hat{2}})^2 + (y^{\hat{3}})^2$.

Переход в ИСО в согласии с нашим методом осуществим по правилу

$$A^{\mu} = h^{\mu}_{\hat{\alpha}} \hat{A}^{\hat{\alpha}} = V^{\mu} \hat{A}^{\hat{0}} + \frac{\partial \Psi^{\mu}}{\partial y^{\hat{1}}} \hat{A}^{\hat{1}}.$$

Постоянную α в (14.15) определим из принципа соответствия, которая оказывается равной величине заряда $-Q$.

В результате вычислений, используя закон движения (2.11), учитывая, что поле 4-скоростей V^1 в переменных Эйлера имеет вид (14.11), а также легко проверяемые выражения

$$\left(1+\frac{a_0 y^{\hat{1}}}{c^2}\right)^2 = \left(1+\frac{a_0 x^1}{c^2}\right)^2 - \frac{a_0^2 t^2}{c^2}, \tag{14.17}$$

получим

$$A^0 = Q\Bigg\{\frac{(x^1+c^2/a_0)\Big[\rho^2+(x^1+c^2/a_0)^2-c^2t^2+c^4/{a_0}^2\Big]}{\Big[(x^1+c^2/a_0)^2-c^2t^2\Big]R}$$

$$-\frac{ct}{(x^1+c^2/a_0)^2-c^2t^2}\Bigg\},$$

$$A^1 = Q\Bigg\{\frac{ct\Big[\rho^2+(x^1+c^2/a_0)^2-c^2t^2+c^4/{a_0}^2\Big]}{\Big[(x^1+c^2/a_0)^2-c^2t^2\Big]R}$$

$$-\frac{x^1+c^2/a_0}{(x^1+c^2/a_0)^2-c^2t^2}\Bigg\}, \quad \rho^2=(x^2)^2+(x^3)^2,$$

$$R=\sqrt{\Big[\rho^2+(x^1+c^2/a_0)^2-c^2t^2-c^4/{a_0}^2\Big]^2+4\rho^2c^4/{a_0}^2}. \tag{14.18}$$

Приведенное в (14.18) решение было впервые получено Борном [28], и позднее с помощью запаздывающих потенциалов Шоттом [55]. С помощью перехода в меллеровскую НСО и обратного преобразования в ИСО, решение (14.18) получено также Гуцунаевым.

б). Легко проверить, что классическая равномерно вращающаяся СО также удовлетворяет условию стационарности (14.6). Следовательно, для системы зарядов или для одного заряда "вмороженных"в равномерно вращающийся диск, т.е. "обращенных"всегда одной стороной к центру диска, обобщенная сила радиационного трения (14.8) $g^\mu = 0$. Поэтому уравнения Максвелла в такой системе допускают статические решения.

Критерий стационарности позволяет свести уравнения Максвелла к решению одного уравнения для комплексного потенциала. Это следует из того факта, что для стационарного случая векторные уравнения Максвелла из (13.9) инвариантны относительно замены $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$. Поэтому $\vec{H}$ можно искать в двояком виде

$$\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{\hat{A}} + 2\frac{\vec{\Omega}}{c}\,\hat{A}_{\hat{0}} = -\vec{\nabla}\psi - \vec{F}\psi, \tag{14.19}$$

а вектор $\vec{E}$ для стационарного случая будет иметь вид

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \vec{F}\phi, \quad \phi \equiv \hat{A}_{\hat{0}}. \tag{14.20}$$

Используя тождества (13.14), выражения (14.19) и (14.20), находим для скалярных уравнений Максвелла из (13.9) выражения

$$\Delta\psi + \vec{\nabla}\cdot\left(\psi\vec{F} + \frac{2\phi\vec{\Omega}}{c}\right) = 0, \tag{14.21}$$

$$\Delta\phi + \vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{F} - \frac{2\psi\vec{\Omega}}{c}\right) = -4\pi\rho^*. \tag{14.22}$$

Введем комплексный потенциал Φ в согласии с определением

$$\Phi = \phi + i\psi, \quad i^2 = -1. \tag{14.23}$$

Складывая, умноженное на i уравнение (14.21), с уравнением (14.22) получим

$$\Delta\Phi + \vec{\nabla}\cdot\left(\Phi\vec{F} + \frac{2i\Phi\vec{\Omega}}{c}\right) = -4\pi\rho^*. \tag{14.24}$$

Уравнение (14.24) позволяет искать поля от зарядов, "вмороженных"в релятивистски жесткие движущиеся тела.

Следует отметить, что из коммутационных соотношений (10.10) и объектов неголономности (10.11) вытекает, что для стационарных решений производные по направлениям $\hat{\partial}/\hat{\partial}y^{\hat{k}}$ можно заменить на обычные частные производные $\partial/\partial y^{\hat{k}}$.

Рассмотрим пример расчета стационарного поля в классической жесткой вращающейся системе отсчета. Пусть заряд или система зарядов вморожены в эту НСО. Уравнения Максвелла (13.4) для этого случая сведутся к виду

$$\breve{\nabla}_{\hat{l}}(\hat{F}^{\hat{k}\hat{l}} + 2\Omega^{\hat{k}\hat{l}}\hat{A}_{\hat{0}}) - F_{\hat{l}}(\hat{F}^{\hat{k}\hat{l}} + 2\Omega^{\hat{k}\hat{l}}\hat{A}_{\hat{0}}) = 0,$$

$$\breve{\nabla}_{\hat{k}}(\hat{F}^{\hat{0}\hat{k}} + F^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}}) + \Omega_{\hat{k}\hat{l}}(\hat{F}^{\hat{k}\hat{l}} + 2\Omega^{\hat{k}\hat{l}}\hat{A}_{\hat{0}}) = -4\pi\rho^*, \tag{14.25}$$

Первое уравнение (14.25) можно записать в виде

$$\breve{\nabla}_{\hat{l}}\tilde{F}^{\hat{k}\hat{l}} = F_{\hat{l}}\tilde{F}^{\hat{k}\hat{l}}, \quad \tilde{F}^{\hat{k}\hat{l}} = (\hat{F}^{\hat{k}\hat{l}} + 2\Omega^{\hat{k}\hat{l}}\hat{A}_{\hat{0}}) \tag{14.26}$$

Для решения (14.26) воспользуемя тождеством (10.33), из которого для жестких движений следует

$$\frac{1}{2}(\hat{\nabla}_{\hat{a}}\Omega_{\hat{b}\hat{c}} - \hat{\nabla}_{\hat{b}}\Omega_{\hat{a}\hat{c}}) = -\Omega_{\hat{a}\hat{b}}F_{\hat{c}}, \tag{14.27}$$

что эквивалентно

$$\breve{\nabla}_{\hat{l}}\Omega^{\hat{k}\hat{l}} = 2F_{\hat{l}}\Omega^{\hat{k}\hat{l}}, \tag{14.28}$$

Сравнение (14.26) и (14.28) позволяет искать решение (14.26) в виде

$$\tilde{F}^{\hat{k}\hat{l}} = \varepsilon\Omega^{\hat{k}\hat{l}}. \tag{14.29}$$

Подстановка (14.29) в (14.26) приводит к равенству

$$\left(\frac{\hat{\partial}\ln\varepsilon}{\hat{\partial}y^{\hat{l}}} + F_{\hat{l}}\right)\Omega^{\hat{k}\hat{l}} = 0, \tag{14.30}$$

из которого в частности следует

$$\frac{\hat{\partial}\ln\varepsilon}{\hat{\partial}y^{\hat{l}}} = -F_{\hat{l}}. \tag{14.31}$$

Для решения уравнения (14.31) необходимо выполнение условия интегрируемости. Как видно из (10.17), условие интегрируемости будет выполнено в случае жестких стационарных движений. В частности, этому условию отвечает классическая жесткая вращающаяся СО, для которой

$$0 = \frac{\hat{\partial}}{\partial y^{\hat{0}}}\Omega_{\hat{k}\hat{l}} \equiv \hat{\nabla}_{[\hat{k}}F_{\hat{l}]}. \tag{14.32}$$

Рассмотрим более подробно переход от ИСО к классической жесткой вращающейся НСО. Рассмотрим элемент интервала ИСО в цилиндрических координатах

$$dS^2 = c^2dt^2 - dr'^2 - r'^2d\phi'^2 - dz'^2, \tag{14.33}$$

для которого компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и координаты имеют вид

$$g_{00} = 1, \quad -g_{11} = \gamma_{11} = 1, \quad -g_{22} = \gamma_{22} = r'^2, \quad -g_{33} = \gamma_{33} = 1,$$

$$y^{\hat{1}} = r, \quad y^{\hat{2}} = \phi, \quad y^{\hat{3}} = z, \quad y^{\hat{0}} = c\tau,$$
$$x^1 = r', \quad x^2 = \phi', \quad x^3 = z', \quad x^0 = ct. \tag{14.33}$$

Переход во вращающуюся НСО и обратно в ИСО зададим в обычном виде

$$x^2 = y^{\hat{2}} + \frac{\Omega}{c}x^0, \quad y^{\hat{2}} = x^2 - \frac{\Omega}{c}x^0, \quad x^1 = y^{\hat{1}}, \quad x^3 = y^{\hat{3}}. \tag{14.34}$$

Поле 4-скоростей V^μ базиса вращающейся НСО относительно ИСО имеет вид

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = V^0, \quad V^2 = \frac{\Omega}{c}V^0, \quad V_2 = -\frac{\Omega r^2}{c}V^0,$$

$$V^3 = V_3 = 0, \quad V^1 = V_1 = 0, \quad \beta \equiv \frac{\Omega r}{c}. \tag{14.34}$$

По заданному закону скоростей и преобразовниям координат найдем коэффициенты Ламе.

$$h^{\hat{0}}_{\mu} = V_\mu, \quad h^{\hat{k}}_{\mu} = \frac{\partial y^{\hat{k}}}{\partial x^\mu}, \quad h^{\hat{1}}_{\mu} = \delta^{\hat{1}}_{\mu}, \quad h^{\hat{3}}_{\mu} = \delta^{\hat{3}}_{\mu},$$

$$h^{\hat{2}}_{\mu} = \delta^{\hat{2}}_{\mu} - \frac{\Omega}{c}\delta^{\hat{0}}_{\mu}, \quad h^{\mu}_{\hat{0}} = V^\mu, \quad h^{2}_{\hat{k}} = \frac{1}{1-\beta^2}\delta^{2}_{\hat{k}},$$

$$h^{1}_{\hat{k}} = \delta^{1}_{\hat{k}}, \quad h^{3}_{\hat{k}} = \delta^{3}_{\hat{k}}, \quad h^{0}_{\hat{k}} = \frac{\Omega r^2}{c(1-\beta^2}\delta^{2}_{\hat{k}}. \tag{14.35}$$

Используя найденные коэффициенты Ламе, вычислим метрические коэффициенты во вращающейся НСО.

$$\hat{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = g_{\mu\nu}h^{\mu}_{\hat{\alpha}}h^{\nu}_{\hat{\beta}}, \quad -\hat{g}_{\hat{1}\hat{1}} = \hat{\gamma}_{\hat{1}\hat{1}} = 1, \quad -\hat{g}_{\hat{2}\hat{2}} = \hat{\gamma}_{\hat{2}\hat{2}} = \frac{r^2}{1-\beta^2},$$

$$-\hat{g}_{\hat{1}\hat{1}} = \hat{\gamma}_{\hat{1}\hat{1}} = 1, \quad \hat{g}_{\hat{0}\hat{0}} = 1, \quad -\hat{g}^{\hat{1}\hat{1}} = \hat{\gamma}^{\hat{1}\hat{1}} = 1, \quad \hat{g}^{\hat{0}\hat{0}} = 1.$$
$$-\hat{g}^{\hat{2}\hat{2}} = \hat{\gamma}^{\hat{2}\hat{2}} = r^{-2}\Big(1-\beta^2\Big). \tag{14.36}$$

Отметим, что найденная нами метрика отличается от метрики для относительного интервала (10.72) коэффициентом $\hat{g}_{\hat{0}\hat{0}}$, который в нашем случае равен единице. Это означает, что в качестве времени в НСО мы выбрали по определению собственное время, а в (10.72) в НСО использовалось время ИСО. Найденная нами метрика, для получения которой использовались неголономные преобразования, сильно отличается и от стандартной метрики (10.73). Как было отмечено ранее, для стационарных процессов и стационарных полей производные по направлениям коммутируют, что является следствием коммутационных соотношений (10.13). Поэтому при дифференцировании эти производные можно рассматривать как обычные частные производные.

Исходя из сделанных замечаний, попытаемся проинтегрировать систему (14.25). Первое уравнение этой системы мы почти решили. Осталось определить лишь функцию $\varepsilon(r)$. Для определения этой функции необходимо знать 4-ускорения F^μ вращающейся СО. Вычислим предварительно символы Кристоффеля во вращающейся НСО по формуле (10.44)

$$\left\{\begin{matrix}\hat{0}\\ \hat{0}\hat{0}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\hat{k}\\ \hat{0}\hat{0}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\hat{0}\\ \hat{0}\hat{k}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\hat{0}\\ \hat{k}\hat{l}\end{matrix}\right\} = 0,$$

$$\left\{\begin{matrix}\hat{1}\\ \hat{2}\hat{2}\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\hat{\gamma}_{\hat{2}\hat{2}}}{\partial r} = -\frac{r}{\left(1-\beta^2\right)^2}, \quad \left\{\begin{matrix}\hat{2}\\ \hat{1}\hat{2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\hat{\gamma}^{\hat{2}\hat{2}}\frac{\partial\hat{\gamma}_{\hat{2}\hat{2}}}{\partial r} = \frac{1}{r\left(1-\beta^2\right)}. \tag{14.37}$$

В ИСО в цилиндрических координатах символы Кристоффеля получатся из формул (14.37) при $\beta = 0$. Воспользуясь этим свойством, вычислим 4-ускорение F^μ базиса НСО относительно ИСО. Ввиду постоянства угловой скорости вращения и ортогональности вектора скорости и вектора ускорения в каждой точке, отличной от нуля будет единственная компонента 4-ускорения F^1, эквивалентная центростремительному ускорению. Очевидно, что

$$F^1 = \frac{DV^1}{ds} = \frac{dV^1}{ds} + \left\{\begin{matrix}1\\ 22\end{matrix}\right\} V^2V^2 = -\frac{\Omega^2 r}{c^2(1-\beta^2)}, \quad F_1 = -F^1. \tag{14.38}$$

Относительно вращающейся НСО отличной от нуля компонентой будет

$$F_{\hat{1}} = h^\mu_{\hat{1}}F_\mu = F_1 = \frac{\Omega^2 r}{c^2(1-\beta^2)}. \tag{14.39}$$

Это позволяет проинтегрировать уравнение (14.31), что дает

$$\ln\varepsilon = -\int\frac{\Omega^2 r}{c^2(1-\beta^2)}\,dr, \quad \varepsilon = c_3\sqrt{1-\beta^2}, \tag{14.40}$$

где - $_3$ - произвольная постоянная, которую определим далее. Таким образом, решение уравнения (14.26) сводится к виду

$$\tilde{F}^{\hat{k}\hat{l}} = c_3\sqrt{1-\beta^2}\,\Omega^{\hat{k}\hat{l}}. \tag{14.41}$$

Второе уравнение (14.25) представим в виде

$$\breve{\nabla}_{\hat{k}}(\hat{F}^{\hat{0}\hat{k}} + F^{\hat{k}}\hat{A}_{\hat{0}}) + c_3\sqrt{1-\beta^2}\,\Omega_{\hat{k}\hat{l}}\Omega^{\hat{k}\hat{l}} = -4\pi\rho^*, \tag{14.42}$$

которое после использования равенства

$$\Omega_{\hat{k}\hat{l}}\Omega^{\hat{k}\hat{l}} = \frac{2\beta^2}{r^2(1-\beta^2)^2}, \tag{14.43}$$

и раскрытия ковариантных производных с помощью вычисленных нами символов Кристоффеля, после простых, но довольно утомительных преобразований, сводятся к одному уравнению вида

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1-\beta^2}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{2c_3\beta^2}{r^2(1-\beta^2)^2} = -\frac{4\pi\rho^*}{V_0},$$

$$\hat{A}_{\hat{0}} = \Psi V_0, \quad V_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{14.44}$$

Уравнение (14.44) позволяет в принципе решать любые задачи для системы зарядов, вмороженных в классическую жесткую равномерно вращающуюся СО, однако для доказательства работоспособности предложенного нами метода, мы решим простейшую задачу, вращая вокруг оси длинный полый тонкостенный диэлектрический цилиндр с электростатическим зарядом на стенке. Ясно, что по характеру распределения магнитного поля, эта задача должна быть эквивалентна задаче о магнитном поле бесконечного соленоида со сплошной намоткой. Постоянный ток, текущий по виткам соленоида, эквивалентен конвективному току вращающегося цилиндра. Будем искать электромагнитное поле вне зарядов как вне, так и внутри цилиндра.

Уранение (14.44) для рассмотренной задачи сводится к виду

$$\frac{dP}{dr} + \frac{1}{r}\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}P = -\frac{2c_3\beta^2}{r^2(1-\beta^2)^2}, \quad P = \frac{\partial\Psi}{\partial r}. \tag{14.45}$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что сумма общего решения однородного уравнения (14.45) и частного решения неоднородного представима в виде

$$P = \frac{c_1(1-\beta^2)}{\beta} - \frac{c_3}{r}, \tag{14.46}$$

где c_1 - произвольная постоянная, которую определим далее. Можно убедиться также, что

$$-V_0\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -\frac{\partial\hat{A}_{\hat{0}}}{\partial r} + \hat{A}_{\hat{0}}F_{\hat{1}} = \tilde{F}_{\hat{0}\hat{1}}. \tag{14.47}$$

Вычислим тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ вращающегося полого цилиндра в цилиндрических координатах ИСО.

$$F_{\mu\nu} = h^{\hat{\alpha}}_{\mu}h^{\hat{\beta}}_{\nu}\tilde{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = h^{\hat{k}}_{\mu}h^{\hat{l}}_{\nu}\tilde{F}_{\hat{k}\hat{l}} + h^{\hat{0}}_{\mu}h^{\hat{l}}_{\nu}\tilde{F}_{\hat{0}\hat{l}} + h^{\hat{0}}_{\nu}h^{\hat{l}}_{\mu}\tilde{F}_{\hat{l}\hat{0}} =$$

$$= \varepsilon\Omega_{\mu\nu} + \frac{\partial\hat{A}_{\hat{0}}}{\partial r}(V_\nu\delta^1_\mu - V_\mu\delta^1_\nu) + \hat{A}_{\hat{0}}(V_\mu F_\nu - V_\nu F_\mu). \tag{14.48}$$

Отличными от нуля в последнем выражении будут только $F_{01} = -F_{10}$ и $F_{12} = -F_{21}$ компоненты тензора электромагнитного поля, для которых имеем:

$$F_{01} = \varepsilon\Omega_{01} - \left(\frac{\partial\hat{A}_{\hat{0}}}{\partial r}V_0 - \hat{A}_{\hat{0}}V_0F_1\right) = \frac{1}{\beta}\left(c_3\frac{\Omega}{c} - c_1\right), \tag{14.49}$$

$$F_{12} = \varepsilon\Omega_{12} + V_2 V_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -c_1 r. \tag{14.50}$$

Отметим, что последние выражения для тензора поля заданы в пространстве Минковского в цилиндрических координатах. Удобнее для сравнения со стандартной записью для тензора поля перейти к декартовым координатам. Так как $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$, $x^3 = z$, то компонента F'_{12} в декартовых координатах связана с компонентой F_{12} в цилиндрических координатах в согласии с законом преобразования трехмерных тензоров

$$F_{12} = F'_{12} \frac{\partial x^1}{\partial r} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + F'_{21} \frac{\partial x^2}{\partial r} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} = r F'_{12}. \tag{14.51}$$

Но в декартовых координатах ИСО в согласии сопределением [7], которое здесь используется, $F'_{12} = -H_z$. Отсюда и из (14.50) имеем для магнитного поля выражение

$$H_z = c_1. \tag{14.52}$$

Определим постоянные c_1 и c_3. Рассмотрим решение для электромагнитного поля внутри оболочки цилиндра. Электрическое поле $F_{01} = E_r$ внутри цилиндра в ИСО должно быть равно нулю. Откуда находим из (14.49), приравнивая это выражение нулю, что

$$c_1 = {}_3\frac{\Omega}{c}. \tag{14.53}$$

$$H_z = {}_3\frac{\Omega}{c}. \tag{14.54}$$

Постоянную c_3 можно определить из внешнего решения для электрического поля, которое при отсутствии вращения из принципа соответствия должно совпадать со статическим полем вне заряженного цилиндра. Откуда имеем при $c_1 = 0$

$$E_r = \frac{2\chi}{r} = \frac{c_3}{r}, \quad c_3 = 2\chi, \tag{14.55}$$

где χ - плотность заряда на единицу длины цилиндра. Итак, получили заранее ожидаемый результат. Внутри цилиндра электрическое поле равно нулю, а магнитное постоянно, отлично от нуля и равно

$$H_z = \frac{2\Omega\chi}{c} = \text{const}, \quad \vec{E} = 0 \qquad r < R, \tag{14.56}$$

где R - радиус цилиндра. Вне цилиндра в силу $c_1 = 0$ равно нулю магнитное поле, а электрическое поле отлично от нуля.

$$E_r = \frac{2\chi}{r}, \quad \vec{H} = 0 \qquad r > R, \tag{14.57}$$

Вычислим величину магнитного поля через конвективный ток на единицу длины. Очевидно, что $\chi = jT$, где j - конвективный ток через единицу длины, а T - период обращения цилиндра. Подставляя в (14.56), находим

$$H_z = \frac{4\pi j}{c} = \text{const}, \qquad r < R, \tag{14.58}$$

что в точности совпадает с полем внутри бесконечного идеального соленоида. Проведенный здесь подробный расчет является некоторой тестовой задачей правомерности построенного неголономного аппарата преобразования уравнений электродинамики из ИСО в НСО и обратно. Вычислив значения постоянных c_1 и c_3, возвратимся к анализу электромагнитного поля вращающегося полого цилиндра с точки зрения наблюдателя, связанного с этим цилиндром. Очевидно, что соотношение между постоянными (14.53) будет справедливым внутри цилиндра как в ИСО, так и в НСО, однако это уже не приведет к обращению в ноль электрического поля внутри цилиндра. Электрическое поле внутри цилиндра в НСО отлично от нуля и меняется по закону

$$\tilde{E}_r = \tilde{F}_{\hat{0}\hat{1}} = -\frac{\partial \hat{A}_{\hat{0}}}{\partial r} + \hat{A}_{\hat{0}} F_{\hat{1}} = \frac{2\chi\beta^2}{r}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad r < R, \tag{14.59}$$

Для малых β последнее соотношение сводится к виду

$$\tilde{E}_r = \tilde{F}_{\hat{0}\hat{1}} = \frac{2\chi\beta^2}{r} = \frac{2\chi\Omega^2 r}{c^2}. \qquad r < R, \tag{14.60}$$

Из последней формулы видно, что в НСО электрическое поле в центре цилиндра равно нулю, и далее линейно возрастает, достигая на радиусе цилиндра максимума, однако поле на внутренней границе составляет величину порядка β^2 от поля на наружной границе. Вне цилиндра в НСО (как и в ИСО) $c_1 = 0$. Равенство нулю c_1 вытекает также из физического требования уменьшения поля с ростом r. Поэтому получаем для электрического поля выражение

$$\tilde{E}_r = \tilde{F}_{\hat{0}\hat{1}} = \frac{2\chi}{r}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad r > R, \tag{14.61}$$

Из последнего соотношения следует, что формула применима для конечных расстояний, для которых $\beta < 1$. Эта трудность является типичной для классической вращающейся СО. При нашем описании вращающейся жесткой СО, изложенном в главе первой, такой трудности возникнуть в принципе не может.

Исследуем поведение магнитного поля в НСО. В согласии с формулой (14.41)

$$\tilde{F}_{\hat{k}\hat{l}} = c_3\sqrt{1-\beta^2}\,\Omega_{\hat{k}\hat{l}}. \tag{14.62}$$

Отличной от нуля компонентой тензора угловой скорости вращения в НСО будет $\Omega_{\hat{1}\hat{2}}$, для которой из (14.43) имеем

$$\Omega_{\hat{1}\hat{2}}\Omega_{\hat{1}\hat{2}}\hat{\gamma}^{\hat{1}\hat{1}}\hat{\gamma}^{\hat{2}\hat{2}} = \frac{\beta^2}{r^2(1-\beta^2)^2}. \tag{14.63}$$

Используя (14.36), выбрав отрицательный корень для $\Omega_{\hat{1}\hat{2}}$, находим

$$\Omega_{\hat{1}\hat{2}} = -\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \tilde{F}_{\hat{1}\hat{2}} = -c_3\frac{\beta}{1-\beta^2}. \tag{14.64}$$

Внутри и вне цилиндра постоянная $c_3 = 2\chi$. Обращаем внимание, что в НСО магнитное поле отлично от нуля как внутри, так и вне цилиндра. Физический смысл этого связан с тем обстоятельством, что магнитное поле в НСО определяется тензором угловой скорости вращения базиса НСО. Этот тензор отличен от нуля как внутри, так и вне цилиндра. Магнитное поле в ИСО определяется конвективными токами вращающегося цилиндра. Из закона, определяющего магнитное поле по заданному току, следует, что магнитное поле будет лишь внутри цилиндра. Во вращающейся НСО конвективный ток тождественно равен нулю, а магнитное поле отлично от нуля во всем пространстве.

Физический смысл имеют не аффинные, а тетрадные компоненты тензора поля. Т.к. метрика (14.36) ортогональна, то для построения поля тетрад можно векторы орторепера $\vec{e}_\alpha$ совместить с векторами аффинного репера и поле тетрад записать в виде:

$$e^\mu_{(\alpha)} = \frac{\delta^\mu_\alpha}{\sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}}, \qquad e_\mu^{(\alpha)} = \delta^\alpha_\mu \sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}, \tag{14.65}$$

где суммирование по α отсутствует. Тетрадные компоненты тензоров совпадают с "физическими". Например, для отличной от нуля пространственной компоненты тензора поля, связанной с магнитным полем, имеем

$$\tilde{F}(\hat{1})(\hat{2}) = -\frac{2\chi\Omega}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\tilde{H}_z, \qquad 0 < r < \frac{c}{\Omega}. \tag{14.66}$$

Отметим, что аффинная компонента поля $\tilde{E}_r = \tilde{F}_{\hat{0}\hat{1}}$ автоматически совпадает с тетрадной в силу характера метрики (14.36).

Выясним вклад в "абсолютное"магнитное поле его "относительных"и "переносных"составных частей. Из (14.26) и (14.29) находим для относительного тензора магнитного поля выражение

$$\hat{F}_{\hat{k}\hat{l}} = \tilde{F}_{\hat{k}\hat{l}} - 2\Omega_{\hat{k}\hat{l}}\hat{A}_{\hat{0}} = (\varepsilon - 2\hat{A}_{\hat{0}})\Omega_{\hat{k}\hat{l}} \tag{14.67}$$

Так как $\hat{A}_{\hat{0}} = V_0\Psi$, то для вычисления $\hat{F}_{\hat{k}\hat{l}}$ достаточно вычислить Ψ как во внутренней, так и во внешней областях цилиндра. Считая, что в центре цилиндра при равной нулю напряженности электрического поля $\Psi(0) = 0$ и считая также, что на поверхности цилиндра функция Ψ не терпит разрыва, интегрируя для двух разных областей уравнение (14.46) вида

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{c_1(1-\beta^2)}{\beta} - \frac{c_3}{r}, \tag{14.68}$$

находим

$$\Psi = -\chi\beta^2, \qquad r < R, \tag{14.69}$$

$$\Psi = -\chi\Big[\beta_0^2 + 2\ln\Big(\frac{r}{R}\Big)\Big], \qquad r > R, \quad \beta_0 = \frac{\Omega R}{c}. \tag{14.70}$$

Это дает для внутреннего решения

$$\hat{F}_{\hat{1}\hat{2}} = -\frac{2\chi\beta}{(1-\beta^2)^2}, \qquad r < R, \tag{14.71}$$

и для наружного

$$\hat{F}_{\hat{1}\hat{2}} = -\frac{2\chi\beta\Big[\beta_0^2 + 2\ln\Big(\frac{r}{R}\Big)\Big]}{(1-\beta^2)^2}, \qquad r > R. \tag{14.72}$$

Как и для инерциальных систем осчета, так и для неинерциальных можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при преобразовании от ИСО к НСО и наоборот. Вид инвариантов легко установить, исходя из следующих легко проверяемых равенств

$$\tilde{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\tilde{F}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = inv. \tag{14.73}$$

В частности, для нашей задачи вращающегося цилиндра выражение (14.73) эквивалентно равенству

$$\left(\tilde{F}_{\hat{1}\hat{2}}\right)^2 \hat{g}^{\hat{1}\hat{1}}\hat{g}^{\hat{2}\hat{2}} - \left(\tilde{F}_{\hat{0}\hat{1}}\right)^2 \hat{g}^{\hat{0}\hat{0}}\hat{g}^{\hat{1}\hat{1}} =$$

$$= \left(F_{12}\right)^2 g^{11}g^{22} - \left(F_{01}\right)^2 g^{00}g^{11} = (H_z)^2 - (E_r)^2. \tag{14.74}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, используя проделанные выше вычисления для полей в ИСО и НСО, что для внешнего решения величина инварианта равна $-(E_r)^2$, а внутреннее решение соответствует инварианту $(H_z)^2$. Что касается второго известного инварианта, соответствующего скалярному произведению электрического и магнитного полей, то в силу ортогональности этих полей этот инвариант тождественно равен нулю. Выполнение равенств (14.74) является также контролем проделанных вычислений при нахождении электромагнитного поля.

Проведем анализ полученных результатов. Характер электромагнитного поля вращающего полого заряженного цилиндра в ИСО привел к ожидаемому результату, а именно: магнитное поле внутри цилиндра постоянно и совпадает с полем соответствующего соленоида, вне цилиндра магнитное поле отсутствует. Электрическое поле внутри цилиндра равно нулю, а вне цилиндра совпадает с полем покоящегося заряженного цилиндра.

Результат вычислений электромагнитного поля в НСО является несколько неожиданным: обычно принято считать, что в магнитостатике магнитное поле обязано своим происхождением электрическому току. Так как заряженный цилиндр в НСО покоится, то ток в этой системе тождественно равен нулю. Однако магнитное поле в НСО оказалось отличным от нуля не только внутри цилиндра, но также и вне его. Наличие почти постоянного магнитного поля вне цилиндра (в реальном случае в формуле (14.66) можно пренебречь β^2 по сравнению с единицей) и внутри его, совпадающего с магнитным полем в ИСО внутри цилиндра (14.56), на первый взгляд кажется довольно странным. Однако вращающееся система является неинерциальной с другими законами физики, чем в ИСО. Появление в НСО магнитного поля вне и внутри цилиндра обязано наличию вращения, которое является абсолютным (14.62). "Относительности вращения"не существует [120]. Второй неожиданностью в НСО является появление внутри цилиндра не равного нулю электрического поля, которое является, правда, в силу (14.59) величиной второго порядка малости β^2 по сравнению с наружным полем (14.61). Однако принципиальное существование поля внутри бесконечного заряженного полого цилиндра, обращающемуся в нуль на оси, говорит о том, что источником электрического поля являются в НСО не только электрические заряды. Это, впрочем, следует из одного из уравнений Максвелла (13.9) в НСО, согласно которому

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{2}{c}\vec{\Omega} \cdot \vec{H} + 4\pi\rho^*$$

источником электрического поля может быть скалярное произведение вектора угловой скорости с вектором магнитного поля.

Сравним найденные нами результаты с результатами других работ на эту тему. В книге [22] приводится выражение для преобразования электромагнитных полей, полученное также независимо от [22] и в работе [137]. Это преобразование в векторной форме имеет вид

$$\vec{E}' = \gamma\Big(\vec{E} - \frac{(\vec{\omega}\times\vec{r})\times\vec{H}}{c}\Big) - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}(\vec{\omega}\times\vec{r})\vec{E}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}), \tag{14.75}$$

$$\vec{H}' = \gamma\Big(\vec{H} + \frac{(\vec{\omega}\times\vec{r})\times\vec{E}}{c}\Big) - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}(\vec{\omega}\times\vec{r})\vec{H}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}),$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{14.76}$$

В формулах (14.75) и (14.76) штрихованные величины относятся к вращающейся НСО, а нештрихованные - к ИСО. Для нашей задачи вращающего заряженного полого цилиндра последние члены в приведенных формулах исчезают, поскольку поле скоростей СО $\vec{\omega}\times\vec{r}$ ортогональны полям $\vec{E}$ и $\vec{H}$ как внутри, так и вне цилиндра. Можно показать, что с точностью до выбора знака вектора угловой скорости ω найденные нами величины полей для частного случая вращающегося полого заряженного цилиндра совпадают с аналогичными величинами [22], [137].

Наличие с точки зрения вращающейся СО внутри цилиндра электрического поля казалось бы должно привести к радиальному движению заряда покоящимуся в ИСО внутри полости цилиндра. Однако это не так.

Из полученного решения с точки зрения ИСО очевидно, что внутри цилиндра электрического поля нет, а по отношению к магнитному покоящийся в ИСО пробный заряд внутри полости неподвижен. Поэтому никаких сил на пробный заряд внутри вращающегося заряженного цилиндра с точки зрения ИСО не действует. Ситуация с пробным зарядом эквивалентна помещению этого заряда внутрь соленоида и покоящегося относительно последнего.

С точки зрения наблюдателя, находящегося на вращающемся цилиндре, покоящийся в ИСО заряд будет по отношению к НСО двигаться по окружности радиуса r со скоростью $-\Omega r$ в обратную сторону вращающемуся диску. Релятивистские формулы преобразования уравнений движения от НСО к ИСО и обратно подробно разобраны нами в разделе 11. Сейчас нам важно, не осложняя существа дела, выяснить измениться ли радиальная компонента внешней силы со стороны электромагнитного поля с точки зрения НСО, если с точки зрения ИСО она равнялась нулю. В нерелятивистской механике [138] уравнение движения материальной точки относительно равномерно вращающейся системы отсчета имеет вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + 2m[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[\vec{\Omega}[\vec{r}\vec{\Omega}]], \tag{14.77}$$

где $\vec{v}$ - относительная скорость, $\vec{F}$ - сила на частицу со стороны электромагнитного поля. Если внутри полости частица неподвижна относительно ИСО, то $\vec{v} = -[\vec{\Omega}\vec{r}]$. Подстановка последнего соотношения в (14.77) приводит к соотношению

$$\vec{F} = 0, \tag{14.78}$$

которое эквивалентно тому, что сумма силы Кориолиса с центробежной обуславливает относительное центростремительное ускорение. Сила $\vec{F}$ со стороны электромагнитного поля на пробную частицу в полости цилиндра складывается из суммы сил со стороны электрического поля (14.59) и со стороны магнитного поля (14.66). Пусть пробный заряд q, покоящийся в полости в ИСО, положителен и цилиндр также заряжен положительно. Тогда очевидно, что сила со стороны электрического поля напрвлена по радиусу от центра, а сила со стороны магнитного - по радиусу к центру. Суммирование дает

$$F = q\Big(\tilde{E}_r - \frac{v}{c}\tilde{H}_z\Big) = q\Big(\frac{2\chi\beta^2}{r}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{v}{c}\frac{2\chi\Omega}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big) = 0. \tag{14.79}$$

Итак, как и следовало ожидать, отутствие радиального движения частицы является инвариантным фактором как из ИСО, так и из НСО. Отметим, что последняя формула является релятивистской.

15. Сравнение электромагнитных полей в НСО Меллера и в НСО в пространстве постоянной кривизны. Дискуссия

Уравнения электродинамики в НСО с с заданной структурой внешне не отличаются от уравнений электродинамики при наличии гравитационного поля [7], где метрические коэффициенты определяются из (2.18). Уравнения Максвелла для НСО с заданной структурой и условия Лоренца будут иметь вид [7]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\Big(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\Big) = -\frac{4\pi j^\mu}{c}, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\Big(\sqrt{-g}A^\nu\Big) = 0. \tag{15.1}$$

Поэтому приведем только простейшие соотношения, базирующиеся на конкретном виде метрики (2.18). В качестве примера рассмотрим один из "вечных вопросов"[27] о поле при равномерно ускоренном движении заряда. Из (15.1) и метрики (2.18) находим из условий Лоренца решение

$$A^1 = Qa\exp(-ay^1), \quad A^2 = A^3 = 0, \quad a \equiv \frac{a_0}{c^2}. \tag{15.2}$$

Для потенциала точечного заряда $_0$, вмороженного в начало координат НСО, статические уравнения Максвелла при выполнении условий Лоренца сводятся к виду

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial y^1}\Big(\sqrt{-g}g^{00}\frac{\partial A_0}{\partial y^1}\Big) + g^{00}\Big(\frac{\partial^2 A_0}{\partial {y^2}^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial {y^3}^2}\Big) = -\frac{4\pi j^0}{c} \tag{15.3}$$

или после упрощений

$$\Delta A_0 - a\frac{\partial A_0}{\partial y^1} = -4\pi Q e^{ay^1}\delta(y^1)\delta(y^2)\delta(y^3). \tag{15.4}$$

Решение (15.4) ищем в виде.

$$A_0 = u(y^1, y^2, y^3)\exp(\lambda y^1), \quad \lambda = \frac{a}{2}. \tag{15.5}$$

После чего уравнение для u сведется к форме

$$\Delta u - \frac{a^2}{4}u = -4\pi Q\exp\Big(\frac{ay^1}{2}\Big)\delta(y^1)\delta(y^2)\delta(y^3), \tag{15.6}$$

а его решение

$$u=\frac{Q}{r}\exp\Bigl(-\frac{ar}{2}\Bigr). \qquad (15.7)$$

Отметим, что хотя пространство (2.18) - риманово, но его пространственное сечение евклидово, в котором существует радиус - вектор. Из рассмотренного следует, что решение уравнения (15.4) имеет вид

$$A_0=\frac{Q}{r}\exp\Bigl\{-\frac{a_0r(1-\cos\theta)}{2c^2}\Bigr\}. \qquad (15.8)$$

Для напряженности электрического поля $\vec{E}$ имеем

$$\vec{E}=\frac{Q}{r^2}\exp\Bigl\{-\frac{a_0r(1-\cos\theta)}{2c^2}\Bigr\}\Bigl[\frac{\vec{r}}{r}+\frac{a_0r}{2c^2}\Bigl(\frac{\vec{r}}{r}-\vec{i}\Bigr)\Bigr], \qquad (15.9)$$

где r - трехмерное (евклидово) расстояние от начала координат , совпадающим с зарядом, до точки наблюдения, θ - угол между радиусом - вектором $\vec{r}$ и $\vec{i}$, $\vec{i}=\vec{a_0}/|\ \vec{a_o}\ |$.

Для удобства преобразований между СО перепишем решения в тензорной форме. Отличные от нуля компоненты тензора поля $F_{0k}=-F_{k0}$ имеют вид в согласии с (15.9)

$$F_{0k}=\frac{Q}{r^2}\exp\Bigl\{-\frac{a_0r(1-\cos\theta)}{2c^2}\Bigr\}\Bigl[n_k+\frac{a_0r}{2c^2}\Bigl(n_k-\delta^1_k\Bigr)\Bigr], \qquad (15.10)$$

n_k - единичный вектор вдоль r в трехмерном пространстве с метрикой δ_{kl}.

Для пространственных компонент тензора электромагнитного поля F_{kl} имеем из (15.2)

$$F_{kl}=0. \qquad (15.11)$$

Это означает, что магнитное поле в НСО отсутствует. Как известно [7], тензор энергии - импульса $_{\mu\nu}$ электромагнитного поля в криволинейных координатах можно представить в виде.

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\Bigl(-F_{\mu\beta}F_{\nu}{}^{\beta}+\frac{1}{4}F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma}g_{\mu\nu}\Bigr), \qquad (15.11)$$

Из (2.18), (15.10), (15.11) следует, что вектор Пойнтинга $S_k=cT_{0k}$

$$S_k=0, \qquad (15.12),$$

что означает отсутствие в НСО излучения. Переход в квази - ИСО дается в соответствии с правилами раздела 3 и приводит к закону движения, взятому из соотношений (3.5), (3.6).

$$y^1=x^1+\frac{c^2}{a_0}\ln\ |\cos(a_0S/c^2)\ |,$$

$$y^0=\frac{c^2}{a_0}\tan(a_0S/c^2)\exp(-a_0x^1/c^2). \qquad (15.13).$$

Из (15.13), в согласии с обычным правилам преобразования тензоров, имеем

$$\tilde{F}_{\alpha\beta}=\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\beta}}F_{\mu\nu}. \qquad (15.14).$$

Откуда находим

$$\tilde{F}_{0p} = \frac{\exp(-a_0x^1/c^2)}{\cos^2(a_0x^0/c^2)}\Big[F_{0p} - \sin^2(a_0x^0/c^2)\delta^1_p F_{01}\Big], \qquad (15.15).$$

$$\tilde{F}_{kl} = \exp(-a_0x^1/c^2)\tan(a_0x^0/c^2)\Big[\delta^1_l F_{0k} - \delta^1_k F_{0l}\Big]. \qquad (15.16).$$

Переход к эталонным координатам осуществляем по правилу

$$F^*_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta}\tilde{F}_{\mu\nu},$$

$$x^0 = \frac{c^2}{a_0}\arccos\Big[\exp\Big(1 - \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2T^2}{c^2}}\Big)\Big], \qquad (15.18)$$

где в согласии с (6.1) преобразуем только временную координату t, выражая ее через время пространства Минковского T, и оставляя пространственные координаты неизменными, т.е $x^1 = X^1$, $x^2 = X^2$, $x^3 = X^3$. В результате получим

$$F^*_{0k} = \sqrt{g_{00}}\tilde{F}_{0k}, \quad F^*_{kl} = \tilde{F}_{kl}, \qquad (15.19)$$

где g_{00} временная компонента метрического тензора в эталонных координатах (6.2).

С помощью тетрад (7.1) найдем тетрадные компоненты тензора поля в эталонных координатах

$$F^*_{(\alpha)(\beta)} = e^\mu_{(\alpha)}e^\nu_{(\beta)}F^*_{\mu\nu} = \frac{F^*_{\alpha\beta}}{\sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}\sqrt{|g_{\beta\beta}|}}. \qquad (15.20)$$

Считая тензор электромагнитного поля инвариантом соответствия, и отождествляя тетрадные компоненты тензора поля в эталонных координатах с аффинными компонентами в ИСО (2.4), получим с выражения для компонент напряженностей электромагнитного поля в цилиндрических координатах в виде:

$$E_x = \frac{Q}{r^2}\exp\Big\{-\frac{a_0r(1+\cos\theta)}{2c^2}\Big\}\Big[\cos\theta\Big(1 + \frac{a_0r}{2c^2}\Big) - \frac{a_0r}{2c^2}\Big], \qquad (15.21)$$

$$E_\rho = \frac{Q\rho}{r^3}\Big(1 + \frac{a_0r}{2c^2}\Big)\exp\Big\{-\frac{a_0r(1+\cos\theta)}{2c^2} - 1 + \sqrt{1 + \frac{{a_0}^2c^2}{T^2}}\Big\}, \qquad (15.22)$$

где ρ - полярный радиус , $\rho^2 = (x^2)^2 + (x^3)^2 = (y^2)^2 + (y^3)^2$. Величина $r^2 = \rho^2 + (y^1)^2$ может быть выражена через координаты ИСО с помощью закона движения (2.5) или (3.9) и соотношения (6.1) и имеет вид

$$r^2 = \rho^2 + \Big[x^1 + (c^2/a_0)(1 - \sqrt{1 + {a_0}^2T^2/c^2})\Big]^2,$$

$\cos\theta$ определяется из формулы $\cos\theta = y^1/r$, где y^1 определяется выражением в квадратных скобках в r^2. Вычисление магнитного поля приводит к соотношениям:

$$H_\phi = \sin(a_0t/c)E_\rho, \qquad H_\rho = H_x = 0, \qquad (15.23)$$

где t связано со временем ИСО T формулой (6.1). Приведем для сравнения результаты Борна [28], [34], переписанные в наших обозначениях.

$$\tilde{E}_\rho = 8Q\frac{c^4}{a_0^2}\frac{\rho(x^1+c^2/a_0)}{R^3}, \quad \tilde{H}_\rho = \tilde{H}_x = 0, \quad \tilde{H}_\phi = 8Q\frac{c^4}{a_0^2}\frac{\rho c T}{R^3},$$

$$\tilde{E}_x = -4Q\frac{c^4}{a_0^2}\frac{\rho^2-(x^1+c^2/a_0)^2+c^2T^2+c^4/(a_0)^2}{R^3}, \quad \tilde{E}_\phi = 0,$$

$$R = \sqrt{\Big[\rho^2+(x^1+c^2/a_0)^2-c^2T^2-c^4/{a_0}^2\Big]^2+4\rho^2c^4/{a_0}^2}. \qquad (15.24)$$

Проведем некоторый предварительный анализ полученного нами решения для поля точечного заряда в пространстве-времени постоянной кривизны и сравним его с решением Борна. Из решения, полученного нами, в частности следует, что отношение

$$\frac{H_\phi}{E_\rho} = \sin(a_0t/c) = \sqrt{\Big[1-\exp\Big(2(1-(1+\beta^2)^{1/2})\Big)\Big]}, \quad \beta = \frac{a_0T}{c}. \qquad (15.25)$$

Из решения Борна подобное отношение в согласии с (15.24) имеет вид

$$\frac{\tilde{H}_\phi}{\tilde{E}_\rho} = \frac{cT}{x^1+c^2/a_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y^1}{cT}+\frac{1}{\beta}\right)}} < 1. \qquad (15.26)$$

Из последнего соотношения следует, что $cT < x^1 = c^2/a_0$. Только при этом условии g_{00} компонента метрики Меллера положительна.

Анализ полученных результатов показывает , что для компонент напряженности электрического поля E_x и E_ρ разложение в ряд по степеням $(a_0^2T^2/c^2)$, (a_0y^1/c^2), (a_0r/c^2) приводит с учетом указанных членов к аналогичному разложению, полученному из решения М. Борна.

Вопрос об излучении заряда, движущегося равноускоренно, является дискуссионным. После выхода обзорной работы [27], в резюме которой автор посчитал "вечный вопрос "классической физики закрытым , появились работы [29 - 35], в которых дискуссия была продолжена. Например, в работе [34] наличие излучения в НСО связывается с возможностью g_{00} компоненте метрического тензора иметь отрицательное значение, что для метрики Меллера эквивалентно переходу в комплексную плоскость для пространственных переменных и времени. Переход от метрики Меллера к метрике Уйттекера не меняет сути дела, т.к. связь между двумя метриками определяется заменой лагранжевой координаты y^1 другой лагранжевой координатой z по формуле

$$y^1 = (c^2/a_0)((1+2a_0z/c^2)^{1/2}-1),$$

которая переводит метрику Меллера (2.12) в метрику Уйттекера.

$$dS^2 = \Big(1+\frac{2a_0z}{c^2}\Big)c^2(dT)^2 - \Big(1+\frac{2a_0z}{c^2}\Big)^{-1}(dz)^2-(dy^2)^2-(dy^3)^2. \qquad (15.24)$$

g_{00} компонента метрики (2.12) связывается с аналогичной компонентой метрики Уйттекера соотношением

$$(y^1a_0/c^2+1)^2 = (1+2a_0z/c^2)$$

и требование отрицательности g_{00} в метрике Уиттекера приводит к комплексности y^1 в метрике Меллера.

С другой стороны, как показано в [4], в метрике Меллера существует "горизонт т.е. такая НСО может быть реализована телами конечных размеров вдоль направления движения. Если в начальный момент тело покоилось, а потом стало двигаться равноускоренно как единое целое, то начальные размеры этого тела ограничены неравенством $-c^2/a_0 < y^1 < \infty$. Это неравенство в переменных Эйлера эквивалентно соотношению $(1 + a_0 x^1/c^2) > a_0 T/c$, определяющему допустимую область определения значений координат и времени в ИСО, занимаемую движущимся телом. Как показано в [34], при анализе решения Борна при справедливости последнего неравенства в фиксированный момент времени Т поля не образуют волновой зоны и, следовательно, излучение отсутствует. Именно эта точка зрения нашла отражение в известной книге В. Паули [36].

Требование [34] расширить пространство - время ИСО на область комплексных значений координат и времени приводит к образованию волновой зоны за "горизонтом физический смысл которой с нашей точки зрения весьма туманен. В работах [29 - 32], [35] рассматривается так называемый инвариантный критерий излучения, смысл которого сводится к разбиению электромагнитного поля движущегося заряда на "связанную"и "свободную"части. Полный тензор энергии - импульса электромагнитного поля, разложенный на части, удовлетворяет в целом и по отдельности законам сохранения. Опираясь на определение [33], вводится НСО, следующая за полем, для наблюдателей в которой вектор Пойнтинга во всех точках равен нулю. Однако, исходя из принятого разложения поля на связанную и излученные части, обращение в нуль вектора Пойнтинга не означает с точки зрения такой идеологии отсутствия излучения в данной НСО. В таких НСО поток энергии связанного поля как бы полностью компенсирует поток энергии излучения. На наш взгляд такое деление на связанное поле и поле излучения несколько искусственно. Суммарный ноль всегда можно разделить на две или большее число ненулевых частей, и вопрос излучает или нет заряд, совершающий гиперболическое движение, остается открытым.

На наш взгляд причина возникновения парадокса состоит в следующем :

Частное решение уравнений Максвелла в форме запаздывающих потенциалов или решение для потенциалов Лиенара - Вихерта в случае точечного заряда уже по своей структуре предполагает наличие излучения в системе. Т.е. из решения Лиенара - Вихерта можно сделать заключение: "Излучающий заряд движется ускоренно."Обратное утверждение :"Заряд , движущийся ускоренно, - излучает на наш взгляд не всегда справедливо. Поиск частного решения зависит не не только от вида уравнения, но и от физической ситуации. Например, решая уравнения Максвелла вне уединенного покоящегося точечного заряда мы выбираем статическое решение вместо волнового.

Рассмотрим второй пример. В постоянном поле тяжести (в ньютоновской теории) на нити висит покоящийся заряд. Другой такой же заряд подвешен в ракете , летящей с ускорением равным земному вдали от гравитирующих тел. Силы натяжения нити в этих случаях одинаковы. Т.к. физические ситуации в каждой из этих систем эквивалентны, то должны быть эквивалентны и решения уравнений Максвелла. Но решения в первой системе, очевидно, - статические, следовательно, должны быть статическими и решения во второй системе. Вторая система - есть равноускоренная НСО. Таким образом, в вопросе о поле заряда, совершающего гиперболическое движение, мы разделяем точку зрения М. Борна, В. Паули и В. Гинзбурга, что заряд движущийся гиперболически достаточно долго не излучает и "напротив, если два прямолинейных равномерных движения переводятся одно в другое с помощью гиперболического движения , то излучение имеет место"[36], [27].

Нами предлагается следующий критерий отсутствия излучения движущимся зарядом (или системой зарядов).

Если заряд (или система зарядов) вморожен в движущееся жесткое в смысле Борна тело и если для наблюдателя в этой НСО уравнения Максвелла допускают стационарное решение для полей, создаваемых этим зарядом (системой зарядов), то такой заряд (система зарядов) не излучает.

Сформулированное нами условие отсутствия излучения эквивалентно постоянству электромагнитного поля (т.е. его независимости от времени НСО) именно по отношению к лагранжевой жесткой сопутствующей НСО, когда мировая линия заряда (или конгруенция мировых линий системы зарядов) принадлежат конгруенции мировых линий частиц базиса НСО. Наше определение постоянства тензорного поля и связанного с ним условия отсутствия излучения отличается от аналогичного определения работы [37] (где под постоянством поля понимается существование допустимой системы координат, в которой компоненты поля не зависят от временной координаты в некоторой области пространства - времени)

дополнительным требованием жесткости допустимых систем отсчета.

Аналитический критерий отсутствия излучения можно получить из рассмотренного автором выше в разделе 14 критерия стационарности, который определяется формулами (14.6) или обращением в нуль обобщенной силы радиационного трения (14.8).

Для одного заряда, движущегося поступательно, $\Omega_{\mu\nu} = 0$ и обобщенная сила g^μ совпадает с обычной силой торможения излучением [7] . Если электромагнитное поле в НСО стационарно, то выполняется условие (14.7) и $g^\mu = 0$, что в согласии с Паули [36] означает отсутствие излучения.

Условию отсутствия излучения (14.6) удовлетворяет исследованное выше решение Борна , если заряд , совершающий гиперболическое движение , вморожен в НСО Меллера (2.12), а движение базиса Меллера рассматривается в эйлеровых координатах ИСО. Если же мировая линия рассматриваемого заряда принадлежит конгруенции мировых линий частиц базиса системы Логунова (2.7), (2.8), то уравнения Максвелла в такой системе не допускают стационарного решения , т.к. эта система не является релятивистски жесткой. Заметим, однако, что из этого факта нельзя сказать, что равноускоренный заряд, в системе Логунова излучает! Просто в нежестких системах не применим критерий стационарности. Если к мировой линии равноускоренного заряда из системы Логунова, "примыслить"мировые линии незаряженных частиц из системы Меллера, то заряд с точки зрения нашего критерия не излучает. Или другой пример. К заряду, прикрепленному к стенке, присоединяется резиновый жгут, другой конец которого, движется произвольным образом. Ясно, что в СО, связанной со жгутом, уравнения Максвелла для рассматриваемого заряда имеют нестационарные решения, однако, ни о каком излучении не может быть и речи.

Заряд, вмороженный в равноускоренную НСО (2.18), также не излучает, что следует из формул (3.7), (3.13) и вытекающих из них соотношений $F_0 = (a_0/c^2)\tan(a_0t/c)$,

$F_1 = -a_0/c^2$, подстановка которых в (14.6) обращает последнее в тождество. Таким образом, найденное нами решение (15.21-15.23) в римановом пространстве - времени, является аналогом решения Борна в пространстве Минковского. В отличие от решения Борна, найденное нами решение не имеет "горизонта за которым образуется волновая зона [34], поэтому излучение отсутствует во всей области пространства - времени ИСО.

Можно проверить, что критериям (14.6), (14.7) помимо гиперболического движения удовлетворяет и равномерно вращающийся диск , радиус которого $r < c/\Omega$, где Ω - угловая скорость. Как показано в [34] , во вращающейся системе отсчета, определяемой обычным образом [7], заряд не излучает, если $g_{00} = 1 - \Omega^2 r^2/c^2 > 0$ и излучает при $g_{00} < 0$.

В работе [18] автором построена релятивистская жесткая равномерно вращающаяся система отсчета, реализуемая в римановом пространстве - времени. Результаты работы изложены в разделе 8. Полученное решение справедливо на любом расстоянии r от оси вращения и компонента g_{00} метрического тензора всегда положительна. Вычисляемая в такой системе обобщенная сила радиационного трения (14.8) обращается в нуль для всех точек диска, что в соответствии с принятым критерием означает отсутствие излучения для вмороженных в диск системы зарядов или одного заряда, находящегося на любом расстоянии от центра диска.

16. Распространение электромагнитных полей в пространстве постоянной кривизны, эффект Допплера.

Рассмотрим распространение волн в равноускоренной НСО (2.18) на основе уравнений Максвелла , записанных в трехмерной форме , как и для случая статического гравитационного поля [7] вне источников

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial \xi}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial \xi},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0,$$

$$\vec{D} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{h}}, \qquad \vec{B} = \frac{\vec{H}}{\sqrt{h}}, \qquad h = g_{00}. \tag{16.1}$$

Подействовав оператором $\vec{\nabla}$ на векторные уравнения, получим

$$\frac{1}{c^2 h}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \xi^2} - \nabla^2 \vec{E} - \sqrt{h}\Big[\vec{\nabla}\Big(\frac{1}{\sqrt{h}}\Big) \times \Big[\vec{\nabla} \times \vec{E}\Big]\Big] + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{E}}{\sqrt{h}} \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{\sqrt{h}}. \tag{16.2}$$

$$\frac{1}{c^2 h}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial \xi^2} - \nabla^2 \vec{H} - \sqrt{h}\Big[\vec{\nabla}\Big(\frac{1}{\sqrt{h}}\Big) \times \Big[\vec{\nabla} \times \vec{H}\Big]\Big] + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\frac{\vec{H}}{\sqrt{h}} \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{\sqrt{h}}. \tag{16.3}$$

Уравнение для $\vec{H}$ оказалось точно таким же как и для $\vec{E}$. Рассмотрим некоторые частные решения уравнений (16.2), (16.3). Будем искать решения в виде TEM - волн, направив $\vec{E}$ вдоль оси y^2 с с единичным вектором $\vec{i}_2$, $\vec{H}$ вдоль оси y^3 с с единичным вектором $\vec{i}_3$ и считая, что оба вектора зависят только от временной координаты и от одной пространственной y^1 с единичным вектором $\vec{i}_1$, коллинеарным ускорению.

Опуская промежуточные вычисления, находим для волн, распространяющихся в направлениях коллинеарных ускорению , уравнения

$$\frac{1}{c^2 h}\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{a_0}{c^2}\frac{\partial E}{\partial x} = 0. \tag{16.4}$$

$$\frac{1}{c^2 h}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{a_0}{c^2}\frac{\partial H}{\partial x} = 0. \tag{16.5}$$

Здесь $x = y^1$, $y^0/c = \xi$, $E_1 = E_3 = 0$, $E_2 = E(x,t)$, $H_1 = H_2 = 0$, $H_3 = H$. Для решения (16.4) рассмотрим предварительное выражение

$$h\Big(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{a_0}{c^2}\frac{\partial E}{\partial x}\Big). \tag{16.6}$$

Введем новую функцию $p = p(x)$ Тогда выражение (16.6) можно представить в виде

$$e^{2ax}\Big[\frac{\partial^2 E}{\partial p^2}\Big(\frac{dp}{dx}\Big)^2 + \frac{\partial E}{\partial p}\Big(a\frac{dp}{dx} + \frac{d^2 p}{dx^2}\Big)\Big]. \tag{16.7}$$

Полагая выражение в круглых скобках (16.7) равным нулю, получаем уравнение

$$a\frac{dp}{dx} + \frac{d^2 p}{dx^2} = 0,$$

решение которого

$$\frac{dp}{dx} = \alpha e^{-ax}, \quad p = \frac{\alpha}{a}\Big(1 - e^{-ax}\Big), \quad \alpha = const.$$

Таким образом, выражение (16.7) представимо в виде

$$e^{2ax}\Big[\frac{\partial^2 E}{\partial p^2}\Big(\frac{dp}{dx}\Big)^2 + \frac{\partial E}{\partial p}\Big(a\frac{dp}{dx} + \frac{d^2 p}{dx^2}\Big)\Big] = \alpha^2\frac{\partial^2 E}{\partial p^2}. \tag{16.8}$$

Из требования, чтобы при малых x выполнялось равенство $p = x$, получим $\alpha = 1$, а уравнение (16.4) эквивалентно

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial p^2} = 0, \tag{16.9}$$

т.е. обычному волновому уравнению. В согласии с рассмотренным, решение (16.4) имеет вид

$$E = E_1\Big(\xi + \frac{c}{a_0}\Big(\exp\Big(-\frac{a_0 x}{c^2}\Big) - 1\Big)\Big)$$
$$+E_2\Big(\xi - \frac{c}{a_0}\Big(\exp\Big(-\frac{a_0 x}{c^2}\Big) - 1\Big)\Big) \tag{16.10}$$

где E_1 и E_2 произвольные функции. Решение для магнитного поля H получается аналогичным (16.10). Фазовая скорость v из найденного решения, получаемая дифференцированием по ξ постоянной фазы в $_1$, дает $v = /(\epsilon\mu)^{1/2}$, где $\epsilon = \mu = 1/(g_{00})^{1/2} = \exp(-a_0 x/c^2)$.

Таким образом, как и в статическом гравитационном поле [7], можно сказать, что в отношении своего воздействия на электромагнитное поле силы инерции как бы изменяют диэлектрическую и магнитную проницаемость среды, в которой волны распространяются. Правда, такое сходство является чисто внешним, т.к. для волн, распространяющихся вдоль направления ускорения $_1$ при $x > 0$, $\epsilon = \mu < 1$ и фазовая скорость с ростом x возрастает, оставаясь по величине всегда больше скорости света в вакууме . Для волны $_2$ при $x < 0$, распространяющейся в обратную сторону, $\epsilon = \mu > 1$ и фазовая скорость убывает по мере удаления от источника , оставаясь по величине всегда меньше скорости света в вакууме . Из классических представлений на основе галилеевого сложения скоростей следовало бы ожидать обратного результата , поэтому фазовая скорость , определяемая как производная от координаты по мировому времени, не является "физической ". То же самое значение фазовой скорости можно получить и приравниваем нулю интервала (2.18) при фиксированных значениях y^2 и y^3, что контролирует проделанные вычисления.

Физическим значением фазовой скорости будет ее значение, измеренное в тетрадах (8.1) метрики (2.18) НСО, определяемое равенством

$$v = \frac{cdy^1}{(g_{00})^{1/2} dy^0},$$

которое приводит к величинам $v_1 =$ для $_1$ и $v_2 = -$ для $_2$.

Приравнивая нулю интервал (6.2), или преобразуя фазу в полученном решении из НСО к эталонным координатам квази - ИСО, находим двумя способами одинаковый результат для фазовой скорости распространения электромагнитной волны относительно квази - ИСО в координатах и времени пространства Минковского.

$$v = \frac{dx^1}{dT} = \frac{c\beta}{(1+\beta^2)^{1/2}\Big(1 - \exp(2 - 2(1+\beta^2)^{1/2})\Big)^{1/2}}, \tag{16.11}$$

где $\beta = _0/$.

Тетрадные компоненты фазовой скорости относительно квази - ИСО, имеющие непосредственно физический смысл, получаются из (16.11) с использованием метрики (6.2) и тетрад (8.1)

$$v^{(1)} = c\frac{e^{(1)}_\mu dx^\mu}{e^{(0)}_\nu} = c\frac{|g_{11}|^{1/2} dx^1}{|g_{00}|^{1/2} dx^0} = c. \tag{16.12}$$

Таким образом , из волнового решения уравнения Максвелла в НСО следует, что фазовая скорость распространения электромагнитной волны, измеряемая в тетрадах (8.1) метрики (2.18) НСО или метрики (6.2) квази - ИСО, оказалась постоянной и равной скорости света в вакууме. Анализ формулы (16.11) показывает, что фазовая скорость распространения волны в координатах и времени пространства Минковского не превосходит скорости света в вакууме, при $= 0$ и $\to \infty$ скорость $v \to$, а при $\beta = 3/2$ фазовая скорость минимальна и равна 0.931.

На основе полученного решения (16.10) произведем расчет продольного эффекта Доплера, когда источник плоских монохроматических электромагнитных волн находится на ускоренном объекте в начале лагражевой системы координат, а в момент времени $=0$ лагранжевы координаты совпадали с эйлеровыми. Выражение для эйконала ψ_1 и ψ_2 плоских волн из (16.10) в НСО (2.18) имеет вид

$$\psi_1 = -\omega_0\Big(y^0/c + \frac{c}{a_0}\Big(\exp\Big(-\frac{a_0 x}{c^2}\Big) - 1\Big)\Big), \tag{16.13}$$

$$\psi_2 = -\omega_0\Big(y^0/c - \frac{c}{a_0}\Big(\exp\Big(-\frac{a_0 x}{c^2}\Big) - 1\Big)\Big), \tag{16.14}$$

а в квази - ИСО (3.7) описывается формулами

$$\psi_1 = -\frac{\omega_0 c}{a_0}\Big(\tan(a_0 t/c) + \frac{\exp\Big(-\frac{a_0 x}{c^2}\Big)}{\cos(a_0 t/c)} - 1\Big), \tag{16.15}$$

$$\psi_2 = -\frac{\omega_0 c}{a_0}\Big(\tan(a_0 t/c) - \frac{\exp\Big(-\frac{a_0 x}{c^2}\Big)}{\cos(a_0 t/c)} + 1\Big), \tag{16.16}$$

где ω_0 - круговая частота.

Волновой 4 - вектор $_\mu$, определяемый как 4 - градиент от эйконала, является инвариантом соответствия и для него тетрадные компоненты в квази - ИСО (6.2) совпадают с тетрадными (которые являются одновременно и аффинными) компонентами ИСО (2.4). При этом (2.4) и (6.2) заданы в общей координации . Используя формулы (6.2), (8.1), (16.15), (16.16) и (3.10), находим выражение для частоты ω_1 в ИСО (2.4) для продольного эффекта Допплера , когда источник приближается к приемнику

$$\omega_1 = K'_{(0)} c = \omega_0 \exp(-a_0 y^1/c^2)\frac{(1+v/c)^{1/2}}{(1-v/c)^{1/2}} \tag{16.17}$$

где v - скорость передатчика, определяемая из (3.10).

Если источник удаляется от приемника, то воспринимаемая частота имеет вид

$$\omega_2 = K''_{(0)} c = \omega_0 \exp(-a_0 y^1/c^2)\frac{(1-v/c)^{1/2}}{(1+v/c)^{1/2}} \tag{16.18}$$

В соотношении (16.17) $y^1 > 0$, а в (16.18) $y < 0$. Анализ формул (16.17) и (16.18) показывает что изменение частоты зависит от двух факторов: от потенциала сил инерции, характеризуемого множителем $1/(g_{00})^{1/2} = \exp(-a_0 y^1/c^2)$, и от скорости источника относительно приемника, что в точности соответствует эффекту Допплера в СТО [7]. Первый множитель уменьшает частоту, когда источник приближается к приемнику (красное смещение), и увеличивает, когда источник удаляется от приемника (фиолетовое смещение). Физика этого явления весьма прозрачна и базируется на принципе эквивалентности. Формулы (16.17) и (16.18) можно переписать в эйлеровых координатах пространства Минковского в виде

$$\omega_1 = \omega_0 \exp(-a_0 x^1/c^2)\frac{1}{1-v/c} \tag{16.19}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \exp(-a_0 x^1/c^2) \frac{1}{1+v/c} \qquad (16.20)$$

где зависимость скорости v источника (3.10) от времени пространства Минковского определяется из (6.3).

Для сравнения результатов приведем выражения для эффекта Доплера, полученного из решения волновых уравнений Максвелла в НСО Меллера (2.12) (отметим во избежание недоразумений, что в (2.12) - не время пространства Минковского, а параметр, нумерующий ортогональные мировым линиям гиперповерхности). Решение задачи приводит к результату

$$\tilde{\omega}_1 = K'_{(0)} c = \omega_0 \frac{1}{1+a_0 y^1/c^2} \frac{(1+v/c)^{1/2}}{(1-v/c)^{1/2}} \qquad (16.21)$$

$$\tilde{\omega}_2 = K''_{(0)} c = \omega_0 \frac{1}{1+a_0 y^1/c^2} \frac{(1-v/c)^{1/2}}{(1+v/c)^{1/2}} \qquad (16.22)$$

или, переходя к переменным Эйлера , получаем

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_0 \frac{1}{1 - a_0 T/c + a_0 x^1/c^2} \qquad (16.23)$$

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_0 \frac{1}{1 + a_0 T/c + a_0 y^1/c^2} \qquad (16.24)$$

где $\tilde{\omega}_1$ - частота, воспринимаемая приемником в точке x^1 в момент времени в галилеевых координатах пространства Минковского, для источника приближающегося к точке наблюдения, а $\tilde{\omega}_2$ - соответствующая величина для источника, удаляющегося от точки наблюдения. Ввиду наличия "горизонта "метрики Меллера, формулы (16.23) и (16.24) применимы при условии $(1 + a_0 x^1/c^2) > a_0 T/c = \beta$.

Найдем отношение частот $\kappa = \omega_2/\tilde{\omega}_2$ в зависимости от времени для случая, когда приемник имеет координату $x^1 = 0$, а источник удаляется от приемника. Как показывает расчет, при β, изменяющегося от 0 до 1, (когда справедлива формула (16.24)) κ нарастает от 1 до значения 1.143. Скорость источника при этом меняется с точки зрения наблюдателя пространства Минковского от 0 до $0.707c$, а для наблюдателя в НСО, использующего эталонные координаты квази - ИСО , скорость источника изменяется от 0 до 0.7505 . Таким образом, при $v = 0.707$ формулы (16.20) и (16.24) приводят к значению частот, отличающихся друг от друга на 14% . Из (16.20) следует, что минимальная частота , воспринимаемая приемником , когда скорость источника стремится к скорости света, равна половине частоты генератора, в то время как при классическом эффекте Доплера в СТО этому случаю соответствует нулевая воспринимаемая частота. Объяснение этого явления связано с возрастанием частоты (фиолетовое смещение) за счет поля сил инерции , которое частично компенсирует уменьшение частоты (красное смещение), за счет возрастания скорости источника.

Найдем преобразование электромагнитного поля монохроматической плоской волны из НСО (2.18) пространства Римана в ИСО (2.4) пространства Минковского в соответствии с правилами перехода, рассмотренными в предыдущем разделе.

Пусть электрическое поле волны, распространяющейся в направлении ускорения в НСО (2.18) (вдоль оси y^1) , имеет амплитуду E_0 и направлено вдоль оси y^2, а магнитное поле направлено вдоль y^3 и имеет амплитуду $H_0 = E_0$. Для волны, бегущей от источника в противоположном направлении, электрическое поле сохраняет направление , а магнитное меняет знак на обратный. Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ имеет отличные от нуля компоненты F_{02} и F_{12}. В согласии с определением [7] для статических гравитационных полей находим компоненты тензора поля в виде

$$F_{02} = E_0 \sin(-\psi_1) + E_0 \sin(-\psi_2), \tag{16.25}$$

$$F_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\Big(-H_0 \sin(-\psi_1) + H_0 \sin(-\psi_2)\Big), \tag{16.26}$$

где фазы в аргументах задаются формулами (16.13), (16.14). Переход к квази - ИСО (3.7) производится обычным образом в согласии с соотношениями

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}F_{\mu\nu},$$

в которых зависимость $y^\mu(x^\alpha)$ дается законом движения (3.5), (3.6). Далее с помощью преобразования временной координаты (6.3) преобразуем тензор $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ к квази - ИСО (6.2) в эталонных координатах , а затем с помощью тетрад (8.1) получаем физические компоненты тензора поля в эталонной квази - ИСО , которые в согласии с предлагаемой схемой совпадают с компонентами тензора поля в галилеевых координатах ИСО пространства Минковского. Опуская промежуточные вычисления, получаем окончательно

$$E = E_0((\omega_1/\omega_0)\sin(-\psi_1) + (\omega_2/\omega_0)\sin(-\psi_2)), \tag{16.27}$$

$$H = H_0((\omega_1/\omega_0)\sin(-\psi_1) - (\omega_2/\omega_0)\sin(-\psi_2)), \tag{16.28}$$

где ψ_1, ψ_2 определяются из (16.15), (16.16), а ω_1 и ω_2 из соотношений (16.19) и (16.20).

Для сравнения приведем решение этой же задачи в НСО Меллера , преобразованное к ИСО пространства Минковского. Опуская выкладки, приводим результат

$$\tilde{E} = E_0((\tilde{\omega}_1/\omega_0)\sin(-\tilde{\psi}_1) + (\tilde{\omega}_2/\omega_0)\sin(-\tilde{\psi}_2)), \tag{16.29}$$

$$\tilde{H} = H_0((\tilde{\omega}_1/\omega_0)\sin(-\tilde{\psi}_1) - (\tilde{\omega}_2/\omega_0)\sin(-\tilde{\psi}_2)), \tag{16.30}$$

где $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$ определяется из (16.23), (16.24), а фазы $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$ задаются формулами

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{\omega c}{a_0}\ln{(1 + a_0 x^1/c^2 - a_0 T/c)}, \tag{16.31}$$

$$\tilde{\psi}_2 = \frac{\omega c}{a_0}\ln{(1 - a_0 x^1/c^2 - a_0 T/c)}. \tag{16.32}$$

Сравнение показывает , что решение задачи разными способами о распространении плоских электромагнитных волн в НСО и их приеме в ИСО приводит к отличным друг от друга результатам и только эксперимент может выяснить какой из способов расчета окажется справедливым.

Глава 4

ПОЛЯ В СВЯЗАННЫХ СТРУКТУРАХ

В этой главе рассматривается новое направление исследования силовых полей, основанное на постулате эквивалентных ситуаций. В результате показано, что искривление пространства-времени - это не привилегия только гравитационного поля.

17. Электростатическое поле связанных зарядов, поле заряженной пластины

Математический аппарат НСО , можно использовать в задачах, которые на первый взгляд не имеют никакого отношения к системам отсчета, однако в действительности эти задачи оказываются тесно связанными. К таким задачам относятся, например, расчеты электростатических полей связанных (несвободных) зарядов.

В классической электродинамике принято считать, что если точечный заряд покоится в некоторой ИСО, то его электрическое поле является кулоновым вне зависимости от того является ли этот заряд свободным или сумма сил, действующих на заряд, равна нулю. Например, поле свободного точечного заряда и поле точечного заряда, подвешенного на нити над заряженной плоскостью, в плоском пространстве - времени считаются одинаковыми и изотропными. С другой стороны , для равноускоренного заряда электрическое поле в сопутствующей НСО не является изотропным, как не является изотропным и поле заряда подвешенного на нити в поле тяжести. Поэтому возникает естественный вопрос: почему поле заряда Q, подвешенного на нити в электрическом поле, изотропно, а поле этого заряда, находящегося в эквивалентных условиях в НСО или поле тяжести, - неизотропно?

На первый взгляд ответ ответ кажется очевидным. Поле сил тяжести и сил инерции имеют близкую природу и эти поля взаимодействуют как с заряженными, так и нейтральными частицами и их полями. По этой причине поле точечного электрического заряда, закрепленного в ньютоновом гравитационном поле или в НСО перестает быть сферически симметричным. В силу линейности уравнений Максвелла внешнее электрическое поле, в котором закрепляется точечный заряд, не взаимодействует с полем этого заряда, поэтому симметрия поля точечного заряда должна сохраняться. В этом ответе есть маленькая некорректность, которая противоречит экспериментальным данным при рассеянии "света на свете"[83]. Данная проблема возникла в связи с открытием позитрона и образования пар, т.е. одновременного возникновения электрона и позитрона под действием жестких γ - лучей. Линейные уравнения Максвелла в принципе не могли привести к такому рассеянию, что непосредственно следует из принципа суперпозиции полей. Две волны должны были проникнуть одна через другую. Поэтому эксперимент требует некоторого изменения уравнений Максвелла в сторону их нелинейности. По этой причине должно быть взаимодействие электрических полей, собственного поля закрепленного в электрическом поле заряда с внешним полем. Это должно привести к отсутствию сферической симметрии закрепленного во внешнем поле точечного заряда.

С нашей точки зрения поле точечного заряда, подвешенного на нити, эквивалентно полю этого заряда в сопутствующей НСО (2.18), движущейся с ускорением a_0, направленным параллельно силе натяжения нити $\vec{T}$, действующей на заряд. Иными словами мы полагаем, что поле точечного заряда привязанного на нити к одноименно заряженной плоскости, будет таким же, если эту плоскость разрядить и двигать ускоренно, сохраняя прежней значение силы натяжения нити. В обоих случаях физическая ситуация для заряда в системах отсчета, связанных с плоскостью, будет очевидно одинаковой, что и должно приводить к тождественности полей.

Ввиду важности рассматриваемых далее вопросов проведем следующий мысленный эксперимент.

Пусть подвешенный на нити точечный заряд находится между обкладками плоского конденсатора. Пусть конденсатор помещен в космический корабль, движущийся равноускоренно. Плоскости обкладок перпендикулярны ускорению. Точка закрепления нити расположена на верхней обкладке. Пусть в начальный момент времени конденсатор не заряжен, а натяжение нити обусловлено реактивной силой двигателя корабля. Ясно, что по отношению к кораблю потенциал точечного заряда определяется соотношением (15.8). Пусть ракета начинает постепенное уменьшение ускорения, а конденсатор начинает заряжаться по такому закону, чтобы сохранить натяжение нити неизменным. Тогда физическая ситуация для заряда остается неизменной. Следовательно, должно оставаться неизменным по отношению к кораблю и поле заряда (15.8). В конечном итоге ракета будет двигаться равномерно, а конденсатор зарядится до определенного напряжения, такого, чтобы натяжение нити оставалось таким же, как и до торможения. Так как характер симметрии поля точечного заряда определяется натяжением нити, то нам удалось "обмануть"заряд, подменив действие поля сил инерции в НСО, действием электростатического поля на заряд со стороны конденсатора в ИСО. Так как заряд точечный, то дополнительный дипольный момент, наведенный электростатическим полем, пропорциональный кубу радиуса и напряженности поля конденсатора стремится к нулю.

На основании сказанного сформулируем

Постулат эквивалентных ситуаций

Поле точечного заряда, находящегося в равновесии в постоянном электрическом поле, эквивалентно полю от этого заряда в равноускоренной НСО, если силы реакции связей, ускоряющие заряд и удерживающие заряд в поле неподвижным, равны.

Физический смысл постулата состоит в том, что внешнее поле действует не только на заряд (источник поля), но также и на его ближайшее окружение, т.е. поле заряда. Это приводит к нелинейности уравнений Максвелла в малой области вокруг пробного заряда, что и подтверждается экспериментом при рождении пары электрон – позитрон. Так как связь препятствует заряду двигаться, то окружающее этот заряд его собственное поле деформируется, что должно привести (далее будет показано, что это так и есть) к возрастанию "физической"напряженности собственного поля заряда в направлении обратном силе реакции.

Уравнение для скалярного потенциала A_0 точечного заряда, вмороженного в в начало координат НСО (2.18), получено в (15.4), а его решение приведено в (15.8), (15.9), (15.10). Формулы (15.4), (15.8-15.10) являются ключевыми для расчета электростатических полей связанных зарядов.

В качестве примера вычислим поле, создаваемое заряженной бесконечной металлической пластиной толщины h и определим геометрию пространства– времени для пробных зарядов q, подвешенных на нитях в поле пластины и неподвижных относительно ее. Очевидно, что по обе стороны пластины плотность заряда будет постоянной и равной некоторой величине σ. На каждый из зарядов на поверхности пластины будет действовать сила со стороны создаваемого пластиной поля, направленная по внешним нормалям к пластине. С другой стороны со стороны решетки металла на заряды будет действовать сила, препятствующая зарядам покинуть поверхность пластины. Эти силы эквивалентны действию "нитей"стремящихся удержать заряды на поверхностях пластины. Таким образом, поле от рассматриваемой системы эквивалентно полю системы зарядов "движущихся"равноускоренно с ускорениями направленными внутрь пластины. Т.е. "ускорения"зарядов на разных сторонах пластины направлены навстречу друг другу. Т.к. в метрике (2.18) пространственное сечение является плоским, то вклад в скалярный потенциал A_0 от всей пластины можно вычислить, путем интегрирования вклада от элементарных зарядов dQ каждой из сторон пластины в плоском пространстве (но в римановом пространстве- времени). Совместим начало координат с центром пластины, направив ось y^1 перпендикулярно пластине в сторону верхней поверхности. Разобъем плоскости пластины на элементарные концентрические кольца и рассмотрим одно из колец с внутренним радиусом ρ и внешним $\rho + d\rho$. Внутри элементарного кольца расположен элементарный заряд $dQ = 2\pi\rho d\rho\sigma$ с поверхностной плотностью заряда от одной стороны пластины σ. Найдем вклад в потенциал от верхней плоскости в точке с координатой $y^1 + h/2$ от центра пластины

Выполнив простое интегрирование с помощью (15.8), находим вклад в скалярный потенциал от верхней плоскости пластины в верхнем полупространстве A'_0

$$A'_0 = \frac{4\pi\sigma c^2}{a_0}\exp\Big\{-\frac{a_0(y^1 - h/2)}{c^2}\Big\}.$$

Вклад от нижней плоскости в скалярный потенциал A''_0 равен

$$A''_0 = \frac{4\pi\sigma c^2}{a_0}$$

Вклад от обеих плоскостей в потенциал внутри пластины равен $\tilde{A}_0$

$$\tilde{A}_0 = \frac{8\pi\sigma c^2}{a_0}$$

Суммарный потенциал в верхнем полупространстве определим как разность потенциалов $A_0 = A'_0 + A''_0 - \tilde{A}_0$.

$$A_0 = -\frac{4\pi\sigma c^2}{a_0}\Big[1 - \exp\Big\{-\frac{a_0(y^1 - h/2)}{c^2}\Big\}\Big]. \tag{17.1}$$

При выводе последней формулы учли, что метрика в нижнем полупространстве определяется из (2.18), а в верхнем полупространстве $a_0 \to -a_0$. Полагая $h \to 0$, находим потенциал в верхнем полупространстве от заряженной плоскости, считая при этом под плотностью заряда плоскости величину $\sigma_0 = 2\sigma$.

$$A_0 = -\frac{2\pi\sigma_0 c^2}{a_0}\Big[1 - \exp\Big\{-\frac{a_0 y^1}{c^2}\Big\}\Big]. \tag{17.2}$$

Значение напряженности поля заряженной плоскости можно найти из выражения для тензора электромагнитного, что дает

$$E_1 = F_{01} = -\frac{\partial A_0}{\partial y^1} = 2\pi\sigma_0 \exp\left\{-\frac{a_0 y^1}{c^2}\right\}. \tag{17.3}$$

Анализируя (17.3), можно убедиться, что при малых $a_0 y^1/c^2$ найденное выражение совпадает с обычным.

Определим метрику пространства–времени, выбрав в качестве базиса НСО невзаимодействующую заряженную пыль над одноименно заряженной плоскостью. Пусть каждая из частиц связана с заряженной плоскостью невесомой и нерастяжимой нитью. Заряженная пыль в данной модельной задаче задает базис системы отсчета, структура которого определяется совместным решением уравнений "движения"и уравнений Максвелла, решение которого дается формулой (17.3). Очевидно, что частицы пыли будут взаимно неподвижны, так что тензор скоростей деформаций и тензор угловой скорости вращения равен нулю, а натяжения нитей отличны от нуля. Примем, что плоскость бесконечна, плотность заряда на ней постоянна, а отношения зарядов к массам для всех частиц базиса одинаковы. По определению считаем, что пыль поля не создает, а поле определяется только зарядами плоскости в согласии с (17.3). Очевидно, что физическая ситуация для частиц пыли в верхнем полупространстве эквивалентна ситуации в некоторой НСО "движущейся"вниз в направлении плоскости, что математически описывается метрикой (2.18) с отрицательным знаком в экспоненте, т.е. заменой $a_0 \to -a$. Величины a_0 и a требуется вычислить и подтвердить справедливость метрики (2.18).

Элемент интервала, исходя из симметрии задачи, будем искать в более общем виде, чем (2.18).

$$ds^2 = \exp(\nu(y^1)) dy^{0^2} - \exp(\lambda(y^1)) dy^{1^2} - dy^{2^2} - dy^{3^2}, \tag{17.4}$$

где функции $\nu(y^1)$ и $\lambda(y^1)$ требуется определить. Для их нахождения воспользуемся решением уравнений Максвелла в трехмерной форме, совпадающей по виду с уравнениями Максвелла в заданном гравитационном поле [7]. Решение уравнения вне плоскости для вектора индукции D^1 имеет вид $D^1 = \mathrm{const}\exp(-\lambda/2)$. Воспользуясь соотношениями

$$D^1 = -\sqrt{g_{00}} F^{01}, \qquad E_1 = F_{01},$$
$$D_1 = \frac{E_1}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad \vec{D} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{g_{00}}}.$$

вытекающими из [7], а также формулой (17.3), находим

$$\frac{\nu + \lambda}{2} = -\frac{a_0 y^1}{c^2}. \tag{17.5}$$

Второе уравнение, связывающее функции ν и λ определим из уравнения "движения"

$$F^1 = -\frac{q}{m_0 c^2} F^{10} V_0, \tag{17.6}$$

где $V_0 = \exp(\nu/2)$ - нулевая компонента 4 – скорости частицы базиса массы m_0 с зарядом q в лагранжевой сопутствующей НСО. Знак минус в (17.6) означает, что вектор первой кривизны частицы базиса F^1 определяется только натяжением нити, действующей в противоположную сторону, чем сила со стороны поля. При этом, сила натяжения нити по величине совпадает с силой действия со стороны поля. С другой стороны, F^1 можно найти непосредственно из вида метрики (17.4), как единственную отличную от нуля компоненту 4–ускорения в лагранжевой сопутствующей НСО. Это приводит к соотношению

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial y^1} = -\frac{E_0 q}{m_0 c^2}\exp(\lambda/2), \tag{17.7}$$

где $E_0 = 2\pi\sigma_0$. Решение системы (17.5), (17.7) при условии, что при $y^1 = 0$ $\nu = 0$ имеет вид

$$\exp(\nu/2) = 1 - \frac{E_0 q}{m_0 a_0}\Big(1 - \exp\Big(-\frac{a_0 y^1}{c^2}\Big)\Big),$$
$$\exp(\lambda/2) = \exp\Big(-\frac{\nu}{2} - \frac{a_0 y^1}{c^2}\Big). \tag{17.8}$$

Метрика (17.4) допускает очевидное упрощение, если вместо координаты y^1 ввести другую лагранжеву координату по формуле

$$\tilde{y}^1 = \int_0^{y^1} \exp(\lambda/2)\, dy^1$$

В результате получаем

$$dS^2 = \exp\Big(-\frac{2E_0 q\tilde{y}^1}{m_0 c^2}\Big)dy^{0 2} - \tilde{y^1}^2 - dy^{2 2} - dy^{3 2}. \tag{17.9}$$

Из (17.9) видно, что эта формула аналогична (2.18) с отрицательным ускорением $a = -E_0 q/m$, направленным к плоскости, если заряд плоскости и пробный заряд q одного знака и положительным ускорением при разноименных зарядах. Пространство–время будет плоским, если пробная частица нейтральна. Таким образом, в отличие от ОТО метрика зависит не только от напряженности поля заряда, создающего поле, но также и от величины и знака пробного заряда в поле. Это связано с тем очевидным обстоятельством, что в теории тяготения между телами действует только сила взаимного притяжения (в ньютоновском смысле) и все пробные тела вне зависимости от массы в гравитационном поле движутся с одинаковым ускорением (принцип эквивалентности).

Если для частиц базиса отношение пробных зарядов к массам для всех частиц одинаково, а заряды плоскости и пробных частиц разноименны, то метрика (17.9) тождественна с (2.18) при $a = a_0$.

Для сравнения теории с экспериментом нужно выразить поля в "физических"или тетрадных компонентах вне заряженной плоскости. Сопутствующие тетрады для метрики удобно выбрать так, что вектор $\vec{e}_{(0)}$ направлен вдоль линии времени, а триада $\vec{e}_{(k)}$ вдоль координатных осей y^k (калибровка Ламе [22], [23]). Тетрадные индексы будем заключать в скобки. Выражение для тетрад будет иметь вид:

$$e^{\mu}_{(\alpha)} = \frac{\delta^{\mu}_{\alpha}}{\sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}}, \quad e^{(\alpha)}_{\mu} = \delta^{\alpha}_{\mu}\sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}, \quad e^{(0)}_{\mu} = V_{\mu}, \quad e^{\mu}_{(0)} = V^{\mu}, \tag{17.10}$$

где суммирование по α отсутствует. Для "физических"компонент тензора поля находим

$$F_{(0)(1)} = E_{(1)} = e^{\mu}_{(0)} e^{\nu}_{(1)} F_{\mu\nu} = 2\pi\sigma_0 = const. \tag{17.11}$$

Из (17.11) следует, что в локальных тетрадах поле заряженной плоскости точно такое же, как и при обычном рассмотрении в декартовых координатах. Это приводит к одинаковым значениям силы, действующей на пробный заряд, при различных рассмотрениях. Но геометрия пространства-времени , обусловленная электростатическим полем, оказалась псевдоримановой, а не псевдоевклидовой, как при обычном рассмотрении. Неевклидовость пространства- времени другой природы, чем в ОТО. Она не связана непосредственно с решением уравнений Эйнштейна- Максвелла, а связана с совместным решением уравнений Максвелла, уравнений структуры (1.7) и уравнения "движения". Это обстоятельство должно проявиться в экспериментах.

Предложим простейшие эксперименты, которые могут либо подтвердить, либо опровергнуть предлагаемый подход. Для начала рассмотрим экзотическую модель, проведя расчет для поля, создаваемого электроном, "подвешенным"на нити над положительно заряженной плоскостью. Очевидно, что ситуация с "подвешенным"над плоскостью электроном массы m и зарядом e эквивалентна его помещению в НСО (2.18), движущуюся с ускорением, направленным вдоль оси y^1 и равным по величине $a_0 = eE/m$.

Если перейти в (15.10) к тетрадным "физическим"компонентам с помощью тетрад (17.10), то получим

$$F_{(\alpha)(\beta)} = e^{\mu}_{(\alpha)} e^{\nu}_{(\beta)} F_{\mu\nu} = \frac{F_{\alpha\beta}}{\sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}\sqrt{|g_{\beta\beta}|}} \tag{17.11a}$$

или

$$F_{(0)(k)} = \frac{Q}{r^2}\exp\Big\{-\frac{a_0 r(1+\cos\theta)}{2c^2}\Big\}\Big[n_k + \frac{a_0 r}{2c^2}\Big(n_k - \delta^1_k\Big)\Big], \tag{17.11b}$$

Расчет по формуле (17.11b) для напряженности поля плоскости $E = 100$ / дает для точек в направлениях обратных полю к точкам поперек поля на расстоянии 1 относительную разность значений порядка 10%. Сравнение формул (15.10) с (17.11b) показывает, что они отличаются знаком в экспоненте перед косинусом. Несмотря на это обстоятельство, при любом определении напряженности поля, оно не является изотропным. Из (17.11b) следует, что "физическая"напряженность поля больше по величине в направлении обратном ускорению, чем в направлениях по вектору ускорения. Силовые линии электрического поля как бы "сдуваются"под действием ускорения, плотность силовых линий в направлении ускорения меньше, чем в обратном. Расчет электрического поля по формуле (17.11b) при $\theta = 0$ приводит к выражению,

$$F_{(0)(1)} = \frac{Q}{r^2}\exp\Big\{-\frac{a_0 r}{c^2}\Big\} \tag{17.11}$$

а при $\theta = \pi$ имеем

$$F_{(0)(1)} = -\frac{Q}{r^2}\Big\{1 + \frac{a_0 r}{c^2}\Big\} \tag{17.11d}$$

Расчет электрического поля по формуле (15.9) при $\theta = 0$ приводит к кулоновскому закону, а при $\theta = \pi$ имеем

$$\vec{E} = \frac{Q}{r^2}\exp\Big\{-\frac{a_0 r}{c^2}\Big\}\frac{\vec{r}}{r}\Big[1 + \frac{a_0 r}{c^2}\Big], \tag{17.11e}$$

Расчет электрического поля по формуле (17.11b) при $\theta = \pi/2$ приводит к выражению,

$$F_{(0)(1)} = -\frac{Qa_0}{2rc^2}\exp\Big\{-\frac{a_0 r}{2c^2}\Big\} \tag{17.11f}$$

$$F_{(0)(2)} = F_{(0)(3)} = \frac{Q}{r^2}\Big\{1+\frac{a_0 r}{2c^2}\Big\}\exp\Big\{-\frac{a_0 r}{2c^2}\Big\}. \tag{17.11g}$$

Точно такие же соотношения при $\theta = \pi/2$ имеют место и при расчете по формуле (15.10).

При стандартном расчете поле электрона должно быть изотропным и кулоновым, таким же как и поле свободного электрона.

Следует отметить, что и для реальных заряженных отрицательно элементов металлических тел поправка учета анизотропии не является малой, как это может показаться с первого взгляда. Дело в том , что под ускорением a_0 в (15.4), примененном к отрицательно заряженным элементам реальных проводников, следует понимать величину $a_0 = 0.5Ee/m$, где E - величина напряженности суммарного поля - собственного и внешнего , e - заряд электрона , m - масса электрона.

Действительно, для заряженного проводника, как известно [26], на поверхность действует сила "отрицательного давления значение которой на единицу поверхности равно $F = 0.5\sigma E$. Очевидно, что $\sigma = Ne/S$, где S - площадь элемента поверхности, N - число электронов на ней. Отсюда со стороны поля на каждый из электронов действует сила $F_e = 0.5eE$. Сила со стороны решетки металла направлена в обратную сторону и ее действие эквивалентно силе реакции со стороны тела, "движущегося с ускорением"$a_0 = 0.5eE/m$, в которое "вморожен"электрон. Т.к. каждый из поверхностных электронов находится в равновесии, то сила их взаимодействия с проводником (что соответствует в модели натяжению нити) определяет эффективное ускорение при "обрыве нити вычисляемое по приведенной выше формуле и направленное нормально поверхности. Для проводников, заряженных положительно, на поверхности находятся не электроны, а положительные ионы с массой значительно большей, чем у электронов. Поэтому их эффективное ускорение $_0$, а следовательно, и анизотропия поля будет гораздо меньше .

Рассмотрим еще любопытный пример об электростатическом поле в плоском конденсаторе, пренебрегая краевыми эффектами. Пусть конденсатор заряжен и отключен от источника. Положительные заряды на одной из обкладок, в согласии с рассмотренным выше, создают между обкладками поле /2. Заряды на отрицательной обкладке (электроны) находятся под действием двух сил : со стороны суммарного поля и силы со стороны решетки отрицательной обкладки, стремящейся удержать электроны на поверхности. Последняя сила направлена по полю $\vec{E}$, а физическая ситуация для электронов на отрицательной обкладке эквивалентна их "ускоренному движению"вдоль $\vec{E}$ с ускорением $_0 = 0.5eE/m$.

Поставим задачу вычисления емкости плоского конденсатора. Выберем начало координат в центре отрицательной обкладки с осью y^1, направленной перпендикулярно обкладкам в сторону положительной. Т.к. электроны на отрицательной обкладке "движутся ускоренно"в обратную сторону оси y^1 , то метрика пространства-времени между обкладками совпадает с (2.18) с отрицательным знаком в экспоненте. Напряженность поля между обкладками в согласии с (17.3) имеет вид

$$E_1 = F_{01} = 4\pi\sigma_0 \exp\Big\{-\frac{a_0 y^1}{c^2}\Big\}. \tag{17.12}$$

Емкость конденсатора вычислим по формуле

$$C = Q^2/2W, \tag{17.13}$$

где Q - заряд, а W - энергия поля между обкладками. Так как пространство- время внутри конденсатора псевдориманово то при определении плотности энергии (в отличие от СТО) нужно выбирать между T_{00}, T^{00} и T_0^0 компонентами тензора энергии-импульса электромагнитного поля. В СТО эти компоненты одинаковы, как одинаковы и в сопутствующих тетрадах . С точки зрения монадного метода [23] плотность энергии ρ электромагнитного поля является скаляром по отношению к произвольным преобразованиям $y^\mu = f^\mu(x^\nu)$. В нашем случае ρ соответствует $T_{(0)(0)} = T^{(0)(0)} = T_{(0)}^{(0)}$ компонентам тензора энергии-импульса. Напомним, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля в криволинейных координатах имеет вид [7]

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\Big(-F_{\mu\beta}F_\nu{}^\beta + \frac{1}{4}F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma}g_{\mu\nu}\Big), \tag{17.14}$$

где тетрадные компоненты тензора вычисляются по правилу

$$T_{(\mu)(\nu)} = e^\alpha_{(\mu)}e^\beta_{(\nu)}T_{\alpha\beta}. \tag{17.15}$$

Энергию поля между обкладками конденсатора конденсатора можно вычислить по формуле [23]

$$W = \int \sqrt{-g}T^{\mu\nu}V_\nu\, dS_\mu, \tag{17.16}$$

где g определитель метрического тензора, $dS_\mu = V_\mu dV$. dS_μ - геометрический объект, равный произведению элемента площади гиперповерхности ортогональной мировым линиям базиса, построенной на базе трех бесконечно малых смещений, на единичный вектор нормали (т.е. 4-скорость V_μ).

Ввиду важности соотношения (17.16) обсудим его более подробно.

Так как мы рассматриваем тензор энергии импульса электромагнитного поля вне зарядов, создающих поле, то должно выполняться соотношение

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{17.16a}$$

В плоском пространстве - времени в галилеевых координатах это соотношение выражает закон сохранения энергии - импульса электромагнитного поля. В римановом пространстве - времени это соотношение в общем случае не выражает никакого закона сохранения, так как вместо частной производной от тензора энергии - импульса стоит ковариантная. Это обстоятельство хорошо известно в литературе по ОТО.

При вычислении энергии в (17.16) мы фактически используем не "закон сохранения"(17.16a), а истинный закон сохранения, напоминающий внешне закон сохранения заряда.

Это вытекает из равенства

$$\nabla_\mu\Big(T^{\mu\nu}V_\nu\Big) = V_\nu\nabla_\mu T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}\nabla_\mu V_\nu = T^{\mu\nu}V_\mu F_\nu = 0. \tag{17.16b}$$

При выводе (17.16b) мы учли, что конгруенция мировых линий частиц базиса СО, определяемая законом "движения"(17.6), является безвихревой и жесткой, что векторы V_μ и F^μ ортогональны и что равна нулю свертка антисимметричного тензора поля $F_{\mu\nu}$ с произведением векторов первой кривизны.

Отметим, что при выводе (17.16b) поле не обязательно предполагается статическим, потому что жесткую безвихревую СО можно создать и в силовом поле явно зависящем от времени, если жестко закрепить частицы базиса в поле при помощи внешних связей. Для такого случая векторы 4 - ускорения частиц базиса будут зависеть от времени, а тензоры скоростей деформаций и угловой скорости вращения будут равны нулю. Ясно, что такая ситуация возможна только в римановом пространстве - времени. В плоском пространстве - времени, закрепленные жестко в переменном поле частицы, будут обладать и нулевым ускорением.

Соотношение (17.16b) можно переписать в форме

$$\nabla_\mu T^{\mu(0)} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\Big(\sqrt{-g}T^{\mu(0)}\Big) = 0. \tag{17.16c}$$

Проинтегрируем выражение (17.16c) по инвариантному 4 - объему.

$$\int \sqrt{-g}\nabla_\mu T^{\mu(0)} d^4y = \int \frac{\partial}{\partial y^\mu}\Big(\sqrt{-g}T^{\mu(0)}\Big) d^4y = 0. \tag{17.16d}$$

Используя теорему Гаусса и полагая, что на "боковой"временноподобной охватывающей пространственный объем гиперповерхности интеграл стремится к нулю, (что имеет место в задачах с зарядами, расположенными в конечном объеме) получаем

$$\oint \sqrt{-g}T^{\mu(0)} dS_\mu = \int_{V_1} \sqrt{-g}T^{(0)(0)} d^3y - \int_{V_2} \sqrt{-g}T^{(0)(0)} d^3y = 0. \tag{17.16e}$$

Откуда имеет место закон сохранения величины типа "заряда"

$$\int_{V_1} \sqrt{-g}T^{(0)(0)} d^3y = \int_{V_2} \sqrt{-g}T^{(0)(0)} d^3y = W, \tag{17.16f}$$

в которой V_1 и V_2 трехмерные объемы занимаемые полем в разные моменты времени.

Сравнение (17.16) с (17.16f) говорит о тождественности этих величин, которые представляют энергию электромагнитного поля.

Вычислим энергию поля отрицательно заряженной плоскости. При стандартном вычислении энергия поля плоскости напряженности E, заключенная в цилиндре с площадью основания S и высоты h по обе стороны плоскости с образующими, перпендикулярными плоскости, очевидно равна

$$W_0 = \frac{E^2}{8\pi}2hS = \sigma_0 Qh, \qquad Q = \sigma_0 S. \tag{17.16g}$$

При $h \to \infty$, $W_0 \to \infty$.

Для нашего случая энергия поля в указанном объеме

$$W = \int \sqrt{-g}T^{(0)(0)}\, dV = 2\frac{E^2Sc^2}{8\pi a_0}\Big(1 - \exp\Big(-\frac{a_0 h}{c^2}\Big)\Big), \tag{17.16h}$$

где $E = 2\pi\sigma_0$.

Очевидно, что при малых расстояниях h от плоскости, т.е. при

$$\frac{a_0 h}{c^2} \ll 1$$

энергия поля в объеме, вычисленная в согласии с (17.16h) совпадает с классическим выражением (17.16g). Однако, если при классическом рассмотрении при $h \to \infty$, $W_0 \to \infty$, то в нашем случае энергия поля внутри бесконечно длинного цилиндра остается конечной величиной, определяемой равенством

$$W = \int \sqrt{-g} T^{(0)(0)}\, dV = 2\frac{E^2 S c^2}{8\pi a_0} = \frac{E S c^2 m}{2\pi e} = \frac{Q m c^2}{e} = N m c^2. \tag{17.16i}$$

Итак:

Энергия электрического поля внутри бесконечно длинного цилиндра оказалась равной энергии покоя N электронов, расположенных на заряженной поверхности площади S внутри цилиндра. В эту энергию не входит величина заряда Q элемента площади.

Формула (17.16i) остается в силе и для плоскости, заряженной положительно, В этом случае роль массы (т.к. позитроны не являются устойчивыми) играет масса атома проводника, потерявшего один электрон.

Таким образом, собственная энергия зарядов на плоскости оказалась равной их энергии покоя!

Учитывая, что пространственное сечение для метрики (2.18) является плоским, а ускорение отрицательным и используя формулы (17.14), (17.15), (17.4),(17.9) для тензора энергии - импульса в сопутствующих тетрадах находим выражение

$$T_{(0)(0)} = \frac{E^2}{8\pi}, \quad T_{(1)(1)} = -\frac{E^2}{8\pi}, \quad T_{(2)(2)} = T_{(3)(3)} = \frac{E^2}{8\pi}, \quad E = 4\pi\sigma_0 \tag{17.17}$$

Последнее соотношение в локальных тетрадах в точности совпадает с тензором энергии-импульса постоянного однородного поля в ИСО пространства Минковского в галилеевых координатах.

Энергия поля в конденсаторе в согласии с (17.16), (17.17) имеет вид

$$W = \int \sqrt{-g} T^{(0)(0)}\, dV = \frac{E^2 S c^2}{8\pi a_0}\Big(1 - \exp\Big(-\frac{a_0 d}{c^2}\Big)\Big), \tag{17.18}$$

где S - площадь обкладки, d - расстояние между обкладками.

Используя найденное выражение для ускорения $a_0 = 0.5Ee/m$ и полагая $u = Ed$, где u - разность потенциалов между обкладками, находим емкость конденсатора C в виде

$$C = Q^2/2W = \frac{S}{4\pi d}\frac{eu}{2mc^2}\frac{1}{1 - \exp\Big(-\frac{eu}{2mc^2}\Big)}. \tag{17.19}$$

Если $eu/mc^2 \ll 1$, то (17.19) можно представить в виде

$$C = C_0\Big(1 + \frac{eu}{4mc^2}\Big), \qquad C_0 = \frac{S}{4\pi d} \tag{17.20}$$

Таким образом в предлагаемом нами подходе емкость конденсатора возрастает с ростом прикладываемого к нему напряжения. Например, при напряжении $5 \cdot 10^4$ вольт увеличение емкости должно составлять 2.4%.

18. Геометрия равноускоренной НСО и уравнения Эйнштейна - Максвелла

Обычно в теоретической физике кривизну пространства-времени связывают с теорией гравитации Эйнштейна. Все другие поля рассматриваются в плоском пространстве Минковского. Найденная кривизна НСО в общем случае не имеет никакого отношения к ОТО Эйнштейна, однако появление искривленной геометрии стимулирует к поиску связи геометрии НСО с геометрией, получаемой из решения уравнений Эйнштейна. Конечно, это возможно далеко не всегда. Ниже мы покажем, что геометрию равноускоренной НСО можно получить и из решений уравнений Эйнштейна с учетом "космологической"постоянной, если в качестве источника в уравнениях Эйнштейна выбрать тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

Установим связь равноускоренной НСО с точным решением уравнений Эйнштейна - Максвелла. Для компонент тензора Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} R$$

находим

$$G_{00} = 0, \quad G_{11} = 0, \quad G_{0k} = 0, \quad G_{kl} = 0,$$

$$(k \neq l) \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad G_{22} = G_{33} = \frac{1}{2} R = \frac{{a_0}^2}{c^4}. \tag{18.1}$$

Выпишем уравнения Эйнштейна с учетом "космологической постоянной Λ "

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \qquad \chi = \frac{8\pi k}{c^4}, \tag{18.2}$$

где k гравитационная постоянная.

В качестве источника выберем тензор энергии - импульса электромагнитного поля [7], которое в искривленном пространстве - времени с метрикой (2.18), удовлетворяет уравнениям Максвелла в пустоте . В силу равенства $T^\nu_\nu = 0$, для "космологической постоянной"получим

$$\Lambda = \frac{{a_0}^2}{2c^4} = \text{const}. \tag{18.3}$$

Отличными от нуля компонентами тензора энергии - импульса оказались только диагональные. Как известно [7], приведение тензора $T_{\mu\nu}$ к диагональному виду возможно, если (в данной точке пространства и в данный момент времени) существует система отсчета, в которой вектор электрического поля $\vec{E}$ параллелен вектору магнитного поля $\vec{H}$, либо один из них равен нулю. Для рассматриваемого нами случая полагаем $\vec{H} = 0$, а вектор

$\vec{E}$ направляем вдоль оси y^1 , совпадающей с направлением ускорения. Следуя [7], вводим 3 - векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ согласно определению :

$$D^1 = -\sqrt{g_{00}}F^{01}, \qquad E_1 = F_{01},$$
$$D_1 = \frac{E_1}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad \vec{D} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Остальные независимые компоненты тензора поля, в силу того что магнитное поле отсутствует, а поле $\vec{E}$ направлено вдоль оси y^1, обращаются в нуль.

Для тензора энергии - импульса находим

$$T_{00} = \frac{g_{00}}{8\pi}\vec{D}\cdot\vec{D}, \qquad T_{11} = \frac{g_{11}}{8\pi}\vec{D}\cdot\vec{D},$$
$$\vec{D}\cdot\vec{D} = {D_1}^2, \qquad T_{22} = T_{33} = \frac{{D_1}^2}{8\pi}. \tag{18.4}$$

Уравнения Максвелла для метрики (2.18) в статическом случае сводятся к виду

$$\nabla\times\vec{E} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = 0, \tag{18.5}$$

решение которых для постоянного однородного поля $\vec{D}$ дает

$$D_1 = \mathrm{const}, \qquad E_1 = \exp\left(\frac{a_0 y^1}{c^2}\right)D_1. \tag{18.6}$$

Совместное решение системы уравнений Эйнштейна - Максвелла приводит к связи между индукцией электрического поля D_1 и ускорением a_0.

$$a_0 = \sqrt{2k}D_1. \tag{18.7}$$

На базе решения системы Эйнштейна - Максвелла, найденной метрике равноускоренной НСО можно придать простую физическую интерпретацию . Базис такой НСО представляет собой невзаимодействующую друг с другом заряженную пыль, находящуюся в равновесии в "параллельных "однородных электрическом и гравитационном полях. (Сама пыль при этом полей не создает, а гравитационное поле "порождено"электрическим). Статическое решение для пробных частиц базиса в ОТО в электрическом поле с точки зрения ньютоновской теории представляет собой равновесие положительно заряженных частиц, находящихся в однородном гравитационном поле , помещенных в плоский конденсатор с вектором $\vec{E}$, направленным противоположно силе тяжести.

Из условий равновесия в ньютоновской механике имеем

$$a_0 = \frac{eE}{m}, \tag{18.8}$$

где e - заряд частицы , a_0 - ускорение свободного падения , m - масса покоя частицы . С точки зрения ОТО при равновесии заряженной пыли в однородном электрическом и гравитационном поле справедливо уравнение "движения "

$$mc\frac{DV^\mu}{dS} = \frac{e}{c}{F^\mu}_\nu V^\nu, \tag{18.9}$$

где D - абсолютный дифференциал . В (18.9) DV^μ/dS отлично от нуля (т.к. в противном случае частицы бы двигались по геодезическим) Из (18.9) и (2.13) должно следовать , что в любой системе отсчета (в том числе и сопутствующей) должно выполняться равенство

$$g_{\mu\nu}\frac{DV^\mu}{dS}\frac{DV^\nu}{dS} = -\frac{{a_0}^2}{c^4} = \frac{e^2}{m^2c^4}F^\mu{}_\sigma F^\nu{}_\epsilon V^\sigma V^\epsilon g_{\mu\nu}. \tag{18.10}$$

Для сопутствующей системы находим

$$a_0 = \frac{e}{m}D_1 = \text{const}. \tag{18.11}$$

Таким образом, (18.11) есть релятивистский аналог (18.8).

Т.к. в силу уравнений Эйнштейна - Максвелла напряженность гравитационного поля a_0 связана с "порождающей"ее индукцией D_1 соотношением (18.7), это накладывает отпечаток и на свойства частиц базиса , находящихся в равновесии под действием двух полей. Между зарядами и массами этих частиц должна существовать зависимость

$$\frac{e^2}{m^2} = 2k. \tag{18.12}$$

Итак, найденная метрика (2.18) может удовлетворять уравнениям Эйнштейна с Λ членом, где в качестве источника используется тензор энергии - импульса электромагнитного поля. При этом одновременно выполняются решения уравнений Максвелла, а "космологическая"постоянная Λ связана с индукцией D_1 по формуле

$$\Lambda = \frac{k{D_1}^2}{c^4}. \tag{18.13}$$

В параллельных полях могут находится в равновесии заряженные массивные частицы, массы и заряды которых связаны соотношением (18.12). Массы таких частиц в $\sqrt{2}$ меньше, чем у стабильных элементарных черных дыр "максимонов "[21]. Частица, обладая зарядом протона, имеет массу близкую к 10^{-6} г , которая в 10^{21} раз больше массы электрона .

19. Центрально-симметричное и цилиндрически-симметричное электростатические поля

1. Поле со сферической симметрией

На основе теории сферически - симметричной НСО рассмотрим электростатическое поле обладающее центральной симметрией. Такое поле может быть создано, например, заряженным сферическим телом или точечным зарядом. Как показано в разделе 17, электростатическое поле связанных зарядов отличается от поля свободных зарядов. Рассмотрим заряженный проводящий шар радиуса R, заряженный зарядом Q. Требуется найти напряженность электрического поля E и определить геометрию пространства- времени вне шара. Получаемая кривизна пространства - времени в общем случае другой природы, чем в ОТО. Она обусловлена электромагнитным полем связанных зарядов, физическая ситуация которых эквивалентна их "размещению"в некоторой НСО. Действительно, каждый из зарядов на проводнике будет находиться на поверхности шара и испытывать со стороны создаваемого ими поля силу "отрицательного давления направленного по внешней нормали к поверхности [26]. Эта сила компенсируется силой со стороны решетки, удерживающей заряды на поверхности сферы. Таким образом, рассматриваемая физическая ситуация эквивалентна ситуации, в которой находятся заряды, связанные невесомыми нитями длины R, закрепленные в общем центре. Следовательно, поле, создаваемое каждым из зарядов будет таким же, как если бы каждый из зарядов двигался равноускоренно с ускорением направленным к центру шара.

Возможна и другая ситуация, когда рассматриваемое "ускорение"направлено по радиусу от центра. Рассмотрим, например, поле в сферическом конденсаторе, когда внутренняя обкладка заряжена положительно, а внешняя отрицательно. Тогда электроны на внешней обкладке будут находиться на внутренней стороне внешней сферической оболочки. Сила со стороны поля стремится двигать электроны к центру сферы, но силы со стороны решетки, направленная от центра, компенсирует силу со стороны поля, вызывая "ускорение направленное по радиусу от центра. Так как в дальнейшем нам понадобятся оба приведенных случая (с "ускорениями"разных знаков), то сначала мы рассмотрим случай, когда "ускорение"направлено по радиусу от центра, а затем - наоборот. Во избежание путаницы для двух случаев формулы будем приводить совместно, сохраняя за формулой с положительным "ускорением"по радиусу основной номер, а с "ускорением направленным к центру, тот же номер с буквой.

При этом в выводе мы для первого случая учитываем действие на пробную частицу только со стороны одной сферы - внешней, не связывая эту задачу с нахождением поля сферического конденсатора. Эту задачу подробно разберем в дополнении 2.

Нашей задачей здесь является лишь сравнение того, как влияет направление "ускорения"на характеристики создаваемого ими поля.

Итак, в согласии с (15.8) и (2.18) потенциал dA_0 в точке наблюдения вид

$$dA_0 = \frac{dQ}{r'} \exp\Big\{-\frac{a_0 r'(1-\cos\theta)}{2c^2}\Big\}, \tag{19.1}$$

где r' - трехмерное (евклидово) расстояние от заряда dQ до точки наблюдения , θ - угол между радиусом - вектором $\vec{r}$ и $\vec{i}$, $\vec{i} = \vec{a_0}/\mid \vec{a_0}\mid$. $\vec{i}$ для каждого элемента заряда dQ направлен к центру сферы. Величина "ускорения"a_0 для зарядов отрицательно заряженной сферы (электронов) вычисляется по формуле

$$a_0 = \frac{eE}{2m}, \tag{19.2}$$

вывод которой приведен в разделе 17. Здесь e - величина заряда, m - масса электрона, E - напряженность поля на поверхности сферы. Для шара, заряженного положительно, "релятивистский"эффект будет значительно менее выражен, т.к. под массой m, будет выступать масса положительного иона, значительно превышающая массу электрона. Поэтому поле от положительно заряженного шара практически совпадает с классическим, а для отрицательно заряженного шара "релятивистские"поправки могут оказаться значительными.

В согласии с (2.18) каждый из электронов на поверхности сферы принадлежит касательному плоскому пространству, но риманову пространству - времени. Поэтому операция интегрирования по сфере происходит в плоском пространстве и является корректной. Выполнив интегрирование в (19.1), получим

$$A_0 = \frac{Q\exp(\zeta^2)\sqrt{\pi}}{4R\zeta}\Big[\Phi(\zeta(1+2R/r)) - \Phi(\zeta)\Big], \quad \zeta = \frac{r}{R}\sqrt{\frac{eQ}{8mc^2R}} \tag{19.3}$$

$$A_0 = \frac{Q\exp(-\zeta^2)\sqrt{\pi}i}{4R\zeta}\Big[\Phi(i\zeta(1-2R/r)) - \Phi(i\zeta)\Big], \tag{19.3a}$$

В (19.3), (19.3а) r - расстояние от центра шара до точки наблюдения $\Phi(\zeta)$ - интеграл вероятности, $\Phi(i\zeta)$ - интеграл вероятности мнимого аргумента.

$$\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\zeta \exp(-t^2)\,dt$$

$$\Phi(i\zeta) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^\zeta \exp(t^2)\,dt = i\,\mathrm{erfi}(\zeta).$$

С другой стороны, совокупность электронов на поверхности сферы не принадлежит конгруенции мировых линий базиса НСО (2.18), а включаются в совокупность мировых линий, принадлежащих сферически - симметричной лагранжевой сопутствующей НСО с метрикой вида

$$dS^2 = \exp(\nu)(dy^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \exp(\lambda)(dr)^2, \tag{19.4}$$

где ν и λ зависят только от r.

Функции $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ нуждаются в определении. Для их нахождения воспользуемся решением сферически-симметричных статических уравнений Максвелла с использованием метрики (19.4), аналогичных по записи уравнениям электродинамики в "заданном гравитационном поле"[7]. Затем сравним полученное решение с выражением для поля, получаемом из (19.3), (19.3а).

Для отличной от нуля радиальной компоненты "индукции"D^1 имеем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\sin\theta\exp(\lambda/2)D^1\Big) = 0, \tag{19.5}$$

решением которого будет

$$D^1 = \frac{Q}{r^2}\exp(-\lambda/2). \tag{19.6}$$

В (19.5) и (19.6) между "индукцией"D^1 напряженностью поля E^1 и компонентой тензора поля F_{01} существуют известные [7] соотношения

$$D_1 = \gamma_{11}D^1 = \frac{Q}{r^2}\exp(\lambda/2) = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}E_1, \quad E_1 = F_{01}, \quad \gamma_{kl} = -g_{kl}, \tag{19.7}$$

где γ_{kl} - пространственный метрический тензор с определителем равным γ.

Из (19.5) и (19.6) следует, что уравнения Максвелла естественно не определяют функций $\nu(r)$ и $\lambda(r)$.

В согласии с (19.3) и (19.4) тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ имеет отличные от нуля компоненты $F_{01}=-F_{10}$

$$F_{01}=\frac{Q\exp(\zeta^2)\sqrt{\pi}}{4r^2\delta}\Big\{\Big[\Phi(\zeta+2\delta)-\Phi(\zeta)\Big](1-2\zeta^2)$$

$$+\frac{2\zeta\exp(-\zeta^2)}{\sqrt{\pi}}[1-\exp(-4\delta(\zeta+\delta))]\Big\},\quad \delta=\sqrt{\frac{eQ}{8mc^2R}}. \tag{19.8}$$

$$F_{01}=\frac{Q\exp(-\zeta^2)\sqrt{\pi}}{4r^2\delta}\Big\{\Big[\Phi(i\zeta-2i\delta)-\Phi(i\zeta)\Big](1+2\zeta^2)i-$$

$$-\frac{2\zeta\exp(\zeta^2)}{\sqrt{\pi}}[1-\exp(-4\delta(\zeta-\delta))]\Big\}. \tag{19.8a}$$

Приравнивая (19.8), (19.8а) выражению F_{01} из (19.7), находим уравнение, связи на функции $\nu(r)$ и $\lambda(r)$

$$\exp\Big(\frac{\nu+\lambda}{2}\Big)=\frac{\exp(\zeta^2)\sqrt{\pi}}{4\delta}\Big\{\Big[\Phi(\zeta+2\delta))-\Phi(\zeta)\Big](1-2\zeta^2)$$

$$+\frac{2\zeta\exp(-\zeta^2)}{\sqrt{\pi}}[1-\exp(-4\delta(\zeta+\delta))]\Big\}. \tag{19.9}$$

$$\exp\Big(\frac{\nu+\lambda}{2}\Big)=\frac{\exp(-\zeta^2)\sqrt{\pi}}{4\delta}\Big\{\Big[\Phi(i\zeta-2i\delta)-\Phi(i\zeta)\Big](1+2\zeta^2)i-$$

$$-\frac{2\zeta\exp(\zeta^2)}{\sqrt{\pi}}[1-\exp(-4\delta(\zeta-\delta))]\Big\}. \tag{19.9a}$$

Для нахождения второго уравнения, связывающего эти функции, рассмотрим силу со стороны поля, действующую на пробный заряд q, закрепленный в точке с координатой r от центра шара. Пусть масса пробного заряда m_0. Тогда вектор первой кривизны F^1 мировой линии этого заряда можно найти из соотношения (1.5), записав для закрепленных зарядов условие сопутствия для метрики (19.4) в виде

$$V^k=V_k=0,\qquad V^0=(g_{00})^{-1/2},$$

$$V_0=(g_{00})^{1/2},\quad F^1=F(r),\quad F^0=F^2=F^3=0. \tag{19.10}$$

Откуда из (1.5), (19.4) и (19.10) имеем

$$F^1=\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\exp(-\lambda). \tag{19.11}$$

С другой стороны, эту величину можно найти и из силы, действующей на заряд со стороны связи, удерживающей заряд в поле неподвижным. Эта сила численно равна силе со стороны поля и противоположна ей по знаку.

$$F^1=\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\exp(-\lambda)=-\frac{q}{m_0c^2}F^{10}V_0=$$

$$-\frac{Qq}{m_0c^2r^2}\exp(-\lambda/2). \tag{19.12}$$

Из (19.8)-(19.12) находим

$$\exp(\nu/2) = -\frac{q}{m_0c^2}\int F_{01}\,dr = -\frac{Qq\sqrt{\pi}}{4Rm_0c^2}\int\Big\{\exp(\zeta^2)(1/\zeta^2-2)$$

$$\Big[\Phi(\zeta+2\delta)-\Phi(\zeta)\Big] + \frac{2}{\zeta\sqrt{\pi}}[1-\exp(-4\delta(\zeta+\delta))]\Big\}\,d\zeta + {}_1. \tag{19.13}$$

Постоянную интегрирования C_1 определим из требования евклидовости пространства на бесконечности.

Выполнить интегрирование в (19.12) аналитически не представляет труда, т.к. по определению

$$F_{01} = -\frac{\partial A_0}{\partial r}$$

где A_0 определяется из (19.3). В результате получим

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{Qq\exp(\zeta^2)\sqrt{\pi}}{m_0c^2 4r\delta}\Big[\Phi(\zeta+2\delta)-\Phi(\zeta)\Big]$$

$$= 1 + \frac{qA_0}{m_0c^2}. \tag{19.14}$$

Аналогично для отрицательного ускорения находим

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{Qq\exp(-\zeta^2)\sqrt{\pi}i}{m_0c^2 4r\delta}\Big[\Phi(i\zeta-2i\delta)-\Phi(i\zeta)\Big]$$

$$= 1 + \frac{qA_0}{m_0c^2}. \tag{19.14a}$$

Из (19.9), (19.9a) и (19.14), (19.14a) находим

$$\exp\Big(\frac{\lambda}{2}\Big) = \frac{\frac{\exp(\zeta^2)\sqrt{\pi}}{4\delta}\Big\{\Big[\Phi(\zeta+2\delta))-\Phi(\zeta)\Big](1-2\zeta^2)\Big\}}{1+\frac{Qq\exp(\zeta^2)\sqrt{\pi}}{m_0c^2 4r\delta}\Big[\Phi(\zeta+2\delta)-\Phi(\zeta)\Big]}$$

$$+\frac{\frac{\zeta}{2\delta}[1-\exp(-4\delta(\zeta+\delta))]}{1+\frac{Qq\exp(\zeta^2)\sqrt{\pi}}{m_0c^2 4r\delta}\Big[\Phi(\zeta+2\delta)-\Phi(\zeta)\Big]}$$

$$= -\frac{\frac{r^2}{Q}\frac{\partial A_0}{\partial r}}{1+\frac{qA_0}{m_0c^2}}. \tag{19.15}$$

$$\exp\Big(\frac{\lambda}{2}\Big) = \frac{\frac{\exp(-\zeta^2)\sqrt{\pi}}{4\delta}\Big\{\Big[\Phi(i\zeta-2i\delta))-\Phi(i\zeta)\Big](1+2\zeta^2)i\Big\}}{1+\frac{Qq\exp(-\zeta^2)\sqrt{\pi}i}{m_0c^2 4r\delta}\Big[\Phi(i\zeta-2i\delta)-\Phi(i\zeta)\Big]}$$

$$
-\frac{\frac{\zeta}{2\delta}[1-\exp(-4\delta(\zeta-\delta))]}{1+\frac{Qq\exp(-\zeta^2)\sqrt{\pi}i}{m_0c^24r\delta}\Big[\Phi(i\zeta-2i\delta)-\Phi(i\zeta)\Big]}
$$

$$
=-\frac{\frac{r^2}{Q}\frac{\partial A_0}{\partial r}}{1+\frac{qA_0}{m_0c^2}}. \qquad (19.15a)
$$

Проведем предварительный аналитический анализ (19.14), (19.15) раскладывая выражения в ряд по безразмерному параметру δ. Отметим, например, что для заряженного отрицательно металлического шара $\phi = 50\ kV$ соответствует $\delta = 0.11$, для электрона с классическим радиусом e^2/mc^2 $\delta = 0.35355$, для протона $\delta = 0.015$. Для алюминиевого шара, заряженного положительно до $\phi = 50\ kV$ $\delta = 1.66 \cdot 10^{-4}$.

Разложение в ряд по δ с сохранением членов пропорциональных первой степени δ (в числителе (19.15) раскладываем в ряд , удерживая члены с δ^2) приводит к соотношению

$$
\exp(\nu) = \left(1+\frac{Qq}{rm_0c^2}\right)^2 = \exp(-\lambda). \qquad (19.15)
$$

В формуле (19.15) заряды Q и q могут иметь как одинаковые, так и противоположные знаки. В отличие от ОТО метрика пространства–времени зависит как от заряда, создающего поле Q, так и от величины пробного заряда q. В частности, если пробный заряд $q = 0$, то метрика превращается в синхронную жесткую с равными нулю тензорами скоростей деформаций, угловой скорости вращения и нулевыми векторами первой кривизны (4– ускорениями). Тензор кривизны пространства–времени в этом случае выражается, как известно, через трехмерный тензор кривизны, вычисляемый с помощью трехмерной пространственной метрики [7]. Если заряды Q и q – одноименные, то в силу (19.12) F^1 направлен к центру сферы, а для разноименных — по "радиусу"от центра. Если в качестве пробных зарядов выбрать одинаковые заряды, у которых сила кулоновского отталкивания в точности равна силе ньютоновского притяжения, то такие частицы в классическом смысле будут невзаимодействующими. Если также приравнять ньютоновскую силу тяготения между зарядами на сфере силе их электростатического кулоновского отталкивания, то между зарядами и их массами будут выполняться очевидные соотношения $q^2/m_0^2 = k$, $Q^2/M^2 = k$, где M - масса зарядов Q, k - гравитационная постоянная. (Решение приводится в системе СГСЭ.) Метрика (19.15), (19.15a) в этом случае совпадает с точным электровакуумным сферически-симметричным совместным решением уравнений Эйнштейна и Максвелла и носит название метрики Райснера - Нордстрема. Напомним, что в нашем случае уравнения Эйнштейна вообще не использовались , а кривизна пространства-времени была обусловлена эквивалентностью ситуации для связанных зарядов, удерживаемых решеткой на сферической поверхности, с ситуацией подобной их равноускоренному движению к центру сферы с сохранением критерия жесткости по Борну. Как мы отмечали ранее в римановом пространстве - времени в отличие от пространства Минковского такая ситуация возможна. Любопытно оценить величину δ, при которой найденное нами приближенное решение (т.е решение Райснера - Нордстрема) наименее отличается от точного (19.14), (19.15).

В согласии с классическими представлениями выберем в качестве наименьшего заряда заряд электрона e. Тогда из равенства $e^2/M^2 = k$ находим $M = 1.86 \cdot 10^{-6}$. Считая частицу сферической и полагая ее плотность равной плотности ядерного вещества $\rho = 2.7 \cdot 10^{14}\ /^3$

получим в согласии с (19.8) $\delta = 2.5 \cdot 10^{-9}$. Т.к. решение Райснера - Нордстрема получено нами как разложение в ряд по δ, то для последнего примера оно практически совпадает с точным (19.14), (19.15).

Итак получили результат, что для частиц, имеющих заряд электрона, у которых сила кулоновского отталкивания компенсируется ньютоновской силой тяготения, справедливо решение Райснера - Нордстрема. В теории Эйнштейна - Максвелла таких ограничений не накладывается.

Попытаемся на базе развиваемого подхода предсказать возможные эксперименты, которые бы позволили подтвердить или опровергнуть предлагаемую схему.

Любопытно отметить, что отличная от нуля тетрадная компонента $F_{(0)(1)}$ тензора поля в тетрадах (7.1) в точности соответствует обычному кулоновскому выражению для поля точечного заряда или полю вне заряженного шара в пространстве Минковского для любых ν и λ.

Произведем расчет емкости заряженного металлического шара радиуса R. При классическом рассмотрении в системе СГСЭ емкость $C = R$. Для нашего случая емкость будет зависеть от приложенного к шару потенциала, а также и от знака заряда. Вычислим емкость по формуле (17.13)

$$C = Q^2/2W. \tag{19.16}$$

Для нахождения плотности энергии электромагнитного поля можно воспользоваться тетрадами в виде (7.1) с использованием метрики (19.4), и условиями сопутствия в форме

$$V^k = V_k = 0, \qquad V^0 = (g_{00})^{-1/2}, \qquad V_0 = (g_{00})^{1/2}.$$

С точки зрения монадного метода [23] плотность энергии ρ электромагнитного поля является скаляром по отношению к произвольным преобразованиям $y^\mu = f^\mu(x^\nu)$. В нашем случае ρ соответствует $T_{(0)(0)} = T^{(0)(0)} = T^{(0)}_{(0)}$ компонентам тензора энергии-импульса. Очевидно, что

$$\rho = T_{(0)(0)} = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu.$$

Используя выражения (17.14), (17.15), (19.7), находим для плотности энергии ρ соотношение

$$\rho = \frac{Q^2}{8\pi r^4}, \tag{19.17}$$

которое в точности совпадает с выражением для плотности энергии поля вне заряженной сферы в пространстве Минковского.

Однако для нахождения полной энергии поля вне заряженного шара нужно производить интегрирование по пространству в римановом пространстве - времени с метрикой (19.4), определяемой из (19.14), (19.15). Для этого воспользуемся формулой (17.16), в согласии с которой имеем

$$W = \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} V_\nu \, dS_\mu = \frac{Q^2}{2} \int_R^\infty \frac{\exp(\frac{\lambda+\nu}{2})}{r^2} \, dr = \frac{A_0(R) Q}{2}, \tag{19.18}$$

где $A_0(R)$ определяется из (19.3) при $r = R$.

В результате получим для емкости C

$$= R\Big[\frac{4\delta}{\sqrt{\pi}\exp(\delta^2)[\Phi(3\delta)-\Phi(\delta)]}\Big], \qquad (19.19)$$

Для отрицательного "ускорения"имеем аналогично

$$= R\Big[\frac{2i\delta}{\sqrt{\pi}\exp(-\delta^2)\Phi(i\delta)}\Big], \qquad (19.19a)$$

Для отрицательно заряженного металлического шара величина δ

$$\delta = 1.563 \cdot 10^{-2}\sqrt{n},$$

где n безразмерное число киловольт, определяющее потенциал шара.

Считая δ малой величиной, из (19.19), (19.19a) находим

$$= R[1 + 2\delta^2], \qquad (19.20)$$

$$= R[1 + \frac{2\delta^2}{3}], \qquad (19.20a)$$

Например при потенциале $-50\ kV$ добавка к емкости должна составлять 2.44% при положительном и 0.8% при отрицательном "ускорении"

Для вычисления емкости шара можно вместо формул (19.16), (19.19) определить емкость обычным способом по формуле

$$C = \frac{Q}{A_0}. \qquad (19.21)$$

где A_0 вычисляется из (19.3) при $r = R$.

Таким образом, обе формулы (19.16) и (19.21) оказались эквивалентными, как и при классическом рассмотрении.

Формула (19.18) справедлива не только для заряженных проводников сферической формы, но и для произвольных заряженных проводящих тел. Докажем это утверждение. Из (19.18) имеем

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \sqrt{-g}g^{00}\gamma^{kl}E_kE_l\,dV = \frac{1}{8\pi}\int \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_{00}}}E_kD^k\,dV, \qquad (19.18a)$$

где

$$E_k = -\frac{\partial A_0}{\partial y^k}, \quad D^k = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\gamma^{kl}E_l, \quad \gamma_{kl} = -g_{kl}, \quad . \qquad (19.18b)$$

В (19.18b) γ_{kl} – метрика трехмерного пространства. Так как вращения отсутствуют, то члены метрики $g_{0k} = 0$. Интеграл (19.18a) с учетом уравнений Максвелла в "заданном гравитационном поле"[7]

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial y^k}(\sqrt{\gamma}D^k) = 4\pi\rho \qquad (19.18c)$$

сведется к виду

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_{00}}}\Big(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial y^k}(\sqrt{\gamma}A_0 D^k) - 4\pi\rho A_0\Big)\, dV. \qquad (19.18d)$$

Используя равенство

$$\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_{00}}} = \sqrt{\gamma},$$

получим вместо (19.18d) соотношение

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int \frac{\partial}{\partial y^k}(\sqrt{\gamma}A_0 D^k)\, dV + \frac{1}{2}\int \rho A_0\sqrt{\gamma}\, dV. \qquad (19.18e)$$

Используя теорему Гаусса, преобразуем первый интеграл по объему к интегралу по окружающей этот объем поверхности. Так как подинтегральное выражение убывает с расстоянием как $1/r^3$, то выбрав поверхность достаточно далеко, этот интеграл исчезает. Так как все заряды сосредоточены на поверхности проводника и потенциал на поверхности постоянен, то для второго интеграла получим [1]

$$W = \frac{1}{2}A_0\int \rho\sqrt{\gamma}\, dV = \frac{1}{2}A_0 Q, \qquad (19.18f)$$

что тождественно с (19.18).

Как известно, [7] в классической (неквантовой) релятивистской механике элементарным частицам нельзя приписывать конечных размеров и они должны рассматриваться как точечные. С другой стороны, заряженная частица при таком рассмотрении обладает бесконечной собственной энергией, а, следовательно, и массой. Физическая бессмысленность такого результата в согласии с [7] требует ограничить основные принципы самой электродинамики определенными пределами.

Докажем, что в предлагаемой нами модели указанной выше трудности не возникает и собственная энергия отрицательного точечного заряда Q, содержащего в себе N электронов, конечна.

Для доказательства воспользуемся выражениями (19.18) и (19.3), (19.3a) при $R \to 0$. Полагая в (146) $Q = Ne$ и воспользовавшись известной асимптотической формулой [47]

$$\sqrt{\pi}z\exp(z^2)(1-\Phi(z)) \sim 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{(2z^2)^m}, \qquad (19.22)$$

находим при $z = \delta \gg 1$ выражение

$$A_0(R) \approx \frac{Q}{4R\delta^2}\Big(1-\frac{1}{2\delta^2}\Big) = \frac{2mc^2}{e}\Big(1-\frac{4mc^2R}{eQ}\Big)$$

$$W = \frac{QA_0}{2} = Nmc^2\Big(1-\frac{4mc^2R}{e^2N}\Big)$$

[1]Заметим, что последнее утверждение справедливо лишь для тонких заряженных проводящих оболочек, а не для сплошных металлических тел. Это связано с тем, что в поле связанных зарядов не выполняется вне зарядов уравнение Лапласа, что приводит к непостоянству потенциала внутри проводника, что будет показано далее.

Откуда при $R \to 0$ имеем

$$W = Nmc^2. \tag{19.23}$$

Для заряженной проводящей сферы "ускорение"отрицательно. Из (19.3а) находим на поверхности сферы выражение

$$A_0(R) = \frac{Q\exp(-\delta^2)\sqrt{\pi}}{2Ri\delta}\Big[\Phi(i\delta)\Big],$$

откуда находим при $z = \delta \gg 1$ выражение

$$A_0(R) = \frac{4mc^2}{e}.$$

При $R \to 0$ имеем для энергии поля связанных на сфере зарядов выражение

$$W = 2Nmc^2. \tag{19.23a}$$

Величина энергии точечной частицы оказалась независимой от знака и величины заряда. Из (19.23а) следует, что энергия поля отрицательно заряженной частицы с зарядом $Q = Ne$ определяется двойной энергией покоя ее N электронных масс.

В частности, для одного электрона "размазанного"на сфере радиуса $R \to 0$ собственная энергия поля совпадает с его удвоенной энергией покоя $W = 2mc^2$.

Классическая емкость проводящего шара равна его радиусу и, следовательно, равна нулю при рассмотрении точечной частицы. В нашем случае емкость точечного электрона в согласии с (19.23а) вычисляется по формуле

$$C^- = \frac{Q^2}{2W} = \frac{e^2}{4mc^2} = \frac{r_0}{4},$$

и оказывается в четыре раза меньше его классического радиуса.

В "нерелятивистском"приближении $\delta \to 0$ имеем

$$A_0(r) = \frac{Q}{r}, \qquad W = \frac{Q^2}{2R}$$

классические соотношения для потенциала и энергии заряженного проводящего шара.

Отметим, что величина энергии элементарной точечной частицы не зависит от знака и величины заряда. Таким образом, предлагаемый нами подход расширяет область применимости классической теории поля при переходе к достаточно малым расстояниям.

Говоря об электроне, следует соблюдать известную осторожность. Основной вопрос о природе электрона остается до сих пор невыясненным. Как говорил Эйнштейн, "электрон является чужаком в электродинамике". Из электродинамики трудно понять, как может конечный заряд электрона e, рассматриваемый как точечный или находящийся в очень малом объеме, сохраняться в качестве стабильного образования, вопреки действующими между его элементами кулоновыми силами отталкивания. Природа сил, препятствующих взрыву электрона под действием кулоновых сил, нам неизвестна. На решение этой проблемы можно надеяться лишь в общей теории элементарных частиц.

Как отмечено в [83], Пуанкаре "в 1906 году ввел поверхностное давление неизвестного происхождения, которое должно было действовать на электрон со всех сторон, как равномерно натянутая пленка".

Эта пленка эквивалентна нашей модели упругих нитей, закрепленных в центре и сдерживающих элементы заряда электрона от разбегания за счет кулоновых сил. В этом давлении Пуанкаре (или силах упругой деформации) должна по-видимому скрываться часть энергии покоя электрона. Поэтому электромагнитная масса электрона оказалась больше массы покоя. Часть электромагнитной массы оказалась ответственной за его устойчивость.

Аналогичная ситуация имеет место и в ОТО при рассмотрении полной энергии материи и постоянного гравитационного поля (т.е. полной массы тела), выражаемой через тензор энергии импульса одной только материи [7]. Эту задачу впервые рассмотрел Р. Толмен [108]. Исключая промежуточные выкладки, подробно проделанные в [7] и [108], приводим результат

$$P^0 = mc = \frac{1}{c}\int (T^0_0 - T^1_1 - T^2_2 - T^3_3)\sqrt{-g}dV.$$

Здесь P^0 - временная компонента 4 - импульса, dV - трехмерный (евклидов) элемент объема, g - 4 - мерный определитель метрического тензора.

Если в качестве источника в уравнениях Эйнштейна выбрать тензор энергии - импульса электромагнитного поля, то из равенств

$$T^\mu_\mu = 0, \quad T^{(0)(0)} = T^0_0,$$

вытекающих из тетрад в виде (7.1) с использованием метрики (19.4), и условиями сопутствия в форме

$$V^k = V_k = 0, \qquad V^0 = (g_{00})^{-1/2}, \qquad V_0 = (g_{00})^{1/2},$$

находим

$$P^0 = mc = \frac{2}{c}\int T^{(0)(0)}\sqrt{-g}dV.$$

Значение P^0 отличается от энергии поля W (17.16), (17.16f) множителем $2/c$. Если множитель $1/c$ вполне естественен, то наличие удвоения энергии связано с учетом не только энергии электрического поля, но и связанного с ним посредством уравнений Эйнштейна, гравитационного поля.

В нашем случае роль гравитационного поля выполняет поле сил связей, (давление Пуанкаре) которые препятствуют кулоновским силам отталкивания и сохраняют жесткость заряженной частицы. По этой причине в формуле (19.23a) происходит удвоение энергии.

Хотя потенциал A_0 и энергия W поля точечного заряда оказались конечными, однако выражение для закона Кулона, оказалось справедливым в тетрадах для всей области значений радиуса. Из поля тетрад (7.1), метрики (19.4) и формул (19.8a) и (19.9a) следует выражение

$$F_{(0)(1)} = \exp\Bigl(-\frac{\lambda+\mu}{2}\Bigr)F_{01} = \frac{Q}{r^2},$$

которое в точности совпадает с классическим выражением для напряженности поля точечного заряда. В [7] в качестве напряженности поля выбираются не тетрадные компоненты тензора поля, а их аффинные значения F_{0k}. Переход к пределу в (19.8a) и (19.9a) при $r = R$ и $R \to 0$ также приводит к выражению

$$F_{01} = \frac{Q}{R^2}.$$

Таким образом, для аффинных компонент тензора поля для больших $r \gg r_0$ и малых $r \ll r_0$ расстояний от заряда также справедлив закон Кулона, хотя для величин вблизи r_0 тетрадные и аффинные компоненты не совпадают.

Из анализа формул (19.3a) и (19.18) вытекает, что энергия электрического поля заряженной проводящей сферы при заданном заряде $Q = e$ и радиусе R имеет максимум при $R = 0.06r_0 = 1.68 * 10^{-14}$ см. Значение этого максимума для для сферы с зарядом электрона составляет $W_{max} = 2.565mc^2$.

При $R \to 0$, энергия не стремится к бесконечности, как при классическом рассмотрении, а стремится к величине $W = 2mc^2$. Итак, размер частицы, имеющей экстремальное давление Пуанкаре, составляет величину порядка $1.7 * 10^{-14}$ см.

Как показывают современные исследования в квантовой теории поля, справедливость закона Кулона выполняется до значений радиуса $r = 10^{-16}$ см. Поэтому старые нелинейные теории поля Г. Ми, М. Борна и М. Борна и Л. Инфельда, разобранные в монографиях [83] и [109], где нарушение закона Кулона происходит на расстояниях порядка классического радиуса электрона $r_0 \sim 10^{-13}$ см, не удовлетворяют современным теоретическим и экспериментальным данным.

Для нашего случая закон Кулона (в тетрадах, к которым и относятся показания приборов) справедлив для любого значения радиуса, что согласуется с современными измерениями.

В заключение раздела рассмотрим вопрос об электромагнитной массе и электромагнитном импульсе поля движущегося заряда (электрона). "Физические"компоненты 4 - импульса поля $P^{(\alpha)}$ движущейся частицы определим в согласии с формулой

$$P^{(\alpha)} = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}T^{\mu\nu}e_{\nu}^{(\alpha)}\,dS_{\mu} = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}T^{(0)(\alpha)}\,dV, \tag{19.23b}$$

в которой компонента $P^{(0)}$ равна энергии поля W (19.23a), поделенной на скорость света c, а пространственные тетрадные компоненты $P^{(k)}$ образуют трехмерный вектор импульса поля. Чтобы выполнить интегрирование в последней формуле, удобно выразить входящие в нее величины через величины СО, в которой электрон покоится. Все величины в этой системе будем обозначать со штрихом. Предположим, что электрон движется вдоль оси z. Так как в тетрадах, удовлетворяющих калибровке Ламе, которой мы здесь пользуемся, геометрические объекты имеют ту же самую структуру, что и в галилеевых координатах плоского пространства Минковского, то формулу (19.23b) представим в векторном виде

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c}\int \sqrt{-g}\vec{E}\times\vec{H}\,dV, \quad \vec{H} = \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}. \tag{19.23c}$$

Здесь $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{v}$ – векторы электрического, магнитного полей и скорости частицы соответственно.

Последний интеграл можно преобразовать к виду

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c}\int \sqrt{-g}\vec{E}\times\vec{H}\,dV = \frac{1}{4\pi c}\int \sqrt{-g}[\vec{v}E^2 - \vec{E}(\vec{v}\cdot\vec{E})]\,dV. \tag{19.23d}$$

Ясно, что в сопутствующей СО магнитное поле частицы равно нулю и $\vec{P} = 0$. Для вычисления интеграла воспользуемся следующими формулами, вытекающими из инвариантности 4 - объема, интервала и лоренцева преобразования полей

$$\sqrt{-g}dVcdt = \sqrt{-g'}dV'cdt', \quad dt' = dt\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad E_z = E'_z,$$

$$E_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}E'_y, \quad E_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}E'_x, \quad H_z = 0,$$

$$H_y = -\frac{\beta E'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad H_x = \frac{\beta E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Используя эти формулы, находим для отличной от нуля $P_z = P^{(3)}$ компоненты импульса поля выражение

$$P_z = \frac{v}{4\pi c^2\sqrt{1-\beta^2}}\int ({E'_x}^2 + {E'_y}^2)\sqrt{-g'}dV'.$$

Из сферической симметрии электрического поля в сопутствующей электрону СО имеем

$$P_z = \frac{2}{3}\frac{v}{4\pi c^2\sqrt{1-\beta^2}}\int E'^2\sqrt{-g'}dV' = \frac{4}{3}\frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}W, \tag{19.23e}$$

где энергия поля W определена в (19.18), а для точечной частицы - в (19.23а).

Наличие множителя 4/3 в последней формуле является трудностью как классической теории Максвелла, так и нашей модификации.

2. Поле с цилиндрической симметрией

Рассмотрим поле, обладающее цилиндрической симметрией, создаваемое тонким бесконечно длинным заряженным металлическим цилиндром.

Совместим ось z с осью цилиндра, выбрав начало координат в центре цилиндра. Расчет поля будем производить в цилиндрической системе координат, воспользуясь для нахождения потенциала формулой (19.1), где r' - трехмерное (евклидово) расстояние от заряда dQ до точки наблюдения , θ - угол между радиусом - вектором $\vec{r}$ и $\vec{i}$, $\vec{i} = \vec{a_0}/\mid \vec{a_0} \mid$. $\vec{i}$ для каждого элемента заряда dQ направлен к центру цилиндра перпендикулярно его поверхности. Величина "ускорения"a_0 для зарядов отрицательно заряженной цилиндрической поверхности (электронов) вычисляется по формуле (19.2).

Каждый из зарядов на проводнике будет находиться на поверхности цилиндра и испытывать со стороны создаваемого ими поля силу "отрицательного давления направленного по внешней нормали к поверхности [26]. Эта сила компенсируется силой со стороны решетки, удерживающей заряды на поверхности цилиндра. Таким образом, рассматриваемая физическая ситуация эквивалентна ситуации, в которой находятся заряды, связанные невесомыми нитями длины R равной радиусу цилиндра, закрепленные вдоль оси цилиндра. Следовательно, поле, создаваемое каждым из зарядов будет таким же, как если бы каждый из зарядов двигался равноускоренно с ускорением направленным к оси цилиндра. В согласии с (2.18) каждый из электронов на поверхности цилиндра принадлежит касательному плоскому пространству, но риманову пространству - времени. Поэтому операция интегрирования по поверхности цилиндра происходит в плоском пространстве и является корректной.

Из геометрических соображений легко получить формулу, связывающую величины r' и θ с радиальной координатой ρ и угловой координатой ϕ цилиндрических координат.

$$r' \cos\theta = R - \rho\cos\phi. \tag{19.24}$$

Элемент заряда dQ на поверхности цилиндра можно представить в виде

$$dQ = \sigma R d\phi dz = \frac{\gamma}{2\pi} d\phi dz, \tag{19.25}$$

где σ и γ соответственно поверхностная и линейная плотности зарядов.

В целях упрощения перейдем от тонкого цилиндра к заряженной нити, полагая $R \to 0$ и считая γ постоянной конечной величиной. В результате для потенциала A_0 получим выражение

$$A_0 = \frac{\gamma}{\pi}\int_0^{\pi} d\phi \exp\Big(-\frac{\rho a_0 \cos\phi}{2c^2}\Big)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\Big(-\frac{a_0\sqrt{\rho^2+z^2}}{2c^2}\Big)}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\, dz. \tag{19.26}$$

Вычисление интегралов приводит к соотношению

$$A_0 = 2\gamma I_0(\alpha)K_0(\alpha), \qquad \alpha = \frac{\rho a_0}{2c^2} = \frac{\rho e E_0}{4mc^2}. \tag{19.27}$$

В последнем соотношении E_0 - напряженность поля на поверхности цилиндра, I_0, K_0 - цилиндрические функции Бесселя в общепринятых обозначениях [82].

Найдем геометрию пространства-времени вне заряженной нити и вычислим энергию поля, созданную зарядами этой нити.

Совокупность электронов на поверхности цилиндра не принадлежит конгруенции мировых линий базиса НСО (2.18), а включаются в совокупность мировых линий частиц базиса, принадлежащих цилиндрически - симметричной лагранжевой сопутствующей НСО с метрикой вида

$$dS^2 = \exp(\nu)(dy^0)^2 - \exp(\lambda)d\rho^2 - \rho^2 d\phi^2 - dz^2. \tag{19.28}$$

где ν и λ зависят только от ρ.

Функции $\nu(\rho)$ и $\lambda(\rho)$ нуждаются в определении. Для их нахождения воспользуемся решением цилиндрически-симметричных статических уравнений Максвелла с использованием метрики (19.28), аналогичных по записи уравнениям электродинамики в "заданном гравитационном поле"[7]. Затем сравним полученное решение с выражением для поля, получаемом из (19.27).

Для отличной от нуля радиальной компоненты "индукции" D^1 имеем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\exp(\lambda/2)D^1\Big) = 0, \tag{19.29}$$

решением которого будет

$$D^1 = \frac{2\gamma}{\rho}\exp(-\lambda/2). \tag{19.30}$$

В (19.29) и (19.30) между "индукцией"D^1 напряженностью поля E^1 и компонентой тензора поля F_{01} существуют известные [7] соотношения

$$D_1 = \gamma_{11} D^1 = \frac{2\gamma}{\rho}\exp(\lambda/2) = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}E_1, \quad E_1 = F_{01}, \quad \gamma_{kl} = -g_{kl}, \tag{19.31}$$

где γ_{kl} - пространственный метрический тензор с определителем равным γ.

Ясно, что уравнения Максвелла не определяют функций $\nu(\rho)$ и $\lambda(\rho)$.

Из (19.27) находим отличные от нуля компоненты $F_{01} = -F_{10}$

$$F_{01} = -\frac{\partial A_0}{\partial \rho} = \frac{\gamma a_0}{c^2}(K_1(\alpha)I_0(\alpha) - I_1(\alpha)K_0(\alpha)). \tag{19.32}$$

Приравнивая (19.32) выражению F_{01} из (19.31), находим уравнение, связи на функции $\nu(\rho)$ и $\lambda(\rho)$

$$\exp\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right) = \alpha(K_1(\alpha)I_0(\alpha) - I_1(\alpha)K_0(\alpha)) = \frac{\rho}{2\gamma}F_{01}. \tag{19.33}$$

Для нахождения второго уравнения, связывающего эти функции, рассмотрим силу со стороны поля, действующую на пробный заряд q, закрепленный в точке с координатой ρ от оси нити. Пусть масса пробного заряда m_0. Тогда вектор первой кривизны F^1 мировой линии этого заряда можно найти из соотношения (1.5), записав для закрепленных зарядов условие сопутствия для метрики (19.28) в виде

$$V^k = V_k = 0, \qquad V^0 = (g_{00})^{-1/2},$$
$$V_0 = (g_{00})^{1/2}, \quad F^1 = F(\rho), \quad F^0 = F^2 = F^3 = 0. \tag{19.34}$$

Откуда из (1.5) имеем

$$F^1 = \frac{1}{2}\frac{d\nu}{d\rho}\exp(-\lambda). \tag{19.35}$$

Эту же величину можно найти и из силы, действующей на заряд со стороны связи, удерживающей заряд в поле неподвижным. Эта сила численно равна силе со стороны поля и противоположна ей по знаку.

$$F^1 = \frac{1}{2}\frac{d\nu}{d\rho}\exp(-\lambda) = -\frac{q}{m_0c^2}F^{10}V_0 =$$
$$-\frac{2\gamma q}{m_0c^2\rho}\exp(-\lambda/2). \tag{19.36}$$

Из (19.32)-(19.36) находим

$$\exp(\nu/2) = -\frac{q}{m_0c^2}\int F_{01}\,d\rho = \frac{qA_0}{m_0c^2} + {}_1, \tag{19.37}$$

где C_1 - постоянная интегрирования.

Постоянную интегрирования определим из вида асимптотики A_0 на больших расстояниях от нити. Хорошо известно, что при классическом рассмотрении потенциал A_0 на больших расстояниях от нити логарифмически расходится.

Для рассматриваемого нами случая это не так. Докажем это.

В тетрадах (17.10) на основе формул (19.30), (19.31) $F_{(0)(1)}$ компонента тензора электромагнитного поля имеет вид

$$F_{(0)(1)} = \frac{2\gamma}{\rho}. \tag{19.38}$$

На поверхности цилиндра величина поля E_0 совпадает с тетрадной компонентой $F_{(0)(1)}$. Поэтому для величины α имеем

$$\alpha = \frac{\rho a_0}{2c^2} = \frac{\rho e E_0}{4mc^2} = \frac{\rho e \gamma}{R2mc^2}, \quad \rho \geq R. \tag{19.39}$$

Из анализа (19.39) следует, что $\alpha \to \infty$ при $\rho \to \infty$. Для больших расстояниях от нити можно воспользоваться известными асимптотическими разложениями для функций Бесселя [82].

$$I_0(\alpha) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}} e^{\alpha}, \quad K_0(\alpha) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha} \tag{19.40}$$

Это приводит для компоненты 4 - потенциала $_0$ к выражению

$$A_0(\alpha) = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2mc^2 R}{e\rho}, \tag{19.41}$$

Отсюда следует, что при $\rho \to \infty$, $A_0 \to 0$.

Итак, мы доказали, что для нашего случая поведение A_0 на бесконечности резко отличается от классического аналога: вместо расходящейся величины мы получили величину стремящуюся к нулю.

Это дает возможность постоянную интегрирования C_1 определить из (19.37) из требования обращения g_{00} в единицу на бесконечности. В результате из (19.37) имеем

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{qA_0}{m_0 c^2}. \tag{19.42}$$

Используя (19.33), находим

$$\exp(\lambda/2) = -\frac{\rho}{2\gamma} \frac{\partial A_0}{\partial \rho} \frac{1}{1 + \frac{qA_0}{m_0 c^2}}. \tag{19.43}$$

Для слабых полей при $\alpha \ll 1$, используя известные разложения для функций Бесселя [82]

$$I_0(\alpha) \simeq 1, \quad K_0(\alpha) \simeq -(\ln(\alpha/2) + C), \tag{19.44}$$

находим

$$A_0(\alpha) \simeq -2\gamma\Big(\ln\Big(\frac{\rho a_0}{2c^2}\Big) + C\Big), \quad -\frac{\partial A_0}{\partial \rho} \simeq \frac{2\gamma}{\rho}, \tag{19.45}$$

где $C = 0.57721566490...$ - есть постоянная Эйлера.

(19.45) с точностью до значения постоянных в потенциале совпадает с классическим выражением. Однако метрика пространства-времени даже в случае слабого поля остается римановой, определяется формулой (19.42), а вместо (19.43) имеем

$$\exp(\lambda/2) = \frac{1}{1 + \frac{qA_0}{m_0 c^2}}. \tag{19.46}$$

Вычислим энергию поля от элемента заряженной нити длины h, воспользуясь формулами (17.16) -(17.18), (19.18). Для тетрадной компоненты $T^{(0)(0)}$ тензора энергии-импульса имеем выражение

$$T^{(0)(0)} = \frac{\gamma^2}{2\pi\rho^2} \tag{19.47}$$

$$W = \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} V_\nu \, dS_\mu = \frac{h\gamma}{2} \int_R^\infty F_{01} \, d\rho$$

$$= -\frac{h\gamma}{2} \int_R^\infty \frac{\partial A_0}{\partial \rho} \, d\rho = \frac{A_0(R)\gamma h}{2} - \frac{A_0(\infty)\gamma h}{2}, \tag{19.48}$$

Так как по доказанному в (19.41) $A_0(\infty) = 0$, а нить по условию имеет радиус $R \to 0$, то соотношение (19.48) на основе (19.39) примет вид

$$W = \frac{A_0(R)\gamma h}{2} = \gamma^2 h I_0\Big(\frac{e\gamma}{2mc^2}\Big) K_0\Big(\frac{e\gamma}{2mc^2}\Big). \tag{19.49}$$

Из формулы (19.49) следует, что энергия поля внутри цилиндра длины h и бесконечного радиуса является конечной величиной, что резко отличается от классического значения энергии заряженной нити, которая бесконечно велика.

При плотной упаковке зарядов на нити, т.е. при выполнении условия

$$\frac{e\gamma}{2mc^2} \gg 1 \tag{19.50}$$

имеем для энергии выражение

$$W = \frac{\gamma h m c^2}{e} = N m c^2, \tag{19.51}$$

где N - число электронов на длине h нити.

Итак, для трех видов симметрии (плоской, сферической и цилиндрической), энергия поля, создаваемая точечными зарядами, не расходится, как это имеет место при классическом рассмотрении, а определяется энергией покоя зарядов, создающих поле. При этом величина заряда выпадает из формул для энергии.

Обратим внимание на то, что в отличие от аналогичной формулы (19.23a), в формулах (19.51) и (17.16i) удвоения энергии не происходит. Причина связана с характером рассматриваемых моделей распределения зарядов. Очевидно, что при сферическом распределении зарядов поверхностная плотность заряда постоянна, поэтому давление Пуанкаре дает естественный вклад в энергию поля. При рассмотрении заряженной плоскости и заряженной нити, поверхностная плотность и линейная плотность заряда для простоты расчета были выбраны постоянными по определению. На самом деле плотность зарядов на проводящей плоскости и на нити не может быть постоянной, так как кулоновское отталкивание должно привести к растеканию зарядов и увеличению плотностей на краях по сравнению с плотностями в центре. (Всякая реальная плоскость и нить имеет всегда конечные размеры). Для того, чтобы растекания зарядов не происходило, и плотность зарядов была постоянна по поверхности или по длине, необходимо "приклеить"заряды на плоскости или по длине нити. Силы, необходимые для удерживания на плоскости (нити) "приклеенных"зарядов, в расчетах не учитывались. Учитывалась лишь энергия сил связи перпендикулярных плоскости (нити), препятствующих зарядам покинуть заряженное тело. Для тел сферической формы растекания зарядов по сфере не происходит. Силы связи не содержат касательных поверхности сферы составляющих. И "приклеивать"заряды для поддержания постоянной плотности на сфере нет необходимости. Поэтому силы реакции связи на сфере полностью участвуют во вкладе в энергию, а на нити и плоскости энергия части сил связи (касательных плоскости или нити) в расчет не входит. Отсюда можно понять качественно различие в величинах энергии.

20. Жесткая, безвихревая, сферически-симметричная НСО

Рассмотрим в пространстве Минковского центрально - симметричное движение сплошной среды, происходящее из некоторой точки, в которой помещено начало координат. Очевидно, что для наблюдателей в лагранжевой сопутствующей системе отсчета расстояние между соседними элементами среды будет изменяться во времени, т.е. такая система не является жесткой . Так как все точки среды, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра, имеют одинаковые скорости и ускорения , то такая среда движется без вращений . Таким образом, для такой НСО тензор угловой скорости вращения равен нулю, а тензор скоростей деформаций и поле векторов первой кривизны отлично от нуля. Если для рассматриваемой НСО потребовать выполнения условия жесткости, то из анализа уравнения структуры (1.7) следует , что в пространстве Минковского не существует сферически - симметричной НСО, имеющих радиальное ускорение отличное от нуля и равный нулю тензор скоростей деформаций. Иными словами, в пространстве Минковского невозможно жесткое радиальное движение сплошной среды.

В римановом пространстве такая ситуация возможна. Это следует, например, из условия статического равновесия в сферически - симметричном гравитационном поле, описываемой метрикой Шварцшильда [7]. Для наблюдателей, покоящихся на поверхности неподвижной гравитирующей сферы, с точки зрения ОТО ускорение отлично от нуля и направлено от центра перпендикулярно поверхности, в то время как для наблюдателей, придерживающихся ньютоновской точки зрения, ускорение равно нулю. И, наоборот, свободное падающее тело в ньютоновском поле тяжести имеет отличное от нуля ускорение, а в шварцшильдовом поле движется по геодезической линии с нулевым ускорением. Более полно эти вопросы обсуждаются в работах [40] , [41] . Метрику сферически - симметричной лагранжевой сопутствующей НСО по аналогии с ОТО [7] ищем в виде

$$dS^2 = \exp(\nu)(dy^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \exp(\lambda)(dr)^2, \qquad (20.1)$$

где ν и λ зависят только от r.

НСО (20.1) является очевидно жесткой, т.к. метрические коэффициенты не зависят от времени, а равенство нулю компонент g_{0k} говорит об отсутствии вращений. Система (1.1) с учетом сформулированных требований, а также выполнения условий сопутствия

$$V^k = V_k = 0, \quad V^0 = (g_{00})^{-1/2}, \quad V_0 = (g_{00})^{1/2},$$
$$F^1 = F(r), \qquad F^0 = F^2 = F^3 = 0$$

сводится к одному уравнению

$$F^1 = \frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\exp(-\lambda). \tag{20.2}$$

Можно убедиться , что структурные уравнения (1.7) удовлетворяют (20.2) без дополнительных связей на функции $\nu(r)$ и $\lambda(r)$. Таким образом, по заданному полю векторов первой кривизны F^1 нельзя однозначно без привлечения дополнительных факторов определить метрику (20.1).

Рассмотрим некоторые простейшие возможности. Проведем следующий мысленный эксперимент.

а). Пусть наблюдатели, находящиеся на поверхности земли, вращения которой не учитываем, плотность считаем постоянной, а форму сферической, измеряют гравитационное поле с помощью акселерометров. Они найдут, что поле ускорений направлено по радиусу от центра перпендикулярно поверхности. Для измерения поля вдали от поверхности используем множество радиальных невесомых жестких стержней, вдоль которых установим систему акселерометров. Совокупность стержней и акселерометров задает базис радиальноускоренной жесткой системы отсчета. Действительно, по мере удаления от поверхности земли поле ускорений будет уменьшаться, подчиняясь (в нулевом приближении) закону всемирного тяготения Ньютона. Если наблюдатели считают , свое пространство плоским , а закон всемирного тяготения точным , то метрика (20.1) будет иметь вид [18] .

$$dS^2 = \exp(-r_g/r)(dy^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - (dr)^2, \tag{20.3}$$

где $r_g = 2kM/c^2$ носит название гравитационного радиуса . При выводе (20.3) учли, что по определению плоского пространства $\lambda = 0$, а ν нашли из (20.2) и закона тяготения Ньютона.

Итак, хотя метрика пространства - плоская , метрика пространства - времени (20.3) оказалась римановой. Таким образом, ньютоновская теория гравитации в плоском пространстве допускает два логически непротиворечивых толкования.

В согласии с общепринятой трактовкой в ньютоновской теории плоским является не только пространство, но и пространство - время. При этом на тело, находящееся на поверхности земли, действуют две силы , сила тяжести и сила реакции опоры , которые в сумме дают ноль и поэтому не сообщают телу никакого ускорения.

В нашей трактовке на тело, покоящееся относительно поверхности земли, действует только одна сила - сила реакции опоры, которая сообщает телу ускорение, измеряемое акселерометром, вычисляемое по формуле (20.2) с использованием метрики (20.3). Если опору убрать, то тело будет двигаться по геодезической линии в пространстве - времени с метрикой (20.3), в то время как при обычной трактовке при отсутствии опоры тело будет двигаться в плоском пространстве - времени под действием силы тяжести.

Модифицированная нами ньютоновская трактовка ближе к эйнштейновской, чем чисто ньютоновская. Можно показать, воспользуясь [42], что расчет смещения перицентра за один оборот по метрике (20.3) в три раза меньше, чем по метрике Шварцшильда. Изменение направления луча света при прохождении вблизи центрального тела по (20.3) в два раза меньше щварцшильдовского. Поэтому предлагаемая модель, не претендуя на замену ОТО, устанавливает более тесную связь между ньютоновской и эйнштейновской теориями, показывая , что ньютоновскую теорию можно рассматривать в римановом пространстве - времени. Если в ньютоновском приближении рассматриваемая трактовка совпадает с экспериментальными данными, то более тонких эффектов, которые объясняет ОТО, модель не учитывает.

Попытаемся модифицировать модель так, чтобы она точнее соответствовала данным наблюдений.

б).При выводе (20.3) предполагалось, $\lambda = 0$, что соответствует модели плоского пространственного сечения. В качестве системы отсчета вне земли выбиралась система жестких недеформируемых стержней, по которым звук распространяется с бесконечно большой скоростью, что противоречит конечности скорости распространения взаимодействия. Поэтому для устранения этого недостатка модели будем считать , как и в ОТО, что структура базиса радиальноускоренной НСО вне земли эквивалентна некоторой упругой среде , подверженной деформациям, а, следовательно, и напряжениям, но имеющей равный нулю тензор скоростей деформаций. Из вида метрики (20.1) следует, что мы рассматриваем лишь малые радиальные смещения упругой среды, для которых отлична от нуля (в обозначениях [43]) в сферических координатах лишь радиальная $u_{rr} = \partial u_r/\partial r$ компонента тензора деформаций. Что касается компонент $u_{\theta\theta} = u_{\phi\phi} = u_r/r$, то они пренебрежимо малы по сравнению с u_{rr} и в рассматриваемой модели не учитываются.

Связь между тензорами деформаций и напряжений удобнее определить в лагранжевой сопутствующей НСО, рассматривая упругую среду без сдвиговых напряжений, для которой справедлив закон Гука в виде [44]

$$P^{ij} = \tilde{\lambda} I_1 \gamma^{ij}, \qquad I_1(\varepsilon) = \gamma^{kl}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(1 - \exp(-\lambda)), \tag{20.4}$$

где I_1 - первый инвариант тензора деформаций , $\tilde{\lambda}$ - кооэффициент Ламе, $\gamma^{ij} = -g^{ij}$ - метрика пространственного сечения (20.1).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij} - \gamma'_{ij})$$

γ'_{ij} - метрический тензор плоского пространства в сферических координатах.

Упругая среда должна удовлетворять уравнению неразрывности

$$\nabla_\mu(\rho V^\mu) = 0$$

Решение уравнения неразрывности приводит к соотношению [44], [45]

$$\rho = \rho_0 \exp(-\lambda/2), \tag{20.5}$$

где ρ_0 - плотность "среды "в недеформированном состоянии.

Уравнения "движения "упругой среды в лагранжевой НСО имеют вид аналогичный условию равновесия упругой среды в ньютоновском поле тяжести [43] при классическом рассмотрении

$$\nabla_j P^{ij} = -\rho_0 a^j, \tag{20.6}$$

где ^{j} - "нефизические аффинные компоненты ускорения, а поднятие и опускание тензорных индексов и вычисление ковариантной производной производится с помощью пространственной метрики γ_{ij}. Полагая , что физические или тетрадные компоненты ускорения соответствуют, (как и в случае а).), ньютоновскому значению, из (20.6) и (20.5) имеем в сферических координатах выражение

$$\exp(-\lambda)\frac{d\lambda}{dr} = -2\frac{\rho_0 kM}{\tilde{\lambda}r^2}, \tag{20.7}$$

интегрирование которого при условии, что на бесконечности пространство плоское ($\lambda = 0$) приводит к соотношению

$$\exp(-\lambda) = \Big(1 - \frac{2kM}{c_0^2 r}\Big), \qquad c_0^2 = \frac{\tilde{\lambda}}{\rho_0}, \tag{20.8}$$

где $_0$ - продольная скорость звука.

Учитывая, что вектор первой кривизны

$$F^1 = {}^{-2}a^1 = (\gamma_{11})^{-1/2}kM/(cr)^2$$

, используя (20.2) и (20.7), получаем уравнение для ν, интегрирование которого при условии, что на бесконечности $\nu = 0$ дает

$$\nu = 2\Big(\frac{c_0}{c}\Big)^2\Big(\sqrt{1 - \frac{2kM}{{c_0}^2 r}} - 1\Big). \tag{20.9}$$

Предел выражений (20.8) и (20.9) при $c_0 \to \infty$ - приводит к метрике (20.3), что соответствует модели абсолютно твердого тела в ньютоновском смысле. Релятивистски жестким телом [46] назовем такое тело, продольная скорость звука в котором равна скорости света в вакууме. При этом выражение (20.8) в точности совпадает с γ_{11} компонентой метрики Шварцшильда в стандартной форме, а из (20.9) получается g_{00} компонента этой метрики, если разложить $\exp(\nu)$ в ряд и сохранить лишь первый порядок малости по (r_g/r).

Итак, для сферически - симметричной жесткой НСО, базисом которой является релятивистски жесткое тело, а ускорение соответствует ньютоновскому , метрика имеет вид (20.1), где ν определяется из (20.9) при скорости звука c_0 равной скорости света в вакууме , а λ при тех же условиях из (20.8). Окончательный результат представим в виде

$$dS^2 = \exp\Big\{2\sqrt{1 - \frac{2kM}{{c_0}^2 r}} - 2\Big\}(dy^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2kM}{c_0^2 r}}. \tag{20.10}$$

Расчет известных эффектов ОТО по метрике (20.10) лишь незначительно отличается от расчета, использующего метрику Шварцшильда. Отличие проявляется в расчете смещения перицентра, который составляет 5/6 от шварцшильдовского. Изменение направления луча света при прохождении вблизи центрального тела совпадает с щварцшильдовским. Поэтому модифицированная модель значительно ближе соответствует ОТО, чем (20.3).

Из рассмотренного здесь круга вопросов следует, что последовательное определение физической системы отсчета, как тела отсчета с заданными физическими свойствами, привело к существенному сближению теорий гравитации Ньютона и Эйнштейна. Наделение систем отсчета физическими свойствами в некотором смысле эквивалентно введению квантовомеханического принципа дополнительности в ньютоновскую теорию гравитации. Геометрия пространства-времени при таком подходе зависит от средств, с помощью которых она наблюдается. Точно так же, как и в квантовой механике атомные системы нельзя описывать независимо от средств наблюдений.

21. О моделировании полей гравитации

В рамках общей теории относительности (ОТО) рассмотрено моделирование центрально-симметричного гравитационного поля. Установлено отображение геодезического движения базисов Леметра и Толмана на движение этих же базисов в пространстве Минковского по мировым линиям. Получено выражение для напряженности и энергии поля, в котором движутся эти базисы. Найдена преимущественная система координат, координаты и время которой совпадает с галилеевыми координатами и временем в пространстве Минковского.

Общие положения моделирования

При физическом осмысливании решений уравнений Эйнштейна особенно в случае сильных гравитационных полей, приходится неизбежно сталкиваться с трудностью интерпретации решений. Дело в том, что в пространстве Римана отсутствует понятие радиуса–вектора, а временная координата не является временем, как это имеет место в пространстве Минковского в галилеевых координатах. Очевидно, что для физического истолкования результатов ОТО полезно (если это возможно) переформулировать их на язык СТО в плоском пространстве–времени. Подробный анализ трудностей ОТО дан в работах [3], [1], [6]. В настоящей работе, оставаясь в рамках теории Эйнштейна, предпринята попытка отобразить геодезическое движение пробных частиц в пространстве Римана на движение по мировым линиям в пространстве Минковского. Подобный круг вопросов рассматривался в работах [56], [57], [58], но не получил окончательного решения.

Будем считать, что в пространстве Минковского V_4 с сигнатурой $(+---)$ в некотором силовом поле движется сплошная среда, закон движения которой в переменных Лагранжа имеет вид:

$$x^\mu = x^\mu(y^k, \xi^0), \tag{21.1}$$

где x^μ — эйлеровы, а y^k — лагранжевы координаты, постоянные вдоль каждой фиксированной мировой линии частицы среды; ξ^0/c — некоторый временной параметр. Греческие индексы изменяются от нуля до трех, латинские — от единицы до трех. Считаем, что частицы среды не взаимодействуют друг с другом, а взаимодействуют лишь с внешним полем.

По аналогии с электродинамикой [7] действия для пробной частицы в силовом поле задаем в виде

$$S = -\int_a^b mc(ds + \alpha A_\mu dx^\mu), \qquad \alpha \equiv \frac{e}{mc^2}, \tag{21.2}$$

где для каждой из частиц среды интервал ds вдоль мировых линий есть $ds = V_\mu dx^\mu$, V^μ — четырехмерная скорость.

Из вариации действия вытекают уравнения движения [7]

$$\frac{DV_\mu}{ds} = \alpha F_{\mu\nu} V^\nu, \tag{21.3}$$

где тензор поля $F_{\mu\nu}$ определяется как

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{21.4}$$

С другой стороны, можно ввести эффективный интервал $d\tilde{s} = ds + \alpha A_\mu dx^\mu$ так что действие (21.2) представляется в форме

$$S = -mc \int d\tilde{s}, \tag{21.5}$$

вариация которого приводит к движению пробной частицы по геодезической линии в некотором римановом пространстве [7].

$$\frac{dU_\mu}{d\tilde{s}} + \tilde{\Gamma}_{\mu,\nu\epsilon} U^\nu U^\epsilon = 0. \tag{21.6}$$

Очевидно, что уравнения (21.3) и (21.6) должны быть эквивалентны.

Из выражения для эффективного интервала $d\tilde{s}$ вдоль геодезической линии следует, что

$$d\tilde{s} = (V_\mu + \alpha A_\mu) dx^\mu \equiv U_\mu dx^\mu, \qquad U_\mu \equiv V_\mu + \alpha A_\mu,$$

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tilde{s}} = \frac{dx^\mu}{ds}\frac{ds}{d\tilde{s}} = PV^\mu, \qquad P \equiv (1 + \alpha A_\epsilon V^\epsilon)^{-1}. \tag{21.7}$$

Кроме того, связь между ковариантными U_ν и контравариантными U^μ векторами 4–скорости в пространстве Римана имеет вид

$$U_\nu = g_{\nu\mu} U^\mu = V_\nu + \alpha A_\nu. \tag{21.8}$$

Условия (21.3), (21.4), (21.6), (21.7), (21.8) будут совместны, если метрический тензор пространства Римана $g_{\mu\nu}$ будет иметь вид:

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \alpha^2 A_\mu A_\nu + \alpha A_\mu V_\nu + \alpha A_\nu V_\mu, \tag{21.9}$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ — метрический тензор в пространстве Минковского.

Таким образом, движение пробной частицы можно рассматривать с двух точек зрения:

1. Движение по мировой линии в пространстве Минковского в силовом поле (21.3) с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$.

2. Движение в пространстве Римана по геодезической линии с метрикой $g_{\mu\nu}$, определяемой по формуле (21.9).

Соотношения между 4–скоростями в разных пространствах определяются формулами (21.7), (21.8). При этом, в двух пространствах выбрана общая координация. В отличие от электродинамики структура тензора поля $F_{\mu\nu}$ в формуле (21.4) не конкретизирована, т.е. для $F_{\mu\nu}$ не заданы полевые уравнения.

Пусть пробные частицы движутся в гравитационном поле. Тогда "заряд"$e = m$, а метрика (21.9) должна удовлетворять уравнениям Эйнштейна с пылевидным тензором энергии–импульса.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi k}{c^4} \epsilon U_\mu U_\nu . \tag{21.10}$$

Если в результате решения уравнений (21.10), найденные $g_{\mu\nu}$ и U_ν обеспечат выполнение равенств (21.8) и (21.9), то тем самым будет найдено поле 4–скорости V_μ, потенциалы A_μ и тензор поля $F_{\mu\nu}$ в пространстве Минковского, т.е. построено отображение поля кривизны пространства Римана на силовое поле плоского пространства–времени.

Установим связь между конгруенциями мировых линий в пространстве Минковского и конгруенциями геодезических линий в пространстве Римана, которые в общей координации даются соотношением (21.1). В силу соотношения (21.9) в пространстве–времени введены два метрических тензора $g_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$ и, следовательно, существуют две связности $\tilde{\Gamma}^\epsilon{}_{\mu\nu}$ и $\Gamma^\epsilon{}_{\mu\nu}$, первая из которых относится к пространству Римана, а вторая — к пространству Минковского, в котором могут быть введены криволинейные координаты. Таким образом, в общей координации возникают две различных ковариантных производных $\tilde{\nabla}_\nu$ и ∇_ν.

Из соотношения (21.8) имеем

$$\tilde{\nabla}_\nu U_\mu = -S^\epsilon{}_{\nu\mu} U_\epsilon + \nabla_\nu V_\mu + \alpha \nabla_\nu A_\mu ,$$

$$S^\epsilon{}_{\nu\mu} = \tilde{\Gamma}^\epsilon{}_{\nu\mu} - \Gamma^\epsilon{}_{\nu\mu} , \tag{21.11}$$

где $S^\epsilon{}_{\nu\mu}$ — тензор аффинной деформации связности. Из (11), альтернируя, находим

$$2\tilde{\nabla}_{[\nu} U_{\mu]} = 2\nabla_{[\nu} V_{\mu]} - \alpha F_{\mu\nu} , \tag{21.12}$$

Для геодезических конгруенций без вращений имеют место равенства

$$\tilde{\nabla}_{[\nu} U_{\mu]} = 0; \qquad 2\nabla_{[\nu} V_{\mu]} = \alpha F_{\mu\nu} . \tag{21.13}$$

Свертывая (21.13) с V^ν, снова получаем соотношение (21.3). Из равенств (21.13) и (21.7) имеем

$$U_\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = V_\mu + \alpha A_\mu , \tag{21.14}$$

что позволяет представить метрику (21.9) в форме

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} - V_\mu V_\nu . \tag{21.15}$$

Для контравариантных компонент имеем

$$g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + P^2 V^\mu V^\nu \left(1 + \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta} \right)$$

$$-P\left(V^\mu\gamma^{\nu\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\sigma}+V^\nu\gamma^{\mu\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\sigma}\right), \tag{21.16}$$

где в согласии с (21.7)

$$P=(1+\alpha\gamma_{\epsilon\sigma}A^\epsilon V^\sigma)^{-1}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^\epsilon}V^\epsilon\right)^{-1}=\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^{-1}. \tag{21.17}$$

Из равенств (21.9), (21.14) и (21.15) следует

$$g_{\mu\nu}-U_\mu U_\nu=\gamma_{\mu\nu}-V_\mu V_\nu, \tag{21.18}$$

т.е. проекционные операторы, определяющие пространственную геометрию гиперповерхностей ортогональных мировым линиям в пространстве Минковского и гиперповерхностей ортогональных геодезическим линиям в пространстве Римана, являются инвариантами соответствия [59].

Моделирование метрики Шварцшильда и Леметра

Рассмотрим некоторые частные случаи отображений.

Пусть в пространстве Минковского по радиусу к центру движется пылевидная сплошная среда. Рассмотрим случай стационарного движения, что означает независимость от времени поля скоростей в переменных Эйлера и потенциалов A_μ. На языке ОТО это соответствует постоянному гравитационному полю.

Для того чтобы метрический тензор (21.15) не зависел явно от времени и переходил на бесконечности к галилеевому виду, необходимо обращение скорости на бесконечности в нуль. При этом, должны выполняться равенства:

$$\Phi=x^0+\Psi(x^k),\qquad V_a=-V(r)n_a=-V(r)\frac{x_a}{r}. \tag{21.19}$$

Используя формулы (21.15) и (21.19), найдем выражения для трехмерного метрического тензора $\tilde\gamma_{kl}=-g_{kl}+g_{0k}g_{0l}/g_{00}$; трехмерного вектора $g_l=-g_{0l}/g_{00}=-g_{0l}/h$; трехмерного антисимметричного тензора $f_{kl}=\partial g_l/\partial x^k-\partial g_k/\partial x^l$, [7]. В результате получаем:

$$g_{00}=h=1-V^2,\quad g_l=n_l\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial r}+V_0V}{h},\quad f_{kl}=0,\quad {V_0}^2-V^2=1,$$

$$\tilde\gamma_{kl}=\delta_{kl}+D(r)n_kn_l,\quad D\equiv\frac{2V^2+2V_0V\frac{\partial\Phi}{\partial r}+V^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2}{1-V^2},$$

$$\tilde\gamma^{kl}=-g^{kl}=\delta^{kl}+Tn^kn^l,\quad n^k=n_k,\quad V^0=V_0,$$

$$\tilde\gamma^{kl}\tilde\gamma_{ln}=\delta^k{}_n,\quad T=-\frac{2V^2+2V_0V\frac{\partial\Phi}{\partial r}+V^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2}{\left(V^0+V\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2}. \tag{21.20}$$

Уравнения Эйнштейна для случая постоянного гравитационного поля в пустоте (считаем, что пылевидная среда сильно разряжена и сама поля не создает) [7] сведутся к двум независимым выражениям

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\frac{\partial F}{\partial r}}{\sqrt{1+D}}\right)=0,\quad F\equiv\sqrt{h}=\sqrt{1-V^2},$$

$$D + \frac{r}{2}\frac{\partial D}{\partial r}\frac{1}{(1+D)} = \frac{r}{F}\frac{\partial F}{\partial r}, \tag{21.21}$$

решение которых имеет вид

$$D = \frac{r_g/r}{1 - r_g/r}, \quad F = \sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad r_g \equiv \frac{2kM}{c^2}. \tag{21.22}$$

Из соотношений (21.20) и (21.22) находим нулевую и радиальную компоненты поля 4–скорости в пространстве Минковского в переменных Эйлера, а также функцию Φ.

$$V_0 = V^0 = \left(1 + \frac{r_g}{r}\right)^{1/2}, \quad V^1 = V = -\sqrt{\frac{r_g}{r}},$$

$$V_0 + V\frac{\partial \Phi}{\partial r} = V^\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x^\epsilon} = \frac{d\Phi}{ds} = 1. \tag{21.23}$$

Таким образом, $\Phi/c = \tau = s/c$ совпала с собственным временем частиц базиса в пространстве Минковского и Римана.

Из (21.23), (21.7) и (21.14) следует $(1 + \alpha A_\mu V^\mu) = P^{-1} = 1$, что приводит к равенству контравариантных компонент 4–скоростей $U^\mu = V^\mu$ базисных частиц в плоском и искривленном пространстве–времени. Ковариантные компоненты U_μ и V_μ связаны соотношением (21.14).

Интегрируя уравнение (21.23) для Φ с учетом (21.19), находим

$$\Phi = c\tau = s = x^0 + \frac{2}{3}r_g\left\{\frac{r}{r_g} + 1\right\}^{3/2} - \frac{2}{3}\frac{r^{3/2}}{{r_g}^{1/2}}. \tag{21.24}$$

Используя (21.20), (21.23), (21.24), получаем выражение для элемента интервала "оригинала"в сферических координатах Эйлера и времени T пространства Минковского ("модели"), найденную ранее автором из других соображений [59].

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 = c^2dT^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - dr^2\left\{2\left[\frac{r}{r_g}\left(\frac{r}{r_g} + 1\right)\right]^{1/2} - 2\frac{r}{r_g} + \frac{r_g}{r}\right\} \\ +2cdTdr\left[\left(1 + \frac{r}{r_g}\right)^{1/2} - \left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2} - \frac{r_g}{r}\left(1 + \frac{r}{r_g}\right)^{1/2}\right] \\ -r^2(\sin^2\Theta d\varphi^2 + d\Theta^2). \end{aligned} \tag{21.25}$$

Зная поле 4–скорости в переменных Эйлера, найдем закон движения сплошной среды в переменных Лагранжа (21.1), выбрав в качестве временного параметра ξ^0 собственное время $\tau = \Phi/c = s/c$. Из (23) имеем $dr/ds = V = -(r_g/r)^{1/2}$. Интегрируя, получаем $R - s = 2/3(r^{3/2}/{r_g}^{1/2})$, где R — постоянная интегрирования.

С учетом (21.24) в результате находим

$$r = \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{2/3}{r_g}^{1/3},$$

$$x^0 = cT = R - \frac{2}{3}r_g\left\{\left[\frac{3}{2r_g}(R - c\tau)\right]^{2/3} + 1\right\}^{3/2}, \tag{21.26}$$

что определяет искомый закон движения в переменных Лагранжа, подстановка которого в выражение (21.25) приводит к элементу интервала Леметра [7].

Формулы (21.23), (21.26) определяют кинематику пылевидной среды, движущейся с ускорением по радиусу к центру в пространстве Минковского в поле тяготения центрального тела. Для поля трехмерной скорости v, 4–ускорения g, трехмерного ускорения a и трехмерной силы N имеем:

$$\frac{dr}{dT} = v = -c\left(1 + \frac{r}{r_g}\right)^{-1/2}, \quad \frac{1}{c^2}\frac{d^2r}{d\tau^2} = g = -\frac{r_g}{2r^2},$$
$$a = \frac{d^2r}{dT^2} = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}\left(1 + \frac{r_g}{r}\right)^{-2},$$
$$N = \frac{d}{dT}\left(\frac{mv}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}}\right) = -\frac{m r_g c^2}{2r^2(1 + r_g/r)^{1/2}}. \tag{21.27}$$

Движение базиса Леметра в пространстве Минковского описывается непрерывными в области $0 < r < \infty$ функциями, не имеющими особенностей на гравитационном радиусе. Трехмерная скорость v и трехмерное ускорение a ограничены в начале координат, $v(0) = -c, \quad a(0) = -c^2/(2r_g)$. Величина трехмерной силы N (21.27), действующей на пробную массу со стороны центрального тела, меньше, чем в ньютоновской теории гравитации

$$N = -\frac{kmM}{r^2\left(1 + \frac{2kM}{c^2 r}\right)^{1/2}}. \tag{21.28}$$

Бросается в глаза то обстоятельство, что пространственные компоненты 4–скорости cV^1 (21.23) и 4–ускорения gc^2 (21.27) в точности совпадают с обычной скоростью и ускорением в нерелятивистской ньютоновской механике, когда рассматривается радиальное падение пыли, имеющей на бесконечности нулевую скорость, на силовой центр.

Из формул (21.23) и (21.27) находим время падения частиц базиса с расстояния $r_1 > r$ до $r \geq 0$ по часам падающей частицы τ и по часам пространства Минковского T [59].

$$\delta\tau = \frac{2}{3}\left[\frac{r_1}{c}\left(\frac{r_1}{r_g}\right)^{1/2} - \frac{r}{c}\left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2}\right], \tag{21.29}$$

$$\delta T = \frac{2}{3}\left[\left(1 + \frac{r_1}{r_g}\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{r}{r_g}\right)^{3/2}\right]\frac{r_g}{c}. \tag{21.30}$$

Соотношение (21.29) совпадает с результатом ньютоновской теории и аналогичной формулой, полученной из ОТО в работе [60].

Из формул (21.29), (21.30) следует, что время падения частиц конечно для любого r из области $0 \leq r \leq r_1$, как по часам падающей частицы, так и по часам пространства Минковского.

Обычно в ОТО в качестве времени внешнего наблюдателя вводится временная координата t, входящая в решение Шварцшильда. Связь между координатой t и временем T

пространства Минковского определяется формулой [59]

$$T = t - \frac{1}{c}\int\left[\left(1+\frac{r}{r_g}\right)^{1/2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right) - \left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2}\right]\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr$$
$$= t - \frac{r_g}{c}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{r}{r_g}\right)^{3/2} - 2\left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{3}\frac{r}{r_g}\right)\right.$$
$$\left. - \ln\left|\frac{1-(r/r_g)^{1/2}}{1+(r/r_g)^{1/2}}\right|\right], \tag{21.31}$$

подстановка которой в интервал (21.25) дает интервал Шварцшильда.

Поле скоростей базиса Леметра dr/dt в метрике Шварцшильда связано с полем скоростей $dr/dT = v$ (21.27) в пространстве Минковского соотношением

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dT}\frac{dT}{dt} = \frac{dr}{dT}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}\right). \tag{21.32}$$

Откуда, используя (21.31), находим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dr}{dT}\frac{\partial T}{\partial t}}{1-\frac{dr}{dT}\frac{\partial T}{\partial r}} = -c\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}, \tag{21.33}$$

что совпадает с "координатной"параболической скоростью свободного падения в поле Шварцшильда, полученной из уравнений для геодезических [60]. Если "координатная"скорость в поле Шварцшильда стремится к нулю при приближении к гравитационному радиусу, то скорости частиц в пространстве Минковского в силовом поле (21.28) всегда меньше скорости света в вакууме, стремятся к последней при $r \to 0$, а на гравитационном радиусе $|v| = c/\sqrt{2}$.

Из (21.33) следует, что если внешний наблюдатель использует в качестве времени удаленного наблюдателя временную координату Шварцшильда, то приближение к гравитационному радиусу требует бесконечного значения t [7], [60]. Последнее становится ясным из вида формулы (21.31), когда при $r \to r_g$, $t \to \infty$ при любом конечном T.

С нашей точки зрения за время удаленного наблюдателя следует принять T, которое по построению отображения является временем в пространстве Минковского, а интервал (21.25) записан в "преимущественной"системе координат, в которой радиальная r, угловые Θ, φ и временная T координаты имеют явный метрический смысл и определяют интервал в пространстве Минковского в форме

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dr^2 - r^2(\sin^2\Theta d\varphi^2 + d\Theta^2). \tag{21.34}$$

Элемент интервала (21.25) при $r_g/r \ll 1$ переходит в интервал плоского пространства–времени (21.34). Естественно, помимо интервала (21.25) можно рассматривать любые другие системы координат, но с нашей точки зрения координаты, входящие в (21.25), совпадают с галилеевыми координатами в СТО и поэтому они выделяются из всех других систем координат своей наглядностью.

Как известно, при движении частицы в постоянном поле сохраняется ее энергия W_0, которая является временной компонентой ковариантного 4–вектора импульса [7].

Из (21.14), (21.24) имеем для частиц базиса

$$W_0 = m_0c^2U_0 = m_0c^2 = m_0c^2(V_0 + \alpha A_0). \tag{21.35}$$

Откуда находим, используя (21.23), (21.24), (21.35), (21.19)

$$\alpha A_0 = 1 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right)^{1/2},$$

$$\alpha A_k = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} - V_k = \left[\left(1 + \frac{r}{r_g}\right)^{1/2} - \left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2} - \left(\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}\right] n_k. \tag{21.36}$$

Из (21.36) следует, что $\alpha A_\mu V^\mu = 0$, что согласуется с (21.23).

Таким образом, решение уравнений Эйнштейна определило метрику $g_{\mu\nu}$ (21.25) в координатах пространства Минковского, поле скоростей V_μ и потенциалов A_μ. Из (21.36) найдем тензор постоянного гравитационного поля $F_{\mu\nu}$ в пространстве Минковского

$$F_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right), \qquad F_{kl} = 0,$$

$$F_{0k} = -\frac{\partial A_0}{\partial x^k} = -\frac{r_g n_k}{2\alpha r^2 \sqrt{1 + (r_g/r)}}. \tag{21.37}$$

Если проводить аналогию с электродинамикой, то можно усмотреть, что тензор $F_{\mu\nu}$ для случая сферической симметрии не содержит аналога "магнитного"поля $\vec{H}$. Напряженность гравитационного поля E_k с учетом (21.28) имеет вид

$$E_k = F_{0k} = \frac{N}{m_0} n_k = -\frac{kMn_k}{r^2\left(1 + \frac{2kM}{c^2 r}\right)^{1/2}}. \tag{21.38}$$

Введем вектор "индукции"$D_k = \varepsilon E_k$

$$\varepsilon \equiv -\left(1 + \frac{2kM}{c^2 r}\right)^{1/2} \frac{1}{k}, \qquad D_k = \frac{M}{r^2} n_k. \tag{21.39}$$

Таким образом, для случая сферически–симметричного гравистатического поля вне создающей его массы справедливы выражения

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \qquad \vec{H} = 0. \tag{21.40}$$

Откуда плотность энергии гравистатического поля ρ по аналогии с электростатикой вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{ED}{8\pi} = -\frac{kM^2}{8\pi r^4\left(1 + \frac{2kM}{c^2 r}\right)^{1/2}}. \tag{21.41}$$

Плотность энергии не имеет особенности на гравитационном радиусе, в отличие от аналогичного выражения, полученного в работе [40]. Энергия поля W вне шара радиуса r_0 дается соотношением

$$W = \int\limits_{r_0}^{\infty} \rho 4\pi r^2 dr = -\frac{Mc^2}{2}\left[\left(1 + \frac{r_g}{r_0}\right)^{1/2} - 1\right], \tag{21.42}$$

которое переходит в ньютоновское выражение $W = -(kM^2)/(2r_0)$ при $r_g/r \ll 1$.

Из рассмотренного круга вопросов можно сделать следующие выводы:

Центральному сферически–симметричному гравитационному полю в пустоте, определяемому из уравнений Эйнштейна, удалось сопоставить некоторое эквивалентное силовое поле в пространстве Минковского. Если движение базиса Леметра в пространстве Эйнштейна происходит по геодезическим линиям, то движение этого же базиса в пространстве Минковского по мировым линиям. Найдено выражение для напряженности поля, в котором движется этот базис, и получено выражение для энергии поля. В рамках ОТО найдена преимущественная система координат (21.25), координаты и время которой совпадает с галилеевыми координатами и временем в пространстве Минковского. Оказалось, что радиальная координата Шварцшильда r эквивалентна величине радиуса–вектора в пространстве Минковского, а временная координата Шварцшильда t не совпадает со временем пространства Минковского T. Только для расстояний $r_g/r \ll 1$ совпадение имеет место. Отсюда объясняется известный парадокс в ОТО, согласно которому "координатная"скорость частиц базиса Леметра стремится к нулю при приближении к гравитационному радиусу, в то время как сила, действующая на частицы при $r \to r_g$ (с точки зрения ОТО) стремится к бесконечности.

Расчет известных эффектов ОТО по метрике (21.25), связанных с формой траекторий, приводит к тому же результату, что и в поле Шварцшильда. Различие проявляется в выражениях зависящих от времени и от производных по нему.

Для распространяющихся по радиусу лучей света из (21.25) при $d\tilde{s}^2 = 0$ имеем:

$$\left(\frac{dr}{dT}\right)_1 = c_1(r) = c\Big[1 - \Big(\frac{r}{r_g}\Big)^{1/2}\Big]$$
$$\cdot\Big[\Big(1 + \frac{r}{r_g}\Big)^{1/2}\Big(\Big(\frac{r}{r_g}\Big)^{1/2} - 1\Big) - \frac{r}{r_g}\Big]^{-1}, \tag{21.43}$$

$$\left(\frac{dr}{dT}\right)_2 = c_2(r) = c\Big[1 + \Big(\frac{r}{r_g}\Big)^{1/2}\Big]$$
$$\cdot\Big[\frac{r}{r_g} - \Big(1 + \frac{r}{r_g}\Big)^{1/2}\Big(\Big(\frac{r}{r_g}\Big)^{1/2} + 1\Big)\Big]^{-1}, \tag{21.44}$$

где (21.43) соответствует скорости расходящихся, а (21.44) — сходящихся лучей.

При $r < r_g$ выражения (21.43), (21.44) отрицательны, т.е. лучи распространяются лишь в одном направлении — внутрь [7].

$$c_1(r_g) = 0.$$

Поэтому время распространения световых сигналов от $r = r_g$ до $r_0 > r_g$ стремится к бесконечности.

$c_1|_{r>r_g} > 0$; $|c_1| \le c$ знак равенства имеет место при $r \to 0$; $r \to \infty$.

$c_2 < 0$; $|c_2| \ge c$ знак равенства справедлив при $r \to 0$; $r \to \infty$.

$|c_2|$ имеет максимум в точке $r = 3r_g$.

$$|c_2(3r_g)| = \frac{c(7 + 3\sqrt{3})}{11}.$$

Для сходящихся лучей время распространения сигналов между любыми r_1 и r_2 из области $0 \le r < \infty$ конечно.

Если $r_g/r \ll 1$, то

$$c_1 \approx (1 - 0.5(r_g/r)^{1/2} - r_g/r)c,$$
$$c_2 \approx -(1 + 0.5(r_g/r)^{1/2} - r_g/r)c.$$

Хотя в каждом из направлений распространения dr/dT отличается от c на величину, содержащую поправку первого порядка, однако, полученные результаты не противоречат "четвертому эффекту"Шапиро, так как во время запаздывания радиосигнала ΔT на участке "туда"+ "обратно"совпадают с шварцшильдовским Δt в опыте Шапиро.

На основании проведенного анализа может быть предсказан следующий эффект:

Скорость света, испускаемого с Земли перпендикулярно поверхности, должна быть меньше скорости света, падающего из бесконечности нормально ее поверхности, на 11.2 км/сек, что соответствует второй космической скорости.

III. Моделирование метрики Толмана

Рассмотрим как отображается на пространство Минковского известное решение Толмана [7]. Используя закон движения сплошной среды (21.1), где ξ^0 — некоторый временной параметр, смысл которого будет определен позже, перейдем в лагранжеву сопутствующую систему отсчета.

Для наблюдателей, движущихся вместе со средой, квадрат пространственного расстояния есть:

$$-dl^2 = (\gamma_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu)\frac{\partial x^\mu}{\partial y^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^l}dy^k dy^l \equiv -\tilde{\gamma}_k l dy^k dy^l, \tag{21.45}$$

где $(\gamma_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu) = \tilde{\gamma}_{\mu\nu}$ — проекционный оператор,

$$V^\mu = \Theta\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^0}. \tag{21.46}$$

V^μ — четырех–скорость, скаляр Θ определяется из условия нормировки $\gamma_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 1$. Трехмерный тензор кривизны, вычислений по метрике (21.45), зависящий от тензора вихря и тензора скоростей деформаций среды [4], в общем случае отличен от нуля.

Пусть в римановом пространстве движется пылевидная материя "без вращений". В этом случае, как известно, [7] сопутствующая система отсчета будет синхронной, для которой квадрат интервала есть

$$ds^2 = d{\xi^0}^2 - \breve{\gamma}_{kl}dy^k dy^l. \tag{21.47}$$

В двух разных пространствах "модели"V_4 и оригинале $\breve{V}_4$ мы выбрали общие координаты Эйлера x^μ и Лагранжа y^k, ξ^0.

Наш подход к моделированию зависит от ответа на вопрос. Существуют ли такие $\breve{\gamma}_{kl}$ из (21.47), удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна и определяемые из равенства (21.48)?

$$\breve{\gamma}_{kl} = \tilde{\gamma}_{kl} = -(\gamma_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu)\frac{\partial x^\mu}{\partial y^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^l}. \tag{21.48}$$

Иными словами, мы требуем равенства пространственного расстояния в "модели"и в "оригинале"[59], что следует из (21.18).

Рассматривая радиальное движение пыли в сферических координатах "модели имеем для интервала (21.45)

$$dl^2 = \left(V^1 \frac{\partial x^0}{\partial R} - V^0 \frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 dR^2 + r^2(R, \xi^0)(\sin^2 \Theta d\varphi^2 + d\Theta^2), \tag{21.49}$$

где r — радиальная координата Эйлера, R — радиальная координата Лагранжа. Угловые Θ и φ переменные Эйлера и Лагранжа совпадают.

В "оригинале"решением уравнений центрально–симметричного поля в сопутствующей системе отсчета для пылевидной материи будет известное решение Толмана [7].

Из условий (21.48) находим уравнение для моделирования метрики Толмана

$$\frac{\partial r}{\partial \xi^0}\frac{\partial x^0}{\partial R} + \frac{\partial r}{\partial R}\left\{\left[\frac{\left(\frac{\partial x^0}{\partial \xi^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial \xi^0}\right)^2}{1 + f(R)}\right]^{1/2} - \frac{\partial x^0}{\partial \xi^0}\right\} = 0. \tag{21.50}$$

В уравнении (21.50) неизвестной считается функция $x^0(R, \xi^0)$. $r(R, \xi^0)$ определяется решением Толмана, $f(R)$ — произвольная функция в этом решении.

Рассмотрим некоторые частные решения уравнения (21.50).

а) Если в качестве параметра ξ^0/c выберем собственное время $\tau = s/c$ в законе движения (21.1), то

$$\left(\frac{\partial x^0}{\partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 = 1, \tag{21.51}$$

Для того, чтобы уравнения (21.50) и (21.51) были совместны, необходимо выполнение условий интегрируемости

$$\frac{\partial^2 x^0}{\partial R \partial s} = \frac{\partial^2 x^0}{\partial s \partial R},$$

что при использовании решения Толмана

$$\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}, \tag{21.52}$$

приводит к соотношению

$$\frac{df}{dR} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dR} = 0. \tag{21.53}$$

Решение уравнения (21.53) есть $f = c_1 = \text{const}, \quad F = c_2 = \text{const}$. В частности, этим условием удовлетворяет метрика Леметра [7], для которой $f = 0, \quad F = r_g$.

Интегрирование уравнения (21.50) приводит к закону движения частиц базиса Леметра в "модели"V_4 [59], найденному выше (21.26).

б) Полагая в уравнении (21.50) $\partial x^0/\partial R = 0$, имеем

$$x^0 = \Psi(\xi^0), \quad \left(\frac{\partial r}{\partial \xi^0}\right)^2 = -f\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi^0}\right)^2, \quad r = |f|^{1/2}\Psi. \tag{21.54}$$

Из (21.54) следует, что $f < 0$. В частности, если $f = -\sin^2 R$, $\Psi = a(\xi^0)$. Из формул (21.46), (21.47–21.49), находим

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{1+f}}\left(\frac{\partial x^0}{\partial \xi^0}\right)^{-1}, \quad (V^0)^2 = \cos^{-2} R, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 = a^2 \cos^2 R,$$

$$d\tilde{s}^2 = (d\xi^0)^2 - a^2(\xi^0)\{dR^2 + \sin^2 R(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\}. \tag{21.55}$$

Элемент интервала (21.55) соответствует метрике закрытой изотропной модели [7].

Важно отметить, что $a(\xi^0) = cT$, где T — время в пространстве Минковского.

Поэтому в пространстве "модели"решение уравнения Эйнштейна в "оригинале"ограничено временем

$$T_{\max} = \frac{2a_0}{c} = \frac{4kM}{3\pi c^2}\frac{1}{c}, \tag{21.56}$$

где M — масса замкнутой модели, k — гравитационная постоянная.

Поле скоростей частиц базиса в "модели"в переменных Эйлера и Лагранжа получаем из (21.54)

$$c\frac{\partial r}{\partial x^0} = v = \frac{r}{T} = c\sin R \le c, \tag{21.57}$$

$$\frac{dv}{dT} = 0. \tag{21.58}$$

Любопытно заметить, что в рассмотренном случае "гравитационная сила"в галилеевом пространстве "модели"равна нулю и скорость "разбегания"при фиксированном времени T пропорциональна r (закон Хеббла). Аналогичный результат из других соображений получен в работе В. Фока [3].

Связь между временем "модели"и временем "оригинала"выражается соотношением

$$T = \frac{1}{c}a(t) = \frac{a_0}{c}(1-\cos\eta), \tag{21.59}$$

где, следуя [7], мы ввели $cdt = ad\eta$. Обозначая

$$\frac{1}{T} = h_1, \quad \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = h,$$

имеем

$$h_1 = h\tan\frac{\eta}{2} = h\left(\frac{\mu}{\mu_{cr}} - 1\right)^{1/2}. \tag{21.60}$$

Из формулы (21.60) следует, что "возраст"однородной замкнутой модели Вселенной при плотности $\mu \sim \mu_{cr}$ по часам пространства Минковского $1/h_1$ и пространства "оригинала"$1/h$ могут заметно отличиться друг от друга.

в) Если в законе движения (21.1) в качестве временного параметра выбрать параметр, нумерующий ортогональные мировым линиям гиперповерхности [4], то

$$V_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^k} = 0, \tag{21.61}$$

откуда следует, что в случае сферической симметрии

$$\frac{\partial x^0}{\partial R} = \frac{V^1}{V^0}\frac{\partial r}{\partial R}. \tag{21.62}$$

Из формулы (21.50) находим

$$V^0 = \sqrt{1+f}, \quad V^1 = \sqrt{f}, \quad f > 0. \tag{21.63}$$

Интегрирование (21.63) дает

$$r(R,t) = \sqrt{\frac{f}{1+f}}x^0 + B(R) = vT + B(R), \tag{21.64}$$

где $B(R)$ - произвольная функция.

Как показано в [4], векторы первой кривизны g^k мировых линий частиц среды в лагранжевой сопутствующей неинерциальной системе отсчета (НСО) связаны с нормирующим множителем Θ в (21.46) соотношением

$$g^k = \gamma^{kn}\frac{\partial \ln \Theta}{\partial y^n}. \tag{21.65}$$

В рассматриваемом случае $g^k = 0$. Поэтому

$$\Theta = \Theta(\xi^0). \tag{21.66}$$

Учитывая это, находим из (21.63) и (21.64) при $B = 0$, что

$$x^0(\xi^0, R) = a(\xi^0)\sqrt{1+f}$$

$$r(\xi^0, R) = a(\xi^0)\sqrt{f}, \quad \frac{1}{\Theta} = \frac{\partial a}{\partial \xi^0}. \tag{21.67}$$

В частности, если $f = \sinh^2 R$, то получим для элемента интервала

$$d\tilde{s}^2 = (d\xi^0)^2 - a^2(\xi^0)\{dR^2 + \sinh^2 R(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\}, \tag{21.68}$$

что совпадает с метрикой открытой изотропной модели [7].

Предлагаемый метод моделирования позволяет в рамках ОТО выяснить метрический смысл координат и времени, выражая их через координаты и время пространства Минковского. Так как

$$V^1 = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{cd\tau}$$

то

$$a(\xi^0) = c\tau = \frac{cT}{\cosh R}. \tag{21.69}$$

Таким образом, $a(\xi^0)/c$ совпадает с собственным временем τ частиц базиса в "модели".

Введем "постоянную"Хаббла в "модели"$h_1 = 1/T$ и сравним ее со значением

$$h = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}, \quad t = \frac{\xi^0}{c}.$$

Сравнение дает

$$h_1 = h\sqrt{\frac{1-\frac{\mu}{\mu_{cr}}}{1+\frac{h^2r^2}{c^2}(1-\frac{\mu}{\mu_{cr}})}}. \tag{21.70}$$

При плотности μ близкой к критической плотности μ_{cr} Вселенная по часам "модели"имеет значительно больший возраст, чем по часам "оригинала".

Как известно, понятие расстояния в космологии не имеет однозначного смысла и не имеется ни одного расстояния, которое можно было бы назвать "правильным"[49]. Предлагаемый в работе метод позволяет считать "правильными"евклидовы расстояния $r = a(\xi^0)\sin R$ и $r = a(\xi^0)\sinh R$ для открытой и закрытой моделей соответственно.

Используя известные формулы [7]

$$a(\eta) = a_0(1-\cos\eta), \quad a_0 = \frac{2kM}{3\pi c^2}$$
$$\mu a^3 = \frac{M}{2\pi^2}, \quad \xi^0 = ct = a_0(\eta - \sin\eta)$$

для закрытой модели и формулы

$$a(\eta) = a_0(\cosh\eta - 1), \quad \mu a^3 = \frac{3c^2a_0}{4\pi k}, \quad \xi^0 = ct = a_0(\sinh\eta - \eta)$$

для открытой можно показать, что из законов движения (21.54) $r(R,t) = a(t)\sin R$ и $r(R,t) = a(t)\sinh r$ следует равенство

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{4\pi k\mu r}{3}. \tag{21.71}$$

Равенство (21.71) совпадает с законом Ньютона. Отметим, что в (21.71) дифференцирование производится по собственному времени t "оригинала". Дифференцирование законов движения по времени "модели"дает нулевое ускорение в пространстве Минковского. Таким образом, в рассмотренных космологических моделях действие гравитационного поля проявляется в деформациях времени. Последнее утверждение выглядит более четким, если интервал (21.68) с учетом (21.69) и параметрических формул для открытой модели представить в виде

$$d\tilde{s}^2 = \frac{{}^2d\tau^2}{1+\frac{2a_0}{c\tau}} - c^2\tau^2\{dR^2 + \sinh^2 R(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\}. \tag{21.72}$$

При отсутствии гравитации $a_0 = 0$ и элемент интервала (72) совпадает с интервалом в модели Милна [60], реализуемую частицами, вылетающими из одной точки по всем направлениям со всевозможными скоростями, т.е. образующих сферически симметричную квази-ИСО [1] или обобщенную ИСО [61].

Таким образом, применение метода моделирования в космологии показало, что связь между ОТО, СТО и законом всемирного тяготения Ньютона оказалась более тесной, чем обычно предполагается. Если вычислять возраст Вселенной по часам пространства Минковского, то из формул (21.60) и (21.70) следует, что при плотностях близких к критической Вселенная значительно "старше"своего "оригинального"возраста.

Глава 5

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ПРОВОДЯЩИМИ ТЕЛАМИ

В этой главе получена:

1. Система интегро-дифференциальных уравнений для плотностей зарядов и токов для заряженных металлических тел, находящихся во внешнем неоднородном и нестационарном электромагнитном поле для классического случая (СО 1-го класса).

2. Система интегральных уравнений для связанных зарядов с учетом постулата эквивалентных ситуаций и уравнений структуры для стационарного случая.

22. Общая постановка задачи взаимодействия электромагнитного поля с проводящими телами

Рассмотрим систему N проводящих тел произвольной формы, находящихся в вакууме. Считаем, что эти тела находятся в некотором заданном внешнем нестационарном и неоднородном электромагнитном поле, а также сами содержат источники поля: заряды и токи. Известно, что уравнения Максвелла описывают эволюцию системы, состоящую из полей и зарядов. Однако во многих практических задачах плотности зарядов и токов неизвестны.

Цель настоящего раздела - вывод замкнутой системы интегро-дифференциальных уравнений для зарядов и токов, решение которых позволит в принципе находить электромагнитные поля вне системы тел.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями Максвелла, записанными в стандартной четырехмерной форме

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \tag{22.1}$$

$$e^{\mu\nu\epsilon\sigma} \nabla_\nu F_{\epsilon\sigma} = 0. \tag{22.2}$$

Здесь $e^{\mu\nu\epsilon\sigma}$ - совершенно антисимметричный единичный 4-тензор, $F^{\mu\nu}$ - тензор поля, j^μ четырехмерный вектор тока.

$$F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu} A_{\nu]} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}. \tag{22.3}$$

A^μ - 4-потенциал, удовлетворяющий условию Лоренца

$$\nabla_\nu A^\nu = 0. \tag{22.4}$$

Очевидно, что представление тензора поля в виде (22.3), обращает в тождество уравнение (22.2), а уравнение (22.1) сводится к виду.

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{22.5}$$

Из ассимметрии тензора поля $F_{\mu\nu}$ следует тождественное выполнение уравнения неразрывности
$$\nabla_\mu j^\mu = 0. \tag{22.6}$$

Решение системы (22.5) выражается через запаздывающие потенциалы известным способом [7]
$$A^\mu = \frac{1}{c}\int \frac{j^\mu(\vec{r}', t - R/c)}{R}\, dV', \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad dV' = dx'dy'dz', \tag{22.7}$$
где
$$\vec{r} \to (x, y, z) = (x^1, y^1, z^1), \quad \vec{r}' \to (x'^1, x'^2, x'^3).$$
R есть расстояние от элемента объема dV' до точки наблюдения.

Три пространственные компоненты 4-вектора A^μ образуют трехмерный вектор A или векторный потенциал поля, временная компонента $A^0 = \phi$ есть скалярный потенциал, т.е.
$$A^\mu \to (\phi, \vec{A}). \tag{22.8}$$
Четырехмерный вектор тока связан с трехмерной плотностью тока $\vec{j}$ и плотностью заряда ρ соотношением
$$j^\mu \to (c\rho, \vec{j}). \tag{22.9}$$
Используя формулы (22.7) и (22.3) вычислим тензор поля $F_{\epsilon\nu}$ в произвольной точке вне проводников.
$$F_{\epsilon\nu} = \frac{2}{c}\int \frac{1}{R}\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial j_{[\nu}}{\partial \tau}\delta^0_{\epsilon]} - \frac{1}{cR}\frac{\partial j_{[\nu}}{\partial \tau}\delta_{\epsilon]k}R^k - \frac{1}{R^2}j_{[\nu}\delta_{\epsilon]k}R^k\right\} dV',$$
$$R^k = x^k - x'^k, \qquad \tau = t - \frac{R}{c}, \tag{22.10}$$
что дает в компонентах
$$F_{0k} = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{R^k}{R^2} - \frac{1}{cR}\frac{\partial j^k}{\partial \tau} + c\rho\frac{R^k}{R^3}\right\} dV',$$
$$F_{pr} = \frac{2}{c}\int\left\{\frac{R^{[p}}{cR^2}\frac{\partial j^{r]}}{\partial \tau} + \frac{R^{[p}j^{r]}}{R^3}\right\} dV', \tag{22.11}$$
где по индексам, заключенным в квадратные скобки, производится альтернирование.

С другой стороны, тензор поля можно выразить через компоненты векторов напряженностей электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей.
$$F_{0k} = E^k = (E_x, E_y, E_z) = (E^1, E^2, E^3), \tag{22.12}$$
$$H^k = -\frac{1}{2}e^{klm}F_{lm} = (H_x, H_y, H_z) = (H^1, H^2, H^3), \tag{22.13}$$
где e^{klm} - совершенно антисимметричный единичный псевдотензор 3-го ранга.

Формулы (22.11)-(22.13) позволяют вычислить электромагнитное поле по плотностям зарядов ρ и токов $\vec{j}$ на проводнике.

Если имеется N проводников, то в силу линейности уравнений электродинамики полное поле есть результат суперпозиции всех полей. В этом случае полное поле $\Phi_{\epsilon\nu}$ дается выражением

$$\Phi_{\epsilon\nu} = \sum_{k=1}^{N} F_{\epsilon\nu}^{(k)} + F_{\epsilon\nu}^{*}, \tag{22.14}$$

где, взятая в круглые скобки буква k означает номер проводящего тела, $F_{\epsilon\nu}^{*}$ – тензор внешнего электромагнитного поля.

Как известно, внутри идеальных проводников поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ равны нулю, а на их поверхностях справедливы равенства [26]:

$$\vec{g} = \frac{c}{4\pi}\vec{n}\times\vec{H}, \quad (a) \quad \sigma = \frac{1}{4\pi}\vec{n}\cdot\vec{E}, \quad (b),$$
$$\vec{n}\times\vec{E} = 0, \quad (c) \quad \vec{n}\cdot\vec{H} = 0, \quad (d). \tag{22.15}$$

В формуле (22.15) $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности проводника, $\vec{g}$ - поверхностная плотность тока, σ - поверхностная плотность заряда.

Так как заряды и токи на идеальных проводниках располагаются на поверхности, то в соотношениях (22.10) и (22.11) можно сделать формальную замену:

$$j^k\, dV' = g^k\, dS', \qquad \rho\, dV' = \sigma\, dS', \tag{22.15}$$

где dS' - элемент поверхности проводника.

В согласии с (22.14) полное электрическое поле в системе в произвольной точке вне проводников

$$\Phi_{0i} = \tilde{E}^i = \sum_{k=1}^{N} E^{i(k)} + E^{*i}, \tag{22.17}$$

где $\tilde{E}^i$ - суммарное электрическое поле, E^{*i} - внешнее электрическое поле.

Выбрав на поверхности проводника с номером s произвольную точку и учитывая, что поле в окрестности этой точки, создаваемое всеми остальными зарядами, кроме заряда в этой точке, равно половине от поля на поверхности, используя условие (22.15) (b), получаем

$$2\pi\sigma^{(s)} = \vec{E}^{*}\cdot\vec{n}^{(s)} + \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{N}\int\Big[\frac{\partial\sigma^{(k)}}{\partial\tau^{(k)}}\frac{\vec{R}^{(k)}\cdot\vec{n}^{(s)}}{R^{(k)2}}$$
$$-\left(\vec{n}^{(s)}\cdot\frac{\partial\vec{g}^{(k)}}{\partial\tau^{(k)}}\right)\frac{1}{cR^{(k)}} + c\sigma^{(k)}\frac{\vec{R}^{(k)}\cdot\vec{n}^{(s)}}{R^{(k)3}}\Big]\, dS'^{(k)} \tag{22.18}$$

В формуле (22.18) s принимает значения от 1 до N, $\vec{R}^{(k)}$ соединяет элемент поверхности $dS'^{(k)}$ проводника с номером k с с точкой на поверхности проводника с номером s, $\vec{n}^{(s)}$ – единичный вектор нормали к поверхности номера s.

В случае электростатики

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} = 0, \qquad \frac{\partial\vec{g}}{\partial\tau} = 0$$

и система уравнений (22.18) переходит в систему интегральных уравнений, полученных Гринбергом [89].

Полное магнитное поле $\tilde{H}$ вне проводников из выражений (22.13), (22.14) имеет вид

$$\tilde{H}^t = -\frac{1}{2}e^{tlm}\Phi_{lm}. \tag{22.19}$$

Векторное произведение $\vec{n}^{(s)} \times \vec{\tilde{H}}$ в компонентах на оси имеет вид

$$e^{prt}n^{(s)r}\tilde{H}^t = -\frac{1}{2}e^{prt}e^{tlm}n^{(s)r}\Phi_{lm}$$

$$= -\frac{1}{2}(\delta^{pl}\delta^{rm} - \delta^{pm}\delta^{rl})n^{(s)r}\Phi_{lm} = n^{(s)r}\Phi_{rp}. \tag{22.20}$$

Из соотношений (22.11), (22.14), (22.15), (22.16), (22.20) получаем

$$\frac{2\pi}{c}g^{(s)p} = F^*_{rp}n^{(s)r} + \sum_{k=1}^{N} F^{(k)}_{rp}n^{(s)r}$$

$$= E^*_{rp}n^{(s)r} - \frac{2}{c}\sum_{k=1}^{N}\int\left\{\frac{R^{(k)[p}}{cR^{(k)2}}\frac{\partial g^{(k)r]}}{\partial\tau^{(k)}}n^{(s)r} + \frac{R^{(k)[p}g^{(k)r]}}{R^{(k)3}}n^{(s)r}\right\}dS'^{(k)}. \tag{22.21}$$

Соотношение (22.21) можно переписать в векторной форме

$$\frac{2\pi}{c}\vec{g}^{(s)} = \vec{n}^{(s)} \times \vec{H}^* - \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{N}\int\left\{\frac{\vec{R}^{(k)}}{cR^{(k)2}}\left(\frac{\partial\vec{g}^{(k)}}{\partial\tau^{(k)}}\cdot\vec{n}^{(s)}\right)\right.$$

$$\left. -\frac{\left(\vec{R}^{(k)}\cdot\vec{n}^{(s)}\right)}{cR^{(k)2}}\frac{\partial\vec{g}^{(k)}}{\partial\tau^{(k)}} + \frac{\vec{R}^{(k)}}{R^{(k)3}}\left(\vec{g}^{(k)}\cdot\vec{n}^{(s)}\right) - \frac{\vec{g}^{(k)}}{R^{(k)3}}\left(\vec{R}^{(k)}\cdot\vec{n}^{(s)}\right)\right\}dS'^{(k)}, \tag{22.22}$$

где $\vec{H}^*$ - напряженность внешнего поля.

Система $4N$ интегро-дифференциальных уравнений связывает $4N$ неизвестных функций: N величин σ и $3N$ компонент векторов $\vec{g}$.

Ввиду того, что пространственные компоненты тензоров подымались и опускались с помощью δ_{kl}, то мы не делали различия между ковариантными и контравариантными компонентами тензоров, хотя и использовалась стандартная сигнатура $(+---)$.

Величины $\vec{g}^{(s)}$ и $\sigma^{(s)}$ связаны уравнениями неразрывности (22.6), которые при переходе к поверхностям сведутся к виду:

$$\frac{\partial\sigma^{(s)}}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\gamma^{(s)}}}\frac{\partial}{\partial u^{k(s)}}\left(\sqrt{\gamma^{(s)}}g^{k(s)}\right) = 0, \quad (k = 1, 2)$$

$$\gamma^{(s)} = \det \parallel \gamma^{(s)}_{ik} \parallel, \quad dl^{(s)2} = \gamma^{(s)}_{ik}du^{(s)i}du^{(s)k}. \tag{22.22}$$

$\gamma^{(s)}_{ik}$ - метрический тензор поверхности с номером s, а $u^{k(s)}$ - криволинейные координаты на поверхностях.

Развитый здесь аппарат применим не только для идеальных проводников, но и для реальных проводников при сильном скин-эффекте. Однако ряд существенных факторов, связанных с тепловыми потерями, при таком рассмотрении выпадают. Предложенный метод можно, например, использовать при аналитических вычислениях или расчетах на ЭВМ в задачах взаимодействия электромагнитных полей с поводящими телами.

Важно отметить, что предложенная система (22.18), (22.22) является замкнутой.

Граничные условия (22.15)(a) и (22.15)(b), которые использовались для ее получения, непосредственно вытекают из решаемых уравнений поля (22.1). В работе [90] для случая одного проводника было получено уравнение, совпадающее с (22.22) при $N = 1$. Однако в качестве второго граничного условия в [90] было выбрано вместо условия (22.15)(b) условие (22.15)(c). Поэтому, полученная в [90] система, содержит 6 уравнений для четырех неизвестных функций. Хотя система и переопределена, но не противоречит граничным условиям (22.15). Для случая идеальных проводников имеет место своеобразное вырождение, когда из факта обращения в нуль внутри проводника электромагнитного поля вытекает, что 4 неизвестные функции должны удовлетворять 8-ми уравнениям (22.15).

Для численных расчетов требуется иметь лишь 4 независимых уравнения, которые и найдены в настоящей работе. Остальные уравнения для рассмотренной модели являются следствием найденных.

В качестве примера получим интегральные уравнения для расчета токов в тонких проводах.

Пусть число проводов равно N и их форма в общем случае различна. Полное электрическое поле вне проводов дается формулой (22.17). На поверхности каждого провода полное поле $\vec{\tilde{E}}$ перпендикулярно поверхности провода. Поэтому для провода с номером s имеем

$$\vec{\tilde{E}} \cdot \vec{l}^{(s)} = 0, \quad (s = 1, 2, ...N),$$

где $\vec{l}^{(s)}$ - единичный вектор на поверхности провода s, направленный вдоль соответствующего провода.

Из соотношений (22.11) с учетом равенств

$$\rho\, dV' \to K\, dl', \qquad j^k\, dV' \to J^k\, dl',$$

где K - линейная плотность заряда, J величина тока в проводе, а также формул (22.17) и (22.25) получим

$$\vec{E}^* \cdot \vec{l}^{(s)} = -\frac{1}{c} \sum_{a=1}^{N} \int \Big[\frac{\partial K^{(a)}}{\partial \tau^{(a)}} \frac{\vec{R}^{(a)} \cdot \vec{l}^{(s)}}{R^{(a)2}}$$

$$-\Big(\vec{l}^{(s)} \cdot \frac{\partial \vec{J}^{(a)}}{\partial \tau^{(a)}} \Big) \frac{1}{cR^{(a)}} + cK^{(a)} \frac{\vec{R}^{(a)} \cdot \vec{l}^{(s)}}{R^{(a)3}} \Big]\, dl'^{(a)} \tag{22.26}$$

Из уравнения неразрывности для одномерного случая следует

$$\frac{\partial K^{(a)}}{\partial \tau^{(a)}} = -\frac{\partial J^{(a)}}{\partial l'^{(a)}}, \quad K^{(a)}(l'^{(a)}, \tau^{(a)}) = -\int_{-\infty}^{\tau^{(a)}} \frac{\partial J^{(a)}(l'^{(a)}, t')}{\partial l'^{(a)}}\, dt', \tag{22.27}$$

что приводит к соотношениям

$$\vec{E}^* \cdot \vec{l}^{(s)} = \frac{1}{c} \sum_{a=1}^{N} \int \Big[\frac{\partial J^{(a)}}{\partial l'^{(a)}} \frac{\vec{R}^{(a)} \cdot \vec{l}^{(s)}}{R^{(a)2}}$$

$$+\Big(\vec{l}^{(s)}\cdot\frac{\partial\vec{J}^{(a)}}{\partial\tau^{(a)}}\Big)\frac{1}{cR^{(a)}}+c\frac{\vec{R}^{(a)}\cdot\vec{l}^{(s)}}{R^{(a)3}}\int_{-\infty}^{\tau^{(a)}}\frac{\partial J^{(a)}(l'^{(a)},t')}{\partial l'^{(a)}}\,dt'\Big]\,dl'^{(a)} \qquad (22.28)$$

Формула (22.28) при $N=1$ (после перехода в систему СИ) в точности совпадает с выражением, полученным ранее в [78] и [90].

Мы не будем останавливаться на конкретных задачах взаимодействия электромагнитных полей с полеобразующими системами и с измерительными преобразователями, т.к. это не является темой данной книги, (для интересующихся приводим список статей на данную тему, выполненных автором со своими коллегами [91-105]) *а рассмотрим к каким принципиально новым результатам может привести использование постулата эквивалентных ситуаций к заряженным проводникам.*

23. Интегральное уравнение для плотности связанных зарядов

В предыдущем разделе при рассмотрении общей задачи взаимодействия мы считали уравнения Максвелла, заданными в пространстве Минковского. Однако, как показано ранее, поля связанных и свободных зарядов отличаются друг от друга. Связанные заряды искривляют пространство-время, и уравнения Максвелла становятся нелинейными. Поэтому процедура получения интегро- дифференциальных уравнений для плотностей зарядов и токов, используемая в предыдущем разделе, не может считаться преемлемой.

Для получения интегрального уравнения для плотности σ связанных зарядов, расположенных на поверхности проводящего тела произвольной формы, (будем считать поверхность достаточно гладкой, чтобы выполнялись условия дифференцируемости) разобъем поверхность на элементарные площадки, потенциал от каждой из них в точке наблюдения дается формулой, вытекающей из (19.1)

$$dA_0=\frac{\sigma' dS'}{r'}\exp\Big\{-\frac{a_0' r'(1-\cos\theta)}{2c^2}\Big\}, \qquad (23.1)$$

где r' - трехмерное (евклидово) расстояние от заряда $dQ'=\sigma' dS'$ до точки наблюдения, σ' - текущее значение плотности заряда, зависящее от точек на поверхности, θ - угол между радиусом - вектором $\vec{r}$ и $\vec{i}$, $\vec{i}=\vec{a_0'}/|\,\vec{a_0'}\,|$. $\vec{i}$ для каждого элемента заряда dQ направлен нормально поверхности внутрь тела. Величина "ускорения"a_0' для зарядов отрицательно заряженного тела (электронов) вычисляется по формуле

$$a_0'=\frac{eE'}{2m}=\frac{2\pi\sigma'}{m}, \qquad (23.2)$$

Введем в каждой точке поверхности интегрирования единичный $\vec{n}'$, направленный по внешней нормали к поверхности. Тогда соотношение (23.1) примет вид

$$dA_0=\frac{\sigma' dS'}{r'}\exp\Big\{-\frac{\pi e\sigma'(r'+\vec{n}'\cdot\vec{r}')}{mc^2}\Big\} \qquad (23.3)$$

В электростатическом случае для любой стационарной метрики будет отличны от нуля F_{0k} компоненты тензора электромагнитного поля. Из (23.3), произведя интегрирование по поверхности и вычисляя тензор поля, имеем в точке наблюдения с координатами x^k выражение. [2]

$$F_{0k} = -\frac{\partial A_0}{\partial x^k} = \int \frac{\sigma'}{r'} \exp\Big\{-\frac{\pi e\sigma'(r' + \vec{n}' \cdot \vec{r}')}{mc^2}\Big\}$$

$$\Big[\frac{x^k - x'^k}{r'^2} + \frac{\pi\sigma' e}{mc^2}\Big(\frac{x^k - x'^k}{r'} + n'^k\Big)\Big]\, dS'. \tag{23.4}$$

Выберем точку наблюдения x^k на поверхности проводника и умножим скалярно полученное выражение в точке наблюдения на единичный вектор нормали $\vec{n}$, образуя скалярную относительно пространственных преобразований величину Ψ.

$$\Psi = \int \frac{\sigma'}{r'} \exp\Big\{-\frac{\pi e\sigma'(r' + \vec{n}' \cdot \vec{r}')}{mc^2}\Big\}$$

$$\Big[\frac{\vec{n} \cdot \vec{N}'}{r'} + \frac{\pi\sigma' e}{mc^2}\Big(\vec{n} \cdot \vec{N}' + \vec{n} \cdot \vec{n}'\Big)\Big]\, dS'. \tag{23.5}$$

Здесь $\vec{N}'$ единичный вектор вдоль $\vec{r}'$, направленный от элемента интегрирования к точке наблюдения.

При стандартном рассмотрении для поля свободных зарядов величина Ψ связана с поверхностной плотностью зарядов σ с помощью соотношения

$$\Psi = 2\pi\sigma.$$

Ясно, что в "нерелятивистском"приближении мы получим обычное классическое интегральное уравнение Гринберга [89]. Учет поля связанных зарядов приводит к более сложной зависимости между Ψ и σ.

Найдем ограничения на метрику пространства-времени вне заряженного проводящего тела наподобие тому, как мы это делали для заряженного шара в разделе 19.

Будем считать, что тело заряжено отрицательно (для положительно заряженного тела, как показано ранне, пространство-время остается практически плоским). Подвесим на невесомых нитях в поле от этого тела пробные заряды (например, электроны). Так как силы со стороны поля уравновесятся силами натяжения нитей, то перейдя в лагранжеву сопутствующую систему отчета, связанную с электронами, можно убедиться, что метрика в такой системе будет равна

$$dS^2 = g_{00}(dy^0)^2 - \gamma_{kl}dy^k dy^l. \tag{23.6}$$

Очевидно, компоненты тензора в силу статичности поля не должны зависеть от временной координаты y^0, а зависят лишь от пространственных координат y^k. Так как вращения отсутствуют, то равны нулю g_{0k}.

[2]Заметим, что хотя каждый элементарный заряд на поверхности тела принадлежит искривленному пространству-времени, однако пространственное сечение для каждого из зарядов является евклидовым, т.к. метрика (2.18) имеет плоское сечение и при различных (локально постоянных) значений ускорения. Поэтому при вычислении расстояний от элементов поверхности интегрирования каждого из зарядов до произвольной, но фиксированной точки наблюдения метрический пространственный тензор - есть символ Кронекера. По этой причине здесь мы не делаем различия между ковариантными и контравариантными пространственными компонентами.

Так как подвешенные электроны неподвижны, то требуется выполнения условий сопутствия, которые для метрики (23.6) имеют вид

$$V^k = V_k = 0, \quad V^0 = (g_{00})^{-1/2}, \quad V_0 = (g_{00})^{1/2}, \tag{23.7}$$

Из условий сопутствия следует, что вектор первой кривизны (4-ускорение) не равен нулю, как при равновесии в пространстве Минковского, а вычисляется по известной формуле, как и в случае силы, действующей на частицу в постоянном гравитационном поле [7].

$$F^k = \Gamma^k_{00}(V^0)^2 = -\frac{1}{2g_{00}} g^{km} \frac{\partial g_{00}}{\partial y^m}. \tag{23.8}$$

С другой стороны, эту величину можно найти и из силы, действующей на заряд со стороны связи, удерживающей заряд в поле неподвижным. Эта сила численно равна силе со стороны поля и противоположна ей по знаку.

$$F^k = -\frac{1}{2g_{00}} g^{km} \frac{\partial g_{00}}{\partial y^m} = -\frac{e}{mc^2} F^{k0} V_0 = \frac{e}{mc^2} g^{km} F_{0m} V^0. \tag{23.9}$$

Электрическое поле от заряженного тела можно также определить из уравнений Максвелла в "заданном гравитационном поле"[7] [3], с неизвестным метрическим тензором для метрики (23.6). Это уравнение вне заряженного тела (плотностью пробных "подвешенных"электронов пренебрегаем) имеет вид [7].

$$\frac{\partial}{\partial y^k}\left(\sqrt{\gamma} D^k\right) = 0, \quad D^k = -\sqrt{g_{00}} F^{0k}. \tag{23.10}$$

Тензор поля (23.4) можно вычислить, если знать плотность зарядов σ на поверхности проводника. Так как форма проводника известна, то можно выбрать на поверхности проводника двумерную ортогональную криволинейную координатную сетку с пространственными координатными векторами, направленными нормально поверхности тела. Четвертые координатные временные векторы, в согласии с (23.7), совместим с направлением 4 - скоростей покоящихся на поверхности электронов. На базе данной координатной системы возникает естественная система тетрад (17.10) с калибровкой Ламе. Так как напряженность поля на поверхности проводника нормальна поверхности, то тензор поля на поверхности проводника в выбранной системе координат имеет имеет единственную отличную от нуля компоненту, например F_{01}. Выразим эту компоненту через тетрадную компоненту $F_{(0)(1)}$

$$F_{01} = e_0^{(\mu)} e_1^{(\nu)} F_{(\mu)(\nu)} = \sqrt{g_{00}}\sqrt{\gamma_{11}} F_{(0)(1)} \tag{23.11}$$

Как и для рассмотренных ранее задач заряженной сферы и плоскости, отождествим тетрадную компоненту поля $F_{(0)(1)}$ с плотностью зарядов на теле.

Правая часть в соотношении (23.5) совпадает в новой системе координат с F_{01} компонентой тензора поля на поверхности проводника. Поле на поверхности проводника в

[3] Естественно, никакого истинного гравитационного поля мы здесь не рассматриваем, а просто пользуемся уравнениями Максвелла в римановом пространстве, не используя уравнений Эйнштейна.

малой окрестности некоторой точки складывается из поля, создаваемого зарядами лежащими внутри этой окрестности, и всеми остальными зарядами. Зная, что поле на поверхности от зарядов вне окрестности равно половине от полного поля, получаем интегральное уравнение для нахождения плотности связанных зарядов в виде

$$2\pi\sigma\sqrt{g_{00}}\sqrt{\gamma_{11}} = \int \frac{\sigma'}{r'} \exp\left\{-\frac{\pi e\sigma'(r' + \vec{n}' \cdot \vec{r}')}{mc^2}\right\}$$

$$\left[\frac{\vec{n} \cdot \vec{N}'}{r'} + \frac{\pi\sigma' e}{mc^2}\left(\vec{n} \cdot \vec{N}' + \vec{n} \cdot \vec{n}'\right)\right] dS'. \tag{23.12}$$

При выводе (23.12) учли, что поле в окрестности рассматриваемой точки на поверхности, созданное всеми остальными зарядами на теле вне окрестности, непрерывно на границе проводника. Поле же зарядов, лежащих внутри окрестности, терпит разрыв на границе проводника. Это поле, складываясь с полем остальных зарядов вне проводника, вблизи его поверхности приводит к удвоению поля от остальных зарядов вне проводника и обращению в нуль полного поля внутри проводника. Поэтому полное среднее поле на поверхности проводника, равное полусумме внешнего и внутреннего полей, приводит в левой части равенства (23.12) к величине $2\pi\sigma$ вместо $4\pi\sigma$.

Уравнения (23.10), (23.12) и (23.9) есть уравнения как для нахождения плотности зарядов и поля, так и для нахождения компонент метрического тензора. К этим уравнениям необходимо добавить и уравнения структуры (1.7) при условии, что $\Sigma_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} = 0$ и переписать их в лагранжевой сопутствующей СО.

Правда, вопрос о совместности всех уравнений для нахождения компонент метрического тензора остается открытым. Для случая заряженной плоскости и сферы уравнения оказались совместными, однако для общего случая это пока не удалось доказать.

Глава 6

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ СВЯЗАННЫХ ЗАРЯДОВ

В этой главе рассмотрено движение заряженных частиц в полях связанных зарядов для случаев плоской и сферической симметрии. Проведено сравнение с результатами, получаемыми при классическом рассмотрении в СТО и ОТО.

24. Общая постановка задачи движения частиц в полях связанных зарядов

В предыдущей главе были получены уравнения для нахождения плотности зарядов на проводнике произвольной формы, геометрии пространства-времени и электростатического поля, создаваемого таким проводником. Ясно, что в простейших случаях, таких как заряженная плоскость, заряженный шар и цилиндр поверхностная плотность заряда постоянна. Для тел произвольной формы это не так. Как было показано, уравнение для плотности зарядов содержит неизвестные компоненты метрического тензора пространства-времени СО, зависящие от плотности связанных зарядов, от массы и величины пробных зарядов, задающих СО. Для нахождения геометрии пространства-времени СО мы закрепляли пробные заряды неподвижными относительно заряженного тела. Поэтому силы со стороны поля уравновешивались силами реакции связей. Метрика СО определялась формулой (23.6) и условия сопутствия (23.7). Компоненты метрического тензора в силу статичности поля не зависели от временной координаты y^0. Так как вращения отсутствуют, то равны нулю g_{0k}.

Очевидно, что условие равновесия частиц базиса СО эквивалентно равенству нулю суммы сил со стороны поля и сил реакции связи. В плоском пространстве- времени это приводит в согласии со вторым законом Ньютона и к равенству нулю ускорения. В римановом пространстве-времени равенство нулю суммы сил, действующих на каждую из частиц базиса, не означает равенства нулю ускорения. Это следует из того факта, что g_{00} компонента метрического тензора не равна единице.

Вектор первой кривизны (4-ускорение) не равен нулю, как при равновесии в пространстве Минковского, а вычисляется по формуле (23.8). Эта сила численно равна силе со стороны поля, противоположна ей по знаку и вычисляется по формуле (23.9). **Таким образом, в римановом пространстве-времени второй закон Ньютона оказался несправедливым, так как равенство нулю сил, действующих на частицу, привело к ненулевому ускорению**.

С аналогичной ситуацией сталкиваемся и в ОТО. Например, для наблюдателя, покоящегося на поверхности гравитирующей сферы, с точки зрения механики Ньютона сумма сил равна нулю, что приводит и к нулевому ускорению. С точки зрения ОТО, тело покоящееся на поверхности этой сферы, имеет отличный от нуля вектор первой кривизны, что, например, следует из решения Шварцшильда и формулы (23.8). Ускорение направлено вдоль "радиуса-вектора"от центра сферы.

Электрическое поле от заряженного тела можно найти из уравнений Максвелла, если компоненты метрического тензора нам удалось найти из (23.10), (23.12) и (23.9).

К этим уравнениям необходимо добавить и уравнения структуры (1.7) при условии, что $\Sigma_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} = 0$ и переписать их в лагранжевой сопутствующей СО. Более полно эта процедура рассмотрена в предыдущем параграфе.

Предположим, что мы указанным способом нашли компоненты метрического тензора и тензора электромагнитного поля, выбрав в качестве пробных закрепленных в поле зарядов одинаковые заряженные частицы массы m_0 и заряда q.

Вопрос заключается в том: "Как будут двигаться эти пробные частицы в электрическом поле, создаваемом заряженным телом заряда Q, если связи, удерживающие заряд в поле неподвижным, ликвидировать?"

На первый взгляд ответ кажется тривиальным. Казалось бы, что при описании движения пробного заряда в поле нужно исходить из обычных соотношений для пространства Минковского с заменой обычных производных на ковариантные с найденной метрикой и тензором поля, т.е.

$$m_0 c \frac{DV^\mu}{dS} = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu V^\nu. \tag{24.1}$$

Если для движения относительно НСО, такой подход применим и был подробно рассмотрен в параграфе 7 главы 1, то для движения пробных частиц в поле связанных зарядов, рассмотренные соотношения не имеют места. Действительно, раскрыв абсолютную производную с использованием, например, метрики заряженной плоскости (17.9)

$$dS^2 = \exp\Big(-\frac{2E_0 q y^1}{m_0 c^2}\Big) dy^{0\,2} - y^{1\,2} - dy^{2\,2} - dy^{3\,2},$$

получим уравнение движения в виде

$$\frac{dV^1}{dS} - \frac{{}_0 q}{m_0 c^2}\Big(1 + V^{1\,2}\Big) = \frac{qE_0}{m_0 c^2}\sqrt{1 + V^{1\,2}}. \tag{24.2}$$

Это уравнение описывает движение заряженной частицы относительно заряженной плоскости, движущейся с отрицательным ускорением $a = -E_0 q/m$. Заряд плоскости и пробный заряд q одного знака. Из последнего уравнения следует, что в нерелятивистском приближении заряд движется относительно плоскости с удвоенным ускорением по отношению к ускорению относительно покоящегося заряженного тела.

Итак, **постулат эквивалентных ситуаций**, сформулированный нами для расчета электростатических полей, нельзя непосредственно использовать для расчета движения заряженных частиц. Сила со стороны поля учитывается дважды: входит в связность и в правую часть уравнения движения.

Так как при выводе метрики вне заряженного тела использовались формулы (23.8) и (23.9), то ясно, что информация о поле заряженного тела содержится в связности (24.1). Поэтому при описании движения пробной заряженной частицы относительно тела со связанными зарядами будем использовать уравнение движения (24.1) с нулевой правой частью. Точно также поступают в ОТО при рассмотрении движения частицы вне гравитирующей массы. Таким образом, уравнение движения относительно заряженного тела примет вид

$$\frac{dV^\mu}{dS} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} V^\mu V^\alpha = 0. \tag{24.3}$$

Пробная заряженная частица, принадлежащая к конгруенции мировых линий частиц базиса, будет при ликвидации реакции связи двигаться по геодезической линии. Символы Кристоффеля определяются известным образом по найденной метрике.

Сила реакции связи сбивает частицу с геодезической, искривляя ее мировую линию, и создавая отличный от нуля вектор первой кривизны (4-ускорение).

Следовательно, между рассмотрением движения заряженных частиц в электростатическом поле пространства Минковского и движением в поле связанных зарядов в пространстве Римана имеется принципиальное различие.

В пространстве Минковского искривлена мировая линия движущейся в поле частицы, а в пространстве Римана искривлена мировая линия закрепленной в поле частицы. Решение уравнений (24.3) приводит к геодезической конгруенции линий частиц базиса. Переход в систему отсчета, образованную движущимися частицами, приводит очевидно к синхронной метрике. Таким образом, движение пробных частиц в поле связанных зарядов можно рассматривать как переход от НСО к квази-ИСО.

Преобразуя тензор электромагнитного поля из СО связанных зарядов в СО движущихся зарядов, опишем движение закрепленных зарядов относительно подвижных. Ясно, что векторы 4-ускорения для закрепленных зарядов отличны от нуля относительно любой СО, в том числе и синхронной. Поэтому движение связанных зарядов относительно свободных не может быть геодезическим, а определяется обычной формулой

$$m_0 c \frac{D\tilde{V}^\mu}{d\tilde{S}} = -\frac{q}{c} \tilde{F}^\mu{}_\nu \tilde{V}^\nu, \tag{24.4}$$

в которой $\tilde{V}^\mu$ - поле 4-скорости связанных зарядов относительно квази-ИСО, $\tilde{F}^\mu{}_\nu$ - тензор электромагнитного поля в квази-ИСО. Знак минус в (24.4) обусловлен тем, что связанные заряды движутся вдоль удерживающих их нитей, силы натяжения которых направлены в обратную сторону действующих полевых сил. Отметим, что пока мы рассматриваем движение частицы в электростатическом поле и не включаем в рассмотрение магнитного поля. В настоящее время СТО является "инженерной"наукой и подтверждается многочисленными экспериментальными данными. Поэтому любой альтернативный подход должен объяснять экспериментальные факты, которые следуют из СТО. Различие между подходами должно проявляться в экспериментах, которые либо не ставились, либо не обладали достаточной точностью.

В связи с рассмотренным выше встает законный вопрос: "Какому же пространству-времени Минковского или Римана принадлежит частица, движущаяся в электростатическом поле?"

Ответ на этот вопрос зависит от позиции наблюдателей. А именно, какие часы используют наблюдатели для регистрации движения частиц в поле.

Пусть помимо закрепленных в поле зарядов и свободных, имеются и нейтральные частицы, покоящиеся относительно заряженной плоскости. Из рассмотренного выше раздела "Поля в связанных структурах"следует, что нейтральные частицы принадлежат пространству Минковского.

С нейтральными частицами свяжем часы, показывающие ход времени в пространстве Минковского. При этом координатное время этих часов совпадает с собственным.

С закрепленными зарядами свяжем другие часы. Так как метрика для заряженных частиц в электростатическом поле является статической

$$dS^2 = g_{00}(dy^0)^2 + g_{kl}dy^k dy^l, \tag{24.5}$$

то для собственного времени между любыми двумя событиями, для некоторой связанной частицы имеет место формула

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}\, dy^0 = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}y^0. \tag{24.6}$$

Отметим, что величина мирового времени y^0/c не совпадает с мировым временем пространства Минковского. Помимо рассмотренных часов, имеются часы, связанные со свободными частицами, собственное время которых совпадает с мировым временем этих частиц.

Допустим, что два различных наблюдателя исследуют движение заряженной частицы в электрическом поле. Один из наблюдателей придерживается традиционной точки зрения СТО, а другой - представленного здесь альтернативного подхода. Консервативный наблюдатель использует часы пространства Минковского, а альтернативный – пространства Римана. Поэтому каждая из свободных частиц для разных наблюдателей принадлежит разным пространствам.

Таким образом, возникает задача моделирования (отображения) решений в пространстве Римана на решения в пространстве Минковского. С подобной задачей мы столкнулись ранее в параграфе 21 при рассмотрении моделирования полей гравитации и параграфе 6 при рассмотрении эталонных координат в квази-ИСО.

При альтернативном подходе математический аппарат для рассмотрения заряда, движущегося в электростатическом поле, подобен аппарату в ОТО при рассмотрении движения частиц в статическом гравитационном поле. В отличие от ОТО метрика для поля от связанных зарядов определяется не из уравнений Эйнштейна, а из процедуры, описанной выше.

Поэтому поиск инвариантов соответствия является главной задачей. Так как наблюдатели рассматривают движение одних и тех же частиц, то ясно, что для обоих наблюдателей факт пересечения мировой линии заряда с какой-либо из мировых линий базиса является инвариантом соответствия. Однако мировые времена от начала движения частицы до координат точки пересечения мировых линий для каждого из наблюдателей, вообще говоря, различны, т.к. каждый из наблюдателей использует время разных пространств. Очевидно, что и собственные времена движущейся частицы различны при разных подходах.

Итак, различие в подходах должно приводить к деформации времени.

Рассмотрим конкретные примеры.

25. Движение заряженных частиц в однородном поле связанных зарядов

Пусть над заряженной плоскостью подвешена на невесомых нитях одноименно заряженная пыль. Частицы пыли задают базис СО, метрика которого определяется формулой (17.9). Пусть часть частиц освобождается от связей и начинает движение относительно оставшихся связанных зарядов в согласии с соотношением (24.3), т.е. по геодезическим линиям. Закрепленные на нитях частицы, в согласии со сказанным выше, будут иметь отличное от нуля ускорение. Интегрируя систему (24.3), найдем уравнения движения движущихся частиц относительно связанных, воспользуясь раннее найденными нами решениями (3.3)-(3.6) при рассмотрении перехода от НСО к квази-ИСО. Отличие между метриками (2.18), используемой для описания НСО, и метрикой (17.9) проявляется лишь в разных знаках для ускорения и его конкретизации. Система уравнений имеет решение

$$\frac{dy^1}{dS} = -\tan(a_0 S/c^2), \quad y^1 = x^1 + \frac{c^2}{a_0}\ln\,|\cos(a_0 S/c^2)\,|, \quad a_0 = -\frac{E_0 q}{m_0}, \tag{25.1}$$

$$\frac{dy^0}{dS} = \frac{\exp(-a_0 x^1/c^2)}{\cos^2(a_0 S/c^2)}, \qquad y^0 = \frac{c^2}{a_0}\tan(a_0 S/c^2)\exp(-a_0 x^1/c^2). \tag{25.2}$$

При выводе учли, что при $S = 0$, $dy^1/dS = 0$, а эйлеровы координаты y^1 каждой из частиц базиса движущейся СО в начальный момент совпадают с лагранжевыми x^1, которые при интегрировании системы выступали как постоянные интегрирования. Величина $S/c = x^0/c = t$ выступает в качестве координатного времени движущейся СО. Подстановка (25.1) и (25.2) в (17.9) при условии, что $y^2 = x^2$, $y^3 = x^3$ дает для элемента интервала движущейся СО

$$dS^2 = c^2dt^2 - \cos^2(a_0 t/c)(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{25.3}$$

Итак, найденная СО, совпадает с синхронной, в которой линии времени совпадают с геодезическими линиями частиц.

Разрешив систему алгебраических уравнений (25.1), (25.2) относительно x^1, x^0, получим закон движения сплошной среды в переменных Лагранжа связанных зарядов относительно движущихся, что дает

$$x^1 = y^1 - \frac{c^2}{a_0}\ln\,\left|\,1 - \frac{{a_0}^2 {y^0}^2}{c^4}\exp(2a_0 y^1/c^2)\,\right|,$$

$$x^0 = \frac{c^2}{a_0}\arcsin\Big(\frac{a_0 y^0}{c^2}\exp(a_0 y^1/c^2)\Big). \tag{25.4}$$

Подстановка (25.4) в (25.3) снова приводит к интервалу (17.9).

Закон движения (25.4) можно представить в другой форме, принятой в нерелятивистской механике сплошных сред

$$x^1 = y^1 - \frac{c^2}{a_0}\ln\,|\cos(a_0 t/c)\,|, \qquad t = t. \tag{25.5}$$

Дифференцирование (25.5) по t дает скорость v^1 каждой из лагранжевых частиц

$$v^1 = c\tan(a_0 t/c), \qquad v = \sqrt{(-g_{11}v^1v^1)} = -c\sin(a_0 t/c). \tag{25.6}$$

Величина этой скорости v не превосходит скорости света и достигает ее за конечный промежуток времени $t_1 = m_0 c/(2E_0 q)$. Отличные от нуля символы Кристоффеля по метрике (25.3) имеют вид

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\cos^2(a_0 t/c), \qquad \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\ln\cos^2(a_0 t/c). \tag{25.7}$$

4 - скорости частиц $\tilde{V}^\mu$ могут быть вычислены с помощью закона движения (25.4) по формуле

$$\tilde{V}^\mu = \Theta\frac{\partial x^\mu}{\partial y^0}, \tag{25.8}$$

где скалярный множитель Θ определяется из условия нормировки 4-скорости. Поле 4 - скорости в переменных Эйлера сведется к виду

$$\tilde{V}_1 = -\sin(a_0 t/c), \quad \tilde{V}^0 = \tilde{V}_0 = \frac{1}{\cos(a_0 t/c)}, \quad \Theta = \exp(-a_0 y^1/c^2). \tag{25.9}$$

С помощью формул (25.9) и метрики (25.3) можно убедиться, что тензор скоростей деформаций $\Sigma_{\mu\nu}$ (1.3) и тензор угловой скорости вращения $\Omega_{\mu\nu}$ (1.4) обращаются в нуль, а величина 4 - ускорения $g_{\mu\nu}F^\mu F^\nu = -a_0^2/c^4$ (1.5) постоянна.

Из формул (25.3) и (25.6) следует, что выражение для элемента интервала можно представить в форме

$$dS^2 = c^2dt^2 - (1 - v^2/c^2)(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{25.10}$$

содержащей в явном виде лоренцево сокращение длины движущейся СО по отношению к наблюдателю из СО связанных зарядов.

Уравнения Максвелла в движущейся СО имеют вид

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\varepsilon} + \frac{\partial F_{\varepsilon\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\varepsilon}}{\partial x^\mu} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\Big) = -\frac{4\pi}{c}j^\mu. \tag{25.11}$$

Можно показать, используя (25.3), что уравнения Максвелла в пустоте в движущейся СО допускают решение

$$F_{01} = -F_{10} = E_0\cos(a_0 x^0/c^2), \tag{25.12}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся

$$\sqrt{-g} = \cos(a_0 x^0/c^2), \quad F^{01} = g^{00}g^{11}F_{01} = -\frac{E_0}{\cos(a_0 x^0/c^2)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}F^{10})}{\partial x^0} \equiv 0, \tag{25.13}$$

что и доказывает сделанное выше утверждение.

Решение уравнений Максвелла в СО связанных зарядов имеет вид

$$F_{01} = E_1 = D_1\exp\Big(-\frac{E_0 q y^1}{m_0 c^2}\Big) = D_1\sqrt{g_{00}}, \quad D_1 = E_0 = const, \tag{25.14}$$

в чем можно убедиться непосредственно из закона движения (25.4) и формул преобразования для тензора поля
$$F_{\alpha\beta}(y^\gamma) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}F_{\mu\nu}.$$
Из последнего преобразования получим из (25.12) выражение (25.14).

Вычисляя "физические"тетрадные компоненты тензора поля с помощью тетрад с калибровкой Ламе
$$e^\mu_{(\alpha)} = \frac{\delta^\mu_\alpha}{\sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}}, \qquad e^{(\alpha)}_\mu = \delta^\alpha_\mu\sqrt{|g_{\alpha\alpha}|},$$
по формуле
$$F_{(\alpha)(\beta)} = e^\mu_{(\alpha)}e^\nu_{(\beta)}\tilde{F}\mu\nu,$$
получим как для движущейся, так и для связанной СО отличные от нуля значения
$$F_{(0)(1)} = E_0 = const.$$
Рассмотренная ситуация аналогична той, при которой электрическое поле не меняется и при преобразованиях Лоренца, когда скорость движущейся системы направлена вдоль поля $\vec{E}$.

Проверим общее соотношение (24.4) в частном случае движения связанных зарядов относительно движущихся. Из (25.3), (25.7) и (25.9) находим
$$\tilde{V}^\mu\nabla_\mu\tilde{V}_\nu = F_\nu = \tilde{V}^\mu\Big(\frac{\partial\tilde{V}_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\epsilon_{\mu\nu}\tilde{V}_\epsilon\Big), \quad F_0 = \frac{a_0}{c^2}\tan(a_0t/c),$$
$$F_1 = -\frac{a_0}{c^2}, \quad \Sigma_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} = 0, \quad g_{\mu\nu}F^\mu F^\nu = -\frac{{a_0}^2}{c^4}.$$
Из последнего соотношения и (25.12) следует, что уравнение (24.4) обращается в тождество.

Итак, мы доказали, что свободные заряды относительно связанных движутся по геодезическим, а связанные по отношению к свободным по мировым линиям в согласии с уравнением движения (24.4). При этом поле в локальных тетрадах в обеих СО является однородным и совпадает с полем в пространстве Минковского.

Таким образом, на движение заряженной пыли в однородном электрическом поле можно смотреть с позиции двух наблюдателей:

1. Наблюдатель находится в жесткой ИСО пространства Минковского, в которой выбраны галилеевы координаты. В согласии с наиболее распространенной в настоящее время трактовкой движение заряженной пыли для него происходит по закону (2.5), (2.6) и при переходе к НСО приводит к метрике (2.7), (2.8). (Отметим, что в силу обозначений, используемых в этой главе, лагранжевы координаты определяем, как x^k, а эйлеровы, как y^k, время пространства Минковского обозначаем через T, а собственное время частиц в пространстве Минковского через τ.) Из сказанного имеем
$$y^1(x^1, T) = x^1 + (c^2/a_0')[\sqrt{1 + {a_0'}^2T^2/c^2} - 1],$$

$$y^2 = x^2, \quad y^3 = x^3, \quad y^0 = x^0, \quad a_0' = -a_0 = \frac{E_0 q}{m_0} \tag{25.15}$$

или

$$y^1(x^1, \tau) = x^1 + c^2/a_0'[\cosh(a_0'\tau/c) - 1],$$

$$y^2 = x^2, \quad y^3 = x^3, \quad T = (c/a_0')\sinh(a_0'\tau/c), \tag{25.16}$$

где в (25.15) в качестве временного параметра используется время в ИСО T, а в (25.16) τ - собственное время. Для законов движения (25.15) и (25.16) имеем соответствующие метрики

$$dS^2 = \frac{c^2 dT^2}{1 + {a_0'}^2 T^2/c^2} - 2\frac{a_0' T dT dx^1}{(1 + {a_0'}^2 T^2/c^2)^{1/2}}$$
$$-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \tag{25.17}$$

$$dS^2 = c^2(d\tau)^2 - 2\sinh(a_0'\tau/c) c d\tau dx^1 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \tag{25.18}$$

Если из метрик (25.17) , (25.18) согласно работе [7] построить трехмерный метрический тензор $\gamma_{kl} = -g_{kl} + g_{0k}g_{0l}/g_{00}$, то для квадратов "физического расстояния "получим соответственно

$$dl^2 = (1 + {a_0'}^2 T^2/c^2)(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \tag{25.19}$$

$$dl^2 = \cosh^2(a_0'\tau/c)(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \tag{25.20}$$

Из последних формул следует, что найденная метрика не является жесткой.

2. Наблюдатель находится в пространстве-времени связанных зарядов Движение пыли для него происходит по закону (24.3). Решение задачи приводит к соотношениям (25.1), (25.2) и метрике (25.3).

Очевидно, что как для консервативных, так и для альтернативных наблюдателей попадание частицы с лагранжевыми координатами x^k в точку с эйлеровыми координатами y^k является инвариантным фактором. Иными словами, для одних и тех же движущихся частиц в пространстве Минковского и Римана выбрана общая пространственная координация как эйлеровых, так и лагранжевых координат.

Однако моменты времени по часам пространства Минковского и по часам связанных и свободных зарядов различны. Различны, очевидно, и величины интервалов между двумя событиями с точки зрения разных пространств.

В пространстве Минковского при равноускоренном движении в согласии с (25.15) и (25.16) гиперплоскость $T = \text{const}$ задает и гиперплоскость $\tau = \text{const}$, однако не совпадает с гиперповерхностью ортогональной мировым линиям движущихся зарядов.

В пространстве Римана для этих же частиц в силу (25.1)-(25.3) гиперповерхность $S/c = t = \text{const}$ совпадает с гиперповерхностью ортогональной геодезическим линиям свободных частиц. Собственное время для геодезической конгруенции совпадает с мировым временем t.

Сравнивая законы движения (25.1) с (25.15), получаем связь между временем пространства Минковского и пространства Римана для движущихся частиц

$$t = \frac{cm_0}{E_0 q} \arccos\Big[\exp\Big(1 - \sqrt{1 + \frac{E_0 q^2 T^2}{m_0^2 c^2}}\Big)\Big]. \tag{25.21}$$

После чего интервал (25.3) можно переписать в эталонных координатах пространства Минковского, введенных в разделе 6 главы 1.

$$\begin{gathered} dS^2 = g_{00} c^2 dT^2 - g_{11}(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \\ g_{00} = \frac{\beta^2 \exp\Big(2(1 - (1+\beta^2)^{1/2})\Big)}{(1+\beta^2)\Big[1 - \exp\Big(2(1-(1+\beta^2)^{1/2})\Big)\Big]}, \\ g_{11} = \exp\Big(2(1-(1+\beta^2)^{1/2})\Big), \qquad \beta = \frac{E_0 q T}{m_0 c}. \end{gathered} \tag{25.22}$$

Рассмотрим к каким следствиям могут привести два различных подхода.

При классическом рассмотрении связь между собственным временем τ_m и временем T при гиперболическом движении в постоянном электрическом поле определяется формулой

$$T = \frac{m_0 c}{E_0 q} \sinh\Big(\frac{E_0 q \tau_m}{m_0 c}\Big), \quad \tau_m = \frac{m_0 c}{E_0 q} \operatorname{arsinh}\Big(\frac{E_0 q T}{m_0 c}\Big). \tag{25.23}$$

Из анализа соотношения (25.23) следует, что для наблюдателя пространства Минковского бесконечно большому времени движения частицы в однородном поле соответствует и бесконечное собственное время.

Анализ соотношения (25.21) и метрики (25.3) показывает, что по часам пространства Римана бесконечному времени для плоского пространства соответствует конечный промежуток времени, отсчитываемый в системе свободных зарядов, а именно

$$\tau_\infty = \frac{c m_0 \pi}{2 E_0 q}. \tag{25.24}$$

Собственное время СО связанных зарядов, которое определим как и в случае статических гравитационных полей [7] по правилу

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{c}(g_{00})^{1/2} y^0 \tag{25.25}$$

получается из соотношений (25.4), (25.5), (25.21).

$$\tilde{\tau} = \frac{c}{a_0'} \sqrt{\Big[1 - \exp\Big(2(1-(1+\beta^2)^{1/2})\Big)\Big]} = \frac{c}{a_0'} \sin(a_0' t/c). \tag{25.26}$$

Рассмотрим к каким отличиям могут привести два различных подхода при рассмотрении времени жизни нестабильных элементарных частиц в разных СО. С точки зрения наблюдателя пространства Минковского связь между собственным временем частицы $d\tau_m$ и лабораторным временем dT дается хорошо известным соотношением

$$\frac{d\tau_m}{dT} = \sqrt{1-\alpha^2}, \qquad \alpha = \frac{v}{c}. \tag{25.27}$$

Если лабораторные часы находятся вне электрического поля, то связь между собственным временем частицы t в пространстве Римана и лабораторным временем T определяется из (25.21). Дифференцируя (25.1) по T и исключая ускорение в полученной после дифференцирования формуле в согласии с соотношением

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \tag{25.28}$$

получаем зависимость

$$\frac{dt}{dT} = \frac{\alpha}{\sqrt{\exp\left(\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 2\right) - 1}}. \tag{25.29}$$

Из формул (25.29) и (25.27) получаем

$$D = \frac{dt}{d\tau_m} = \frac{\alpha}{\sqrt{\exp\left(\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 2\right) - 1}} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{25.30}$$

Приводим конкретные значения величины D в зависимости от α: $\alpha = 0 \to D = 1$, $\alpha = 0.25 \to D = 0.992$, $\alpha = 0.5 \to D = 0.960$, $\alpha = 0.75 \to D = 0.849$, $\alpha = 0.95 \to D = 0.338$, $\alpha = 0.99 \to D = 0.016$. Из анализа (25.30) следует, что промежуток собственного времени частицы в пространстве Римана короче промежутка собственного времени в пространстве Минковского. Это отношение уменьшается в зависимости от роста скорости частицы. Таким образом, по отношению к лабораторной системе нестабильные частицы должны оказаться более долгоживущими, чем это принято считать, основываясь на СТО. Например, при $\alpha = 0.75$ время жизни в лабораторной системе должно быть на 15% больше, чем это следует из СТО. Последнее утверждение справедливо только для заряженных частиц. Для незаряженных частиц, в том числе и для фотонов, геометрия пространства-времени – плоская. Поэтому для таких частиц справедлива динамика СТО.

После прочтения предыдущего текста возникает законный вопрос. "Почему движение заряженной пыли в однородном электрическом поле не является жестким в смысле Борна, ведь очевидно, что метрика (25.3) нестационарна и расстояние между двумя соседними частицами вдоль оси движения уменьшается?"На первый взгляд кажется, что, основываясь на утверждении, согласно которому в однородном силовом поле любой природы твердое тело должно двигаться как единое целое без деформаций (2.18), мы пришли к противоречию, рассматривая геодезическое движение пыли в однородном поле связанных зарядов. Причина разрешения противоречия лежит в различии позиций наблюдателей, изучающих движение заряженной пыли в электрическом поле. Для разрешения парадокса рассмотрим следующий пример.

Пусть в однородном электрическом поле на невесомой нити (динамометре) подвешена заряженная частица, к которой на нити (динамометре) закреплена нейтральная пробная масса, значительно меньшая, чем масса заряженной частицы. Ясно, что при пренебрежении гравитацией, нить, удерживающая заряженную частицу в поле, – натянута, а нить, связывающая заряженную частицу с пробной, находятся в ненатянутом состоянии. В согласии с рассмотренным выше, закрепленная в поле заряженная частица покоится (т.е. "движется"равноускоренно) в римановом пространстве с метрикой (17.9). Нейтральная частица не подвержена действию полей и для нее пространство-время есть плоское пространство Минковского. Если нить, удерживающую заряд в поле, обрезать , то заряженная частица будет двигаться по геодезической линии, а нейтральная, привязанная к заряженной, по мировой линии в римановом пространстве времени. Исходная метрика по отношению к которой движутся нейтральные частицы есть метрика квази-ИСО (3.7), в которой $x^k \to y^k$, $t \to \tilde{t}$ т.е.

$$d\tilde{S}^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - \cos^2(\tilde{a}_0\tilde{t}/c)(dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2. \tag{25.31}$$

Ускорение нейтральной частице будут сообщать сила натяжения нити, связывающая нейтральную частицу с заряженной. Если рассмотреть вместо одной связанной пары их совокупность и устремить длины нитей, связывающих пары, к нулю, то получим конгруенцию геодезических линий для заряженных частиц среды с метрикой в лагранжевой сопутствующей СО в виде (25.3) и конгруенцию мировых линий пробных нейтральных частиц. Последняя конгруенция должна соответствовать и конгруенции мировых линий частиц с метрикой

$$d\tilde{S}^2 = \exp\Big(\frac{2\tilde{a}_0 x^1}{c^2}\Big)(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \tag{25.32}$$

получаемой из (2.18) заменой $y^k \to x^k$. Нам остается доказать существование инварианта соответствия мировых и геодезических линий частиц среды, а именно совпадения законов движения в переменных Лагранжа для каждой из конгруенций. Так как рассматривается движение одних и тех же частиц, то ясно, что для обеих конгруенций пересечение каждой из мировых линий лагранжевых частиц с какой-либо из мировых линий базиса должно быть инвариантом соответствия.

Однако времена от начала движения частицы до координат точки пересечения мировых линий для заряженной и нейтральной каждой из частиц, вообще говоря, должны быть различны. Каждая из частиц пары находятся в разных физических условиях. Нейтральная частица движется равноускоренно, а ускорение заряженной частицы равно нулю. Таким образом, на каждой из движущихся частиц пары находятся свои часы и показания "заряженных"часов не совпадают с показанием "нейтральных"часов этой же пары частиц.

Математически задача существования инварианта соответствия между мировыми и геодезическими линиями каждой из пар частиц конгруенции сводится к доказательству утверждений:

1). Относительно метрики (25.31) существует решения уравнения Максвелла для однородного (в тетрадах) поля.

2). Интегрирование уравнения движения (24.1) с использованием метрики (25.31) и найденного решения уравнения Максвелла должно привести к закону движения среды в переменных Лагранжа эквивалентному (25.1).

Фактически первое утверждение уже нами доказано выше (формулы (25.11-25.14) и т.д.), в которых нужно заменить $x^\alpha \to y^\alpha$. Для доказательства второго утверждения выскажем следующие наводящие соображения:

а). Законы движения (25.1) и (25.2) описывают перемещения свободных заряженных частиц по отношению к связанным зарядам и переводят метрику (17.9) в метрику (25.3).

b). Законы движения связанных зарядов относительно движущихся (25.4) переводят метрику (25.3) в метрику (17.9).

c). Следовательно, для нахождения закона движения, преобразующего метрику (25.31) в метрику (25.32), в законе движения (25.4) достаточно сделать формальную замену $x^k \to y^k$, $y^k \to x^k$, $x^0 \to y^0$, $y^0 \to x^0$, $a_0 \to \tilde{a}_0$. Учтем также, что текущая координата движущейся частицы всегда больше больше начальной, т.е. $y^1 > x^1$ и $\tilde{a}_0 > 0$. В результате находим закон движения в переменных Лагранжа нейтральных связанных с движущимися зарядами частиц относительно квази-ИСО (25.31)

$$y^1 = x^1 - \frac{c^2}{\tilde{a}_0}\ln\Big|1 - \frac{\tilde{a}_0^2 x^{0 2}}{c^4}\exp(2\tilde{a}_0 x^1/c^2)\Big|,$$

$$y^0 = \frac{c^2}{\tilde{a}_0}\arcsin\Big(\frac{\tilde{a}_0 x^0}{c^2}\exp(\tilde{a}_0 x^1/c^2)\Big). \tag{25.33}$$

Закон движения (25.33) представим в другой форме, которая принята в нерелятивистской механике сплошных сред

$$y^1 = x^1 - \frac{c^2}{\tilde{a}_0}\ln\ |\cos(\tilde{a}_0\tilde{t}/c)\ |, \quad \tilde{a}_0 = \frac{E_0 q}{m_0}, \quad y^0 = c\tilde{t}. \tag{25.34}$$

Сравнение законов движения (25.34) и (25.1) говорит о их совпадении. Остается доказать, что конгруенция мировых линий частиц (25.33) является решением уравнений движения (24.1), в котором под массой m_0 понимается суммарная масса нейтральной и заряженной частиц, совпадающей практически с массой заряженной частицы. Поле 4-скорости V^μ можно получить из закона движения (25.33) аналогично соотношению (25.8)

$$V^\mu = \tilde{\Theta}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^0}, \tag{25.35}$$

где скалярный множитель $\tilde{\Theta}$ определяется из условия нормировки 4-скорости. Поле 4 - скорости в переменных Эйлера сведется к виду

$$V_1 = -\sin(\tilde{a}_0\tilde{t}/c), \quad V^0 = V_0 = \frac{1}{\cos(\tilde{a}_0\tilde{t}/c)}, \quad \tilde{\Theta} = \exp(-\tilde{a}_0 x^1/c^2).$$

$$V^1 = \frac{\tan(\tilde{a}_0\tilde{t}/c)}{\cos(\tilde{a}_0\tilde{t}/c)}. \tag{25.36}$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля для метрики (25.31) имеют вид

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\cos^2(\tilde{a}_0\tilde{t}/c), \qquad \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\ln\,\cos^2(\tilde{a}_0\tilde{t}/c). \tag{25.37}$$

Из (25.36), (25.37) и (25.31) находим

$$V^\mu\nabla_\mu V_\nu = F_\nu = V^\mu\Big(\frac{\partial V_\nu}{\partial y^\mu} - \Gamma^\epsilon_{\mu\nu}V_\epsilon\Big), \quad F_0 = \frac{\tilde{a}_0}{c^2}\tan(\tilde{a}_0\tilde{t}/c),$$

$$F_1 = -\frac{\tilde{a}_0}{c^2}, \quad \Sigma_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} = 0, \quad g_{\mu\nu}F^\mu F^\nu = -\frac{\tilde{a}_0^2}{c^4}. \tag{25.38}$$

Решение уравнения Максвелла для однородного поля в пустоте для квази-ИСО (25.31) имеет вид аналогичный (25.12).

$$F_{01} = -F_{10} = E_0 \cos(\tilde{a}_0 y^0/c^2), \tag{25.39}$$

Из соотношений (25.36), (25.38) и (25.39) следует, что уравнение (24.1) обращается в тождество.

Итак, ответ на вопрос "Почему движение заряженной пыли в однородном электрическом поле не является жестким в смысле Борна, ведь очевидно, что метрика (25.3) нестационарна и расстояние между двумя соседними частицами вдоль оси движения уменьшается?"заключается в следующем:

1. Метрика (25.3) - это метрика для наблюдателей, находящихся в СО связанных зарядов (17.9) и использующих для описания движения заряженной пыли координаты квази-ИСО (25.3). Уменьшение расстояния между геодезическими связано с лорецновыми сокращениями (25.10).

2. Метрика (25.32) - это метрика для наблюдателей, находящихся В НСО, связанной с движущимися зарядами. Эта метрика отличается знаком ускорения от метрики (17.9). Метрика является жесткой в смысле Борна, как и должно быть при движении в однородном поле с нулевыми начальными скоростями.

Из сравнения (25.3) и (25.32) следует, что квадрат интервала не является инвариантом соответствия для различных наблюдателей.

Более подробно эти вопросы изложены в первой главе и мы не будем на этом больше останавливаться.

26. Движение заряженных частиц в кулоновом поле связанных зарядов

а). Классический подход аналогичный ОТО

Рассмотрим движение заряженной частицы массы m_0 и заряда q в поле, которое создает другой заряд Q. Масса заряда, создающего поле, велика по сравнению с m_0, поэтому заряд Q будем считать неподвижным. В согласии с изложенным выше, пробный заряд будет двигаться по геодезической линии в поле связанных зарядов, образующих заряд Q. Метрика пространства-времени определяется формулой

$$dS^2 = \exp(\nu)(dy^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \exp(\lambda)(dr)^2, \tag{19.4}$$

где коэффициенты ν и λ определяются формулами формулами (19.14) и (19.15).

Для описания движения частицы вместо уравнения геодезической (24.3) удобнее воспользоваться уравнением Гамильтона-Якоби. Известно, что при движении в центрально-симметричном поле траектория частицы лежит в одной плоскости, проходящей через центр неподвижного заряда, создающего поле. В качестве такой плоскости выберем плоскость $\theta = \pi/2$.

Уравнение Гамильтона-Якоби будет иметь точно такой же вид, как и в ОТО при описании движения в центрально-симметричном гравитационном поле [7].

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial S}{\partial y^{\nu}} - m_0c^2 = 0. \tag{26.1}$$

Из (19.4) и (26.1) имеем

$$e^{-\nu}\Big(\frac{\partial S}{\partial y^0}\Big)^2 - e^{-\lambda}\Big(\frac{\partial S}{\partial r}\Big)^2 - \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial S}{\partial \phi}\Big)^2 - m_0^2c^2 = 0. \tag{26.2}$$

В согласии с общим методом решения уравнения Гамильтона-Якоби действие S представим в следующей форме

$$S = -\frac{E_0y^0}{c} + M\phi + S_r(r). \tag{26.3}$$

Здесь E_0 - постоянная энергия, M - постоянный момент импульса. Из (26.3) и (26.2) имеем

$$S_r = \int\sqrt{\exp(\lambda-\nu)\frac{E_0^2}{c^2} - \Big(m_0^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\Big)\exp(\lambda)d\,r}. \tag{26.4}$$

В согласии с (19.14) и (19.15) для подинтегрального выражения имеем

$$\exp(\lambda) = \frac{\frac{r^4}{Q^2}\Big(\frac{\partial A_0}{\partial r}\Big)^2}{\Big(1+\frac{qA_0}{m_0c^2}\Big)^2}. \tag{26.5}$$

$$\exp(\lambda-\nu) = \frac{\frac{r^4}{Q^2}\Big(\frac{\partial A_0}{\partial r}\Big)^2}{\Big(1+\frac{qA_0}{m_0c^2}\Big)^4}. \tag{26.6}$$

Найдем зависимость радиальной координаты r от мирового времени y^0/c. Это можно сделать из уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial E_0} = \mathrm{const}. \tag{26.7}$$

Используя (26.3-26.6), находим

$$\frac{v^{(1)}}{c} = \frac{\exp(\lambda/2)dr}{\exp(\nu/2)dy^0} = \sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{E_0^2}\Big(1+\frac{M^2}{m_0^2c^2r^2}\Big)\Big(1+\frac{qA_0}{m_0c^2}\Big)^2}. \tag{26.8}$$

Здесь $v^{(1)}$ - радиальная "физическая"компонента трехмерной скорости.

Для примера рассмотрим падение на положительно заряженный кулоновский центр отрицательно заряженной частицы.

Из (26.8) находим при $M = 0$ формулу

$$\frac{v^{(1)}}{c} = \sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{E_0^2}\Big(1+\frac{qA_0}{m_0c^2}\Big)^2}. \tag{26.9}$$

Последнее соотношение может быть получено также из закона сохранения энергии, который аналогичен закону сохранения энергии для частицы в постоянном гравитационном поле в ОТО [7].

$$E_0 = \frac{m_0 c^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{26.10}$$

В формуле (26.10) под величиной скорости v понимается величина вычисленная по формуле

$$v = \frac{cdl}{\sqrt{g_{00}} dy^0}, \tag{26.11}$$

где dl - элемент пространственного расстояния вдоль мировой линии движущейся частицы. Время измеряется по часам наблюдателя покоящегося в пространстве связанных зарядов. Как показано нами ранее, для положительных зарядов "релятивистские"поправки, обусловленные "ускорением"связанных зарядов, создающих поле, дают малую поправку в скалярный потенциал. Поэтому справедлива формула (19.15а), из которой имеем

$$\frac{v^{(1)}}{c} = \sqrt{1 - \Big(1 - \frac{|q||Q|}{m_0 c^2 r}\Big)^2}. \tag{26.12}$$

Рассмотрим в частности задачу о радиальном движении электрона в поле протона, не рассматривая пока квантовых эффектов. Как известно из ядерной физики, радиус распределения заряда внутри протона $R = 0.8 \cdot 10^{-13} cm$. Классический радиус электрона $r_0 = 2.8 \cdot 10^{-13} cm$. Скалярный потенциал вне протона может быть вычислен по формуле (19.3а).

$$A_0 = \frac{Q \exp(-\zeta^2)\sqrt{\pi} i}{4R\zeta}\Big[\Phi(i\zeta(1 - 2R/r)) - \Phi(i\zeta)\Big], \quad \zeta = \frac{r}{R}\sqrt{\frac{eQ}{8mc^2 R}}. \tag{19.3a}$$

Вне протона справедливо соотношение

$$\zeta = \frac{r}{R}\sqrt{\frac{eQ}{8mc^2 R}} = \frac{r}{R}\sqrt{\frac{m_e r_0}{8 m_p R}} = 0.0154 \frac{r}{R}. \tag{26.13}$$

В последней формуле m_e, m_p - соответственно массы электрона и протона. Учитывая малость $\delta = 0.0154$, раскладывая (19.3) в ряд Тейлора, получим для формулы (26.9)

$$\frac{v^{(1)}}{c} = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{E_0^2}\Big(1 - \frac{r_0}{r}\Big)^2}. \tag{26.14}$$

Займемся анализом формулы (26.14) Пусть электрон имел на бесконечности нулевую скорость, что эквивалентно соотношению $E_0/m_0 c^2 = 1$. В этом случае из формулы (26.14) имеем

$$\frac{v^{(1)}}{c} = \sqrt{1 - \Big(1 - \frac{r_0}{r}\Big)^2}. \tag{26.15}$$

Из (26.15) следует, что при падении на протон скорость электрона сначала возрастает от нуля до скорости света c, достигая последней на расстоянии от центра протона равном классическому радиусу электрона r_0. При дальнейшем приближении к центру скорость электрона начинает уменьшаться и обращается в ноль на расстоянии от центра протона равном половине классического радиуса электрона $r_0/2$. Далее при уменьшении радиуса подкоренное выражение становится отрицательным и скорость мнимой, что лишено физического смысла. Таким образом, найденное решение справедливо при значениях $r \geq r_0/2$.

Уменьшение "физической"скорости электрона эквивалентно отталкиванию со стороны протона при малых расстояниях $1.4 \cdot 10^{-13} cm$, равных приблизительно эффективному радиусу протона.

Отметим для сравнения, что в аналогичной задаче при движении по радиусу частиц в гравитационном поле, заданной метрикой Шварцшильда, "физическая"скорость определяется формулой [60]

$$\frac{v^{(1)}}{c} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} = \sqrt{\frac{r_g}{r}}. \tag{26.16}$$

В формуле (26.16) r_g - гравитационный радиус.

При формальной замене $e^2 \to k m_p m_e$ или $r_0 \to r_g/2$ решение (26.15) и (26.16) вдали от гравитационного радиуса совпадают.

Однако вблизи гравитационного радиуса решения (26.15) и (26.16) качественно отличаются друг от друга. В (26.16) "физическая"скорость частицы возрастает с уменьшением радиуса, достигает значения скорости света c на гравитационном радиусе и стремится к бесконечности при $r \to 0$.

В нашем случае (26.15) величина скорости частицы как и в СТО не превосходит скорости света в вакууме, достигая последней при $r = r_0$.

Решение аналогичной задачи в рамках СТО [7], приводит к соотношению

$$\frac{v^{(1)}}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^2}}. \tag{26.17}$$

Из формулы (26.17) следует, что скорость электрона при приближении к центру возрастает с уменьшением радиуса и стремится к скорости света c при $r \to 0$. При $r = r_0$, $v^{(1)} = .866c$. Ясно, что при нашем рассмотрении при $r > r_0$ максимальное отклонение скорости от решения в СТО не превосходит 14%. При $r_0/r \ll 1$ решения (26.15) и (26.17) совпадают. При $r_0/r > 1$ характер поведения скорости изменяется: в нашем случае она уменьшается, а в СТО - возрастает.

Исследуем радиальное движение ультрарелятивистских электронов, которые даже на бесконечности обладают бесконечно большой энергией. Полагая в (26.9) $E_0 \to \infty$, получим для любых r, $v^{(1)} = c$. Для аналогичного случая такой же результат получится в СТО и ОТО.

Исследуем более подробно соотношение (26.14), введя безразмерную энергию электрона E и безразмерную скорость v по формуле

$$E = \frac{E_0}{m_e c^2}, \qquad v = \frac{v^{(1)}}{c}. \tag{26.18}$$

В согласии с принятыми обозначениями имеем

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{E^2}\Big(1 - \frac{r_0}{r}\Big)^2}. \tag{26.19}$$

Из анализа (26.14) следует, что для любых значений $E \geq 1$ величина v имеет максимум равный единице в точке $r = r_0$. Для больших значений энергии кривая нарастания скорости из бесконечности до точки r_0, будет более плавной, чем для меньших значений энергии. Для ультрарелятивистских частиц кривая нарастания совпадает с прямой $v = 1$. После прохождения максимума кривая скорости будет спадать и на некотором значении радиуса значение v становится равным нулю. Расстояние r_{min}, соответствующее нулевому значению скорости, будет тем ближе к кулоновскому центру, чем больше энергия частицы. Это следует из формулы

$$r_{min} = \frac{r_0}{E+1}. \tag{26.20}$$

Из (26.20) следует, что достигнуть кулоновского центра могут только электроны с бесконечно большой энергией E. Однако это не так. Формулы (26.19), (26.20) применимы для протона конечного радиуса. Для модельного точечного протона нужно пользоваться общими формулами (26.9) и (19.3a). В согласии с (19.3a) для скалярного потенциала вблизи кулоновского центра справедлива формула

$$A_0(R) = \frac{Q\exp(-\delta^2)\sqrt{\pi}}{2Ri\delta}\Big[\Phi(i\delta)\Big],$$

откуда находим при $z = \delta \gg 1$ выражение

$$A_0(R) = \frac{4mc^2}{e}.$$

Из последней формулы и (26.9) следует, что иметь нулевую скорость в кулоновском центре могут электроны с энергией

$$E = 4\frac{m_p}{m_e} - 1. \tag{26.22}$$

Таким образом, достигать точечного кулоновского центра могут электроны с большой, но конечной энергией.

Найдем время падения электрона на протон с некоторого расстояния r_1 до остановки.

Время падения по мировому времени y^0/c в пространстве связанных зарядов определим из формулы

$$y^0 = \int \frac{dr}{\Big(1 - \frac{r_0}{r}\Big)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{E^2}\Big(1 - \frac{r_0}{r}\Big)^2}}. \tag{26.23}$$

Этот интеграл расходится при $r \to r_0$. Точно такая же ситуация имеет место в ОТО, когда внешний наблюдатель рассматривает радиальное движение частицы в шварцшильдовом поле при приближении ее к гравитационному радиусу.

Вычислим время падения электрона τ в сопутствующей электрону СО.

$$\tau c = \int dr \sqrt{\exp(\nu)\frac{dy^{0^2}}{dr^2} - \exp(\lambda)} = \int \frac{dr}{\sqrt{E^2 - \Big(1 - \frac{r_0}{r}\Big)^2}}. \tag{26.24}$$

Интегрируя последнее соотношение, получим время τ падения электрона от некоторого значения r_1 до r_{min}, определяемого из (26.20).

$$\tau = \frac{r_0}{c(E^2-1)}\Bigg[\sqrt{(E^2-1)\frac{r_1^2}{r_0^2}+2\frac{r_1}{r_0}-1}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{E^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{E^2-1}\sqrt{(E^2-1)\frac{r_1^2}{r_0^2}+2\frac{r_1}{r_0}-1}+(E^2-1)\frac{r_1}{r_0}+1}{E}\right|\Bigg]. \qquad (26.25)$$

Итак, как и в ОТО, собственное время падающего электрона на конечном расстоянии является конечной величиной. Для упрощения анализа последней формулы рассмотрим случай $E = 1$. В частности для $E = 1$ из (26.24) имеем непосредственно выражение

$$\tau = \frac{r_0}{3c}\left(1+\frac{r_1}{r_0}\right). \qquad (26.26)$$

Это же соотношение можно получить и из (26.25) предельным переходом $E \to 1$. Формула (26.26) дает собственное время падения электрона в поле протона с расстояния r_1 от центра протона до остановки при нулевой кинетической энергии на бесконечности. Выясним физический смысл происхождения остановки электрона в поле протона. Приравнивая в (26.19) нулю подкоренное выражение, найдем функцию $E(r)$, играющую роль потенциальной кривой в нерелятивистской теории.

$$E(r) = \left|1-\frac{r_0}{r}\right|. \qquad (26.27)$$

Из анализа (26.27) следует, что в результате наличия модуля функция $E(r)$ при $r < r_0$ не убывает, а возрастает, обращаясь в единицу при $r = r_0/2$ и стремясь к бесконечности при $r \to 0$. Таким образом, ближе расстояний $r = r_0$ проявляется как бы "эффективное отталкивание вызывающее остановку электрона на $r = r_{min}$ в соответствии с (26.20). Так как $E(\infty) = 1$, то образуется потенциальная яма с глубиной $1 - E(r_0) = 1$.

Итак, при $E = E_1 < 1$ радиальное движение электрона в поле протона финитно. Электрон совершает радиальные колебания в пределе от r_{min} до $r_1 = r_0/(1-E_1)$. При $E = E_1 > 1$ движение инфинитно. Электрон, достигнув при падении значения r_{min}, после "отражения"уходит на бесконечность.

В СТО решение такой задачи при $M = 0$ приводит к падению заряда на кулоновский центр. Аналогичная ситуация имеет место при нулевом моменте в ньютоновской механике и в ОТО.

Найдем движения электрона в поле протона по круговым орбитам. Полагая в (26.8) $v^{(1)} = 0$, что соответствует при $M \neq 0$ круговым орбитам, получим выражение для потенциальной кривой $U(r) = E_0(r)/(m_e c^2)$ выражение

$$U = \sqrt{1+\frac{M^2}{m_e^2c^2r^2}}\left|1-\frac{r_0}{r}\right|. \qquad (26.28)$$

Рассматриваемая задача подобна известной задаче С. А. Каплана в ОТО [7], [60]. Для удобства сравнения с решением Каплана сделаем формальную замену $r_0 \to r_g/2$. Смысл этой замены состоит в том, что после нее приближенная метрика (19.15a) после разложения в ряд Тейлора совпадает с точной метрикой Шварцшильда в ОТО. В поле Шварцшильда и определяются круговые орбиты в задаче Каплана.

Для упрощения выкладок введем безразмерные величины энергии E (26.18), момента a и безразмерного радиуса x в согласии с формулами

$$a = \frac{M}{m_e c r_g}, \quad x = \frac{r}{r_g}, \quad r_0 \to \frac{r_g}{2}. \tag{26.29}$$

После такой замены соотношение (26.28) сведется к виду

$$U = \sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}\left|1 - \frac{1}{2x}\right|. \tag{26.30}$$

Радиусы круговых орбит и соответствующие им значения энергии и момента определяются нахождением экстремумов у эффективной потенциальной энергии $U(x)$. Минимумы функции соответствуют устойчивым, а максимумы - неустойчивым круговым орбитам. Решив совместно систему уравнений $U(x) = E$ и $U'(x) = 0$, получим

$$x_{1,2} = a^2\Big(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{a^2}}\Big), \quad E = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{x_{1,2}}}\left|1 - \frac{1}{2x_{1,2}}\right|^{3/2}. \tag{26.31}$$

Знак плюс в формуле для радиусов орбит соответствует устойчивой орбите, а знак минус - неустойчивой. Приведем для сравнения в наших обозначениях решение задачи Каплана

$$x_{1,2} = a^2\Big(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{a^2}}\Big), \quad E = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{x_{1,2}}}\left|1 - \frac{1}{x_{1,2}}\right| \tag{26.32}$$

и приводим выражение эффективной потенциальной $U_0(x)$ в ОТО.

$$U_0(x) = \sqrt{\Big(1 + \frac{a^2}{x^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{x}\Big)}. \tag{26.33}$$

Ясно, что если в (26.30) внести под корень выражение с модулем и разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь первым членом разложения, то получим потенциальную потенциальную кривую (26.33). Однако эта операция справедлива только для $x \gg 1$. Из анализа (26.33) следует, что это выражение определено лишь для значений $x \geq 1$, в противном случае U_0 становится мнимой.

Для случая (26.30) таких ограничений не существует. Графики потенциальных кривых (26.33) для разных значений момента a приведены в работах [7] и [60]. Графики кривых (26.30) при различных a в области $x \geq 1$ сходны по внешнему виду с графиками (26.33) и отличаются лишь положениями максимумов и минимумов. Это видно из сравнения выражений (26.31) и (26.32). Например, при $a^2 = 2$ координаты максимума и минимума для нашего случая сливаются, в ОТО это происходит при $a^2 = 3$. Для нашего случая ближайшая к центру устойчивая круговая орбита соответствует значению $r_1 = 2r_g \to 4r_0$. Соответствующая энергия $E_1 = \sqrt{27/32} = 0.919$, а скорость кругового движения, определенная из формулы (26.10), приводит к значению $v = c\sqrt{3}/3 = 0.577c$.

В ОТО имеем соответственно $r_1 = 3r_g$, $E_1 = \sqrt{8/9} = 0.943$, $v = c/2$ [60].

При $a^2 < 2$ для нашего случая кривая экстремумов не имеет (в ОТО для $a^2 < 3$). С ростом момента a от $\sqrt{2}$ до ∞ координаты максимумов уменьшаются от $r_2 = 4r_0$ до $r_2 = 2r_0$ (в ОТО от $r_2 = 3r_g$ до $r_2 = 1.5r_g$). Энергия E_{max} увеличивается от $E_{max} = 0.919$ до $E_{max} = \infty$ (в ОТО от $E_{max} = 0.943$ до $E_{max} = \infty$).

Ближайшая к центру неустойчивая круговая орбита соответствует значению $r_1 = r_g \to 2r_0$, $E_{max} = \infty$, $v = c$, (в ОТО $r_1 = 1.5r_g$, $E_{max} = \infty$, $v = c$).

Хотя внешне решения Каплана и наше не сильно отличаются друг от друга, однако имеется важное принципиальное отличие. Наличие выражения с модулем в эффективной потенциальной энергии $U(x)$ в (26.30) приводит к дополнительному минимальному значению $U(x)$ в точке $x = 1/2$. Ясно, что производная по x от функции $U(x)$ в этой точке терпит разрыв, как это имело место и при радиальном падении частицы, т.е. при $a = 0$. В точке $x = 1/2$ происходит смена притяжения на отталкивание, и функция $U(x)$ начинает неограниченно возрастать при стремлении радиуса к нулю. Наличие дополнительной центробежной энергии делает возрастание функции $U(x)$ при стремлении к нулю более быстрым, чем при равном нулю моменте.

Наличие максимума в потенциальной кривой в поле Шварцшильда приводит к гравитационному захвату, если энергия частицы $E > E_{max}$. Для нашего случая при $E > E_{max}$ захвата не происходит, поскольку любое значение E всегда "наталкивается"на потенциальную кривую при $0.5 > x > 0$. Таким образом, как и в механике Ньютона, при любой большой энергии частица, огибает притягивающий центр и уходит в бесконечность. Даже, в отличие от механики Ньютона, это имеет место и при радиальном падении на кулоновский центр. Важно отметить, что существует устойчивое равновесие электрона в поле протона при $r = r_0$, чего нет при классическом рассмотрении.

Наличие дополнительной "потенциальной ямы"с минимальным значением $U(r_0) = 0$ допускает существование финитного движения электрона в этой яме. Таким образом, протон и электрон могут образовывать устойчивое соединение "нейтрон"размерами порядка r_0. Конечно рассматриваемый здесь подход имеет лишь методический интерес, поскольку квантовые эффекты должны уже проявляться на расстояниях значительно превышающих r_0.

Рассмотрим траекторию электрона в поле протона. Как известно [7], траектория определяется уравнением $\partial S/\partial M = \mathrm{const}$. Откуда из (26.3) – (26.6) имеем

$$\phi = \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{\exp(\lambda - \nu)\frac{E_0^2}{c^2} - \left(m_0^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)\exp(\lambda)}}. \tag{26.34}$$

Представляет методический интерес исследовать траектории электрона в пределах атома по аналогии движения планет в поле тяготения Солнца. Для движения электрона в поле протона на расстояниях сравнимых с размерами атома $r \gg r_0$. Поэтому предлагаемая теория должна приводить лишь к незначительным поправкам по сравнению с обычным взаимодействием Кулона.

Для вычисления поправок к траектории будем исходить, как и в [7], из радиальной части действия (26.4) до момента его дифференцирования по M.

$$S_r = m_0 c \int \sqrt{\frac{E^2 r^4}{(r-r_0)^4} - \frac{M^2}{m_0^2 c^2 (r-r_0)^2} - \frac{r^2}{(r-r_0)^2}} d\,r. \tag{26.35}$$

После преобразования переменной интегрирования

$$r - r_0 = r',$$

используя легко проверяемую формулу

$$m_0^2 c^2 (E^2 - 1) = 2m_0 E' + \frac{E'^2}{c^2},$$

где E' – нерелятивистская энергия частицы (без энергии покоя), получим с требуемой точностью выражение

$$S_r = \int \sqrt{2m_0 E' + \frac{E'^2}{c^2} + \frac{2r_0 m_0^2 c^2 + 8 r_0 m_0 E'}{r} - \frac{M^2 - 5r_0^2 m_0^2 c^2}{r^2}} d\,r. \tag{26.36}$$

При формальной замене $e^2 \to k m_p m_e$ или $r_0 \to r_g/2$ радиальная часть действия S_r близка по структуре аналогичной величине, используемой для описания движения планет в центрально-симметричном гравитационном поле в ОТО. Различие проявляется лишь в последнем коэффициенте при $1/r^2$. В ОТО из M^2 вычитается (в наших обозначениях) величина $6r_0^2 m_0^2 c^2$. Остальные члены совпадают.

Как известно из [7], поправочные коэффициенты в первых двух членах под корнем отражаются только на изменении связи между энергией, моментом частицы и параметрами ее орбиты. Вычитаемый из M^2 коэффициент, приводит к систематическому смещению перигелия орбиты. Считая член $5r_0^2 m_0^2 c^2/r^2$ малой поправкой по отношению к M^2/r^2, получим после разложения в ряд подинтегрального выражения соотношение

$$S_r = S_r^0 + \delta S_r, \tag{26.37}$$

где S_r^0 соответствует (26.36) при равной нулю поправке, а δS_r определяется равенством

$$\delta S_r = \int \frac{5m_0^2 c^2 r_0^2 d\,r}{2r^2 \sqrt{2m_0 E' + \frac{E'^2}{c^2} + \frac{2r_0 m_0^2 c^2 + 8r_0 m_0 E'}{r} - \frac{M^2}{r^2}}}. \tag{26.38}$$

Приращение $\Delta\delta S_r$ за период обращения электрона по орбите в согласии с нерелятивистской механикой в кулоновом поле после выполнения интегрирования в (26.38) сведется к виду

$$\Delta\delta S_r = \frac{5\pi m_0^2 c^2 r_0^2}{M}. \tag{26.39}$$

Так как траектория определяется уравнением

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \phi + \frac{\partial S_r}{\partial M} = const,$$

то за период имеем

$$\Delta\phi = -\frac{\partial \Delta S_r}{\partial M} = -\frac{\partial \Delta S_r^0}{\partial M} - \frac{\partial \Delta\delta S_r^0}{\partial M}.$$

Используя (26.39) и учитывая, что

$$-\frac{\partial \Delta S_r^0}{\partial M} = 2\pi,$$

получим

$$\Delta\phi = 2\pi + \frac{5\pi m_0^2 c^2 r_0^2}{M^2}. \tag{26.40}$$

Второй член в (26.40) определяет собой смещение перигелия орбиты электрона вокруг протона. Решение этой же задачи в рамках СТО приводит к смещению перигелия в пять раз меньше, чем у нас и в шесть раз меньше, чем в ОТО при формальной замене $e^2 \to k m_p m_e$ или $r_0 \to r_g/2$. Таким образом, разработанный нами аппарат гораздо ближе соответствует ОТО, чем СТО.

Рассмотрим нерадиальное движение ультрарелятивистских электронов в поле протона (аналог распространения светового луча в центрально-симметричном гравитационном поле). Считаем по определению, что даже на бесконечности $v_\infty \to c$.

Радиальная часть действия (26.35) после преобразования переменной интегрирования

$$r - r_0 = r',$$

при условии, что $E \gg 1$, $E_0 = m_0 c^2 E$ и прицельное расстояние ρ связано с моментом M по формуле [7]

$$\rho = \frac{M}{m_0 c E} \tag{26.41}$$

приводится к виду

$$S_r = \frac{E_0}{c} \int \sqrt{1 + \frac{4r_0}{r'} - \frac{\rho^2}{r'^2} + \frac{6r_0^2}{r'^2}}\, d\,r. \tag{26.42}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $r_0/\rho \ll 1$. Для этого случая (26.42) имеет вид

$$S_r = \frac{E_0}{c} \int \sqrt{1 + \frac{4r_0}{r'} - \frac{\rho^2}{r'^2}}\, d\,r. \tag{26.43}$$

Последнее выражение с точностью до множителя и замены $2r_0 \to r_g$ совпадает с радиальной частью эйконала для распространения лучей света в поле тяжести в ОТО [7]. Используя вывод [7], получим, что под влиянием кулоновского поля притяжения со стороны протона траектория ультрарелятивистского электрона искривляется, образуя собой кривую с вогнутостью к центру. Угол между двумя асимптотами этой кривой отличается от π на величину $\delta\phi$, определяемую из равенства

$$\delta\phi = \frac{4r_0}{\rho}. \tag{26.44}$$

Проведем анализ движения ультрарелятивистских электронов, когда прицельное расстояние ρ одного порядка с r_0. Для анализа движения воспользуемся формулой (26.8), которая при $E \gg 1$ сводится к виду

$$\frac{v^{(1)}}{c} = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2}. \tag{26.45}$$

Очевидно, что приближение электрона к протону прекратится, когда радиальная компонента скорости $v^{(1)} = 0$. Точка поворота определится из равенства нулю подкоренного выражения в (26.45). Это приводит к соотношению между прицельным расстоянием и координатой точки поворота, представимому в виде

$$\rho_1 = \frac{r_1^2}{|r_1 - 1|}, \quad \rho_1 \equiv \frac{\rho}{r_0}, \quad r_1 \equiv \frac{r}{r_0}. \tag{26.46}$$

Кривая (26.46) имеет минимум в точке

$$r_1 = \sqrt{2}, \qquad \rho_{1min} = 2(\sqrt{2} + 1) \tag{26.47}$$

и две асимптоты: вертикальную $r_1 = 1$ и наклонную $Y = r_1 + 1$. Наличие модуля в знаменателе расширяет область существования переменной вплоть до значений $r_1 \to 0$. Появляется вторая ветвь кривой, которая при изменении аргумента от $r_1 = 1$ до $r_1 = 0$ изменяется соответственно от ∞ до нуля. Использование вблизи кулоновского центра формулы (26.21) для нулевой компоненты 4-потенциала в (26.8) сказывается лишь на характере приближения к нулю при $r_1 \to 0$, не меняя существа дела.

Для анализа полученного решения удобно выписать аналогичное уравнение для кривой в ОТО для ультрарелятивистской частицы в поле Шварцшильда. В согласии с [7] и [60] для искомой кривой имеем

$$\rho_2 = \frac{r_2^{3/2}}{\sqrt{r_2 - 1}}, \quad \rho_2 \equiv \frac{\rho}{r_g}, \quad r_2 \equiv \frac{r}{r_g}. \tag{26.48}$$

Кривая (26.47) имеет минимум в точке

$$r_2 = \frac{3}{2}, \qquad \rho_{2min} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{26.49}$$

и две асимптоты: вертикальную $r_2 = 1$ и наклонную $Y = r_2$.

Обе рассмотренных кривых при $r_1 > 1$ и $r_2 > 1$ по характеру похожи и отличаются только положениями минимумов и их значениями. Однако при $r_2 < 1$ кривая (26.48) не определена, поскольку подкоренное выражение становится отрицательным. Таким образом, в отличие от нашего случая, в ОТО нет второй ветви кривой. В ОТО ультрарелятивистская частица, летящая из бесконечности с прицельным параметром $\rho_2 < \rho_{2min} = 2.6$ не встречает кривой поворота и, следовательно, происходит ее гравитационный захват. Сечение захвата дается формулой

$$\sigma = \pi \rho_{2min}^2 r_g^2 = \frac{27\pi r_g^2}{4} = 6.75\pi r_g^2. \tag{26.50}$$

В нашем случае при $\rho_1 < \rho_{1min} = 4.82$ электрон "проходит"под первой кривой поворота но "встречает"на своем пути вторую ветвь этой кривой. Максимальное значение координаты точки встречи со второй ветвью определяется из очевидного уравнения

$$\rho_{1min} = \frac{r_1^2}{1 - r_1}, \tag{26.51}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$r_{1max} = \frac{\sqrt{\rho_{1min}^2 + 4\rho_{1min}} - \rho_{1min}}{2} = 0.85. \tag{26.52}$$

В отличие от ОТО электрон, "пролетая"под кривой поворота, не захватывается протоном. Этому препятствует возникающее со стороны протона отталкивание, которое проявляется при расстояниях $r < r_0$. С расстояний от $r = \sqrt{2}r_0$ до $r = r_0$ электрон испытывает тенденцию к захвату, не "зная"о последующей силе отталкивания. Поэтому назовем сечением псевдозахвата σ_p

$$\sigma_p = \pi\rho_{1min}^2 r_0^2 = 4\pi(\sqrt{2}+1)^2 r_0^2 = 23.31\pi r_0^2 \to 5.83\pi r_g^2. \tag{26.53}$$

Разберем еще один случай, когда электрон на бесконечности имеет имеет пренебрежимо малую скорость v_∞ по сравнению со скоростью света c, что соответствует $E = 1$.

В ОТО сечение гравитационного захвата определяется из требования, чтобы значение максимума потенциальной кривой (26.33) $U(x_{max}) = 1$. Этому значению энергии соответствует $x_{max} = 2$, $a = 2$. Прицельное расстояние $\rho = 2cr_g/v_\infty$ и сечение захвата

$$\sigma = \pi\rho_{2min}^2 r_g^2 = 4\pi r_g^2\Big(\frac{c}{v_\infty}\Big)^2. \tag{26.54}$$

Все частицы с $\rho < 2cr_g v_\infty$ гравитационно захватываются.

В нашем случае потенциальная кривая $U(x)$ задается соотношением (26.30) Решив совместно систему уравнений $U(x) = 1$ и $U'(x) = 0$, получим для максимума

$$x_1 = a^2\Big(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{a^2}}\Big), \quad 1 = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{x_1}}\Big|1 - \frac{1}{2x_1}\Big|^{3/2}. \tag{26.55}$$

Из (26.55) находим

$$a^2 = \frac{22 + \sqrt{22^2 + 16}}{16} = 2.773, \qquad a = 1.665, \qquad x_1 = 1.309. \tag{26.56}$$

Прицельное расстояние в наших обозначениях $\rho = 3.33cr_0/v_\infty$ и сечение псевдозахвата

$$\sigma_p = \pi\rho^2 = 11.1\pi r_0^2\Big(\frac{c}{v_\infty}\Big)^2 \to 2.77\pi r_g^2\Big(\frac{c}{v_\infty}\Big)^2. \tag{26.57}$$

В нашем случае протон не может захватить электрон, поскольку при $r < r_0$ потенциальная кривая начинает возрастать и энергия электрона $E = 1$ с этой кривой "пересечется".

Из классической релятивистской электродинамики при движении в кулоновом поле известно [7], что при $Mc < |Qe|$ и $Qe < 0$ траектории частиц представляют собой спирали со стремящимся к нулю радиусом r и при угле $\phi \to \infty$. Время же падения частицы в начало координат является конечной величиной. В частности, для нерелятивистской частицы на бесконечности (электрона в поле протона) условие падения на центр эквивалентно равенству

$$\rho < \frac{cr_0}{v_\infty} \tag{26.58}$$

В нашем случае прицельное расстояние при псевдозахвате оказалось в 3.33 раза большим, чем в СТО. Важной особенностью нашего решения в отличие от СТО и ОТО, является возможность устойчивого статического равновесия электрона в поле протона на расстоянии r_0 от центра протона. Допускаются и радиальные колебания относительно r_0. Это говорит о (качественной в рамках модели) возможности существования нейтральной стабильной частицы размерами порядка r_0.

b). Квантование адиабатических инвариантов

Хотя в данной книге рассматривается классические поля связанных структур, однако представляет интерес рассмотреть простейшие возможности учета квантовых эффектов. Как известно, Бор и Зоммерфельд объяснили спектр атома водорода с помощью квантования адиабатических инвариантов. Далее Зоммерфельд сделал попытку в рамках механической модели учесть релятивистские поправки. Он допустил, что релятивистские поправки могут объяснить расщепление термов, вырожденных в нерелятивистской теории. Именно таким образом Зоммерфельд хотел построить теорию тонкой структуры.

Отметим, что в некотором смысле ему это удалось сделать и он получил формулы для тонкой структуры уровней атома водорода в рамках старой теории Бора еще до создания квантовой механики, не используя решения уравнения Дирака.

Предлагаемый нами подход по структуре близок подходу Бора - Зоммерфельда, но имеет и принципиальные различия. Перечислим эти отличия:

1. В отличие от подхода Зоммерфельда, использующего движение электрона в поле протона в рамках СТО плоского пространства - времени, мы работаем в римановой геометрии, обусловленной полем элементов связанных зарядов протона.

2. Мировая линия электрона в поле протона в теории Зоммерфельда соответствует в нашем случае геодезической линии электрона в римановом пространстве времени. Поле протона, как таковое, в нашем подходе в явном виде отсутствует, проявляясь в виде искривленной геометрии пространства - времени.

Так как размеры атома порядка 10^{-8} см, а размеры ядра порядка 10^{-13} см, то коэффициенты метрики (19.4) можно с помощью (19.15) представить в виде

$$\exp(\nu) = \left(1 - \frac{e^2}{rm_0c^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 = \exp(-\lambda), \tag{26.59}$$

где e - заряд электрона, m_0 - масса электрона.

Как известно [7], обобщенным импульсом P_μ называется 4-вектор, определяемый равенством

$$P_\mu = -\frac{\partial S}{\partial y^\mu}. \tag{26.60}$$

Вычислим радиальную компоненту 4-импульса электрона в поле протона. Из (26.3) и (26.4) находим

$$P_r = -\sqrt{\exp(\lambda - \nu)\frac{E_0^2}{c^2} - \left(m_0^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)\exp(\lambda)}. \tag{26.61}$$

В отличие от СТО, квантовое условие применим к "физической"радиальной компоненте 4-импульса, определяемой с помощью тетрад (17.10).

$$P_{(r)} = -\frac{1}{\sqrt{-g_{11}}}P_r = -\sqrt{\exp(-\nu)\frac{E_0^2}{c^2} - \left(m_0^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)} = -P^{(r)}. \tag{26.62}$$

Следуя Бору и Зоммерфельду сформулируем условие квантования в виде

$$\oint P^{(r)}dr = n_r h, \quad \oint M d\phi = n_\phi h, \tag{26.63}$$

где n_r и n_ϕ целые числа. В результате приходим к равенству

$$\oint \sqrt{\left(1+\frac{r_0}{r}\right)^2\frac{E_0^2}{c^2} - \left(m_0^2c^2 + \frac{n_\phi^2\hbar^2}{r^2}\right)}dr = n_r h, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}. \tag{26.64}$$

В этом равенстве после выполнения интегрирования требуется определить величины E_0, зависящие от квантовых чисел n_r и n_ϕ. Интеграл можно представить в виде

$$\oint \sqrt{-A + 2B/r - C/r^2}dr, \quad A = \left(m_0^2c^2 - \frac{E_0^2}{c^2}\right),$$

$$B = \frac{r_0 E_0^2}{c^2}, \quad C = n_\phi^2\hbar^2 - \frac{r_0^2E_0^2}{c^2}. \tag{26.65}$$

Так как мы рассматриваем финитное движение электрона в поле протона, то величина A очевидно отрицательна. Подинтегральное выражение имеет два корня для положительных значений r, что очевидно соответствует перигелию и афелию электронной орбиты. Интегрирование должно быть проведено от одного корня до другого и обратно с изменением знака перед корнем в в выражении под интегралом. Аналогичная задача с другими постоянными решена в [111], на основе вычислений которой имеем

$$\oint \sqrt{-A + 2B/r - C/r^2}dr = 2\pi\left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C}\right). \tag{26.66}$$

В результате получаем следующее уравнение для нахождения энергетических уровней

$$\frac{r_0E_0}{c^2}\frac{1}{\sqrt{m_0^2c^2 - E_0^2/c^2}} - \sqrt{1 - \frac{r_0^2E_0^2}{c^2M^2}} = n_r\hbar. \tag{26.67}$$

Введя безразмерную энергию E в согласии с (26.18), последнее уравнение после несколько громоздких алгебраических преобразований сведем к виду

$$E = \left[1 + \frac{\alpha'^2}{\left(\sqrt{n_\phi{}^2 - \alpha'^2} + n_r\right)^2}\right]^{-1/2}, \quad \alpha' = \alpha E, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \tag{26.68}$$

где α - постоянная тонкой структуры. Последнее соотношение с перенормированной постоянной тонкой структуры α' в точности совпадает с соотношением тонкой структуры

Зоммерфельда [112], полученной путем решения уравнения Дирака при движении электрона в кулоновом поле. Так как при движении электрона в атоме с большой степенью точности выполняется соотношение

$$E = 1 - \epsilon, \tag{26.69}$$

где ϵ - малая положительная величина, а постоянная тонкой структуры $\alpha = 1/137$, то очевидно, что в нашем случае первое приближение, соответствующее равенству нулю ϵ в правой части (26.68), приводит к точной формуле Зоммерфельда.

Физический смысл величины ϵ - это, взятая с обратным знаком, полная безразмерная энергия электрона в поле протона за вычетом безразмерной энергии покоя. Из формул (26.68) и (26.69) получаем с учетом, что $\alpha' \ll 1$, выражение

$$\epsilon = \frac{\alpha'^2}{2n^2}\left[1 + \frac{\alpha'^2}{n}\left(\frac{1}{n_\phi} - \frac{3}{4n}\right)\right], \quad n = n_r + n_\phi, \quad \alpha'^2 = \alpha^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right). \tag{26.70}$$

Переходя к размерной энергии $W = -\epsilon m_0 c^2$ и введя $n_\phi = j + 1/2$, получим в заданном приближении следующую формулу для энергии уровней в атоме водорода

$$W = -\frac{\alpha'^2 m_0 c^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4 m_0 c^2}{2n^3}\left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n}\right). \tag{26.71}$$

Проведем анализ последней формулы. Как известно из квантовой механики, первый член определяет энергетические уровни атома водорода, рассчитанные с помощью нерелятивистского уравнения Шредингера. Второй член представляет собой добавку, которая обуславливается тонким расщеплением уровней. Эта добавка рассчитывается с помощью уравнения Дирака. Если второй член в формуле (26.71) в заданном приближении в точности совпал с теорией Дирака, то первый член в (26.71) несколько отличается от общепринятого. Энергетические уровни в нашем случае несколько занижены по сравнению со стандартными W_s. Для сравнения приведем конкретные значения

$$\frac{W_s - W}{W_s} \cdot 100\% = \frac{\alpha^2}{2n^2} \cdot 100\% = \frac{1}{n^2} 0.00266\% \tag{26.72}$$

Полученная нами оценка укладывается в оценку погрешности теоретических и экспериментальных значений энергии серии Бальмера. Полная ширина тонкой структуры [113], определяемая как расстояние между уровнями $j_1 = n - 1/2$ и $j_2 = 1/2$ при заданном n совпадает совпадает с аналогичной величиной из теории Дирака. Рассмотрим квантование круговых орбит электрона в поле протона с эффективной потенциальной энергией (26.28). Нашей целью является выяснить как связаны рассмотренные выше круговые орбиты в поле протона (26.31), аналогичные каплановским орбитам в ОТО, с орбитами Бора в атоме водорода. Очевидно, что в случае круговых орбит мы должны положить равным нулю радиальное квантовое число n_r в (26.68). Тогда орбитальное квантовое число n_ϕ будет совпадать с главным n. Это приводит к следующему значению безразмерной энергии E.

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}}, \quad n = n_\phi, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}. \tag{26.73}$$

Ясно, что в виду малости постоянной тонкой структуры α, последнее соотношение можно записать в виде

$$E = 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{3\alpha^4}{8n^4}. \tag{26.74}$$

Рассмотрим устойчивые орбиты электрона в поле протона в согласии с соотношением (26.31), выбрав знак плюс перед радиусами. Рассмотрим случай $a \gg 1$, что эквивалентно $r/r_0 \gg 1$. Именно такой случай реализуется в атоме водорода, когда радиусы боровских орбит значительно больше классического радиуса электрона. Соотношение (26.31) можно преобразовать к виду

$$x_1 = a^2(2 - 1/a^2), \quad E_1 = 1 - \frac{1}{8a^2}. \tag{26.75}$$

Приравнивая энергию устойчивых каплановских орбит из (26.75) энергии устойчивых боровских орбит (26.74) и ограничиваясь членами с α^2, получим с использованием (26.29) выражение.

$$M = \frac{nm_e c r_0}{\alpha} = n\hbar. \tag{26.76}$$

Из последнего соотношения следует, что каплановские устойчивые орбиты в атоме водорода в точности совпадают с боровскими орбитами.

Рассмотрим ближайшую к центру устойчивую каплановскую орбиту, которая в соответствии с разобранным выше, имеет значение $a^2 = 2$ или $r_1 = 4r_0$. Для этого случая из формул (26.31) находим.

$$E_1 = \sqrt{\frac{27}{32}}. \tag{26.77}$$

Приравнивая энергию из последней формулы энергии из соотношения (26.73), получим

$$n = \sqrt{\frac{27}{5}}\alpha = 0.017. \tag{26.78}$$

Ясно, что последняя формула не удовлетворяет условию квантования, так как n должно быть целым и положительным. Это говорит, что развиваемый здесь метод квантования Зоммерфельда не работает на близких расстояниях от центра протона. Что касается неустойчивых каплановских орбит для протона, то ни одна из них не совместна с условиями квантования Зоммерфельда.

Итак, примененный нами метод квантования Бора - Зоммерфельда в римановом пространстве, привел к результатам близким с Зоммерфельдом. Это говорит, что предложенный нами вариант новой метрической теории по крайней мере не абсурден.

Глава 7

ВВЕДЕНИЕ В КЛАССИЧЕСКУЮ МЕЗОДИНАМИКУ СВЯЗАННЫХ НУКЛОНОВ

В этой главе получено уравнение скалярного мезонного поля связанных нуклонов, релятивистское уравнение движения пробных нуклонов в поле связанных мезонов. Определена геометрия пространства - времени мезонного скалярного поля и найден тензор энергии - импульса этого поля.

27. Скалярные ядерные силы связанных нуклонов

Рассмотрим сначала простейший вариант теории ядерных сил, основанный на допущении, что сила притяжения между любыми нуклонами обуславливается нейтральным мезонным полем, которое определяется однокомпонентной скалярной вещественной функцией ψ. Теорию скалярных ядерных сил будем строить в рамках классической (неквантовой) мезодинамики, с учетом "связанности"поверхностных нуклонов в ядре. Будем считать для простоты модели, что как и для заряженных проводников, нуклоны, которые находятся на поверхности ядра взаимодействуют с создаваемым ими внешним полем. Ввиду короткодействия ядерных сил, нуклоны расположены в объеме ядра с внешним полем вне ядра не взаимодействуют, а взаимодействуют лишь с ближайшими соседями. Однако конкретное распределение нуклонной плотности в ядре на первом этапе учитывать не будем, так как учет распределения плотности нуклонов в ядре (как и учет распределения плотности заряда внутри электрона в теории электромагнитной массы) не приведет к существенному эффекту. Существенным отличием ядерных сил от электромагнитных является сила притяжения между одинаковыми нуклонами, вместо силы отталкивания между одноименными зарядами в электродинамике. Это приводит к тому, что нуклоны на поверхности ядра испытывают силу положительного давления со стороны создаваемого ими поля (вместо силы отрицательного давления со стороны электрического поля заряженного проводника.) Так как каждый из нуклонов покоится, то сила со стороны поля уравновешивается силой связи со стороны ядра. С нашей точки зрения каждый из нуклонов на поверхности ядра в силу постулата эквивалентных ситуаций, (который мы распространяем и на ядерные силы) "движется"ускоренно по радиусу от центра. Итак, каждый из нуклонов на поверхности ядра, которое считаем сферическим по форме, эквивалентен размещению в начале координат некоторой равноускоренной НСО с метрикой (2.18). Т.к. в метрике (2.18) пространственное сечение является плоским, то вклад в скалярный потенциал ψ от всей сферы можно вычислить путем интегрирования вклада от элементарных "зарядов"каждого из элементов сферы в плоском пространстве (но в римановом пространстве-времени).

Поэтому предварительно возникает задача о нахождении поля нуклона в равноускоренной НСО.

Так как физические законы должны быть справедливы во всех СО, значит они должны выражаться в виде тензорных уравнений. Если уравнения содержат производные полевых величин, то это должны быть ковариантные производные. Следовательно, известные уравнения скалярного мезонного поля, создаваемого точечными нуклонами, имеющие в ИСО вид [109]

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\psi = 4\pi g'\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)), \tag{27.1}$$

где g' - мезонный заряд, $\vec{r}'(t)$ - радиус-вектор движущегося нуклона, должны быть в НСО представлены в форме

$$-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - k_0^2\psi = 4\pi g'\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)), \quad k_0 = \frac{2\pi\mu c}{h}. \tag{27.2}$$

В соотношении (27.2) μ - масса нуклона, h - постоянная Планка, $\vec{r}$ - радиус-вектор координаты точки наблюдения, $g^{\mu\nu}$ - метрический тензор НСО. Написанное уравнение (27.2) носит название уравнения Клейна - Гордона. Уравнение можно преобразовать к другому виду, используя известное соотношение для ковариантной дивергенции произвольного векторного поля $\nabla^\mu\psi = A^\mu$ в виде

$$\nabla_\mu{}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^\mu)}{\partial y^\mu}. \tag{27.3}$$

Из (27.3), находим для (27.2) выражение

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y^\nu}\right) - k_0^2\psi = 4\pi g'\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)). \tag{27.4}$$

Чтобы решить уравнение (27.4), необходимо знать компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$. В равноускоренной НСО метрика определена из соотношения (2.18). Будем искать стационарное решение (27.4) с учетом метрики (2.18), считая, что точечный нуклон расположен в начале координат. В результате приходим к следующему уравнению

$$\Delta\psi + \frac{a_0}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial y^1} - k_0^2\psi = 4\pi g'\delta(y^1)\delta(y^2)\delta(y^3). \tag{27.5}$$

Решение (27.5) ищем в виде

$$\psi = u(y^1, y^2, y^3)\exp(\lambda y^1), \quad \lambda = -\frac{a}{2} = -\frac{a_0}{2c^2}. \tag{27.6}$$

После чего уравнение для u сведется к форме

$$\Delta u - (\frac{a^2}{4} + k_0^2)u = 4\pi g'\exp\left(\frac{ay^1}{2}\right)\delta(y^1)\delta(y^2)\delta(y^3), \tag{27.7}$$

а его решение

$$u = -\frac{g'}{r}\exp\left(-r\sqrt{k_0^2 + \frac{a_0^2}{4c^4}}\right). \tag{27.8}$$

Отметим, что хотя пространство (2.18) - риманово, но его пространственное сечение евклидово, в котором существует радиус - вектор. Из рассмотренного следует, что решение уравнения (27.5) имеет вид

$$\psi = -\frac{g'}{r}\exp\left\{-\frac{a_0 r\left(\sqrt{1 + \frac{4k_0^2c^4}{a_0^2}} + \cos\theta\right)}{2c^2}\right\}. \tag{27.9}$$

Решив предварительную задачу о поле нуклона в равноускоренной НСО, приступим к решению основной задачи нахождению поля ядра, учитывая, что поверхностные нуклоны в ядре находятся в особом состоянии, эквивалентном их "ускоренному движению"по радиусу от центра.

Разобъем поверхность сферического ядра на элементарные ячейки, выбрав сферическую систему координат с началом в центре ядра. На поверхности ядра естественным образом возникают аффинные ортогональные реперы с векторами, направленными вдоль координатных линий. Выберем на полярной оси вне ядра некоторую точку наблюдения, в которой вычислим ядерный потенциал от поверхностных нуклонов ядра. Введем нуклонную поверхностную плотность зарядов σ. Из соображений симметрии очевидно, что для любого полярного угла θ, отсчитываемого от полярной оси, вклад в ядерный потенциал от элемента в точке наблюдения не зависит от азимутального угла ϕ. Поэтому вклад в потенциал $d\psi$ от кольца ширины $Rd\theta$ и радиуса $R\sin\theta$ имеет вид

$$d\psi = -\frac{2\pi\sigma R^2 \sin\theta}{r'} \exp\left\{-\frac{a_0 r'\left(\sqrt{1+\frac{4k_0^2c^4}{a_0^2}}+\cos\gamma\right)}{2c^2}\right\}d\theta. \tag{27.10}$$

Здесь γ - угол между радиусом-вектором из начала координат до элемента заряда и радиусом-вектором $\vec{r}'$ от элемента заряда до точки наблюдения.

Отметим во избежание недоразумений, что с точки зрения локального наблюдателя, связанного с элементом поверхности, на которой расположен "ускоренный"нуклонный заряд, пространство является плоским, а пространство-время - римановым. Поэтому $\vec{r}'$ и $\vec{r}$ с точки зрения этого наблюдателя имеют ясный геометрический смысл. С другой стороны, совокупность мировых линий частиц, расположенных на сфере, с точки зрения глобального наблюдателя, находящегося в начале сферической системы отсчета, не принадлежит жесткой равноускоренной НСО, поскольку радиальные ускорения не параллельны. Для такого наблюдателя совокупность рассмотренных мировых линий частиц на сфере принадлежит к радиальноускоренной жесткой НСО. "Пространственное сечение"для частиц на сфере не будет плоским.

Так как с точки зрения наблюдателя на элементе поверхности сферы трехмерное пространство плоское, то, используя элементарные тригонометрические преобразования, получим для ядерного потенциала ψ выражение

$$\psi = -\frac{g'}{2r}e^{\beta rp}\int_{-1}^{1}\frac{\exp(-\beta r(fb+x))}{b}dx \tag{27.11}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$x=\cos\theta, \quad f=\sqrt{1+\frac{4k_0^2c^4}{a_0^2}}, \quad \beta=\frac{a_0}{2c^2},$$

$$p=\frac{R}{r}, \quad b=\sqrt{1+a^2-2ax}. \tag{27.12}$$

Интеграл (27.11) можно преобразовать к виду

$$\psi = \frac{g'}{2Rs}\exp\left(-s^2+s^2p^2(1-f^2)\right)\int_{s(1+p(1-f))}^{s(1-p(1+f))}\exp(u^2)du, \tag{27.13}$$

где величина s определяется равенством

$$s = \sqrt{\frac{\beta r}{2p}} = r\sqrt{\frac{a_0}{4Rc^2}}. \qquad (27.14) =$$

Потенциал ψ скалярного мезонного поля можно найти и непосредственно из решения уравнения (27.4) с нулевой правой частью, выбрав стационарное решение для случая сферической симметрии. Компоненты метрического тензора задаются интервалом (19.4), в котором функции $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ требуется определить. Из (27.4) получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\exp\left(\frac{\nu-\lambda}{2}\right)r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = k_0^2 r^2\psi(r)\exp\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right). \qquad (27.15)$$

Соотношение (27.15) при известной функции $\psi(r)$ из (27.13) связывает искомые функции $\nu(r)$ и $\lambda(r)$.

Для нахождения второго уравнения, связывающего эти функции, рассмотрим силу со стороны поля, действующую на "пробный"нуклонный "заряд"g' , закрепленный в точке с координатой r от центра шара. Пусть масса пробного заряда m_0. Тогда вектор первой кривизны F^1 мировой линии этого заряда можно найти из соотношения (1.5), записав для закрепленных зарядов условие сопутствия для метрики (19.4) в виде

$$V^k = V_k = 0, \qquad V^0 = (g_{00})^{-1/2},$$

$$V_0 = (g_{00})^{1/2}, \quad F^1 = F(r), \quad F^0 = F^2 = F^3 = 0. \qquad (27.16)$$

Откуда из (1.5), (19.4) и (27.16) имеем

$$F^1 = \frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\exp(-\lambda). \qquad (27.17)$$

С другой стороны, эту величину можно найти и из силы, действующей на нуклон со стороны связи, удерживающей нуклон в поле неподвижным. Эта сила численно равна силе со стороны поля и противоположна ей по знаку. Уравнения движения нуклонного заряда в скалярном мезонном поле можно найти из закона Ньютона, представимого в виде

$$\frac{DV^\mu}{dS} = \frac{g'}{m_0c^2}(g^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu)\frac{\partial\psi}{\partial y^\nu} \qquad (27.18)$$

В нерелятивистском приближении эта формула совпадает с обычным уравнением движения нуклона в скалярном мезонном поле [109].

В согласии со сказанным выше, получаем формулу

$$\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\exp(-\lambda) = \frac{g'}{m_0c^2}\exp(-\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad (27.19)$$

из которой с учетом обращения метрики на бесконечности в плоскую, имеем

$$\nu(r) = \frac{2g'}{m_0c^2}\psi(r). \qquad (27.20)$$

Итак, формулы (27.20), (27.13) определяют g_{00} компоненту метрического тензора скалярного мезонного поля. Компоненту g_{11} метрического тензора можно определить из уравнения (27.15), которое можно представить в следующей форме:

$$\frac{dY}{dr} + h(r)Y(r) = k(r), \quad Y(r) = \exp(-\lambda), \quad h(r) = \frac{2}{T}\frac{dT}{dr},$$

$$T(r) = \exp\Big(\frac{\nu}{2}\Big) r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad k(r) = \frac{2k_0^2\psi}{\frac{\partial\psi}{\partial r}}. \tag{27.21}$$

Таким образом, поучили линейное неоднородное уравнение, решение которого представимо в виде:

$$Y(r) = \exp\Big(-\int_d^r h(r)dr\Big)\int_d^r \exp\Big(\int_d^r h(r)dr\Big)k(r)dr+$$
$$+C\exp\Big(-\int_d^r h(r)dr\Big). \tag{27.22}$$

Решение уравнения представлено здесь как сумма двух функций. Первая при $r = d$ обращается в нуль, а вторая принимает значение C. Внутренний интеграл легко берется в квадратурах.

$$\int_d^r h(r)dr = \ln\Big(\frac{T(r)}{T(d)}\Big)^2,$$

откуда следует выражение

$$Y(r) = \frac{2k_0^2}{T^2(r)}\int_d^r \exp(\nu)r^4\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}dr + C\Big(\frac{T(d)}{T(r)}\Big)^2. \tag{27.23}$$

В соотношении (27.23) интегральная кривая $Y(r)$ проходит через точку (d, C). Считая, что на бесконечности метрика является плоской, получим

$$Y(r) = \Big(\frac{T(\infty)}{T(r)}\Big)^2\Big[1 - \frac{2k_0^2}{T^2(\infty)}\int_r^\infty \exp(\nu)r^4\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}dr\Big]. \tag{27.24}$$

Формулы (27.13), (27.20) и (27.24) определяют геометрию пространства - времени скалярного мезонного поля. Зная метрику и скалярный потенциал ψ, найдем тензор энергии-импульса нейтрального скалярного поля, воспользуясь результатом работы [53]. В результате получаем

$$T_{\mu\nu} = \frac{n}{4\pi}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial y^\nu} + \frac{1}{2}\Big(k_0^2 - \frac{\partial\psi}{\partial y^\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial y_\lambda}\Big)g_{\mu\nu}\Big). \tag{27.25}$$

Здесь n - размерная постоянная, выбор которой зависит от конкретного вида скалярного поля. Для интересующей нас тетрадной компоненты $T_{(0)(0)}$ тензора энергии-импульса получаем выражение

$$T_{(0)(0)} = \frac{n}{4\pi}\Big(\frac{d\psi}{dS}\frac{d\psi}{dS} + \frac{1}{2}\Big(k_0^2 - \frac{\partial\psi}{\partial y^\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial y_\lambda}\Big)\Big). \tag{27.26}$$

Для стационарного случая в сопутствующей системе (27.16) находим

$$T_{(0)(0)} = \frac{n}{8\pi}\Big(k_0^2\psi^2 - g^{kl}\frac{\partial\psi}{\partial y^k}\frac{\partial\psi}{\partial y^l}\Big). \tag{27.27}$$

Далее, воспользуясь общей формулой (19.18) для энергии поля, получим выражение

$$W = \int T^{(0)(0)}\sqrt{-g}d^3y =$$

$$= \frac{n}{8\pi}\int \exp\Big(\frac{\lambda+\nu}{2}\Big)r^2\sin\theta\Big(k_0^2\psi^2 + e^{-\lambda}\Big(\frac{d\psi}{dr}\Big)^2\Big)d\theta d\phi dr =$$

$$= \frac{n}{2}\int \exp\Big(\frac{\lambda+\nu}{2}\Big)r^2\Big(k_0^2\psi^2 + e^{-\lambda}\Big(\frac{d\psi}{dr}\Big)^2\Big)dr. \qquad (27.28)$$

Воспользуясь уравнением (27.15), имеем для первого члена в (27.28) выражение

$$\frac{n}{2}\int \exp\Big(\frac{\lambda+\nu}{2}\Big)r^2k_0^2\psi^2dr =$$

$$= \frac{n}{2}\int \psi\frac{\partial}{\partial r}\Big(\Big(\exp\frac{\nu-\lambda}{2}\Big)r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)dr, \qquad (27.29)$$

которое после интегрирования по частям сводит энергию поля W к виду

$$W = -\frac{n}{2}\psi(R)\exp\Big(\frac{\nu(R)-\lambda(R)}{2}\Big)R^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=R}. \qquad (27.30)$$

Отметим, что полученные результаты неоднозначны. Уравнение (27.2), как известно, например, из [23], зависит от метода вывода и может быть представлено в следующей форме

$$-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - k_0^2\psi - kR\psi = 4\pi g'\delta(\vec{r}-\vec{r}'(t)), \quad k_0 = \frac{2\pi\mu c}{h}. \qquad (27.31)$$

Здесь R - скалярная кривизна, k - некоторая постоянная, зависящая от способа получения этого уравнения. Мы не будем на этом останавливаться, отсылая читателя к работе [23]. Ясно, что используемый здесь аппарат можно применить и в теории нестационарного переноса нейтронов [114-116] для уточнения сечений рассеяния и захвата, но это не является предметом исследования в данной книге.

28. Скалярная ньютонова гравитационная сила связанных масс

Проведем анализ полученного соотношения для энергии поля.

Для частного случая $k_0 = 0$, нейтральное мезонное поле по структуре напоминает ньютоновское гравитационное поле. Решим следующую задачу.

Пусть имеется невесомая твердая оболочка радиуса R, окруженная взаимодействующими друг с другом по закону всемирного тяготения Ньютона частицами пыли. Пусть массивные пылинки расположены в очень тонком сферическом слое, толщина которого пренебрежимо мала по сравнению с радиусом оболочки. Ясно, что под действием силы взаимного притяжения частицы будут давить на оболочку. По третьему закону Ньютона оболочка будет давить на частицы, вызывая у них появление "ускорения направленного от центра оболочки по радиусу. В согласии с постулатом эквивалентных ситуаций и вычислениями, проведенными в предыдущем разделе, потенциал скалярного гравитационного поля гравитирующего слоя можно получить из формулы (27.13), полагая в ней $f = 1$.

$$\psi = \frac{g'}{2Rs}\exp(-s^2)\int_s^{s(1-2p)}\exp(u^2)du, \qquad (28.1)$$

где величина s определяется равенством

$$s = \sqrt{\frac{\beta r}{2p}} = r\sqrt{\frac{a_0}{4Rc^2}}. \tag{28.2}$$

В согласии с принципом соответствия, при исчезающе малых значениях s должно получаться выражение для ньютонова потенциала. Откуда следует, что заряд $g' = kM$, где k - гравитационная постоянная, M - масса всех частиц в слое. Величина a_0 на поверхности оболочки равна половине от величины ускорения свободного падения пробных частиц на оболочку, что дает для s

$$s = \frac{r}{4R}\sqrt{\frac{r_g}{R}}, \quad r_g = \frac{2kM}{c^2}, \tag{28.3}$$

где r_g - гравитационный радиус.

Для скалярного гравитационного поля уравнение (27.15) сводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\exp\left(\frac{\nu-\lambda}{2}\right)r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0, \tag{28.4}$$

интегрируя которое при выполнении принципа соответствия, получаем

$$\exp\left(\frac{\nu-\lambda}{2}\right)r^2\frac{\partial\psi}{\partial r} = kM. \tag{28.5}$$

Воспользуясь выражением для энергии (27.30), получим

$$W = -\frac{n}{2}k\psi(R). \tag{28.6}$$

Если мы пренебрежем "ускорением"частиц на сфере, то в силу классического соотношения

$$\psi = -\frac{kM}{R},$$

получаемого из (28.1) при $s \to 0$, находим

$$W = \frac{n}{2}\frac{k^{22}}{R}. \tag{28.7}$$

Из принципа соответствия для ньютоновского гравитационного поля выбираем

$$n = -\frac{1}{k}, \tag{28.8}$$

после чего выражение для энергии поля вне оболочки в нулевом приближении совпадает с ньютоновским аналогом.

$$W = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{R}. \tag{28.9}$$

Знак минус говорит о том, что массы в гравитации всегда притягиваются. В электростатике одноименные заряды отталкиваются, поэтому электростатическая энергия заряженного шара для заряда любого знака положительна.

Отметим, что рассматриваемая нами ньютоновская скалярная гравитация рассматривается в римановом пространстве-времени. Она ни в коем случае не претендует на замену

ОТО и представляет чисто методический интерес, как некоторый частный случай безмассового мезонного скалярного поля, для которого уравнения более просты, чем для массивных мезонов.

Из формулы (28.9) следует, что при $R \to 0$ энергия гравитационного поля оболочки при фиксированной массе M стремится к минус бесконечности. Это вполне естественно для теории Кулона и Ньютона и является главной трудностью этих теорий.

Найдем значение энергии скалярного гравитационного поля в нашем случае. Для этого воспользуемся выражениями (28.6) и (28.1) при $p = 1$. В результате получим

$$\psi(R) = -\frac{g' \exp(-\delta^2)\sqrt{\pi}}{2Ri\delta}\Big[\Phi(i\delta)\Big], \quad s(R) = \delta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{r_g}{R}}. \tag{28.10}$$

При $R \to 0$, $\delta \to \infty$, поэтому используя формулу (19.22), находим

$$W = -2Mc^2.$$

Знак минус в энергии означает наличие притяжения между частицами, а удвоение энергии обусловлено наличием давления Пуанкаре со стороны жесткой оболочки на частицы.

29. Энергия протона

В разделе 19 при рассмотрении электромагнитной энергии электрона для устранения его взрыва под действием кулоновских сил было необходимо вводить поверхностное давление Пуанкаре. Природа этого давления неизвестна, однако оно необходимо для объяснения устойчивости электрона. При рассмотрении протона давление Пуанкаре обусловлено естественными ядерными силами. Для простоты будем считать, что заряд протона размазан по его поверхности, а отрицательное давление со стороны созданного протоном электромагнитного поля удерживает протон от коллапса. Таким образом, сила со стороны электромагнитного поля играет роль связи для противодействия основным ядерным силам сжатия. Эта силы, направленные по радиусу от центра протона, противоположны по знаку силам Пуанкаре для электрона, и в отличие от сил Пуанкаре, вызывают положительное "ускорение"для элементов зарядов на поверхности протона. Поэтому для вычисления энергии протона будем использовать формулу (19.3) вместо соотношения (19.3a), которое использовалось нами ранее при рассмотрении движения электрона в электрическом поле протона. [1]

Дальнейшее вычисление электростатической энергии протона производится по формулам раздела 19 с положительным "ускорением"и для протона приводит к соотношению (19.23) с N=1, т.е.

$$W = m_p c^2\Big(1 - \frac{4m_p c^2 R}{e^2}\Big), \tag{29.1}$$

где m_p - масса покоя протона, а R - его характерный размер. Последняя формула справедлива, когда параметр δ в (19.8) много больше единицы, что эквивалентно $R \to 0$. Поэтому для точечного протона его энергия электрического поля

$$W = m_p c^2. \tag{29.2}$$

[1] Отметим во избежание недоразумений, что для описания электрона в поле протона можно использовать и формулу (19.3). Какая же из них является более "правильной"не совсем ясно.

Глава 8

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ

В этой главе рассмотрена кинематика деформируемой среды в рамках СТО. На гиперповерхностях ортогональных мировым линиям частиц среды (актуальной и начальной) найдены тензоры деформаций в различных системах отсчета, обобщающие классические тензоры Альманси, Грина, Коши, Фингера. Получены релятивистские уравнения совместности деформаций и выведены соотношения, связывающие тензор распространения натяжений со скоростью изменения тензора деформаций в различных представлениях. Найдены релятивистские уравнения совместности для тензора скоростей деформаций.

30. Формализм ортогональных реперов в пространстве Минковского и Римана

Неголономные преобразования и тетрадный формализм в предыдущих разделах использовались лишь эпизодически. В этой и последующих главах формализм ортогональных реперов и неголономные геометрические объекты являются определяющими. Так как в литературе, хорошо известной читателям (например, [7]), сведений по тетрадному формализму недостаточно для дальнейшего изложения, а книги [128], [1], [22], в которых формализм дан достаточно полно, стали библиографической редкостью, то для удобства читателей приведем необходимые в дальнейшем соотношения по формализму ортогональных реперов. Для более тесной связи с классической механикой деформируемых сред будем использовать в пространстве Минковского не сигнатуру $(+---)$, как в предыдущих разделах, а задавать интервал с помощью выражения

$$-dS^2 = \delta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \tag{30.1}$$

где метрический тензор имеет простейший вид

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \quad x_4 = ict, i = \sqrt{-1}.$$

Всюду в дальнейшем греческие индексы будут изменяться от единицы до четырех, а латинские - от единицы до трех. В силу выбора $x_4 = ict$ не делается различия между ковариантными и контравариантными компонентами.

В каждой точке галилеевой системы координат построим ортонормированный репер - тетраду. Каждая из тетрад будут отличаться друг от друга только параллельными сдвигами (однородное поле тетрад),

$$\left\{O, \vec{h}_\mu\right\}, \tag{30.2}$$

образующее прямолинейную тетрадную решетку. Наряду с тетрадами (30.2) введем произвольное неоднородное поле тетрад

$$\left\{O, \vec{h}(\alpha)\right\},$$

которые связаны с векторами тетрад (30.2) локальным ортогональным преобразованием

$$\vec{h}(\alpha) = h_\mu(\alpha)\vec{h}_\mu. \tag{30.3}$$

Тетрадные индексы произвольного тетрадного поля будем заключать в скобки. Коэффициенты $h_\mu(\alpha)$ называются коэффициентами Ламе. Выбрав точку O какой либо тетрады (30.2) за начало отсчета, остальным точкам O сопоставляются координаты Минковского x_μ, отсчитываемые вдоль направлений тетрадных векторов. Подобно тетрадам (30.2), тетрады (30.3) также образуют ортогональную, но уже искривленную тетрадную решетку, с которой можно связать координатную сетку $x(\alpha)$, как и для тетрад (30.2). Координатные сетки тетрад (30.2) и (30.3) связаны локальным ортогональным преобразованием

$$dx(\alpha) = h_\mu(\alpha)dx_\mu. \tag{30.4}$$

Тот факт, что тетрадные векторы единичны и ортогональны запишется в виде

$$\vec{h}(\alpha)\cdot\vec{h}(\beta) = \delta(\alpha\beta), \quad \vec{h}_\mu\cdot\vec{h}_\nu = \delta_{\mu\nu}. \tag{30.5}$$

Из последнего соотношения следует

$$h_\mu(\alpha)h_\mu(\beta) = \delta(\alpha\beta), \quad h_\mu(\alpha)h_\nu(\alpha) = \delta_{\mu\nu}, \quad \vec{h}_\mu\cdot\vec{h}(\alpha) = h_\mu(\alpha). \tag{30.6}$$

Так как в каждой точке пространства-времени находятся два ортонормированных репера, то любой вектор $\vec{A}$ может быть разложен по векторам этих реперов.

$$\vec{A} = A_\mu\vec{h}_\mu = A(\alpha)\vec{h}(\alpha). \tag{30.7}$$

Откуда, используя (30.5) и (30.6), получаем

$$A(\alpha) = h_\mu(\alpha)A_\mu, \quad A_\mu = h_\mu(\alpha)A(\alpha). \tag{30.8}$$

Заметим, что соотношение (30.4) в общем случае неинтегрируемо, т.к. $dx(\alpha)$ не является полным дифференциалом. В этом случае преобразование (30.4) называется неголономным.

Найдем изменение $\Delta x(\alpha)$ при обходе по замкнутому контуру в случае (30.4).

$$\Delta x(\alpha) = \oint\limits_{(L)} h_\sigma(\alpha)dx_\sigma = \int\limits_{(f)} C_{\mu\nu}(\alpha)df_{\mu\nu} \neq 0. \tag{30.9}$$

Мы использовали теорему Стокса при переходе от интеграла по замкнутому контуру (L) к интегралу по охватываемой контуром поверхности (f).

$$C_{\mu\nu}(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial h_\nu(\alpha)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial h_\mu(\alpha)}{\partial x_\nu}\Big). \tag{30.10}$$

Величина $C_{\mu\nu}(\alpha)$ называется объектом неголономности, который является общековариантным тензором в индексах μ,ν, но не относительно индекса α. Только в том случае, когда все компоненты объекта неголономности равны нулю, преобразование будет голономным. Отметим еще одно важное обстоятельство. Так как соотношение (30.3) приводит к появлению искривленной тетрадной решетки, то при параллельном переносе некоторого вектора

$\vec{A}$ его компоненты $A(\alpha)$, вследствие различной ориентации тетрад, будут изменяться по закону

$$d_p A(\alpha) = \Delta_\sigma(\alpha\beta) A(\beta) dx_\sigma. \tag{30.11}$$

Здесь объект связности

$$\Delta_\sigma(\alpha\beta) = -\Delta_\sigma(\beta\alpha)$$

играет ту же роль, что и символы Кристоффеля при параллельном перенесении некоторого вектора A_μ в криволинейной координатной системе. Величины $\Delta_\sigma(\alpha\beta)$, образующие общековариантный вектор относительно индекса σ, называются коэффициентами вращения Риччи, для вычисления которых воспользуемся тем фактом, что при параллельном переносе галилеевы компоненты вектора не меняются

$$d_p A_\sigma = d_p A(\alpha) h_\sigma(\alpha) + A(\alpha) d_p h_\sigma(\alpha) = 0,$$

$$d_p A(\alpha) = -h_\nu(\alpha) \frac{\partial h_\nu(\beta)}{\partial x_\sigma} A(\beta) dx_\sigma.$$

Откуда, сравнивая с (30.11), имеем

$$\Delta_\sigma(\alpha\beta) = -h_\nu(\alpha) \frac{\partial h_\nu(\beta)}{\partial x_\sigma}. \tag{30.12}$$

Ковариантный (абсолютный) дифференциал вектора $A(\alpha)$ есть

$$^*DA(\alpha) = dA(\alpha) - d_p A(\alpha) = \Big[\frac{\partial A(\alpha)}{\partial x_\sigma} - \Delta_\sigma(\alpha\beta) A(\beta)\Big] dx_\sigma. \tag{30.13}$$

$$\frac{^*DA(\alpha)}{\partial x_\sigma} =^* \nabla_\sigma A(\alpha) = \frac{\partial A(\alpha)}{\partial x_\sigma} - \Delta_\sigma(\alpha\beta) A(\beta). \tag{30.14}$$

Отметим, что $^*\nabla_\sigma A(\alpha)$ является общековариантным тензором относительно локальных преобразований тетрад. Для любого тензора $T_\mu(\alpha)$, заданного галилеевыми и тетрадными компонентами, имеем

$$^*\nabla_\sigma T_\mu(\alpha) = \frac{\partial T_\mu(\alpha)}{\partial x_\sigma} - \Delta_\sigma(\alpha\beta) T_\mu(\beta). \tag{30.15}$$

В частности

$$^*\nabla_\sigma h_\mu(\alpha) = \frac{\partial h_\mu(\alpha)}{\partial x_\sigma} + h_\nu(\alpha) \frac{\partial h_\nu(\beta)}{\partial x_\sigma} h_\mu(\beta) \equiv 0. \tag{30.16}$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании коэффициенты Ламе являются ковариантно постоянными. Производная по направлению от некоторого геометрического объекта T в направлении $x(\alpha)$ определяется при помощи равенства

$$\frac{\partial T}{\partial x(\alpha)} = h_\sigma(\alpha) \frac{\partial T}{\partial x_\sigma}. \tag{30.17}$$

Покажем, что эти производные некоммутативны и вычислим их коммутатор

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x(\beta) \partial x(\alpha)} = h_\varepsilon(\beta) \frac{\partial h_\nu(\alpha)}{\partial x_\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial x_\nu} + h_\varepsilon(\beta) h_\nu(\alpha) \frac{\partial^2 T}{\partial x_\varepsilon \partial x_\nu},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x(\beta) \partial x(\alpha)} - \frac{\partial^2 T}{\partial x(\alpha) \partial x(\beta)} = \Big(h_\varepsilon(\beta) \frac{\partial h_\nu(\alpha)}{\partial x_\varepsilon} - h_\varepsilon(\alpha) \frac{\partial h_\nu(\beta)}{\partial x_\varepsilon}\Big) \frac{\partial T}{\partial x_\nu}.$$

Воспользуемся равенствами

$$C(\alpha\beta,\gamma) = C_{\mu\varepsilon}(\gamma)h_\mu(\alpha)h_\varepsilon(\beta), \tag{30.18}$$

$$C(\alpha\beta,\gamma)h_\nu(\gamma) = C(\alpha\beta)_\nu = \frac{1}{2}\Big(h_\varepsilon(\beta)\frac{\partial h_\nu(\alpha)}{\partial x_\varepsilon} - h_\varepsilon(\alpha)\frac{\partial h_\nu(\beta)}{\partial x_\varepsilon}\Big). \tag{30.19}$$

Используя (3.19), находим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x(\beta)\partial x(\alpha)} - \frac{\partial^2 T}{\partial x(\alpha)\partial x(\beta)} = 2C(\alpha\beta)_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} = 2C(\alpha\beta,\gamma)\frac{\partial}{\partial x(\gamma)}. \tag{30.20}$$

Из (30.20) следует, что некоммутативность производных по направлениям является следствием того, что объект неголономности отличен от нуля. Путем непосредственной проверки можно убедиться, что между коэффициентами Риччи и объектом неголономности существует соотношение

$$\Delta(\varepsilon,\alpha\beta) = h_\sigma(\varepsilon)\Delta_\sigma(\alpha\beta) = C(\alpha\varepsilon,\beta) + C(\alpha\beta,\varepsilon) + C(\varepsilon\beta,\alpha). \tag{30.21}$$

Остановимся еще на одном важном пункте, отметив, что тетрады $(O,\vec{h}(a))$ только одной точкой O (началом) принадлежат пространству Минковского, а вся остальная конструкция ему не принадлежит. Геометрически это утверждение означает, что преобразования координатной сетки меняет координаты точек O, но не изменяют ориентации самих тетрад. Рассмотрим обычные (глобальные) преобразования Лоренца.

$$x_{\mu'} = L_{\mu'\mu}x_\mu, \quad L_{\mu'\mu}L_{\mu'\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad L_{\mu'\mu} = \text{const}. \tag{30.22}$$

Из соотношения (30.8)

$$A(\alpha) = h_\mu(\alpha)A_\mu,$$

где A_μ и $h_\mu(\alpha)$ при преобразованиях Лоренца преобразуются как 4-векторы, следует, что

$$A'(\alpha) = h'_\mu(\alpha)A'_\mu = L_{\mu'\mu}L_{\mu'\nu}h_\mu(\alpha)A_\nu = A(\alpha). \tag{30.23}$$

Таким образом, вектор $A(\alpha)$, заданный тетрадными компонентами, при преобразованиях Лоренца ведет себя как совокупность скаляров. Так как тетрады друг от друга отличаются только относительной ориентацией, то они связаны локальным ортогональным преобразованием

$$\vec{h}(\alpha') = \omega(\alpha'\alpha)\vec{h}(\alpha), \quad \omega(\alpha\sigma)\omega(\beta\sigma) = \delta(\alpha\beta), \tag{30.24}$$

где коэффициенты преобразования $\omega(\alpha\beta)$ зависят от координат. Преобразование (30.24) образует группу, действующую в пространстве тетрад, которая выполняет примерно ту же роль, что и группа преобразований координатной сетки в пространстве Минковского. При преобразовании (30.24) любой тензор $A_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$, заданный галилеевыми компонентами, преобразуется как совокупность скаляров. Действительно

$$\begin{gathered} A'_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} = h_{\alpha_1}(\beta_1)h_{\alpha_2}(\beta_2)...h_{\alpha_n}(\beta_n)A(\beta_1...\beta_n) = \\ = h_{\alpha_1}(\beta'_1)h_{\alpha_2}(\beta'_2)...h_{\alpha_n}(\beta'_n)\omega(\beta_1\beta'_1)\omega(\beta_2\beta'_2)...\omega(\beta_n\beta'_n) \\ \omega(\beta_1\gamma'_1)\omega(\beta_2\gamma'_2)...\omega(\beta_n\gamma'_n)A(\gamma'_1\gamma'_2...\gamma'_n) = A_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}. \end{gathered} \tag{30.25}$$

Таким образом, геометрический объект $A_{\alpha_1...\alpha_n}(\beta_1...\beta_m)$ представляет собой тензор ранга n относительно преобразований Лоренца и тензор ранга m относительно преобразований тетрад. Связь между галилеевыми и тетрадными компонентами в общем случае, как и в случае (30.8), осуществляется при помощи коэффициентов Ламе.

$$A_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(\beta_1\beta_2...\beta_m)h_{\alpha_1}(\gamma_1)h_{\alpha_2}(\gamma_2)...h_{\alpha_n}(\gamma_n) = A(\gamma_1...\gamma_n\beta_1...\beta_m), \tag{30.26}$$

$$A_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(\beta_1\beta_2...\beta_m)h_{\sigma_1}(\beta_1)h_{\sigma_2}(\beta_2)...h_{\sigma_m}(\beta_m) = A_{\alpha_1...\alpha_n\sigma_1...\sigma_m}. \tag{30.27}$$

Рассмотрим, как изменяется вектор $A(\alpha)$ при параллельном переносе по бесконечно малому замкнутому контуру

$$\oint d_p A(\alpha) = \oint \Delta_\varepsilon(\alpha\beta)A(\beta)dx_\varepsilon = \frac{1}{2}\int R_{\mu\nu}(\alpha\beta)A(\beta)df_{\mu\nu} =$$
$$= \frac{1}{2}\int df_{\mu\nu}\Big[\frac{\partial\Delta_\nu(\alpha\beta)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\Delta_\mu(\alpha\beta)}{\partial x_\nu} +$$
$$+\Delta_\mu(\alpha\varepsilon)\Delta_\nu(\beta\varepsilon) - \Delta_\nu(\alpha\varepsilon)\Delta_\mu(\beta\varepsilon)\Big]A(\beta). \tag{30.28}$$

Откуда

$$R_{\mu\nu}(\alpha\beta) = \frac{\partial\Delta_\nu(\alpha\beta)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\Delta_\mu(\alpha\beta)}{\partial x_\nu} + \Delta_\mu(\alpha\varepsilon)\Delta_\nu(\beta\varepsilon) - \Delta_\nu(\alpha\varepsilon)\Delta_\mu(\beta\varepsilon). \tag{30.29}$$

Подставляя (30.29) в (30.12), получаем, что

$$R_{\mu\nu}(\alpha\beta) \equiv 0, \tag{30.30}$$

где $R_{\mu\nu}(\alpha\beta)$ - тензор кривизны, заданный галилеевыми и тетрадными компонентами.

Таким образом, связность $\Delta_\mu(\alpha\beta)$ появилась именно потому, что мы ввели некоторое произвольное тетрадное поле. Она не дает вклада в тензор кривизны, компенсируя введение неоднородного тетрадного поля, которое мы ввели наряду с однородным.

Выясним теперь, что нового дает переход от галилеевых координат пространства Минковского к произвольным криволинейным координатам. Пусть y^μ - криволинейные координаты, введенные наряду с галилеевыми x_α при помощи соотношения

$$y^\mu = f^\mu(x_\alpha), \quad x_\alpha = \phi_\alpha(y^\mu). \tag{30.31}$$

Выражение (30.1) примет более общую форму

$$-dS^2 = \hat{g}_{\mu\nu}dy^\mu dy^\nu, \tag{30.32}$$

где компоненты метрического тензора $\hat{g}_{\mu\nu}$ имеют следующий вид

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^\nu}. \tag{30.33}$$

Радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат в некоторую точку M, будет функцией криволинейных координат y^μ. Рассмотрим новый вектор $\vec{\hat{h}}_\mu$, полученный дифференцированием $\vec{r}$ по y^μ, т.е.

$$\vec{\hat{h}} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial y^\mu}. \tag{30.34}$$

Каждый из этих четырех векторов является касательным к координатной линии y^μ в точке M и все вместе они образуют локальный аффинный репер, с которым можно связать локальную косоугольную и прямолинейную систему координат. При переходе от точки к точке векторы $\vec{\hat{h}}_\mu$ изменяют свою длину и относительную ориентацию. Любой вектор $\vec{A}$, заданный в точке M может быть разложен по векторам $\vec{\hat{h}}_\mu$ аффинного репера, для которого точка M служит началом

$$\vec{A} = \hat{A}^\mu \vec{\hat{h}}_\mu. \tag{30.35}$$

Коэффициенты разложения $\hat{A}^\mu$, являющиеся в общем случае функциями координат y^μ, называются криволинейными контравариантными компонентами вектора $\vec{A}$. В каждой точке может быть построен также взаимный аффинный репер $\vec{\hat{h}}^\mu$ такой, что

$$\vec{\hat{h}}_\nu \cdot \vec{\hat{h}}^\mu = \delta^\mu_\nu. \tag{30.36}$$

Тогда

$$\vec{A} = \hat{A}_\mu \vec{\hat{h}}^\mu, \tag{30.37}$$

где $\hat{A}_\mu$ - ковариантные компоненты вектора. Кроме того, в каждой точке галилеевой системы может быть построен ортонормированный репер, векторы которого единичные и ортогональные. Так как поле таких векторов в соответствии с (30.2) однородно, то

$$\frac{\partial \vec{h}_\mu}{\partial x_\varepsilon} = \frac{\partial \vec{h}_\mu}{\partial y^\varepsilon} = 0. \tag{30.38}$$

Скалярные произведения векторов аффинного и ортонормированного образуют коэффициенты Ламе

$$h_{\varepsilon\mu} = \vec{h}_\varepsilon \cdot \vec{\hat{h}}_\mu = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^\mu} = \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^\mu}, \quad h^\mu_\varepsilon = \vec{h}_\varepsilon \cdot \vec{\hat{h}}^\mu = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^\nu}\frac{\partial y^\nu}{\partial x_\varepsilon}\vec{\hat{h}}^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}. \tag{30.39}$$

Коэффициенты Ламе являются компонентами смешанного тензора, индексы которого относятся к разным координатным системам. Эти коэффициенты позволяют связать ортогональные и криволинейные компоненты векторов.

$$A_\alpha = h_{\alpha\mu}\hat{A}^\mu = h^\mu_\alpha \hat{A}_\mu, \quad \hat{A}^\mu = h^\mu_\alpha A_\alpha, \quad \hat{A}_\mu = h_{\alpha\mu} A_\alpha. \tag{30.40}$$

При помощи их можно записать компоненты метрического тензора

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^\nu} = h_{\alpha\mu}h_{\alpha\nu}, \quad \hat{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x_\alpha} = h^\mu_\alpha h^\nu_\alpha, \quad h_{\alpha\mu}h^\mu_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \tag{30.41}$$

Используя соотношения (30.3), введем произвольное тетрадное поле $\{O, \vec{h}(\alpha)\}$. Таким образом, в каждой точке возникают три репера: два ортогональных и один аффинный. Связь между произвольным ортогональным репером и аффинным также осуществляется при помощи параметров Ламе.

$$\vec{h}(\alpha) \cdot \vec{\hat{h}}_\mu = \hat{h}_\mu(\alpha), \quad \vec{h}(\alpha) \cdot \vec{\hat{h}}^\mu = \hat{h}^\mu(\alpha), \quad \hat{h}_\mu(\alpha)\hat{h}^\mu(\beta) = \delta(\alpha\beta),$$

$$\hat{h}_\mu(\alpha)\hat{h}_\nu(\alpha) = h_{\varepsilon\mu}h_{\varepsilon\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}, \quad \hat{h}_\mu(\alpha)\hat{h}^\nu(\alpha) = h_{\sigma\mu}h^\nu_\sigma = \delta^\nu_\mu,$$

$$\hat{h}^\mu(\alpha)\hat{h}^\nu(\alpha) = h^\mu_\sigma h^\nu_\sigma = \hat{g}^{\mu\nu}. \tag{30.42}$$

Между аффинными и тетрадными компонентами для некоторого вектора $\vec{A}$ имеют место равенства.

$$A(\alpha) = \hat{h}_\mu(\alpha)\hat{A}^\mu = h(\alpha)^\mu \hat{A}_\mu, \quad \hat{A}^\mu = h(\alpha)^\mu A(\alpha), \quad \hat{A}_\mu = h_\mu(\alpha)A(\alpha). \tag{30.43}$$

Найдем изменение Δy^μ при обходе по замкнутому контуру. Используя значения (30.39), получим

$$\Delta y^\mu = \oint\limits_{(L)} h^\mu_\alpha dx_\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_{(f)} \Big(\frac{\partial h^\mu_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial h^\mu_\alpha}{\partial x_\beta}\Big) df_{\alpha\beta} = 0. \tag{30.43a}$$

Этим свойством, как известно, обладают голономные преобразования. Подсчитаем аналогичное изменение для

$$dy(\alpha) = \hat{h}_\mu(\alpha)dy^\mu.$$

$$\Delta y(\alpha) = \oint\limits_{(L)} \hat{h}_\sigma(\alpha)dx_\sigma = \int\limits_{(f)} \hat{C}_{\mu\nu}(\alpha)df_{\mu\nu} \neq 0, \tag{30.43b}$$

так как объект неголономности $\hat{C}_{\mu\nu}(\alpha)$, отнесенный к произвольной криволинейной координатной сетке и определяемый равенством

$$C_{\mu\nu}(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial h_\nu(\alpha)}{\partial y^\mu} - \frac{\partial h_\mu(\alpha)}{\partial y^\nu}\Big)$$

отличен от нуля. При переходе к галилеевым координатам получим соотношение (30.10).

Рассмотрим как будут изменяться компоненты $A(\alpha)$ при параллельном переносе некоторого вектора $\vec{A}$.

$$d_pA(\alpha) = \hat{D}elta_\varepsilon(\alpha\beta)A(\beta)dy^\varepsilon, \quad d_pA(\alpha) = d_p(\hat{h}^\mu_\alpha\hat{A}^\mu) =$$

$$= -\hat{h}_\mu(\alpha)\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\hat{A}^\lambda dy^\sigma + +\hat{A}^\mu\frac{\partial\hat{h}_\mu(\alpha)}{\partial y^\sigma}dy^\sigma =$$

$$= \Big(-\hat{h}_\mu(\alpha)\hat{h}^\lambda(\beta)\Gamma^\mu_{\varepsilon\lambda} + +\hat{h}^\mu(\beta)\frac{\partial\hat{h}_\mu(\alpha)}{\partial y^\sigma}\Big)A(\beta)dy^\varepsilon.$$

Откуда находим

$$\hat{D}elta_\varepsilon(\alpha\beta) = -\hat{h}_\mu(\alpha)\hat{h}^\lambda(\beta)\Gamma^\mu_{\varepsilon\lambda} + \hat{h}^\mu(\beta)\frac{\partial\hat{h}_\mu(\alpha)}{\partial y^\varepsilon},$$

что эквивалентно

$$\Gamma^\mu_{\sigma\lambda.} = \Delta^\mu_{\sigma,\lambda.} + \hat{h}^\mu(\beta)\frac{\partial\hat{h}_\lambda(\beta)}{\partial y^\sigma} \tag{30.44}$$

В галилеевых координатах коэффициенты Риччи определяются соотношением (30.12). Коэффициенты $\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$ (символы Кристоффеля) описывают изменение локальных аффинных реперов при переходе от точки к точке. Если метрический тензор порожден только криволинейной системой координат плоского пространства, то коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^\sigma \partial y^\lambda}. \tag{30.45}$$

При этом $\hat{g}_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$ связаны обычным образом

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \hat{g}_{\lambda\nu}}{\partial y^{\sigma}} + \frac{\partial \hat{g}_{\sigma\nu}}{\partial y^{\lambda}} - \frac{\partial \hat{g}_{\sigma\lambda}}{\partial y^{\nu}}\Big). \tag{30.46}$$

Коэффициенты Риччи $\hat{D}elta(\varepsilon, \alpha\beta)$ связаны с объектом неголономности по тому же правилу, как и (30.21).

$$\hat{D}elta(\varepsilon, \alpha\beta) = \hat{C}(\alpha\varepsilon, \beta) + \hat{C}(\alpha\beta, \varepsilon) + \hat{C}(\varepsilon\beta, \alpha). \tag{30.47}$$

$$\hat{C}(\varepsilon\beta, \alpha) = \hat{C}_{\mu\nu}(\alpha)\hat{h}^{\mu}(\varepsilon)\hat{h}^{\nu}(\beta). \tag{30.48}$$

Ковариантный (абсолютный) дифференциал вектора $A(\alpha)$, как и в случае (30.13) есть

$$^{*}DA(\alpha) = dA(\alpha) - d_{p}A(\alpha) = \Big[\frac{\partial A(\alpha)}{\partial y^{\sigma}} - \hat{D}elta_{\sigma}(\alpha\beta)A(\beta)\Big]dy^{\sigma}. \tag{30.49}$$

$$\frac{^{*}DA(\alpha)}{\partial y^{\sigma}} =^{*} \nabla_{\sigma}A(\alpha) = \frac{\partial A(\alpha)}{\partial y^{\sigma}} - \hat{D}elta_{\sigma}(\alpha\beta)A(\beta). \tag{30.50}$$

Для любого тензора $\hat{T}_{\mu}(\alpha)$, заданного аффинными и тетрадными компонентами, имеем

$$^{*}\nabla_{\sigma}\hat{T}_{\mu}(\alpha) = \frac{\partial \hat{T}_{\mu}(\alpha)}{\partial y^{\sigma}} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}\hat{T}_{\lambda}(\alpha) - \hat{D}elta_{\sigma}(\alpha\beta)\hat{T}_{\mu}(\beta). \tag{30.51}$$

В галилеевых координатах (30.51) переходит в (30.15). $^{*}\nabla_{\sigma}\hat{T}_{\mu}(\alpha)$ является общековариантным тензором по индексам σ, μ и вектором по отношению к преобразованию тетрад. В частности

$$^{*}\nabla_{\sigma}\hat{h}_{\mu}(\alpha) = \frac{\partial \hat{h}_{\mu}(\alpha)}{\partial y^{\sigma}} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}\hat{h}_{\lambda}(\alpha) - \hat{D}elta_{\sigma}(\alpha\beta)\hat{h}_{\mu}(\beta) \equiv 0. \tag{30.52}$$

Таким образом, как и в случае (30.16) коэффициенты Ламе являются ковариантно постоянными.

В рассмотренном выше случае всегда можно от криволинейных координат y^{μ} перейти к галилеевым x_{α}, тогда все сорок коэффициентов связности $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$ обратятся в нуль. Если же пространство риманово, то галилееву систему во всем пространстве ввести нельзя и мы вынуждены пользоваться только криволинейными системами координат. Далее, в римановом пространстве вместо радиуса-вектора конечных размеров, которого принципиально не существует, можно построить в каждой точке бесконечно малый радиус вектор $d\vec{r}$, однако он будет принадлежать уже другому многообразию - касательному плоскому пространству, которое можно построить в каждой точке искривленного пространства. В этом касательном (локальном) плоском пространстве располагаются аффинный и ортонормированный реперы, а также любые векторы, которые можно построить по их криволинейным компонентам. Таким образом, формализм плоского пространства в криволинейных координатах применим и к риманову пространству, в котором, правда, метрический тензор и символы Кристоффеля не выражаются через производные от галилеевых координат, как это имело место в плоском пространстве. В римановом пространстве принципиально нельзя выбрать такой координатной системы, в которой координаты метрического тензора $\hat{g}_{\mu\nu}$ становятся постоянными во всем пространстве. В связи с этим в римановом пространстве появляется новая характеристика, которая отличает его от плоского пространства, а именно,–

кривизна. При параллельном переносе вектора $A(\alpha)$ по бесконечно малому замкнутому контуру этот вектор получает приращение $\Delta A(\alpha)$, определяемое как

$$\Delta A(\alpha) = \oint d_p A(\alpha) = \oint \hat{D}elta_\varepsilon(\alpha\beta)A(\beta)dy^\varepsilon = \frac{1}{2}\int R_{\mu\nu}(\alpha\beta)A(\beta)df^{\mu\nu}, \tag{30.53}$$

где

$$R_{\mu\nu}(\alpha\beta) = \frac{\partial \hat{D}elta_\nu(\alpha\beta)}{\partial y^\mu} - \frac{\partial \hat{D}elta_\mu(\alpha\beta)}{\partial y^\nu} + \hat{D}elta_\mu(\alpha\varepsilon)\hat{D}elta_\nu(\beta\varepsilon) - \hat{D}elta_\nu(\alpha\varepsilon)\hat{D}elta_\mu(\beta\varepsilon). \tag{30.54}$$

Соотношение (30.54) выражает тензор кривизны через коэффициенты Риччи. Свертывая индексы с помощью коэффициентов Ламе $\hat{h}^\mu(\alpha)$, $\hat{h}^\nu(\beta)$, получим скалярную кривизну пространства R.

$$R = 4\nabla_\sigma\{\hat{C}(\varepsilon\beta,\beta)\hat{h}^\sigma(\varepsilon)\} - 4\hat{C}(\alpha\beta,\beta)\hat{C}(\alpha\varepsilon,\varepsilon) + \hat{D}elta(\varepsilon,\alpha\beta)\hat{C}(\alpha\beta,\varepsilon), \tag{30.55}$$

где ∇_σ - ковариантная производная относительно группы преобразований координатной сетки, для которых тетрадные индексы являются инвариантными. Поэтому

$$\nabla_\sigma \hat{A}^\mu(\alpha_1,...\alpha_n) = \frac{\partial \hat{A}^\mu(\alpha_1,...\alpha_n)}{\partial y^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\hat{A}^\lambda(\alpha_1,...\alpha_n). \tag{30.56}$$

В частности из (30.52)

$$\nabla_\sigma \hat{h}_\mu(\alpha) = \hat{D}elta_\sigma(\alpha\beta)\hat{h}_\mu(\beta). \tag{30.57}$$

До сих пор мы рассматривали ортогональные реперы $\hat{h}^\mu(\alpha)$ как некоторое произвольное тетрадное поле. Однако особый интерес для нас будут представлять тетрады, связанные с каждой точкой некоторой временно-подобной кривой Γ (мировой линией) в пространстве-времени. Выпишем соотношения, носящие название формул Френе-Серре.

$$\frac{\delta \hat{A}^\mu}{\delta S} = \hat{\beta}\hat{B}^\mu, \tag{30.58}$$

$$\frac{\delta \hat{B}^\mu}{\delta S} = \hat{c}\hat{C}^\mu + \hat{\beta}\hat{A}^\mu, \tag{30.59}$$

$$\frac{\delta \hat{C}^\mu}{\delta S} = \hat{d}\hat{D}^\mu - \hat{c}\hat{B}^\mu, \tag{30.60}$$

$$\frac{\delta \hat{D}^\mu}{\delta S} = -\hat{d}\hat{C}^\mu, \tag{30.61}$$

где

$$\hat{A}^\mu\hat{A}_\mu = -1, \quad \hat{B}^\mu\hat{B}_\mu = \hat{C}^\mu\hat{C}_\mu = \hat{D}^\mu\hat{D}_\mu = 1. \tag{30.62}$$

$\hat{B}^\mu$, $\hat{C}^\mu$, $\hat{D}^\mu$ представляют собой первую вторую и третью нормали к Γ соответственно, а $\hat{\beta}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$ - первую, вторую и третью кривизны. $\delta\hat{F}^\mu/\delta S$ - абсолютная производная контравариантного векторного поля F^μ на кривой $y^\mu(S)$, определяемая равенством

$$\frac{\delta \hat{F}^\mu}{\delta S} = \frac{d\hat{F}^\mu}{dS} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\hat{F}^\alpha\frac{dy^\beta}{dS}. \tag{30.63}$$

Пусть

$$\hat{A}^\mu = \frac{dy^\mu}{dS} \tag{30.64}$$

есть мнимо единичный вектор, касательный к Г. Тогда из уравнений (30.58), (30.62) определяются $\hat{B}^\mu$ и $\hat{\beta}$, из уравнений (30.59), (30.62) определяются $\hat{C}^\mu$ и $\hat{c}$ и из (30.60), (30.62) находим $\hat{D}^\mu$ и $\hat{d}$. В силу соотношения (30.62) три вектора $\hat{B}^\mu$, $\hat{C}^\mu$, и $\hat{D}^\mu$ - единичные и один $\hat{A}^\mu$ - мнимоединичный. Установим, что они образуют ортогональный репер и удовлетворяют уравнению (30.61). Умножая уравнение (30.58) на $\hat{A}^\mu$ и используя (30.62), имеем

$$\hat{A}_\mu \hat{B}^\mu = 0. \tag{30.65}$$

Аналогично

$$\hat{c}\hat{B}_\mu \hat{C}^\mu = \hat{B}_\mu \frac{\delta \hat{B}^\mu}{\delta S} = 0, \quad \hat{B}_\mu \hat{C}^\mu = 0, \tag{30.66}$$

$$\hat{C}_\mu \frac{\delta \hat{C}^\mu}{\delta S} = 0 = \hat{d}\hat{C}_\mu \hat{D}^\mu - \hat{c}\hat{C}_\mu \hat{B}^\mu, \quad \hat{C}_\mu \hat{D}^\mu = 0. \tag{30.67}$$

Умножая (30.59) на $\hat{A}^\mu$, имеем

$$\hat{A}_\mu \frac{\delta \hat{B}^\mu}{\delta S} = \hat{c}\hat{C}^\mu \hat{A}_\mu - \hat{\beta}.$$

Дифференцируя (30.65), получаем

$$\hat{A}_\mu \frac{\delta \hat{B}^\mu}{\delta S} = -\hat{B}^\mu \frac{\delta \hat{A}_\mu}{\delta S} = -\hat{\beta}.$$

Откуда

$$\hat{C}^\mu \hat{A}_\mu = 0. \tag{30.68}$$

Остальные соотношения доказываются аналогично. Чтобы доказать справедливость формулы (30.61), замечаем, что любой вектор может быть разложен по реперу $\hat{A}^\mu$, $\hat{B}^\mu$, $\hat{C}^\mu$, $\hat{D}^\mu$ и поэтому можно записать

$$\frac{\delta \hat{D}^\mu}{\delta S} = \alpha \hat{A}^\mu + \beta \hat{B}^\mu + \gamma \hat{C}^\mu + \delta \hat{D}^\mu. \tag{30.69}$$

Умножая это уравнение поочередно на $\hat{A}^\mu$, $\hat{B}^\mu$, $\hat{C}^\mu$, $\hat{D}^\mu$ и используя уже доказанные условия ортогональности и уравнения (30.58) - (30.60), получаем

$$\alpha = \beta = \delta = 0, \quad \gamma = -\hat{d},$$

что удовлетворяет (30.61).

Рассмотрим кривую Г, заданную уравнением $y^\mu = y^\mu(S)$ и векторное поле $\hat{V}^\mu$, определенное на Г. Если вектор $\hat{V}^\mu$ переносится параллельно вдоль Г, то его абсолютная производная обращается в нуль.

$$\frac{\delta \hat{V}^\mu}{\delta S} = 0. \tag{30.70}$$

При этом ни длина вектора, ни его скалярное произведение не меняется. Кривая носит название геодезической, если всякий вектор касательный к этой кривой в какой-либо точке

M остается к ней касательным при параллельном перенесении вдоль нее. В частности, если $\hat{A}^\mu = dy^\mu/dS$ претерпевает параллельный перенос вдоль Γ и кривая неизотропная, то из равенства $\delta\hat{A}^\mu/\delta S = 0$ следует уравнение геодезической

$$\frac{d^2y^\mu}{dS^2} + \Gamma^\mu_{\nu\varepsilon}\frac{dy^\nu}{dS}\frac{dy^\varepsilon}{dS} = 0. \tag{30.71}$$

Помимо параллельного переноса рассмотрим необходимый нам в дальнейшем перенос Ферми-Уолкера. Определим перенос Ферми-Уолкера вектора $\hat{F}^\mu$ с помощью уравнения

$$\frac{\delta\hat{F}^\mu}{\delta S} = \hat{\beta}\hat{F}_\varepsilon(\hat{A}^\mu\hat{B}^\varepsilon - \hat{A}^\varepsilon\hat{B}^\mu), \tag{30.72}$$

где $\hat{\beta}$, $\hat{A}^\mu$, $\hat{B}^\varepsilon$ входят в формулы Френе-Серре, рассмотренные выше. Важное свойство переноса Ферми-Уолкера состоит в том, что в силу формул Френе-Серре, единичный касательный вектор к какой-либо кривой (негеодезической) автоматически претерпевает перенос Ферми-Уолкера. Этот перенос имеет сходство с параллельным переносом в смысле сохранения нормы вектора и скалярного произведения. Действительно

$$\frac{d}{dS}(\hat{F}_\mu\hat{F}^\mu) = 2\hat{\beta}\hat{F}_\mu\hat{F}_\varepsilon(\hat{A}^\mu\hat{B}^\varepsilon - \hat{A}^\varepsilon\hat{B}^\mu) = 0,$$

$$\frac{d}{dS}(\hat{F}_\mu\hat{K}^\mu) = \hat{\beta}(\hat{F}_\mu\hat{K}_\varepsilon + \hat{K}_\mu\hat{F}_\varepsilon)(\hat{A}^\mu\hat{B}^\varepsilon - \hat{A}^\varepsilon\hat{B}^\mu) = 0. \tag{30.73}$$

Поскольку параллельный перенос определяется более простым уравнением, он в математическом отношении более фундаментален, чем перенос Ферми-Уолкера, однако последний оказывается более важным в некоторых физических ситуациях. Например, если мы возьмем тетраду на Γ так, что $\hat{h}^\mu(4)$ останется касательным к Γ, то при переносе Ферми-Уолкера сохраняется не только $\hat{h}^\mu(4)$ вдоль Γ, но сохраняется также ортонормированный 3-репер, ортогональный Γ. Это приводит к образованию пространственной системы отсчета для наблюдателя, движущегося в пространстве-времени вдоль Γ. Рассмотрим тетраду $\hat{h}^\mu(\alpha)$, подвергающуюся переносу Ферми-Уолкера вдоль Γ так, что

$$i\hat{h}^\mu(4) = \hat{A}^\mu. \tag{30.74}$$

Откуда следует с учетом (30.72), что

$$\frac{\delta\hat{h}^\mu(\alpha)}{\delta S} = i\hat{\beta}(\hat{h}^\mu(4)\hat{B}(\alpha) - \delta(\alpha 4)\hat{B}^\mu). \tag{30.75}$$

В частности

$$\frac{\delta\hat{h}^\mu(4)}{\delta S} = -i\hat{\beta}\hat{B}^\mu. \tag{30.76}$$

$$\frac{\delta\hat{h}^\mu(k)}{\delta S} = i\hat{\beta}\hat{h}^\mu(4)\hat{B}(k). \tag{30.77}$$

Если перенос Ферми-Уолкера применить к вектору $\hat{F}^\mu$, ортогональному в некоторой точке на Γ к касательному вектору A^μ, то эта ортогональность сохранится и в дальнейшем. Тогда уравнение (30.72) примет вид

$$\frac{\delta\hat{F}^\mu}{\delta S} = \hat{\beta}\hat{F}_\varepsilon\hat{A}^\mu\hat{B}^\varepsilon. \tag{30.78}$$

Это правило переноса впервые было сформулировано Ферми, поэтому соотношение (30.78) носит название переноса Ферми.

Рассмотрим нужные в дальнейшем некоторые свойства пространства с абсолютным параллелизмом. Таким пространством будем называть пространство, в котором результат параллельного переноса произвольного вектора $\hat{x}i^{\mu}$ из точки P в точку Q при любом выборе этих точек не зависит от пути перенесения Q. Подобным свойством обладает, например, евклидово пространство. Выясним, существуют ли другие пространства с абсолютным параллелизмом и какие именно. Рассмотрим риманово пространство, в каждой точке которого в касательном (локальном) плоском пространстве располагаются аффинный и ортонормированный реперы $\vec{\hat{h}}^{\mu}$ и $\vec{h}(\alpha)$ соответственно. Объявим по определению, что во всех точках риманова пространства соответствующие тетрадные векторы $\vec{h}(\alpha)$ являются параллельными. Рассмотрим некоторый вектор $\vec{\xi} = \xi(\alpha)\vec{h}(\alpha)$. Так как тетрадное поле $\vec{h}(\alpha)$ задано и объявлено параллельным, то естественно считать, что при параллельном переносе вектора $\vec{\xi}$ его компоненты $\xi(\alpha)$ в разных тетрадах одинаковы, т.е.

$$d_p\xi(\alpha) = 0, \tag{30.79}$$

$$d_p\hat{x}i^{\mu} = -\bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}\hat{x}i^{\lambda}dy^{\sigma}, \tag{30.80}$$

где связность $\bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}$ неизвестна. Найдем эту связность

$$d_p\xi(\alpha) = d_p(\hat{x}i^{\mu}\hat{h}_{\mu}(\alpha)) = 0,$$

$$\Big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}\hat{h}_{\mu}(\alpha)\hat{h}^{\nu}(\alpha) - \hat{h}^{\nu}(\alpha)\frac{\partial\hat{h}_{\lambda}(\alpha)}{\partial y^{\sigma}}\Big)\hat{x}i^{\lambda}dy^{\sigma} = 0.$$

Откуда, в силу произвольности $\hat{x}i^{\lambda}$ и dy^{σ}, имеем

$$\bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda} = \hat{h}^{\mu}(\alpha)\frac{\partial\hat{h}_{\lambda}(\alpha)}{\partial y^{\sigma}}. \tag{30.81}$$

Если выражение (30.81) подставить в риманов тензор кривизны, который выражается обычным образом в виде

$$R^{\mu}_{\sigma\tau\lambda.} = \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}}{\partial y^{\tau}} - \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\tau\lambda}}{\partial y^{\sigma}} + \Gamma^{\mu}_{\tau\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}_{\tau\lambda} \tag{30.82}$$

и заменить в этом тензоре $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \to \bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}$, то

$$\bar{R}^{\mu}_{\sigma\tau\lambda.}(\bar{\Gamma}) \equiv 0. \tag{30.83}$$

Таким образом, связность (30.81) является связностью пространства с абсолютным параллелизмом, так как результат параллельного переноса вектора $\hat{x}i^{\mu}$ в силу (30.83) не зависит от пути переноса. Из соотношения (30.81) следует, что $\bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}$ не является симметричной по нижним индексам. Поэтому можно построить тензор кручения, определяемый как

$$C^{\lambda}_{\sigma\mu.} = \Gamma^{\lambda}_{[\sigma\mu]} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\hat{h}_{\mu}(\alpha)}{\partial y^{\sigma}} - \frac{\partial\hat{h}_{\sigma}(\alpha)}{\partial y^{\mu}}\Big)\hat{h}^{\lambda}(\alpha). \tag{30.84}$$

Используя (30.41), находим взаимосвязь между тензором кручения и объектом неголономности

$$C^{\lambda}_{\sigma\mu.} = \hat{h}^{\lambda}(\alpha)\hat{C}_{\sigma\mu}(\alpha). \tag{30.85}$$

Таким образом, из равенства нулю тензора кривизны можно получить два решения: 1) плоское пространство, 2) выражение для связности в пространстве с абсолютным параллелизмом. Если потребовать равенства нулю тензора кручения, то пространство окажется плоским.

Исследуем метрику пространства, задаваемую в согласии с (30.42) выражением

$$\hat{\gamma}_{\mu\nu} = \hat{h}^{\mu}(\alpha)\hat{h}_{\nu}(\alpha).$$

Подставляя это выражение в (30.46) и (30.82), получим, что тензор кривизны будет отличен от нуля, так как исходное пространство риманово. Рассматривая (30.43) и (30.83), замечаем, что полная риманова связность складывается из коэффициентов вращения Риччи и связности пространства с абсолютным параллелизмом, т.е.

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda.} = \hat{D}elta^{\mu}_{\sigma,\lambda.} + \bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda.}. \tag{30.86}$$

Поэтому наличие кривизны риманова пространства связано с отличием от нуля коэффициентов Риччи. Ясно, что связность абсолютного параллелизма можно ввести и в пространстве Минковского. В частности, в галилеевых координатах достаточно положить $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} = 0$. Тот факт, что в этом случае коэффициенты Риччи и коэффициенты связности абсолютного параллелизма отличаются знаком, обусловлен тем, что при выводе последних мы объявили "параллельными"тетрадные векторы $\vec{h}(\alpha)$, в то время как при выводе (30.12) параллельными векторами в буквальном смысле этого слова являются векторы $\vec{h}_{\mu}$.

31. Движение сплошной среды и тензоры деформаций

Движение сплошной среды будем описывать сначала в пространстве Минковского, интервал в котором дается выражением (30.1). Выбор галилеевых координат для описания движения, вообще говоря, не является обязательным и при желании можно перейти к любой криволинейной системе координат, но так как галилеевы координаты имеют метрический смысл, то мы отдаем им предпочтение.

Каждой точке среды в пространстве Минковского соответствует своя мировая линия. Следовательно, для всей среды мы будем иметь конгруенцию мировых линий, характер которой зависит и от движения среды как целого, так и от деформаций, возникающих в среде. Если среда обладает тем свойством, что под действием приложенных сил меняет свою форму – деформируется и полностью восстанавливает свою форму после устранения причины, вызывающей деформацию, то такую среду будем называть упругой. (Математическое определение упругой среды дадим ниже).

Прежде, чем переходить к релятивистскому описанию движения сплошной среды, остановимся на классическом рассмотрении. Для описания движения сплошной среды существуют два метода – метод Лагранжа и метод Эйлера. Движение материальной точки в классической механике сплошной среды описывается при помощи уравнений

$$x_i = x_i(t), \tag{31.1}$$

где x_i - текущие координаты, t - время. Рассматривая частицу сплошной среды как материальную точку, приведенные уравнения опишут ее движение. Так как сплошную среду, непрерывным образом заполняющую пространство, можно представить состоящей из бесконечного множества точек, то для описания движения этих точек при помощи уравнений (31.1) необходимо ввести в них параметры a_k, характеризующие конкретную точку среды. Тогда уравнения движения точек можно записать в виде

$$x_i = x_i(a_k, t). \tag{31.2}$$

В частности, параметры a_k, образующие трехмерный вектор, можно выбрать так, чтобы они определяли начальные координаты точек среды. Метод описания (31.2) носит название метода Лагранжа, а переменные a_k называются переменными Лагранжа.

Однако к вопросу о движении среды можно подойти и иначе. А именно, за объект изучения можно выбрать неподвижное пространство, заполненное движущейся средой, и изучать изменение различных элементов движения в фиксированной точке пространства, изучая изменение этих элементов как с течением времени, так и при переходе к другим точкам пространства. Тогда величины, характеризующие движение, рассматриваются как функции координат точки x_k и времени t. Этот метод был развит Эйлером, поэтому четыре аргумента x_k и t носят название переменных Эйлера. Разрешив уравнения (31.2) относительно a_k, получим

$$a_k = a_k(x_i, t). \tag{31.3}$$

Если a_k характеризует начальное положение точки среды, то уравнения (31.3) указывают начальное положение той точки среды, которая находится в момент времени t в точке пространства x_k. При релятивистском рассмотрении уравнения (31.2) заменяются уравнениями

$$x_\mu = x_\mu(\xi^\nu), \tag{31.4}$$

где ξ^k - лагранжевы координаты, определяющие начальные положения точек среды, постоянные вдоль каждой из мировых линий, ξ^4 - любой удобный времениподобный параметр, изменяющийся вдоль мировых линий.

Наш подход к кинематике базируется на использовании лагранжевых сопутствующих систем отсчета [44], [5]. Действительно, наиболее естественным способом построения релятивистской кинематики является рассмотрение движения среды с точки зрения семейства пространственно подобных гиперповерхностей, ортогональных мировым линиям. Эти мировые линии и гиперповерхности образуют инвариантную структуру, не зависящую от выбора системы координат. Рассмотрение движения среды с позиции таких гиперповерхностей сводят задачи динамики к задачам статики, так как на гиперповерхностях среда всегда покоится. В разделе 30 был дан тетрадный формализм, который справедлив для произвольного тетрадного поля $\hat{h}_\mu(\alpha)$. Однако особый интерес для нас будут представлять тетрады, связанные с мировыми линиями. Пусть $h_\mu(4)$ единичный вектор, направленный по касательной к мировой в некоторой точке. Так как движение сплошной среды описывается при помощи конгруенции мировых линий, то возникает поле единичных касательных векторов. Поле этих векторов, как очевидно, совпадает по направлению с полем 4-скорости V_μ. Поэтому имеет место равенство

$$ih_\mu(4) = V_\mu. \tag{31.5}$$

Как известно из [20], в случае движения среды без вращений, мировые линии образуют нормальную конгруенцию, т.е. существует семейство трехмерных гиперповерхностей, по отношению к которым мировые линии ортогональны. Согласно методу Лагранжа, введем четыре параметра y^α, первые три из которых y^k постоянны вдоль каждой мировой линии, а четвертый y^4 - переменный (временной). В качестве временного параметра y^4 выберем параметр, нумерующий ортогональные мировым мировым линиям гиперповерхности. При наличии вращений среды такой параметр будет неголономным, а при отсутствии - голономным.

Уравнения конгруенций мировых линий для голономных лагранжевых координат принимают вид

$$x_\mu = x_\mu(y^\alpha). \tag{31.6}$$

Вектор 4-скорости V_μ в переменных Лагранжа определяется как

$$V_\mu = \theta \frac{\partial x_\mu}{\partial y^4}, \tag{31.7}$$

где скалярный множитель θ выбирается здесь таким образом, что

$$V_\mu V_\mu = \theta^2 \frac{\partial x_\mu}{\partial y^4} \frac{\partial x_\mu}{\partial y^4} = -1. \tag{31.8}$$

(Обратим внимание, что в силу выбранной в (30.1) метрики, 4-скорость нормируется в этом разделе на минус единицу, а не на единицу, как в (1.2)). Так как три лагранжевых параметра y^k характеризуют положения мировых линий частиц среды на гиперповерхностях, а y^4 отсчитывается вдоль каждой мировой линии, то y^α, очевидно, являются скалярными функциями относительно глобальных преобразований Лоренца. Совокупность лагранжевых параметров y^k образует на любой фиксированной гиперповерхности $y^4 = \mathrm{const}$ деформируемую криволинейную координатную сетку, которая называется сопутствующей системой координат. Она, очевидно, будет изменяться в зависимости от y^4. Как в классической механике сплошной среды [44], так и при релятивистском рассмотрении [5], [46], выбор такой системы координат при фиксированном y^4 в нашей власти, но в следующий момент $(y^4 + dy^4)$ она уже не подвластна нам, так как она "вморожена"в среду и деформируется вместе с ней. Такую вмороженную в среду систему координат по аналогии с классической механикой сплошной среды [44] определим как сопутствующую систему. Координаты точек сплошной среды y^k на любой произвольной, но фиксированной гиперповерхности $y^4 = \mathrm{const}$ не изменяются, в то время как метрический тензор $\hat{g}_{kl}$ на этих гиперповерхностях, отнесенный к системе координат y^k, вообще говоря, зависит от y^4. Кроме голономных координат y^k на всякой фиксированной гиперповерхности $y^4 = \mathrm{const}$ возникают неголономные координаты $x(k)$. Действительно, так как $h_\mu(4)$ касательный вектор к мировой линии, то триада $h_\mu(k)$ лежит в ортогональной к ней гиперповерхности. Поэтому система тетрад (31.5) является сопутствующей системой отсчета. Это можно доказать и математически, переходя от галилеева представления к тетрадному.

$$V(\alpha) = h_\mu(\alpha) V_\mu = i\delta(\alpha 4), \quad V(k) = 0, \quad V(4) = i, \tag{31.9}$$

что и доказывает утверждение.

При изменении параметра y^4 триады $h_\mu(k)$, связанные с мировыми линиями частиц среды, в общем случае изменяются. Простейшим переносом, удовлетворяющим (31.5), т.е. оставляющим $h_\mu(4)$ всегда касательным к мировой линии, является перенос Ферми-Уолкера (30.75), который в пространстве Минковского задается уравнениями

$$\frac{\delta h_\mu(\alpha)}{\delta S} = \frac{dh_\mu(\alpha)}{dS} = ibh_\varepsilon(\alpha)(h_\mu(4)B_\varepsilon - h_\varepsilon(4)B_\mu), \tag{31.10}$$

где b, B_ε входят в уравнения Френе-Серре (30.58-30.62), записанные в пространстве Минковского. Так как триады переносятся по Ферми, то как известно из [20], их поле является той системой отсчета, которая позволяет обеспечить правильное релятивистское обобщение ньютоновского понятия "невращающейся системы отсчета". При поступательном движении элемент среды не поворачивается относительно осей переносимых по Ферми вдоль мировых линий.

Всякому вектору dy^k, соединяющему на некоторой гиперповерхности $y^4 = \text{const}$ две соседние мировые линии, ставится в соответствие вектор $dx(k) = h_\mu(k)dx_\mu$, соединяющий эти же мировые линии. Координаты $x(\alpha)$ в отличие от y^α, x_α являются неголономными. Этими координатами можно пользоваться только локально (в бесконечно малой окрестности каждой точки). В отличие от произвольных криволинейных координат y^α, неголономные координаты сохраняют обычный метрический смысл, в то время как произвольные криволинейные координаты y^α его теряют. Поэтому все результаты, полученные в произвольных координатах, прежде чем сравнивать с опытом, необходимо выразить в локальной (связанной с наблюдателем) ортогональной системе координат. Так как локальные ортогональные преобразования столь важны, то естественно возникает вопрос, нельзя ли их сделать голономными?

Условия ортогональности

$$h_\mu(\alpha)h_\mu(\beta) = \delta(\alpha\beta)$$

и условия голономности

$$h_\mu(\alpha) = \frac{\partial x(\alpha)}{\partial x_\mu},$$

вытекающие из равенства нулю объекта неголономности (30.10), дают систему десяти дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x(\alpha)}{\partial x_\mu}\frac{\partial x(\beta)}{\partial x_\mu} = \delta(\alpha\beta),$$

которым должны удовлетворять четыре функции $x(\alpha) = f_\alpha(x_\mu)$. Ясно, что это в общем случае невозможно.

Перейдем к рассмотрению деформаций, которые возникают при движении среды под действием сил. Наш "релятивистский"подход по форме и содержанию почти полностью эквивалентен классическому подходу, развиваемому в широко известной монографии Л.И. Седова [44]. Отличие нашего подхода от классического состоит в замене начального и актуального состояния среды на начальные и актуальные гиперповерхности, ортогональные мировым линиям частиц среды. Таким образом, "релятивизм"проявляется в замене ньютоновского времени t на параметр y^4/ic, нумерующий ортогональные мировым линиям гиперповерхности.

Рассмотрим произвольные перемещения среды. Пусть $\{O, x_\mu\}$ координаты событий различных точек континуума. Отметим четыре основные системы координат, которыми будем пользоваться.

1. Система $\{O, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ с векторным базисом h_μ (30.2), (30.38), $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, $x_4 = ict$, $-dS^2 = \delta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ выбирается как система отсчета, в которой определяется перемещение или движение. (Назовем ее системой наблюдателя).

2. Лагранжева система $\{M, y^k, \dot{y}^4\}$ с векторами базиса

$$\frac{\partial \vec{r}_0}{\partial y^k} = \vec{\dot{h}}_k, \quad \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \dot{y}^4} = \vec{\dot{h}}_4, \tag{31.11}$$

отвечающая положениям точек среды на некоторой начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 =$ const. В этой системе образы подвижных точек фиксированы. 4-радиус-вектор $\vec{r}_0$ соединяет начало координат СО с начальными координатами точек движущейся среды.

3. Лагранжева сопутствующая система $\{M, y^\alpha$ с векторами базиса

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y^\alpha} = \vec{\hat{h}}_\alpha, \tag{31.12}$$

отвечающая измененным положениям точек среды на рассматриваемой (актуальной) гиперповерхности y^4.

4. Эйлерова сопутствующая система, представляющая собой систему тетрад $h_\mu(\alpha)$, переносимых по Ферми-Уолкеру.

Как известно из классической механики сплошной среды [44], при изучении конечных перемещений необходимо пользоваться самым общим видом криволинейных координат. Однако для простоты базисы системы 1 $\vec{h}_\mu$ и системы 4 $\vec{h}(\alpha)$ можно фиксировать по выбору, в то время как базисы лагранжевых систем 2 $\vec{\dot{h}}_k$ и 3 $\vec{\hat{h}}_k$ не могут выбираться произвольно, так как они связаны друг с другом через свойства перемещения.

Рассмотрим две бесконечно близкие мировые линии движущегося континуума на некоторой произвольной, но фиксированной гиперповерхности $y^4 =$ const: $M(y^1, y^2, y^3, y^4)$ и $M'(y^1 + dy^1, y^2 + dy^2, y^3 + dy^3, y^4)$. Пусть на начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 =$ const положение точки M' по отношению к точке M определено бесконечно малым вектором $d\vec{r}_0$, а на гиперповерхности y^4 (в силу непрерывности) бесконечно малым вектором $d\vec{r}$. Из определения базисов (31.11) и (31.12) имеем

$$d\vec{r}_0 = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial y^k} dy^k = \vec{\dot{h}}_k dy^k, \quad d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^k} dy^k = \vec{\hat{h}}_k dy^k. \tag{31.13}$$

Для начального и деформированного состояния получаем

$$dl_0^2 = (d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0) = (\vec{\dot{h}}_k \cdot \vec{\dot{h}}_l) dy^k dy^l = \dot{g}_{kl} dy^k dy^l,$$

$$\dot{g}_{kl} = (\vec{\dot{h}}_k \cdot \vec{\dot{h}}_l) = \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial y^k} \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial y^l}, \quad \dot{x}_\mu = \dot{x}_\mu(y^k, \dot{y}^4) \tag{31.14}$$

$$dl^2 = (d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = (\vec{\hat{h}}_k \cdot \vec{\hat{h}}_l) dy^k dy^l = \hat{g}_{kl} dy^k dy^l,$$

$$\hat{g}_{kl} = (\vec{\hat{h}}_k \cdot \vec{\hat{h}}_l) = \frac{\partial x_\mu}{\partial y^k} \frac{\partial x_\mu}{\partial y^l}, \quad x_\mu = x_\mu(y^k, y^4) \tag{31.15}$$

Деформацию удобно определить следующим образом

$$dl^2 - dl_0^2 = (\hat{g}_{kl} - \dot{g}_{kl}) dy^k dy^l = 2u_{kl} dy^k dy^l, \tag{31.16}$$

где

$$u_{kl} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{kl} - \dot{g}_{kl}). \tag{31.17}$$

Здесь $\hat{g}_{kl}$ - метрический тензор на гиперповерхности $y^4 = \text{const}$, $\dot{g}_{kl}$ - метрический тензор на начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 = \text{const}$. u_{kl} можно рассматривать как ковариантные компоненты тензора относительно лагранжевых переменных y^k на фиксированных актуальной или начальной гиперповерхностях. Коэффициенты матрицы u_{kl} являются скалярными функциями относительно преобразований Лоренца. Так как закон движения (31.6) известен, а лагранжевы параметры y^α - голономны, то разрешив систему (31.6) относительно y^α, получим

$$y^\alpha = y^\alpha(x_\mu). \tag{31.18}$$

Воспользовавшись (31.6) и (31.18), представим тензоры деформаций (31.17), отнесенными к лагранжевой сопутствующей системе координат и к начальной гиперповерхности соответственно

$$\hat{u}_{kl} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial x_\mu}{\partial y^k}\frac{\partial x_\mu}{\partial y^l} - \dot{g}_{kl}\Big), \tag{31.19}$$

$$\dot{u}_{kl} = \frac{1}{2}\Big(\hat{g}_{kl} - \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial y^k}\frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial y^l}\Big). \tag{31.20}$$

Переходя от лагранжевой сопутствующей системы к системе наблюдателя, получим после несложных вычислений

$$U_{\mu\nu} = \hat{u}_{kl} h^k_\mu h^l_\nu = \frac{1}{2}\Big(g^*_{\mu\nu} - \dot{g}_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial x_\mu}\frac{\partial y^l}{\partial x_\nu}\Big), \tag{31.21}$$

$$g^*_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + V_\mu V_\nu \tag{31.22}$$

Тензор относительно глобальных преобразований Лоренца $g^*_{\mu\nu}$ совпадает с оператором проектирования или проекционным, введенным нами ранее в (10.67). Однако в силу выбранной нами в этом разделе нормировки 4-скорости и введенной метрики, в форме записи имеются непринципиальные различия. Рассмотрим более подробно свойства этого оператора.

$$g^*_{\mu\nu} V_\nu \equiv 0, \quad g^*_{\alpha_1\alpha_2} g^*_{\alpha_2\alpha_3} ... g^*_{\alpha_{n-1}\alpha_n} = g^*_{\alpha_1\alpha_n}. \tag{31.23}$$

В последнем соотношении по индексам $\alpha_2, ...\alpha_{n-1}$ произведено суммирование. Оператор проектирования проектирует любой 4-вектор F_μ на гиперповерхность, ортогональную мировым линиям. Действительно

$$g^*_{\mu\varepsilon} F_\mu = P_\varepsilon = F_\varepsilon + V_\varepsilon V_\mu F_\mu, \quad P_\varepsilon V_\varepsilon = F_\varepsilon V_\varepsilon - V_\mu F_\mu = 0. \tag{31.24}$$

От системы наблюдателя можно перейти к сопутствующим тетрадам, т.е. к сопутствующей системе Эйлера

$$U(\alpha\beta) = U_{\mu\nu} h_\mu(\alpha) h_\nu(\beta) \tag{31.25}$$

Из свойств проекционного оператора и постоянства лагранжевых координат y^k вдоль каждой из мировых линий частиц среды, т.е. из равенства

$$V_\mu \frac{\partial y^k}{\partial x_\mu} = \frac{dy^k}{dS} = 0$$

следует, что тензор $U_{\mu\nu}$ ортогонален 4-скорости V_ν. Отсюда в силу симметрии $U_{\mu\nu}$ имеет лишь шесть независимых компонент. Так же шесть независимых компонент имеет тензор в локальных тетрадах $U(\alpha\beta)$, поскольку $ih_\mu(4) = V_\mu$.

$$U(4k) = U(44) = 0, \quad U(ab) = \frac{1}{2}\Big(\delta(ab) - \dot{g}_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial x(a)}\frac{\partial y^l}{\partial x(b)}\Big). \tag{31.26}$$

Тензор $U(ab)$ в локальных тетрадах является аналогом тензора Альманси для конечных деформаций в нерелятивистском приближении [129]. Шесть независимых компонент $U(ab)$ представляют собой скалярные функции относительно преобразований Лоренца. Тензор Альманси $U_{\mu\nu}$ относительно лоренцевых преобразований, отнесенный к пространству Минковского, является релятивистским обобщением его классического выражения. Он содержит десять отличных от нуля компонент, из которых шесть независимых.

Наряду с тензором Альманси, введем в рассмотрение тензор Коши, который в локальных тетрадах имеет вид

$$(ab) = (\delta(ab) - 2U(ab)) = \dot{g}_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial x(a)}\frac{\partial y^l}{\partial x(b)}. \tag{31.27}$$

Переходя к пространству Минковского, получим

$${}_{\mu\nu} = h_\mu(a)h_\nu(b)(ab) = \dot{g}_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial x_\mu}\frac{\partial y^l}{\partial x_\nu} = g^*_{\mu\nu} - 2U_{\mu\nu}. \tag{31.28}$$

Тензор Коши в лагранжевой сопутствующей системе координат можно получить из (31.28), используя параметры Ламе (30.39)

$$\hat{C}_{mn} = h_{\mu n}h_{\nu m \mu\nu} = \dot{g}_{mn} = \frac{\partial x_\mu}{\partial y^n}\frac{\partial x_\mu}{\partial y^m} - 2\hat{u}_{mn}. \tag{31.29}$$

Из ортогональности тензора Коши (31.28) 4-скорости V_μ следует, что он так же имеет шесть независимых компонент.

Аналогичным образом, используя (31.20), получим выражения для различных тензоров деформаций, заданных на некоторой начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 = \text{const}$. А именно, если от лагранжевой начальной сопутствующей системы перейдем к начальной системе наблюдателя, то получим

$$\dot{U}_{\mu\nu} = \dot{u}_{kl}\dot{h}^k_\mu\dot{h}^l_\nu = -\frac{1}{2}\Big(\dot{g}^*_{\mu\nu} - \hat{g}_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial \dot{x}_\mu}\frac{\partial y^l}{\partial \dot{x}_\nu}\Big), \tag{31.30}$$

где $\dot{g}^*_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \dot{V}_\mu\dot{V}_\nu$ - проекционный оператор на начальной гиперповерхности. От начальной системы наблюдателя перейдем к начальным сопутствующим тетрадам , т.е. к начальной сопутствующей системе Эйлера.

$$\dot{U}(\alpha\beta) = \dot{U}_{\mu\nu}\dot{h}_\mu(\alpha)\dot{h}_\nu(\beta) \tag{31.31}$$

$$\dot{U}(4k) = \dot{U}(44) = 0, \quad U(ab) = -\frac{1}{2}\Big(\delta(ab) - \hat{g}_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial \dot{x}(a)}\frac{\partial y^l}{\partial \dot{x}(b)}\Big). \tag{31.32}$$

Наряду с тензором $\dot{U}(ab)$ введем в рассмотрение тензор Коши $\dot{C}(ab)$, определяемый как

$$\dot{}(ab) = (\delta(ab) + 2\dot{U}(ab)) = \hat{g}_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial \dot{x}(a)}\frac{\partial y^l}{\partial \dot{x}(b)}. \tag{31.33}$$

Переходя к пространству Минковского, получим

$$\dot{}_{\mu\nu} = \dot{h}_\mu(a)\dot{h}_\nu(b)\dot{}(ab) = \hat{g}_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial \dot{x}_\mu}\frac{\partial y^l}{\partial \dot{x}_\nu}. \tag{31.34}$$

Тензор Коши в начальной лагранжевой сопутствующей системе координат имеет вид

$$\dot{C}_{mn} = \dot{h}_{\mu n}\dot{h}_{\nu m}\dot{}_{\mu\nu} = \hat{g}_{mn} = 2\dot{u}_{mn} + \dot{g}_{mn}. \tag{31.35}$$

Тензоры, которые обратны тензорам Коши, носят название тензоров деформаций Фингера [129]. Тензоры Фингера в локальных тетрадах на начальной и актуальной гиперповерхностях определяются из условий

$$C(ab)B(bn) = \delta(an), \quad \dot{C}(ab)\dot{B}(bn) = \delta(an). \tag{31.36}$$

В частности, тензор Фингера на актуальной гиперповерхности имеет вид

$$B(ab) = \dot{g}^{kl}\frac{\partial x(a)}{\partial y^k}\frac{\partial x(b)}{\partial y^l} \tag{31.37}$$

$$B_{\mu\nu} = h_\mu(a)h_\nu(b)B(ab) = \dot{g}^{kl}\frac{\partial x_\mu}{\partial y^k}\frac{\partial x_\nu}{\partial y^l}. \tag{31.38}$$

Рассмотрим выражения для тензоров деформаций через компоненты 4-вектора перемещений. Если метрики начального и актуального состояния евклидовы, то можно ввести 4-вектор перемещения $\vec{u}$, определяемый как

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0, \tag{31.39}$$

где $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ - четырехмерные радиусы векторы в пространстве Минковского на начальной $\dot{y}^4$ и актуальной y^4 гиперповерхностях соответственно. ("Естественное"требование евклидовости начальных и актуальных метрик на наш взгляд является очень спорным. Если до включения силового поля среда покоилась в пространстве Минковского, то после включения силового поля (с нашей точки зрения) пространство-время перестало быть плоским. В плоском пространстве Минковского, как мы неоднократно подчеркивали, в принципе невозможно твердотельное движение в однородных силовых полях. Однако в этой главе мы работаем в рамках СТО, оставляя модернизацию релятивистской теории упругости до лучших времен.)

Дифференцируя (31.39) по y^k, используя (31.11), (31.12), получим

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial y^k} = \vec{\hat{h}}_k - \vec{\dot{h}}_k. \tag{31.40}$$

Раскладывая вектор $\vec{u}$ по базису $\vec{\hat{h}}_\mu$, имеем

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial y^k} = \vec{\hat{h}}_\mu\frac{\partial \hat{u}^\mu}{\partial y^k} + \hat{u}^\mu\frac{\partial \vec{\hat{h}}_\mu}{\partial y^k} =$$

$$= \left(\frac{\partial \hat{u}^\sigma}{\partial y^k} + \hat{u}^\mu \hat{\Gamma}^\sigma_{k\mu}\right)\vec{\hat{h}}_\sigma = \hat{\nabla}_k \hat{u}^\sigma \vec{\hat{h}}_\sigma. \tag{31.41}$$

При выводе последней формулы использовали (30.45). $\hat{\nabla}_k \hat{u}^\sigma$ - ковариантная производная по метрике $\hat{g}_{\mu\nu}$. Из (31.40), (31.41) и (31.17) имеем

$$u_{kl} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{kl} - \dot{g}_{kl}) = \frac{1}{2}(\vec{\hat{h}}_k \cdot \vec{\hat{h}}_l - \vec{\dot{h}}_k \cdot \vec{\dot{h}}_l) =$$

$$= \frac{1}{2}[\vec{\hat{h}}_k \cdot \vec{\hat{h}}_l - (\vec{\hat{h}}_k - \hat{\nabla}_k \hat{u}^\sigma \vec{\hat{h}}_\sigma) \cdot (\vec{\hat{h}}_l - \hat{\nabla}_l \hat{u}^\varepsilon \vec{\hat{h}}_\varepsilon)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\hat{\nabla}_k \hat{u}_l + \hat{\nabla}_l \hat{u}_k - \hat{\nabla}_k \hat{u}_\varepsilon \hat{\nabla}_l \hat{u}^\varepsilon]. \tag{31.42}$$

Раскладывая вектор $\vec{u}$ по базису $\vec{\dot{h}}_\mu$, получим аналогичное (31.42) выражение

$$u_{kl} = \frac{1}{2}[\dot{\nabla}_k \dot{u}_l + \dot{\nabla}_l \dot{u}_k + \dot{\nabla}_k \dot{u}_\varepsilon \dot{\nabla}_l \dot{u}^\varepsilon]. \tag{31.43}$$

Представляет интерес рассмотреть выражение для тензора деформаций u_{kl}, отнесенного к пространству Минковского.

$$U_{\mu\nu} = h^k_\mu h^l_\nu u_{kl} = \frac{1}{2}\frac{\partial y^k}{\partial x_\mu}\frac{\partial y^l}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y^k}\vec{\dot{h}}_l + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y^l}\vec{\dot{h}}_k - \frac{\partial \vec{u}}{\partial y^k}\frac{\partial \vec{u}}{\partial y^l}\right). \tag{31.44}$$

Для дальнейшего вычисления воспользуемся предварительными соотношениями

$$\frac{\partial y^k}{\partial x_\mu}\frac{\partial y^l}{\partial x_\nu}\frac{\partial \vec{u}}{\partial y^k}\vec{\dot{h}}_l = \frac{\partial y^k}{\partial x_\mu}\frac{\partial y^l}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^l}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y^k} =$$

$$= \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\mu} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y^4}\frac{\partial y^4}{\partial x_\mu}\right)\left(\delta_{\varepsilon\mu} - \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^4}\frac{\partial y^4}{\partial x_\nu}\right). \tag{31.45}$$

Рассмотрим равенство

$$\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x_\nu} = \delta_{\varepsilon\nu},$$

умножая обе части которого на V_ε, имеем

$$V_\varepsilon \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x_\nu} = V_\nu. \tag{31.46}$$

Так как V_ε ортогонален гиперповерхности y^4, а $\partial x_\varepsilon/\partial y^k$ касателен к ней, то имеет место условие ортогональности

$$V_\varepsilon \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^k} = 0. \tag{31.47}$$

Откуда (31.46) примет вид

$$V_\varepsilon \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^4}\frac{\partial y^4}{\partial x_\nu} = V_\nu. \tag{31.47}$$

Из (31.7) и (31.8) имеем

$$\frac{\partial y^4}{\partial x_\nu} = -\theta V_\nu. \tag{31.48}$$

Так как в качестве начального состояния выбрана недеформированная среда, отображаемая точками некоторой начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 = \mathrm{const}$, то

$$u_\varepsilon = x_\varepsilon(y^k, y^4) - \dot{x}_\varepsilon(y^k, \dot{y}^4), \tag{31.49}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y^4} = \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^4}, \tag{31.50}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial y^k}\frac{\partial \vec{u}}{\partial y^l}\frac{\partial y^k}{\partial x_\mu}\frac{\partial y^l}{\partial x_\nu} = \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\mu} + V_\varepsilon V_\mu\Big)\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\nu} + V_\varepsilon V_\nu\Big) \tag{31.51}$$

В результате находим

$$U_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\mu} g^*_{\varepsilon\nu} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\nu} g^*_{\varepsilon\mu} - \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\mu} + V_\varepsilon V_\mu\Big)\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\nu} + V_\varepsilon V_\nu\Big)\Big]. \tag{31.52}$$

Переход к сопутствующим тетрадам дает

$$U(\alpha\beta) = h_\mu(\alpha) h_\nu(\beta) U_{\mu\nu}, \quad U(a4) = U(44) = 0,$$

$$U(ab) = \frac{1}{2}\Big[\frac{{}^*Du(a)}{\partial x(b)} + \frac{{}^*Du(b)}{\partial x(a)} - \frac{{}^*Du(\varepsilon)}{\partial x(b)}\frac{{}^*Du(\varepsilon)}{\partial x(b)}\Big], \tag{31.53}$$

где ${}^*Du(b)$ - абсолютный дифференциал (30.14), ${}^*D/\partial x(a)$ - производная по направлению (30.17). Тензор $U(ab)$ есть тензор Альманси в локальных тетрадах, выраженный в компонентах вектора перемещения. Шесть независимых компонент этого тензора есть скалярные функции относительно преобразований Лоренца. Из ортогональности тензора Альманси 4-скорости следует, что

$$U_{a4} = i\frac{v_b}{c} U_{ab}, \quad U_{44} = -\frac{v_a v_b}{c^2} U_{ab}, \tag{31.54}$$

где для V_μ используется обычная форма записи

$$V_a = \frac{v_a}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad V_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Переход к нерелятивистскому пределу $V_a \to 0$, $V_4 \to i$ дает

$$U_{ab} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial u_a}{\partial x_b} + \frac{\partial u_b}{\partial x_a} - \frac{\partial u_k}{\partial x_a}\frac{\partial u_k}{\partial x_b}\Big], \quad U_{a4} = U_{44} = 0. \tag{31.55}$$

Здесь U_{ab} - классический тензор деформаций Альманси, выраженный через производные от вектора деформаций u_a.

Аналогичным способом, как и выше, от тензора u_{kl} можно перейти к начальной системе наблюдателя, что дает

$$\dot{U}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \dot{x}_\mu} \dot{g}^*_{\varepsilon\nu} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \dot{x}_\nu} \dot{g}^*_{\varepsilon\mu} + \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \dot{x}_\mu} + \dot{V}_\varepsilon \dot{V}_\mu\Big)\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \dot{x}_\nu} + \dot{V}_\varepsilon \dot{V}_\nu\Big)\Big]. \tag{31.56}$$

От начальной системы наблюдателя перейдем к начальным сопутствующим тетрадам

$$\dot{U}(\alpha\beta) = \dot{h}_\mu(\alpha) \dot{h}_\nu(\beta) \dot{U}_{\mu\nu}, \quad \dot{U}(a4) = \dot{U}(44) = 0,$$

$$\dot{U}(ab) = \frac{1}{2}\Big[\frac{^*Du(a)}{\partial \dot{x}(b)} + \frac{^*Du(b)}{\partial \dot{x}(a)} + \frac{^*Du(\varepsilon)}{\partial \dot{x}(b)}\frac{^*Du(\varepsilon)}{\partial \dot{x}(b)}\Big], \tag{31.57}$$

а затем к нерелятивистскому пределу

$$\dot{U}_{ab} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial u_a}{\partial \dot{x}_b} + \frac{\partial u_b}{\partial \dot{x}_a} + \frac{\partial u_k}{\partial \dot{x}_a}\frac{\partial u_k}{\partial \dot{x}_b}\Big], \quad \dot{U}_{a4} = \dot{U}_{44} = 0. \tag{31.58}$$

32. Геометрический смысл тензоров деформаций

Выясним геометрический смысл компонент тензора деформаций. Наше рассмотрение среды на гиперповерхностях, которые ортогональны мировым линиям частиц, подобно классическому рассмотрению в мгновенных состояниях. Тензоры деформаций в этом случае совпадают по форме с аналогичными тензорами классической механики сплошной среды. Поэтому для выяснения геометрического и механического смысла тензоров деформаций будем следовать методам Л.И. Седова [44] и В. Прагера [129]. Рассмотрим компоненты u_{kl} из (31.17)

$$\hat{g}_{kl} = \vec{\hat{h}}_k \cdot \vec{\hat{h}}_l = |\vec{\hat{h}}_k||\vec{\hat{h}}_l| \cos\hat{\psi}_{kl}, \quad \dot{g}_{kl} = \vec{\dot{h}}_k \cdot \vec{\dot{h}}_l = |\vec{\dot{h}}_k||\vec{\dot{h}}_l| \cos\dot{\psi}_{kl}, \tag{32.1}$$

где $\hat{\psi}_{kl}$ - углы между векторами $\vec{\hat{h}}_k$ и $\vec{\hat{h}}_l$, $\dot{\psi}_{kl}$ - углы между $\vec{\dot{h}}_k$ и $\vec{\dot{h}}_l$.

Найдем отношение

$$\frac{|\vec{\hat{h}}_k|}{|\vec{\dot{h}}_k|} = \frac{|\vec{\hat{h}}_k| dy^k}{|\vec{\dot{h}}_k| dy^k} = \frac{|d\vec{r}_k|}{|d\vec{r}_{0k}|} = \frac{dl_k}{dl_{0k}} = L_k + 1, \tag{32.2}$$

где dl_k и dl_{0k} - элементы дуг координатных линий y^k, а суммирование по k отсутствует. L_k - коэффициенты относительных удлинений в направлениях y^k, определяемые соотношениями

$$L_k = \frac{dl_k - dl_{0k}}{dl_{0k}}. \tag{32.3}$$

Из проделанных выкладок следует, что тензор u_{kl} представим в виде

$$2u_{kl} = [(1 + L_k)(1 + L_l) \cos\hat{\psi}_{kl} - \cos\dot{\psi}_{kl}]|\vec{\dot{h}}_k||\vec{\dot{h}}_l|. \tag{32.4}$$

Если индексы у u_{kl} одинаковы, то

$$2u_{ii} = [(1 + L_i)^2 - 1]\dot{g}_{ii}. \tag{32.5}$$

$$L_i = \sqrt{1 + \frac{2u_{ii}}{\dot{g}_{ii}}} - 1. \tag{32.6}$$

Если поле 4-скорости $\dot{V}_\mu$ на начальной гиперповерхности $\dot{y}^4$ постоянно, то сопутствующую систему в начальном состоянии можно взять декартовой, т.е. $\dot{g}_{kl} = \delta_{kl}$. (Как будет показано далее, при неоднородном поле начальных скоростей начальная трехмерная гиперповерхность будет риманова даже в СТО, и начальные декартовы координаты можно вводить лишь локально.) Если деформации малы, то, раскладывая (32.6) в ряд, имеем

$$L_i = u_{ii}, \tag{32.7}$$

т.е. ковариантные компоненты тензора деформаций с одинаковыми индексами в случае бесконечно малых деформаций совпадают с коэффициентами относительных удлинений вдоль декартовых осей координат на начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 = \text{const}$. Рассмотрим u_{kl} при $k \neq l$. Ради простоты на начальной гиперповерхности выберем в данной точке такую систему координат, в которой $\vec{\dot{h}}_k$ взаимно ортогональны, т.е. $\dot{\psi}_{kl} = \pi/2$. Полагая

$$\hat{\psi}_{ij} = \frac{\pi}{2} - \chi_{ij},$$

получим из (31.17) и (32.1)

$$2u_{kl} = |\vec{\dot{h}}_k||\vec{\dot{h}}_l| \sin \chi_{kl} \tag{32.8}$$

или

$$\sin \chi_{kl} = \frac{2u_{kl}}{\sqrt{\hat{g}_{kk}\hat{g}_{ll}}}. \tag{32.9}$$

Отсюда видно, что в общем случае углы, бывшие на начальной гиперповерхности прямыми, после деформации перестают быть прямыми, и ковариантные компоненты u_{kl} при $k \neq l$ характеризуют изменение первоначально прямого координатного угла.

Для выяснения геометрического смысла тензора деформаций Альманси $U(ab)$ в локальных тетрадах (31.26) воспользуемся соотношением

$$dx(i)\delta x(j) - \dot{g}_{kl}dy^k\delta y^l = 2U(jk)dx(j)\delta x(k). \tag{32.10}$$

Смысл этого соотношения состоит в следующем: Рассмотрим движение некоторой частицы среды P. Пусть $ABPP'$ и $ABPP''$ два исходящих из точки вектора, указывающих на соседние частицы. Пусть на некоторой актуальной гиперповерхности $y^4 = \text{const}$ векторы $ABPP'$ и $ABPP''$ имеют компоненты $dx(i)$ и $\delta x(i)$ соответственно. На начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 = \text{const}$ их компоненты задаются в виде dy^i и δy^i. Если окрестность рассматриваемой частицы не претерпевает деформации, то треугольник $PP'P''$ имеет на актуальной гиперповерхности ту же самую форму, что и на начальной. Тогда левая часть равенства (32.10) обращается в нуль при любом выборе частиц P' и P'' в окрестности частицы P. Таким образом, при отсутствии деформаций симметричный тензор $U(jk)$ обращается в нуль.

Обозначим длины материальных элементов $ABPP'$ и $ABPP''$ на актуальной гиперповерхности через dl и δl соответственно, а на начальной - dl_0 и δl_0. Введем в актуальном состоянии единичные векторы $n(i)$ и $\nu(i)$ вдоль $ABPP'$ и $ABPP''$ соответственно, так чтобы выполнялись равенства.

$$dx(i) = n(i)dl, \quad \delta x(i) = \nu(i)\delta l. \tag{32.11}$$

Из (32.10) и (32.11) после сокращения на $dl\delta l$ имеем

$$\cos\theta - \frac{dl_0}{dl}\frac{\delta l_0}{\delta l}\cos\dot{\theta} = 2U(ij)n(i)\nu(j). \tag{32.12}$$

Если, в частности, частица P'' совпадает с P', то последнее соотношение примет вид

$$1 - \left(\frac{dl_0}{dl}\right)^2 = 2U(ij)n(i)n(j). \tag{32.13}$$

Отношение dl/dl_0 назовем коэффициентом длины и обозначим как

$$\frac{dl}{dl_0} = \lambda^{(n)} = L + 1, \tag{32.14}$$

где L - коэффициент относительного удлинения. Из (32.13) находим

$$\lambda^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2U(ij)n(i)n(j)}}. \tag{32.14}$$

Линейные элементы, которые на актуальной гиперповерхности совпадают с тетрадными векторами $h(k)$, имеют следующие коэффициенты длин:

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2U(11)}}, \quad \lambda^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2U(22)}} \quad \lambda^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2U(33)}}. \tag{32.15}$$

Рассмотрим линейные элементы $ABPP'$ и $ABPP''$, которые на актуальной гиперповерхности ортогональны друг другу.

$$-\frac{dl_0}{dl}\frac{\delta l_0}{\delta l}\cos\dot{\theta} = 2U(ij)n(i)\nu(j). \tag{32.16}$$

Введя

$$\omega^{(jk)} = -\left(\frac{\pi}{2} - \dot{\theta}\right)$$

как уменьшение угла на начальной гиперповерхности между двумя линейными элементами $ABPP'$ и $ABPP''$, которые на актуальной гиперповерхности ортогональны друг другу, получим

$$\omega^{(jk)} = \arcsin(2\lambda^{(j)}\lambda^{(k)}U(jk)n(j)\nu(k)). \tag{32.17}$$

В частности, если направление линейных элементов на актуальной гиперповерхности совпадает с направлением тетрадных векторов $\vec{h}(1)$, $\vec{h}(2)$, то уменьшение угла определяется равенством

$$\omega^{(12)} = \arcsin(2\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}U(12)). \tag{32.18}$$

При бесконечно малом деформировании из начального состояния имеем

$$\lambda^{(n)} = 1 + 2U(nn), \quad \omega^{(12)} = 2U(12). \tag{32.19}$$

где суммирование по n отсутствует.

Для выяснения геометрического смысла тензора деформаций $\dot{U}(ab)$ воспользуемся соотношением

$$\hat{g}_{kl}dy^k\delta y^l - d\dot{x}(i)\delta\dot{x}(j) = 2\dot{U}(jk)d\dot{x}(j)\delta\dot{x}(k), \tag{32.20}$$

где $\hat{g}_{kl}dy^k\delta y^l$ - скалярное произведение векторов $ABPP'$ и $ABPP''$ на некоторой актуальной гиперповерхности $y^4 = \mathrm{const}$, а $d\dot{x}(i)\delta\dot{x}(i)$ скалярное произведение этих векторов на начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 = \mathrm{const}$ в сопутствующей системе Эйлера.

Обозначим длины материальных элементов $ABPP'$ и $ABPP''$ на начальной гиперповерхности через $d\dot{l}$ и $\delta\dot{l}$ соответственно, а на актуальной - dl и δl. Введем в начальном состоянии единичные векторы $\dot{n}(i)$ и $\dot{\nu}(i)$ вдоль $ABPP'$ и $ABPP''$ соответственно, так чтобы выполнялись равенства.

$$d\dot{x}(i) = \dot{n}(i)d\dot{l}, \quad \delta\dot{x}(i) = \dot{\nu}(i)\delta\dot{l}, \quad d\dot{l} = dl_0. \tag{32.21}$$

Из (32.20) и (32.21) после сокращения на $dl_0\delta l_0$ имеем

$$\frac{dl}{dl_0}\frac{\delta l}{\delta l_0}\cos\theta - \cos\dot{\theta} = 2\dot{U}(ij)\dot{n}(i)\dot{\nu}(j). \tag{32.22}$$

Если, в частности, частица P'' совпадает с P', то последнее соотношение примет вид

$$\left(\frac{dl}{dl_0}\right)^2 = 1 + 2\dot{U}(ij)\dot{n}(i)\dot{n}(j). \tag{32.23}$$

Для коэффициентов длины $\dot{\lambda}^{(n)}$ находим

$$\dot{\lambda}^{(n)} = \sqrt{1 + 2\dot{U}(ij)\dot{n}(i)\dot{n}(j)}. \tag{32.24}$$

Первоначально прямой угол между линейными элементами $ABPP'$ и $ABPP''$, которые на начальной гиперповерхности были ортогональны друг другу и совпадали с направлениями $\vec{\dot{h}}(1)$ и $\vec{\dot{h}}(2)$, уменьшится на величину

$$\dot{\omega}^{(12)} = \arcsin\left(\frac{2\dot{U}(12)}{\dot{\lambda}^{(1)}\dot{\lambda}^{(2)}}\right). \tag{32.25}$$

Таким образом, $\dot{U}(jk)$ в локальных тетрадах в точности совпадает с тензором деформаций Грина в классической механике сплошной среды, вводимом в декартовых координатах. Так как все тензоры в локальных тетрадах совпадают по форме с аналогичными тензорами в классической механике сплошных сред, то они имеют тот же самый геометрический и механический смысл, что и при классическом рассмотрении. Поэтому мы ограничились лишь кратким рассмотрением геометрических свойств различных тензоров деформаций. Отметим, что при отсутствии деформаций в среде тензоры Альманси и Грина обращаются в нуль, в то время как тензоры Коши и Фингера имеют вид

$$C(ab) = B(ab) = \dot{C}(ab) = \dot{B}(ab) = \delta(ab), \tag{32.26}$$

который в пространстве Минковского сводится к выражениям

$$C_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} = g^*_{\mu\nu}, \quad \dot{C}_{\mu\nu} = \dot{B}_{\mu\nu} = \dot{g}^*_{\mu\nu}. \tag{32.27}$$

Таким образом, при отсутствии деформаций тензоры Коши и Фингера в пространстве Минковского совпадают с операторами проектирования, задающими пространственную метрику на ортогональных мировым линиям частиц среды гиперповерхностях – актуальной и начальной соответственно.

33. Геометрия ортогональных мировым линиям гиперповерхностей и уравнения совместности деформаций

Компоненты тензора деформаций в общем случае определяются в согласии с соотношением (31.17). С другой стороны, в пространстве Минковского шесть независимых компонент u_{kl} определяются через производные только четырех функций 4-вектора перемещения u_μ. Поэтому u_{kl} должны удовлетворять определенным уравнениям, которые называются уравнениями совместности деформаций и являются условиями интегрируемости. Следуя работам [25], [130], остановимся на основных соотношениях теории гиперповерхностей в применении к сплошным средам, считая по определению, что вмещающее пространство-время является пространством Минковского, т.е. имеет место тождество

$$R_{\mu\nu,\varepsilon\sigma} \equiv 0, \tag{33.1}$$

где $R_{\mu\nu,\varepsilon\sigma}$ - тензор кривизны Римана-Кристоффеля.

Уравнения конгруенций мировых линий частиц сплошной среды для голономных лагранжевых координат принимают вид

$$x_\mu = x_\mu(y^\alpha). \tag{31.6}$$

При фиксированном значении y^4 эти уравнения представляют собой уравнения гиперповерхности ${}^*V_3$, ортогональной мировым линиям. Метрический тензор на ${}^*V_3$ имеет вид

$$\hat{g}_{kl} = \frac{\partial x_\mu}{\partial y^k}\frac{\partial x_\mu}{\partial y^l}. \tag{33.2}$$

В каждой точке M на ${}^*V_3$ строим репер, состоящий из четырех векторов (30.39)

$$h_{\mu k} = \frac{\partial x_\mu}{\partial y^k}, \quad V_\mu = \theta\frac{\partial x_\mu}{\partial y^4}. \tag{33.3}$$

Репер (33.3) носит название сопровождающего репера гиперповерхности [25], для которого имеют место следующие деривационные формулы, выражающие абсолютные производные от смешанных тензоров $h_{\mu k}$, V_μ через сами эти тензоры, а именно:

$${}^*\hat{\nabla}_k h_{\mu l} = b_{kl}V_\mu, \quad {}^*\hat{\nabla}_k V_\mu = b^l_k h_{\mu l}, \tag{33.4}$$

где ${}^*\hat{\nabla}_k$ абсолютная производная на ${}^*V_3$, коэффициенты связности ${}^*\hat{\Gamma}^n_{kl}$ вычисляются на ${}^*V_3$, исходя из метрического тензора $\hat{g}_{kl}$. Если вмещающее пространство риманово, то

$${}^*\hat{\nabla}_k \xi^\mu_l = \frac{\partial \xi^\mu_l}{\partial y^k} + h^\varepsilon_k \Gamma^\mu_{\varepsilon\nu}\xi^\nu_l - {}^*\hat{\Gamma}^n_{kl}\xi^\mu_n. \tag{33.5}$$

Для нашего случая $h^\varepsilon_k = h_{\varepsilon k}$, $\Gamma^\mu_{\varepsilon\nu} = 0$, так как во вмещающем евклидовом пространстве выбраны декартовы координаты. Поэтому

$${}^*\hat{\nabla}_k h_{\mu l} = \frac{\partial h_{\mu l}}{\partial y^k} - {}^*\hat{\Gamma}^n_{kl}h_{\mu n}. \tag{33.6}$$

Более того, для любого тензора, отнесенного к пространству Минковского, имеет место соотношение

$${}^*\hat{\nabla}_k T_{\mu_1\ldots\mu_n} = \frac{\partial T_{\mu_1\ldots\mu_n}}{\partial y^k}. \tag{33.7}$$

В формуле (33.4) тензор $b_{kl} = b_{lk}$ называется вторым основным тензором гиперповерхности $^*V_3$ (считая, что первый тензор - метрический тензор $\hat{g}_{kl}$), а отвечающую ему инвариантную квадратичную форму

$$b_{kl}dy^k dy^l,$$

называем второй квадратичной формой на $^*V_3$. Симметрия b_{kl} вытекает из очевидного соотношения

$$^*\hat{\nabla}_k h_{\mu l} =^* \hat{\nabla}_l h_{\mu k}. \tag{33.8}$$

Если рассматривать деривационные формулы как систему дифференциальных уравнений относительно $h_{\mu k}(y^l)$, $V_\mu(y^l)$, считая их неизвестными функциями, то как условия интегрируемости этой системы получаются уравнения

$$^*\hat{R}_{ik,lm} = -(b_{il}b_{km} - b_{kl}b_{im}), \tag{33.9}$$

$$^*\hat{\nabla}_k b_{lm} =^* \hat{\nabla}_l b_{km}, \tag{33.10}$$

первые из которых называются уравнениями Гаусса, а вторые - уравнениями Петерсона-Кодацци [25]. Уравнения Гаусса представляют собой весьма важные соотношения, связывающие первый и второй основные тензоры на гиперповерхности $^*V_3$. Однако первый тензор на $^*V_3$ входит в уравнение Гаусса через тензор кривизны.

Используя деривационные формулы и принятую нами кинематику, постараемся найти более простые соотношения, связывающие основные тензоры.

Из (33.4) после умножения на V_μ имеем

$$-V_\mu {}^*\hat{\nabla}_k h_{\mu l} = b_{kl}. \tag{33.11}$$

Переставляя индексы k и l, получим

$$b_{lk} + b_{kl} = -V_\mu({}^*\hat{\nabla}_k h_{\mu l} + {}^*\hat{\nabla}_l h_{\mu k}) = 2b_{kl}, \tag{33.12}$$

т.е.

$$b_{kl} = -\frac{1}{2}V_\mu({}^*\hat{\nabla}_k h_{\mu l} + {}^*\hat{\nabla}_l h_{\mu k}). \tag{33.13}$$

Так как V_μ ортогонален гиперповерхности, то

$$V_\mu h_{\mu l} = 0. \tag{33.14}$$

Беря абсолютную производную от $^*\hat{\nabla}_k(V_\mu h_{\mu l})$, получим с учетом (33.7)

$$V_\mu {}^*\hat{\nabla}_k h_{\mu l} = -h_{\mu l}\frac{\partial V_\mu}{\partial y^k}. \tag{33.15}$$

Учитывая (33.13) и (33.15), получим

$$b_{kl} = \frac{1}{2}\Big(h_{\mu l}\frac{\partial V_\mu}{\partial y^k} + h_{\mu k}\frac{\partial V_\mu}{\partial y^l}\Big). \tag{33.16}$$

Учтя (33.14) и (31.7), находим

$$b_{kl} = \frac{1}{2}\Big[\theta\frac{\partial}{\partial y^4}(h_{\mu l}h_{\mu k})\Big]. \tag{33.16}$$

Так как $h_{\mu l} h_{\mu k} = \hat{g}_{kl} = \hat{g}_{lk}$, а

$$\theta \frac{\partial}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial s}, \tag{33.17}$$

где s - интервал вдоль мировой линии, то окончательно имеем

$$b_{kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial s}. \tag{33.18}$$

Формула (33.18) устанавливает простую взаимосвязь между первым и вторым основными тензорами на актуальной гиперповерхности. Уравнения Гаусса (33.9) с использованием (33.18) сводятся к виду

$$^*\hat{R}_{ik,lm} = -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial s}\frac{\partial \hat{g}_{im}}{\partial s} - \frac{\partial \hat{g}_{il}}{\partial s}\frac{\partial \hat{g}_{km}}{\partial s}\Big), \tag{33.19}$$

а уравнения Петерсона-Кодацци дают

$$^*\hat{\nabla}_k \frac{\partial \hat{g}_{lm}}{\partial s} = {}^*\hat{\nabla}_l \frac{\partial \hat{g}_{km}}{\partial s}. \tag{33.20}$$

Очень примечательным является тот факт, что уравнения Гаусса (33.19) представляют собой систему из шести независимых дифференциальных уравнений для определения шести компонент метрического тензора $\hat{g}_{kl}$. Все формулы в этом параграфе получены для актуальной гиперповерхности. Очевидно, что точно такие же соотношения будут иметь место и для начальной гиперповерхности с метрическим тензором $\dot{g}_{kl}$. Для их получения необходимо лишь сделать замену всех актуальных тензоров на начальные. В частности, уравнения Гаусса на начальной гиперповерхности будут иметь вид

$$^*\dot{\hat{R}}_{ik,lm} = -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial \dot{\hat{g}}_{kl}}{\partial \dot{s}}\frac{\partial \dot{\hat{g}}_{im}}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial \dot{\hat{g}}_{il}}{\partial \dot{s}}\frac{\partial \dot{\hat{g}}_{km}}{\partial \dot{s}}\Big), \tag{33.21}$$

Рассмотрим нерелятивистское приближение. Так как

$$V_\varepsilon \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^k} = 0,$$

то

$$\frac{\partial x_4}{\partial y^k} = -\frac{V_a}{V_4}\frac{\partial x_a}{\partial y^k}.$$

Поэтому

$$\hat{g}_{kl} = \frac{\partial x_a}{\partial y^k}\frac{\partial x_b}{\partial y^l}\Big(\delta_{ab} + \frac{V_a V_b}{V_4^2}\Big). \tag{33.22}$$

При нерелятивистском рассмотрении $V_a \to 0$, $V_4 \to i$, $ds \to cdt$, $c \to \infty$, что дает

$$\hat{g}_{kl} = \frac{\partial x_a}{\partial y^k}\frac{\partial x_a}{\partial y^l}, \tag{33.23}$$

$$^*\hat{R}_{ik,lm} = 0, \quad ^*\dot{\hat{R}}_{ik,lm} = 0. \tag{33.24}$$

Таким образом, уравнения Гаусса для актуального и начального состояний представимы в форме (32.24) и являются уравнениями совместности деформаций при классическом рассмотрении. При релятивистском рассмотрении уравнениями совместности деформаций являются уравнения (33.19) и (33.21). Выпишем эти уравнения в развернутом виде. Пусть решением уравнений (33.21) являются функции

$$\dot{g}_{kl} = \dot{g}_{kl}(y^k, y^4). \tag{33.25}$$

Тогда из (31.17) имеем

$$\hat{g}_{kl} = \dot{g}_{kl} + 2u_{kl}. \tag{33.26}$$

Левую часть уравнений (33.19) представим в следующей известной форме [25]

$$\begin{gathered} {}^*\hat{R}_{ik,lm} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 \hat{g}_{im}}{\partial y^k \partial y^l} - \frac{\partial^2 \hat{g}_{il}}{\partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial^2 \hat{g}_{km}}{\partial y^i \partial y^l} + \frac{\partial^2 \hat{g}_{kl}}{\partial y^i \partial y^m}\Big) + \\ + \hat{g}^{pq}\Big({}^*\hat{\Gamma}_{qlk}{}^*\hat{\Gamma}_{pmi} - {}^*\hat{\Gamma}_{qli}{}^*\hat{\Gamma}_{pmk}\Big), \\ {}^*\hat{\Gamma}_{naj} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial \hat{g}_{an}}{\partial y^j} + \frac{\partial \hat{g}_{jn}}{\partial y^a} - \frac{\partial \hat{g}_{aj}}{\partial y^n}\Big]. \end{gathered} \tag{33.27}$$

Если в (33.27) подставить (33.26), то так как начальные функции $\dot{g}_{kl}$ известны, то получим уравнение относительно функций u_{kl}. При этом компоненты $\hat{g}^{pq}$ определяются как элементы матрицы, обратной матрице с компонентами $\hat{g}_{pq}$

$$||\hat{g}^{pq}|| = ||\dot{g}_{pq} + 2u_{pq}||^{-1}. \tag{33.27}$$

Если на начальной гиперповерхности выбрать $\dot{g}_{kl} = \mathrm{const}$, то уравнения (33.19) примут вид

$$\begin{gathered} \Big(\frac{\partial^2 u_{im}}{\partial y^k \partial y^l} - \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial y^i \partial y^l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial y^i \partial y^m}\Big) + \\ + \hat{g}^{pq}\Big(G_{qlk} h G_{pmi} - G_{qli} G_{pmk}\Big) = \Big(\frac{\partial u_{kl}}{\partial s}\frac{\partial u_{im}}{\partial s} - \frac{\partial u_{il}}{\partial s}\frac{\partial u_{km}}{\partial s}\Big), \\ G_{naj} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial u_{an}}{\partial y^j} + \frac{\partial u_{jn}}{\partial y^a} - \frac{\partial u_{aj}}{\partial y^n}\Big]. \end{gathered} \tag{33.28}$$

В нерелятивистском приближении правая часть (33.28) обращается в нуль и получаются известные классические уравнения совместности [44]. В случае бесконечно малых деформаций, пренебрегая величинами второго порядка малости, получаем следующие релятивистские уравнения совместности

$$\Big(\frac{\partial^2 u_{im}}{\partial y^k \partial y^l} - \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial y^i \partial y^l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial y^i \partial y^m}\Big) = \Big(\frac{\partial u_{kl}}{\partial s}\frac{\partial u_{im}}{\partial s} - \frac{\partial u_{il}}{\partial s}\frac{\partial u_{km}}{\partial s}\Big). \tag{33.29}$$

В случае бесконечно малых деформаций в тензоре u_{kl} (31.42) и (31.43) можно отбросить квадратичные члены второго порядка малости, что дает

$$u_{kl} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{kl} - \dot{g}_{kl}) = \frac{1}{2}[\hat{\nabla}_k \hat{u}_l + \hat{\nabla}_l \hat{u}_k] = \frac{1}{2}[\dot{\nabla}_k \dot{u}_l + \dot{\nabla}_l \dot{u}_k]. \tag{33.30}$$

В нерелятивистском приближении уравнения совместности (33.29) приобретают вид

$$\Big(\frac{\partial^2 u_{im}}{\partial y^k \partial y^l} - \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial y^i \partial y^l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial y^i \partial y^m}\Big) = 0 \tag{33.31}$$

и носят название уравнений совместности Сен-Венана [44]. Как показано в [44], тензор деформаций u_{kl} в представлении конечных перемещений (33.30) обращает уравнения Сен-Венана в тождество. В релятивистском случае, развиваемом нами, вместо уравнений Сен-Венана используются уравнения (33.29), которые отличаются от уравнений (33.31) ненулевой правой частью. Так как для случая бесконечно малых деформаций тензоры деформаций (33.30) внешне совпадают с их классическим аналогом, то, как кажется на первый взгляд, мы пришли к противоречию при релятивистском рассмотрении. Ведь при подстановке (33.30) в (33.29) мы должны получить слева 0 в силу справедливости уравнения Сен-Венана, а справа - в общем случае величину отличную от нуля. Однако это противоречие является только кажущимся. Дело в том, что при классическом рассмотрении ковариантные производные в (33.30) вычисляются с помощью трехмерного метрического тензора и соответствующих трехмерных символов Кристоффеля в лагранжевой сопутствующей актуальной (или начальной) системе координат, в то время как при релятивистском рассмотрении пространственные ковариантные производные в (33.30) вычисляются с использованием четырехмерного метрического тензора $\hat{g}_{\mu\nu}$. Это видно из вывода (31.42) и (31.43). Таким образом, "релятивизм"проявляется в "раскрытии"ковариантных производных.

34. Тензоры скоростей деформаций и их связь с тензорами деформаций и тензором кривизны

В предыдущем разделе при выводе тензоров деформаций мы не интересовались историей возникновения деформаций в среде, а лишь констатировали факт присутствия или отсутствия их. Особый интерес представляет описание процесса возникновения деформаций в среде. Займемся построением кинематики континуума.

Из соотношений (31.28), (31.29) и ортогональности тензора деформаций Коши 4-скорости V_μ следует равенство

$$\dot{g}_{kl}dy^k dy^l = C_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial y^\varepsilon}\frac{\partial x_\nu}{\partial y^\sigma}dy^\varepsilon dy^\sigma = C_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial y^k}\frac{\partial x_\nu}{\partial y^l}dy^k dy^l. \tag{34.1}$$

Дифференцируя обе части равенства по y^4 и считая, что равенство справедливо при произвольных dy^k, получим

$$\frac{\partial}{\partial y^4}\Big(C_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^l}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^j}\Big) = \frac{\partial \dot{g}_{lj}}{\partial y^4}. \tag{34.2}$$

Если $\dot{g}_{kl}$ не зависит от y^4, т.е. начальное состояние фиксировано, то имеет место следующее утверждение:

Если якобиан преобразования $\det||I_{\alpha,\varepsilon}||$ *от координат* x_α *к координатам* y^ε *отличен от нуля, то при фиксированном начальном состоянии (т.е. при* $\partial\dot{g}_{kl}/\partial y^4 = 0$*) равенство (34.2) эквивалентно уравнениям*

$$D_{\alpha\beta} \equiv V_\mu\frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\alpha}C_{\mu\beta} + \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\beta}C_{\mu\alpha} = 0. \tag{34.3}$$

Доказательство:

Дифференцирование (34.2) дает

$$\frac{\partial_{\alpha\beta}}{\partial y^4}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^l}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^j}+C_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y^l}\Big(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^4}\Big)\frac{\partial x_\beta}{\partial y^j}+C_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial y^j}\Big(\frac{\partial x_\beta}{\partial y^4}\Big)=0. \tag{34.4}$$

В силу того, что $C_{\alpha\beta}V_\beta=0$, имеем

$$C_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y^l}\Big(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^4}\Big)=C_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y^l}\Big(\frac{V_\alpha}{\theta}\Big)=\frac{1}{\theta}C_{\alpha\beta}\frac{\partial V_\alpha}{\partial y^l}. \tag{34.5}$$

Поэтому

$$\frac{\partial_{\alpha\beta}}{\partial y^4}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^l}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^j}+\frac{1}{\theta}C_{\alpha\beta}\frac{\partial V_\alpha}{\partial y^l}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^j}+\frac{1}{\theta}C_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^l}\frac{\partial V_\beta}{\partial y^j}=0 \tag{34.6}$$

Рассматривая поле 4-скоростей как функцию переменных x_ε и меняя индексы суммирования, получаем

$$\Big(\theta\frac{\partial_{\alpha\beta}}{\partial y^4}+C_{\mu\beta}\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\alpha}+C_{\mu\alpha}\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\beta}\Big)\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^l}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^j}=0 \tag{34.7}$$

Учитывая, что в переменных Эйлера для любой функции $\psi(x_\alpha)$ справедливо соотношение

$$\theta\frac{\partial\psi}{\partial y^4}=\theta\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^4}=V_\beta\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}=\frac{d\psi}{ds},$$

имеем

$$D_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^l}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^j}=0. \tag{34.8}$$

Так как

$$D_{\beta\alpha}=D_{\alpha\beta},\quad D_{\alpha\beta}V_\beta=0,$$

то (34.8) эквивалентно соотношениям

$$D_{\alpha\beta}I_{\alpha,\varepsilon}I_{\beta,\sigma}=0. \tag{34.9}$$

Так как по условию утверждения $\det||I_{\alpha,\varepsilon}||\neq 0$, то отсюда вытекает

$$D_{\alpha\beta}=0, \tag{34.10}$$

что и доказывает утверждение. Используя (31.28), последнее соотношение представим в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}=V_\mu\frac{\partial U_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\alpha}U_{\mu\beta}+\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\beta}U_{\mu\alpha}, \tag{34.11}$$

где

$$\sigma_{\alpha\beta}\equiv\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\nu}V_\nu V_\beta+\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\nu}V_\nu V_\alpha\Big) \tag{34.12}$$

по терминологии работы [20] носит название тензора распространения натяжений, совпадающим с введенным нами ранее в главе 1 тензором скоростей деформаций $\Sigma_{\alpha\beta}$ (1.3). Непринципиальное отличие (34.12) от (1.3) только в выборе сигнатуры метрики и соответствующей нормировки 4-скорости.

Выражение (34.11) представляет собой релятивистское обобщение классического выражения для материальной скорости изменения тензора деформаций Альманси. Так как

$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}V_\beta = 0$, то система (34.1) содержит лишь 6 независимых уравнений. Используя равенство

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\alpha}U_{\mu\beta} = \Big(\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\alpha} + V_\mu V_\nu \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\nu}\Big)U_{\mu\beta},$$

получим

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\alpha}U_{\mu\beta} = (\sigma_{\mu\alpha} + \omega_{\mu\alpha})U_{\mu\beta}, \tag{34.13}$$

где

$$\omega_{\mu\alpha} \equiv \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\mu} + \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\nu}V_\nu V_\alpha - \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\nu}V_\nu V_\mu\Big). \tag{34.14}$$

$o_{\mu\alpha}$ - носит название тензора спина сплошной среды [20]. Этот тензор совпадает с введенным нами ранее в главе 1 (с точностью до выбора сигнатуры метрики и условия нормировки 4-скорости) с тензором угловой скорости вращения (1.4). Этот тензор антисимметричен и ортогонален 4-скорости.

Движение среды можно назвать поступательным, если $\omega_{\mu\alpha} = 0$. По аналогии с классической механикой сплошной среды [129] введем понятие скорости деформаций Альманси и обозначим ее как

$$U^*_{\alpha\beta} \equiv \frac{dU_{\alpha\beta}}{ds} - \omega_{\alpha\mu}U_{\mu\beta} - \omega_{\beta\mu}U_{\mu\alpha}. \tag{34.15}$$

Используя (34.13), представим (34.11) в виде

$$\sigma_{\alpha\beta} = V_\mu\frac{\partial U_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + (\sigma_{\mu\alpha} + \omega_{\mu\alpha})U_{\mu\beta} + (\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta})U_{\mu\alpha}. \tag{34.16}$$

Откуда получим

$$U^*_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\mu}U_{\mu\beta} - \omega_{\beta\mu}U_{\mu\alpha}. \tag{34.17}$$

Если тело движется как жесткое в смысле Борна, т.е. расстояния любыми двумя соседними мировыми линиями в процессе движения не изменяется, то как известно $\sigma_{\alpha\beta} = 0$. Откуда следует

$$U^*_{\alpha\beta} = 0.$$

Для случая отсутствия вращения последнее соотношение при жестком движении эквивалентно условию

$$U^*_{\alpha\beta} = \frac{dU_{\alpha\beta}}{ds} = 0. \tag{34.18}$$

Смысл последнего соотношения становится особенно ясным, если переписать последнее соотношение в поле тетрад, которое представляет у нас эйлерову сопутствующую систему отсчета. А именно

$$\frac{dU_{\alpha\beta}}{ds} = \frac{dh_\alpha(a)}{ds}h_\beta(b)U(ab) +$$

$$+ h_\alpha(a)\frac{dh_\beta(b)}{ds}U(ab) + h_\alpha(a)h_\beta(b)\frac{dU(ab)}{ds} = 0.$$

Откуда имеем

$$h_\alpha(k)h_\beta(b)\frac{dU_{\alpha\beta}}{ds} = \frac{dU(kn)}{ds} = 0. \tag{34.18}$$

При выводе учли, что триада $h_\alpha(a)$ переносится по Ферми, т.е.

$$\frac{dh_\alpha(a)}{ds} = V_\alpha h_\varepsilon(a)B_\varepsilon b, \quad V_\alpha h_\alpha(k) = i\delta(k4) = 0. \tag{34.19}$$

Таким образом, если тело движется как жесткое в смысле Борна тело, то тензор деформаций Альманси в сопутствующих тетрадах остается постоянным. В частности, если на некоторой начальной гиперповерхности тело находилось в недеформированном состоянии, то при жестком движении никаких деформаций в среде не возникает.

Используя соотношение (31.29), найдем взаимосвязь между материальной скоростью изменения тензора деформаций $\hat{u}_{kl}$ и тензором скоростей деформаций, считая начальное состояние фиксированным.

$$\frac{d\hat{C}_{mn}}{ds} = \frac{d\dot{g}_{mn}}{ds} = \frac{d}{ds}(h_{\mu n}h_{\mu m}) - 2\frac{d}{ds}\hat{u}_{mn}. \tag{34.20}$$

Откуда

$$\frac{d}{ds}\hat{u}_{mn} = \frac{1}{2}\frac{d\hat{g}_{mn}}{ds} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu n}\frac{dh_{\mu m}}{ds} + h_{\mu m}\frac{dh_{\mu n}}{ds}\right) = b_{nm}, \tag{34.21}$$

где мы воспользовались (33.18). Формула (34.21) связывает второй основной тензор гиперповерхности со скоростью изменения тензора деформаций $\hat{u}_{nm}$. Выясним связь между тензором b_{nm} и $hat\sigma_{mn}$, т.е. связь между вторым основным тензором гиперповерхности и тензором скоростей деформаций в сопутствующей лагранжевой системе.

$$hat\sigma_{nm} = \sigma_{\alpha\beta}h_{\alpha n}h_{\beta m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial y^m}h_{\alpha n} + \frac{\partial V_\beta}{\partial y^n}h_{\beta m}\right). \tag{34.22}$$

Используя (33.16), получаем окончательно

$$hat\sigma_{nm} = \sigma_{\alpha\beta}h_{\alpha n}h_{\beta m} = b_{nm}. \tag{34.23}$$

Поэтому (34.21) можно представить в окончательном виде

$$\frac{d\hat{u}_{mn}}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d\hat{g}_{mn}}{ds} = b_{mn} = hat\sigma_{mn}. \tag{34.24}$$

Таким образом, второй основной тензор гиперповерхности b_{kl} тождественен с тензором скоростей деформаций $hat\sigma_{kl}$. Если окрестность рассматриваемой частицы движется как жесткое в смысле Борна тело, то $\sigma_{\alpha\beta} = 0$. Поэтому $d\hat{u}_{nm}/ds = 0$. Можно доказать и обратное утверждение, а именно:

Если скорость изменения тензора деформаций $d\hat{u}_{mn}/ds = 0$, то окрестность рассматриваемой частицы движется как жесткое в смысле Борна тело.

Действительно, так как $\sigma_{\alpha\beta}V_\beta = 0$, то из равенства нулю выражения

$$\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^n}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^m} = 0$$

вытекает, что

$$\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^\varepsilon}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^\sigma} = 0.$$

Так как

$$\det\left\|\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^\varepsilon}\right\| \neq 0,$$

то $\sigma_{\alpha\beta} = 0$, что и доказывает утверждение.

Используя (34.23), находим для уравнений Гаусса (33.9) соотношения

$$^*\hat{R}_{ik,lm} = hat\sigma_{kl} hat\sigma_{im} - hat\sigma_{il} hat\sigma_{km}. \tag{34.25}$$

Переход от сопутствующей системы к системе наблюдателя (т.е. к пространству Минковского) дает

$$^*R_{\mu\nu,\gamma\sigma} = {}^*\hat{R}_{ik,lm} h^i_\mu h^k_\nu h^l_\gamma h^m_\sigma = \sigma_{\nu\gamma}\sigma_{\mu\sigma} - \sigma_{\mu\gamma}\sigma_{\nu\sigma}. \tag{34.26}$$

При жестком движении $\sigma_{\mu\nu} = 0$ и гиперповерхность, ортогональная мировым линиям, становится плоской.

Чтобы получить условия интегрируемости для компонент тензора скоростей деформаций, продифференцируем уравнения Гаусса (34.25) по y^4, используя (33.27) и (34.24) и (34.25)

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 T_{im}}{\partial y^k \partial y^l} - \frac{\partial^2 T_{il}}{\partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial^2 T_{km}}{\partial y^i \partial y^l} + \frac{\partial^2 T_{kl}}{\partial y^i \partial y^m}\Big) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y^4}\Big[\hat{g}^{pq}\Big({}^*\hat{\Gamma}_{qlk}{}^*\hat{\Gamma}_{pmi} - {}^*\hat{\Gamma}_{qli}{}^*\hat{\Gamma}_{pmk}\Big)\Big] = \frac{\partial}{\partial y^4}\Big(hat\sigma_{kl} hat\sigma_{im} - hat\sigma_{il} hat\sigma_{km}\Big). \tag{34.27}$$

Здесь

$$T_{im} \equiv \frac{hat\sigma_{im}}{\theta}. \tag{34.28}$$

Если уравнения (34.27) являются действительно уравнениями совместности для тензора скоростей деформаций, то общим интегралами этих уравнений должны быть компоненты тензора (34.22). Докажем, что выражения (34.22) обращают в тождество (34.27). Из ортогональности $V_\mu h_{\mu l} = 0$ вытекает

$$hat\sigma_{im} = -\frac{1}{2}\Big(V_\alpha \frac{\partial h_{\alpha i}}{\partial y^m} + V_\alpha \frac{\partial h_{\alpha m}}{\partial y^i}\Big) = -\theta \frac{\partial x_\alpha}{\partial y^4} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^m \partial y^i}, \tag{34.29}$$

$$T_{im} = -\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^4} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^m \partial y^i}, \tag{34.30}$$

$$\frac{\partial^2 T_{im}}{\partial y^k \partial y^l} = -\Big(\frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^k \partial y^l}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^i \partial y^m} + \frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^i \partial y^k \partial y^m}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^l} +$$

$$+\frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^i \partial y^l \partial y^m}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^k} + \frac{\partial^4 x_\alpha}{\partial y^i \partial y^m \partial y^k \partial y^l}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^4}\Big), \tag{34.31}$$

$$\frac{\partial^2 T_{im}}{\partial y^k \partial y^l} - \frac{\partial^2 T_{il}}{\partial y^k \partial y^m} = \Big(\frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^k \partial y^m}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^i \partial y^l} - \frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^k \partial y^l}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^i \partial y^m}\Big) +$$

$$+\Big(\frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^i \partial y^k \partial y^l}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^m} - \frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^i \partial y^k \partial y^m}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^l}\Big), \tag{34.32}$$

$$\frac{\partial^2 T_{kl}}{\partial y^i \partial y^m} - \frac{\partial^2 T_{km}}{\partial y^i \partial y^l} = \Big(\frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^i \partial y^l}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^i \partial y^m}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^k \partial y^l}\Big) +$$

$$+\Big(\frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^k \partial y^i \partial y^m}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^l} - \frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^k \partial y^i \partial y^l}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^m}\Big), \tag{34.33}$$

$$\frac{\partial^2 T_{im}}{\partial y^k \partial y^l} - \frac{\partial^2 T_{il}}{\partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial^2 T_{km}}{\partial y^i \partial y^l} + \frac{\partial^2 T_{kl}}{\partial y^i \partial y^m}$$

$$= \Big(\frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^k \partial y^m}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^i \partial y^l} + \frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^l \partial y^i}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^k \partial y^m}\Big) -$$

$$-\Big(\frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^i \partial y^m}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^k \partial y^l} + \frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial y^4 \partial y^k \partial y^l}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y^i \partial y^m}\Big) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^4}\Big(\frac{\partial h_{\alpha m}}{\partial y^k}\frac{\partial h_{\alpha l}}{\partial y^i} - \frac{\partial h_{\alpha m}}{\partial y^i}\frac{\partial h_{\alpha l}}{\partial y^k}\Big). \tag{34.34}$$

Используя формулы (33.6) и (33.4), имеем

$$\frac{\partial h_{\mu l}}{\partial y^k} =^* \hat{\nabla}_k h_{\mu l} + {}^*\hat{\Gamma}^n_{kl} h_{\mu n}.$$

Откуда, правая часть (34.34) сводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial y^4}\Bigg[\Big({}^*\hat{\nabla}_k h_{\alpha m} + {}^*\hat{\Gamma}^n_{km} h_{\alpha n}\Big)\Big({}^*\hat{\nabla}_i h_{\alpha l} + {}^*\hat{\Gamma}^p_{il} h_{\alpha p}\Big) -$$

$$-\Big({}^*\hat{\nabla}_i h_{\alpha m} + {}^*\hat{\Gamma}^n_{im} h_{\alpha n}\Big)\Big({}^*\hat{\nabla}_k h_{\alpha l} + {}^*\hat{\Gamma}^p_{kl} h_{\alpha n}\Big)\Bigg] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^4}(-b_{km}b_{il} + b_{kl}b_{im}) + \frac{\partial}{\partial y^4}\Big({}^*\hat{\Gamma}^n_{km}{}^*\hat{\Gamma}^p_{il}\hat{g}_{np} - {}^*\hat{\Gamma}^n_{im}{}^*\hat{\Gamma}^p_{kl}\hat{g}_{np}\Big). \tag{34.35}$$

Левая часть (34.27) с учетом (34.35) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial y^4}(hat\sigma_{kl}hat\sigma_{im} - hat\sigma_{km}hat\sigma_{il}) + \frac{\partial}{\partial y^4}\Big({}^*\hat{\Gamma}_{pkm}{}^*\hat{\Gamma}^p_{il} - {}^*\hat{\Gamma}_{pim}{}^*\hat{\Gamma}^p_{kl}\Big) +$$

$$+\Big({}^*\hat{\Gamma}^p_{lk}{}^*\hat{\Gamma}_{pmi} - {}^*\hat{\Gamma}^p_{li}{}^*\hat{\Gamma}_{pmk}\Big) = \frac{\partial}{\partial y^4}(hat\sigma_{kl}hat\sigma_{im} - hat\sigma_{km}hat\sigma_{il}). \tag{34.36}$$

Итак, система (34.27) удовлетворяется тождественно и является системой уравнений совместности для компонент тензора скоростей деформаций в релятивистском случае.

На этом мы заканчиваем кинематику и переходим к динамике сплошной среды в СТО.

Глава 9

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ

В этой главе выведено релятивистское уравнение неразрывности и найдено его решение. На основе вариационного принципа Лагранжа построена релятивистская динамика изотропного упругого континуума. Получен релятивистский закон Гука и показано, что механическая система уравнений, описывающая поведение релятивистского изотропного упругого континуума, является замкнутой. В качестве примеров решена задача о распространении плоских волн в неограниченной изотропной движущейся среде и в рамках СТО найден аналог жесткого "равноускоренного"движения континуума, приведший к концепции Борна.

35. Плотность среды. Уравнение неразрывности

Важной характеристикой сплошной среды является ее плотность. Для определения последней рассмотрим на некоторой произвольной, но фиксированной гиперповерхности $y^4 = \text{const}$ малый объем ΔV. Масса выделенного объема на этой гиперповерхности есть Δm. Тогда плотностью среды на данной гиперповерхности, ортогональной мировым линиям, назовем величину ρ^*, определяемую равенством

$$\rho^* = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \tag{35.1}$$

Так как ρ^* определяется на ортогональной мировым линиям частиц среды гиперповерхности, то она является инвариантной плотностью той части массы покоя, которая при движении не меняется. Пусть объем dV является объемом некоторого параллелепипеда, построенным из бесконечно малых векторов $dx(i)$, $\delta x(i)$, $\Delta x(i)$. Согласно известному соотношению аналитической геометрии, объем этого параллелепипеда есть

$$dV = \varepsilon(ijk) dx(i) \delta x(j) \Delta x(k). \tag{35.2}$$

Так как мы применяем только правосторонние системы координат, то dV является истинным скаляром относительно преобразований триад $\vec{h}(k)$. $\varepsilon(ijk)$ - единичный, совершенно антисимметричный псевдотензор, для которого справедливы следующие известные соотношения [7].

$$\varepsilon(123) = 1, \quad \varepsilon(ijk) = \varepsilon(jki) = \varepsilon(kij) =$$

$$-\varepsilon(jik) = -\varepsilon(kji) = -\varepsilon(ikj), \quad \varepsilon(abc)\varepsilon(lmn) =$$

$$= \delta(al)\delta(bm)\delta(cn) + \delta(am)\delta(bn)\delta(cl) + \delta(an)\delta(bl)\delta(cm) -$$

$$-\delta(al)\delta(bn)\delta(cm) - \delta(an)\delta(bm)\delta(cl) - \delta(am)\delta(bl)\delta(cn),$$

$$\varepsilon(abn)\varepsilon(lmn) = \delta(al)\delta(bm) - \delta(am)\delta(bl),$$

$$\varepsilon(amn)\varepsilon(lmn) = 2\delta(al),\ \varepsilon(lmn)\varepsilon(lmn) = 6. \tag{35.3}$$

Частицы среды, имеющие на актуальной гиперповерхности объем dV, на начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 = \mathrm{const}$ занимали объем $d\dot{V}$.

$$d\dot{V} = \varepsilon(ijk)d\dot{x}(i)\delta\dot{x}(j)\Delta\dot{x}(k). \tag{35.4}$$

Так как вектор $d\dot{x}(i)$ лежит на начальной гиперповерхности, то его выражение в компонентах есть

$$d\dot{x}(i) = \dot{h}_p(i)dy^p. \tag{35.5}$$

Как известно, детерминант D матрицы некоторого тензора $T(pq)$ можно записать в виде

$$D = \frac{1}{6}\varepsilon(ijk)\varepsilon(pqr)T(ip)T(jq)T(kr). \tag{35.6}$$

Кроме того, для этого детерминанта имеют место эквивалентные соотношения, а именно

$$D = \varepsilon(ijk)T(i1)T(j2)T(k3) = \varepsilon(ijk)T(1i)T(2j)T(3k). \tag{35.7}$$

Из последнего соотношения следует равенство

$$\varepsilon(pqr)D = \varepsilon(ijk)T(ip)T(jq)T(kr) = \varepsilon(ijk)T(pi)T(qj)T(rk). \tag{35.8}$$

Используя (35.8), представим (35.4) в форме

$$d\dot{V} = \varepsilon(ijk)\dot{h}_p(i)\dot{h}_q(j)\dot{h}_r(k)dy^p\delta y^q\Delta y^r = \det||\dot{h}_n(m)||\varepsilon_{pqr}dy^p\delta y^q\Delta y^r. \tag{35.9}$$

На начальной гиперповерхности имеет место равенство

$$\dot{h}_n(4) = 0, \quad \dot{h}_n(m)\dot{h}_k(m) = \dot{g}_{nk}. \tag{35.10}$$

Откуда

$$\det||\dot{g}_{nk}|| = \det||\tilde{\dot{h}}_m(k)||\det||\dot{h}_n(m)|| = (\det||\dot{h}_n(m)||)^2,$$
$$\tilde{\dot{h}}_m(k) \equiv \dot{h}_k(m).$$

Поэтому

$$\det||\dot{h}_n(m)|| = \sqrt{\det||\dot{g}_{nk}||} \equiv \sqrt{\dot{g}}. \tag{35.11}$$

Откуда имеем

$$d\dot{V} = \sqrt{\dot{g}}\varepsilon_{pqr}dy^p\delta y^q\Delta y^r. \tag{35.12}$$

Так как на начальной и актуальной гиперповерхностях лагранжевы координаты частиц одинаковы, то dy^p можно рассматривать как функции тетрадных переменных Эйлера на актуальной гиперповерхности $y^4 = \mathrm{const}$, т.е.

$$d\dot{V} = \sqrt{\dot{g}}\varepsilon_{pqr}\frac{\partial y^p}{\partial x(i)}\frac{\partial y^q}{\partial x(j)}\frac{\partial y^r}{\partial x(k)}dx(i)\delta x(j)\Delta x(k) =$$

$$= \sqrt{\dot{g}}\det\left|\left|\frac{\partial y^n}{\partial x(m)}\right|\right|dV, \tag{35.13}$$

где при выводе воспользовались (35.2) и (35.8). Из сохранения элемента массы покоя (без учета упругого взаимодействия, которое будет рассмотрено далее) на начальной и актуальной гиперповерхностях следует

$$dm = \rho^* dV = \rho_0^* d\dot{V}, \tag{35.14}$$

что дает

$$\rho^* = \rho_0^* \sqrt{\dot{g}} \det ||\alpha^n(m)||, \quad \alpha^n(m) \equiv \frac{\partial y^n}{\partial x(m)}. \tag{35.15}$$

Здесь ρ_0^* - плотность среды в естественном недеформированном состоянии, отнесенная к начальной ортогональной мировым линиям гиперповерхности и являющаяся поэтому (как и ρ^*) инвариантной плотностью.

Докажем следующую теорему:

Плотность $\rho^* = \rho_0^* \sqrt{\dot{g}} \det ||\alpha^n(m)||$ *удовлетворяет уравнению неразрывности, т.е. имеет место равенство*

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\rho^* V_\nu) = 0. \tag{35.16}$$

Доказательство.

На произвольной фиксированной гиперповерхности имеет место равенство

$$\frac{\partial x(k)}{\partial y^b} \frac{\partial y^b}{\partial x(l)} = \delta(kl). \tag{35.17}$$

Дифференцируя равенство по s и умножая на $\partial y^n / \partial x(k)$, получим

$$-\frac{\partial y^n}{\partial x(k)} \frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial x(k)}{\partial y^b}\Big) \frac{\partial y^b}{\partial x(l)} = \frac{\partial x(k)}{\partial y^b} \frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial y^b}{\partial x(l)}\Big) \frac{\partial y^n}{\partial x(k)} = \frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial y^n}{\partial x(l)}\Big), \tag{35.18}$$

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial x(k)}{\partial y^b}\Big) = \frac{dh_\alpha(k)}{ds} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y^b} + h_\alpha(k) \frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^b}\Big). \tag{35.19}$$

В силу переноса Ферми, который используется нами при переносе триад вдоль мировых линий, имеем

$$\frac{dh_\alpha(k)}{ds} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y^b} = bB_\sigma h_\sigma(k) V_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y^b} = 0.$$

Поэтому (35.19) представляется в форме

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial x(k)}{\partial y^b}\Big) = h_\alpha(k)\theta \frac{\partial}{\partial y^4}\Big(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^b}\Big) = h_\alpha(k)\theta \frac{\partial}{\partial y^b}\Big(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^4}\Big) =$$

$$= h_\alpha(k)\theta \frac{\partial}{\partial y^b}\Big(\frac{V_\alpha}{\theta}\Big) = h_\alpha(k)\theta V_\alpha \frac{\partial}{\partial y^b}\Big(\frac{1}{\theta}\Big) + h_\alpha(k) \frac{\partial V_\alpha}{\partial y^b} = h_\alpha(k) \frac{\partial V_\alpha}{\partial y^b}. \tag{35.20}$$

Подставляя последнее соотношение в (35.18), находим

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial y^n}{\partial x(l)}\Big) = -\frac{\partial y^n}{\partial x(k)} \frac{\partial y^b}{\partial x(l)} h_\alpha(k) \frac{\partial V_\alpha}{\partial y^b} = -h_\alpha(k) \frac{\partial y^n}{\partial x(k)} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x(l)},$$

т.е.

$$\frac{d}{ds}(\alpha^n(l)) = -\alpha^n(k)h_\alpha(k)\frac{\partial V_\alpha}{\partial x(l)}. \tag{35.21}$$

Используя (35.7), представим плотность ρ^* в виде

$$\rho^* = \sqrt{\dot{g}}\varepsilon_{pqr}\alpha^p(1)\alpha^q(2)\alpha^r(3). \tag{35.22}$$

Найдем изменение плотности ρ^* вдоль мировых линий. Так как начальное состояние фиксировано, то $d(\sqrt{\dot{g}})/ds = 0$. Поэтому, воспользовавшись (35.21), находим

$$\frac{d\rho^*}{ds} = -\rho_0^*\sqrt{\dot{g}}\varepsilon_{pqr}\Big(\alpha^p(k)h_\alpha(k)\frac{\partial V_\alpha}{\partial x(1)}\alpha^q(2)\alpha^r(3)+$$

$$+\alpha^p(1)\alpha^r(3)\alpha^q(k)h_\alpha(k)\frac{\partial V_\alpha}{\partial x(2)} + \alpha^p(1)\alpha^q(2)\alpha^r(k)h_\alpha(k)\frac{\partial V_\alpha}{\partial x(3)}\Big) =$$

$$= -\rho_0^*\sqrt{\dot{g}}\varepsilon_{pqr}\alpha^p(1)\alpha^q(2)\alpha^r(3)h_\alpha(k)\frac{\partial V_\alpha}{\partial x(k)} = -\rho^* g^*_{\alpha\sigma}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\sigma} = -\rho^*\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha}. \tag{35.23}$$

Из последнего соотношения следует

$$\frac{d\rho^*}{ds} + \rho^*\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_a} = V_\varepsilon\frac{\partial \rho^*}{\partial x_v} + \rho^*\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_v} = \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}(\rho^* V_\varepsilon) = 0,$$

что и доказывает теорему.

Приведем второй способ доказательства теоремы. Для этого перепишем (35.14) в другой эквивалентной форме. Так как

$$\alpha^n(m)\frac{\partial x(m)}{\partial y^l} = \delta(nm),$$

то

$$\det||\alpha^n(m)|| = \frac{1}{\det\left|\left|\frac{\partial x(m)}{\partial y^l}\right|\right|},$$

$$\det\left|\left|\frac{\partial x(m)}{\partial y^l}\right|\right| = \det\left|\left|h_\mu(m)\frac{\partial x_\mu}{\partial y^l}\right|\right| = \det||\hat{h}_l(m)||.$$

С другой стороны

$$\hat{g}_{ln} = \hat{h}_l(\nu)\hat{h}_n(\nu) = \hat{h}_l(k)\hat{h}_n(k) + \hat{h}_l(4)\hat{h}_n(4) = \hat{h}_l(k)\hat{h}_n(k),$$

поскольку

$$\hat{h}_l(4) = h_\varepsilon(4)\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^l} = \frac{V_\varepsilon}{i}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^l} = 0$$

в силу условия ортогональности 4-скорости V_ε актуальной гиперповерхности. Поэтому

$$\det||\hat{h}_l(m)|| = \sqrt{\det||\hat{g}_{kl}||} \equiv \sqrt{\hat{g}}, \quad \rho^* = \rho_0^*\sqrt{\frac{\dot{g}}{\hat{g}}}. \tag{35.14a}$$

Соотношение (35.14a) представляет собой уравнение неразрывности в переменных Лагранжа. Оно имеет точно такой же вид, как и в классической механике сплошной среды [44].

Разница между классическим и релятивистским уравнением неразрывности в переменных Лагранжа состоит в том, что $\hat{g}_{kl}$ и $\dot{g}_{kl}$ метрические тензоры на начальной и актуальной гиперповерхностях, ортогональных мировым линиям, в то время как при классическом описании эти же тензоры задаются гиперплоскостях одновременных событий (актуальной и начальной).

От уравнений неразрывности в форме Лагранжа перейдем к уравнениям в форме Эйлера. Дифференцируя (35.14a) по s, имеем

$$\frac{d\rho^*}{ds} = -\frac{1}{2}\rho_0^*\sqrt{\dot{g}}\hat{g}^{-3/2}\frac{d\hat{g}}{ds}, \quad \frac{d\hat{g}}{ds} = \frac{\partial\hat{g}}{\partial\hat{g}_{ik}}\frac{\partial\hat{g}_{ik}}{\partial s} = A^{ik}\frac{\partial\hat{g}_{ik}}{\partial s},$$

где A^{ik} - алгебраическое дополнение элемента $\hat{g}_{ik}$. С другой стороны, $A^{ik} = \hat{g}\hat{g}^{ik}$. Кроме того, используя соотношение (34.24), получаем

$$\frac{d\rho^*}{ds} = -\rho_0^*\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^k}\hat{g}^{ik}.$$

Так как

$$\hat{g}^{ik} = \frac{\partial y^i}{\partial x_\nu}\frac{\partial y^k}{\partial x_\nu},$$

то

$$\frac{d\rho^*}{ds} = -\rho_0^*\sigma_{\alpha\beta}g^*_{\alpha\nu}g^*_{\beta\nu} = -\rho_0^*\sigma_{\nu\nu} = -\rho_0^*\frac{\partial V_\nu}{\partial x_\nu}.$$

Откуда снова имеем (35.16). Из последнего соотношения следует, что при жестком в смысле Борна движении плотность ρ^* вдоль мировых линий остается неизменной.

Из соотношения (35.16) выведем интегральный закон сохранения. Проинтегрируем (35.16) по четырехобъему

$$d\Omega = dx_1dx_2dx_3dx_4. \tag{35.24}$$

В результате получим

$$\int\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\rho^*V_\nu)d\Omega = 0. \tag{35.25}$$

Используя теорему Гаусса, интегрируя последнее соотношение по объему неограниченно расширяющемуся в пространственно подобных направлениях и ограниченному во временно подобных направлениях двумя трех-плоскостями $x_4' = \mathrm{const}$ и $x_4'' = \mathrm{const}$ и считая, что на границах пространственного объема подинтегральное выражение обращается в нуль, имеем

$$\int\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\rho^*V_\nu)d\Omega = \oint\rho^*V_\nu\ dS_\nu = 0.$$

Интеграл по замкнутой поверхности, ограничивающий четырехобъем, разобъем на три интеграла:

$$\oint\rho^*V_\nu\ dS_\nu = \int\rho^*V_kdS_k + \int\rho^*V_4dS_4' - \int\rho^*V_4dS_4'' = 0.$$

$$\int\rho^*V_kdS_k = 0,$$

так как интегрирование происходит по бесконечно удаленной поверхности, ограничивающий пространственный объем, где вещество отсутствует. Поэтому имеем

$$\int\rho^*V_4dS_4' = \int\rho^*V_4dS_4'', \tag{35.26}$$

где $dS_4 = dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Откуда получим

$$\int\limits_{t=t_1} \rho^* V_4 dV = \int\limits_{t=t_2} \rho^* V_4 dV. \tag{35.27}$$

Иными словами $\int \rho^* V_4 dV$, рассмотренный в любой момент времени t, сохраняется, т.е. имеет место равенство.

$$M^* = -i \int \rho^* V_4 dV = \int \rho^* dV^* = \text{const}, \tag{35.28}$$

где dV^* - элемент собственного объема в сопутствующей системе Эйлера. Равенство (35.38) выражает закон сохранения массы покоя тела.

36. Вариационный принцип Лагранжа для изотропной упругой среды

Если вопросам релятивистской гидродинамики и газовой динамики в литературе уделяется достаточно много внимания, то вопросы, связанные с релятивистской теорией упругости, рассматриваются значительно реже. При этом, большинство авторов подходят к рассмотрению проблемы с позиций ОТО. Однако, представляет интерес рассмотреть эту проблему с позиций СТО. Вариационные методы в релятивистской механике сплошных сред развиты в работах Л.И. Седова и его учеников (см., например, [5] и литературу к ней), К.П. Станюковича [133]. Во многих задачах механики сплошной среды можно не учитывать термических процессов и ограничиться только чисто механическим рассмотрением. Помимо этого будем рассматривать для простоты только изотропные тела. Для выводов основных законов движения упругой среды воспользуемся вариационным принципом, предполагая, что упругой среде как некоторой обобщенной динамической системе может быть сопоставлена функция Лагранжа, представляющая собой объемный интеграл от плотности функции Лагранжа Ł. Последняя зависит от функций поля y^μ и их первых производных по эйлеровым координатам и времени. Интеграл от функции Лагранжа по времени называется действием. Оно может быть представлено в виде интеграла от Ł по четырехмерному объему Ω, где $d\Omega$ определяется соотношением (35.24). Действие S представим в виде

$$S = -\frac{i}{c} \int Ł d\Omega. \tag{36.1}$$

Мы предполагаем, что действие должно быть экстремальным для действительного движения, т.е. для таких значений y^μ, которые должны удовлетворять "уравнениям поля". Так как эти уравнения должны быть релятивистски инвариантными, то релятивистским инвариантом должна быть функция Ł. При выводе общих соотношений, в которых плотность лагранжиана не конкретизируется, мы следуем известным методам, разработанным в классической и квантовой теории поля, например, в работах [131], [7], [132], [109]. Часто в качестве лагранжиана в механике сплошных сред выбирается давление, которое является скаляром относительно преобразований Лоренца. Следуя В.А. Фоку [3], в качестве плотности функции Лагранжа выбираем инвариант, определяемый равенством

$$Ł = -\rho^* c^2 \left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right), \tag{36.2}$$

где ρ^* определяется (35.22). П - потенциальная энергия упругого сжатия единицы массы, рассматриваемая на актуальной гиперповерхности (как и ρ^*) и являющаяся поэтому скаляром относительно преобразований Лоренца. Лагранжиан, подобный (36.2), рассматривался В.А. Фоком [3] при выводе релятивистских уравнений идеальной жидкости, однако в нашем случае "функциям поля"y^μ приписывается другой физический смысл, чем в работе [3]. Под "полевыми функциями"y^μ, в силу рассматриваемой нами кинематики, мы понимаем четыре скалярные относительно глобальных преобразований Лоренца функции, первые три из которых y^k постоянны вдоль каждой мировой линии, а y^4 постоянен на каждой фиксированной гиперповерхности, ортогональной мировым линиям. Величины $\partial y^\mu/\partial x_\varepsilon$ представляют собой компоненты смешанного тензора, так как x_ε принадлежит пространству Минковского, а y^μ к лагранжевой сопутствующей системе. Действительно, пусть, например $x_\varepsilon = x_\varepsilon(x'^\alpha)$, тогда

$$\frac{\partial y^\mu}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'^\alpha}. \tag{36.3}$$

Таким образом $\partial y^\mu/\partial x_\varepsilon$ при преобразованиях $x_\varepsilon = x_\varepsilon(x'^\alpha)$ ведет себя как совокупность ковариантных векторов.

Пусть $y'^\mu = y'^\mu(y^\alpha)$. Тогда

$$dy'^\mu = \frac{\partial y'^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x_\varepsilon}dx_\varepsilon, \quad \frac{\partial y'^\mu}{\partial x_\varepsilon} = \frac{\partial y'^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\varepsilon}. \tag{36.4}$$

Следовательно, $\partial y^\mu/\partial x_\varepsilon$ при преобразованиях $y'^\mu = y'^\mu(y^\alpha)$ ведут себя как совокупность контравариантных векторов.

Общая вариация действия (36.1) связана с варьированием как полевых функций y^μ, так и границы области интегрирования. Рассмотрим, прежде всего, вариацию действия при закрепленных границах, предполагая, что вариация полевых функций δy^μ на границе равна нулю.

$$\delta S = -\frac{i}{c}\int\left(\frac{\partial Ł}{\partial y^\mu}\delta y^\mu + \frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\delta\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}\right)\right)d\Omega =$$

$$= -\frac{i}{c}\int\left(\frac{\partial Ł}{\partial y^\mu}\delta y^\mu + \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\left(\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\delta y^\mu\right) - \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\left(\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\right)\delta y^\mu\right)d\Omega = 0. \tag{36.5}$$

Рассмотрим отдельно второй член, т.е.

$$\int\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\left(\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\delta y^\mu\right)d\Omega = \oint\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\delta y^\mu dS_\varepsilon = 0, \tag{36.6}$$

где мы применили теорему Гаусса, заменив интеграл по четырехобъему интегралом по поверхности, охватывающий этот объем. Но вариация на границе области по предположению равна нулю, так как мы варьировали при закрепленных границах. Поэтому интеграл (36.6) обращается в нуль. Откуда следует, что

$$\delta S = -\frac{i}{c}\int\left(\frac{\partial Ł}{\partial y^\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\left(\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\right)\right)\delta y^\mu d\Omega = 0. \tag{36.7}$$

В силу произвольности δy^μ находим следующие "уравнения движения"("уравнения поля")

$$\frac{\partial Ł}{\partial y^\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\left(\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\right)=0. \tag{36.8}$$

Этим уравнениям, физический смысл которых выясним позже, должно удовлетворять действительное движение среды.

Рассмотрим теперь вариацию действия, считая, что и область интегрирования Ω подвергнута вместе с "волновым полем"бесконечно малому преобразованию, считая по-прежнему, что вариация $\delta S=0$. Рассмотрим бесконечно малое преобразование координат

$$x'_\mu=x_\mu+\delta x_\mu, \tag{36.9}$$

$$\delta x_\mu=X_{\mu\eta}\delta\omega_\eta,\quad (\eta=1,2,3...s), \tag{36.10}$$

где $\delta\omega_\eta$ - бесконечно малые параметры. При таком преобразовании "функции поля"$y^\mu(x_\varepsilon)$ переходят в функции $y'^\mu(x'_\varepsilon)$, т.е.

$$y^\mu(x_\varepsilon)\rightarrow y'^\mu(x'_\varepsilon)=y^\mu(x_\varepsilon)+\delta y^\mu(x_\varepsilon), \tag{36.11}$$

где

$$\delta y^\mu(x_\varepsilon)\equiv\psi^\mu_\eta\delta\omega_\eta. \tag{36.12}$$

Полная вариация δy^μ обусловлена как вариацией формы $\bar{\delta}y^\mu$, так и вариацией координат, т.е.

$$\bar{\delta}y^\mu=\delta y^\mu-\frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}\delta x_\varepsilon=\left(\psi^\mu_\eta-\frac{\partial y^\mu}{\partial x_\varepsilon}X_{\varepsilon\eta}\right)\delta\omega_\eta. \tag{36.13}$$

Полная вариация действия δS может быть представлена в виде

$$\delta S=-\frac{i}{c}\delta\int Ł d\Omega=-\frac{i}{c}\left(\int\delta Ł d\Omega+\int Ł\delta d\Omega\right)=0, \tag{36.14}$$

$$\delta Ł=\bar{\delta}Ł+\frac{\delta Ł}{\partial x_\varepsilon}\delta x_\varepsilon=\frac{\partial Ł}{\partial y^\nu}\bar{\delta}y^\nu+\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\bar{\delta}\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x_\varepsilon}\right)+\frac{\delta Ł}{\partial x_\varepsilon}\delta x_\varepsilon, \tag{36.15}$$

$$\delta d\Omega=d\Omega\frac{\partial\delta x_\varepsilon}{\partial x_\varepsilon}. \tag{36.16}$$

Откуда

$$\delta S=-\frac{i}{c}\int\left[\frac{\partial Ł}{\partial y^\nu}\bar{\delta}y^\nu+\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\bar{\delta}y^\nu+\frac{\delta Ł}{\partial x_\varepsilon}\delta x_\varepsilon+Ł\frac{\partial\delta x_\varepsilon}{\partial x_\varepsilon}\right]d\Omega=0. \tag{36.17}$$

При выводе последнего соотношения мы учли, что операторы $\bar{\delta}$ и $\partial/\partial x_\varepsilon$ коммутируют. В силу уравнений движения (36.8) и (36.13) получаем

$$\delta S=-\frac{i}{c}\int\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\left[\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\left(\psi^\nu_\eta-\frac{\partial y^\nu}{\partial x_\sigma}X_{\sigma\eta}\right)+Ł X_{\varepsilon\eta}\right]\delta\omega_\eta d\Omega=0, \tag{36.18}$$

что эквивалентно соотношению (теорема Э. Нетер [131])

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_{\eta\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon} = 0, \tag{36.19}$$

где

$$\bar{\Theta}_{\eta\varepsilon} \equiv \frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\left(\psi^\nu_\eta - \frac{\partial y^\nu}{\partial x_\sigma} X_{\sigma\eta}\right) + Ł X_{\varepsilon\eta}. \tag{36.20}$$

Используя теорему Гаусса, интегрируя соотношение (36.19) по объему неограниченно расширяющемуся в пространственно подобных направлениях и ограниченному во временно подобных направлениях двумя трех-плоскостями $x'_4 = \mathrm{const}$ и $x''_4 = \mathrm{const}$ и считая, что на границах пространственного объема подинтегральное выражение обращается в нуль, имеем

$$\int \bar{\Theta}_{\eta 4} dV = \mathrm{const}, \tag{36.21}$$

где при выводе использовали тот же метод, что и при выводе закона сохранения массы покоя (35.28). Рассмотрим некоторые частные случаи.

37. Тензор энергии-импульса и уравнения движения

Пусть преобразование (36.9) соответствует бесконечно малым смещениям (трансляциям) координат, т.е.

$$\delta x_\mu = \delta\omega_\mu, \quad X_{\mu\eta} = \delta_{\mu\eta}, \quad (\mu, \eta = 1, 2, 3, 4). \tag{37.1}$$

Так как y^μ представляет собой совокупность скалярных функций относительно преобразований (36.9), то

$$y'^\mu(x'_\sigma) - y^\mu(x_\sigma) = 0 = \delta y^\mu = \psi^\mu_\eta \delta\omega_\eta. \tag{37.2}$$

Из последнего соотношения вытекает

$$\psi^\mu_\eta = 0, \tag{37.3}$$

что приводит выражение для (36.20) к виду

$$\bar{\Theta}_{\mu\varepsilon} = T_{\mu\nu} = Ł\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\nu}\right)} \frac{\partial y^\beta}{\partial x_\mu}, \tag{37.4}$$

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\varepsilon} = 0, \tag{37.5}$$

$$P_\mu = -\frac{i}{c}\int T_{\mu 4} dV = \mathrm{const}, \tag{37.6}$$

Тензор $T_{\mu\nu}$, определенный соотношением (37.4), носит название канонического тензора энергии-импульса. Сохраняющийся 4-вектор P_μ называется четырех-вектором энергии-импульса. Компонента

$$\frac{c}{i} P_4 = -\int T_{44} dV = \mathrm{const}$$

представляет собой полную энергию системы, а

$$P_k = -\frac{i}{c}\int T_{k4} dV = \text{const}$$

выражает закон сохранения импульса замкнутой системы. Отметим, что в общем случае тензор $T_{\mu\nu}$ не является симметричным.

Применим развитый выше формализм для отыскания тензора энергии-импульса упругой среды. Для этого в соотношение (37.4) подставим плотность функции Лагранжа Ł из (36.2), введя для краткости обозначение

$$\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\nu} \equiv \alpha^\beta_\nu. \tag{37.6}$$

Вычислим

$$\frac{\partial Ł}{\partial \alpha^\beta_\nu} = -c^2 \frac{\partial \rho^*}{\partial \alpha^\beta_\nu}\Big(1 + \frac{\Pi}{c^2}\Big) - \rho^* \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha^\beta_\nu}. \tag{37.7}$$

Используя выражение (35.22), находим

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial \alpha^\beta_\nu} = \frac{\partial \rho^*}{\partial \alpha^i(k)} \frac{\partial \alpha^i(k)}{\partial \alpha^\beta_\nu} = \frac{\partial \rho^*}{\partial \alpha^i(k)} h_\varepsilon(k) \delta^i_\beta \delta^\varepsilon_\nu = \rho^*_0 \sqrt{\dot{g}} \varepsilon_{pqr} h_\nu(k) \delta^i_\beta \cdot$$

$$\cdot[\delta(1k)\delta^p_i \alpha^q(2)\alpha^r(3) + \delta(2k)\delta^q_i \alpha^p(1)\alpha^r(3) + \delta(3k)\delta^r_i \alpha^p(1)\alpha^q(2)], \tag{37.8}$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial \alpha^\beta_\nu}\alpha^\beta_\nu = \rho^*_0 \sqrt{\dot{g}} \varepsilon_{pqr} h_\nu(k) h_\mu(l) \frac{\partial y^i}{\partial x(l)} \cdot [\delta(1k)\delta^p_i \alpha^q(2)\alpha^r(3) +$$

$$+\delta(2k)\delta^q_i \alpha^p(1)\alpha^r(3) + \delta(3k)\delta^r_i \alpha^p(1)\alpha^q(2)] = \rho^*_0 \sqrt{\dot{g}} \varepsilon_{pqr} h_\nu(k) h_\mu(l) \cdot$$

$$\cdot[\delta(1k)\alpha^p(l)\alpha^q(2)\alpha^r(3) + \delta(2k)\alpha^q(l)\alpha^p(1)\alpha^r(3) +$$

$$+\delta(3k)\alpha^r(l)\alpha^p(1)\alpha^q(2)] = \rho^*_0 \sqrt{\dot{g}} \varepsilon_{pqr} \alpha^p(l)\alpha^q(2)\alpha^r(3) \cdot$$

$$\cdot[h_\nu(1)h_\mu(1) + h_\nu(2)h_\mu(2) + h_\nu(3)h_\mu(3)] = \rho^* g^*_{\mu\nu}. \tag{37.9}$$

Рассмотрим выражение

$$\rho^* \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha^\beta_\nu} \partial \alpha^\beta_\mu = \rho^* \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha^i(k)} \frac{\partial \alpha^i(k)}{\partial \alpha^\beta_\nu} \alpha^\beta_\mu =$$

$$\rho^* \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha^i(k)} \delta^i_\beta h_\nu(k) \frac{\partial y^\beta}{\partial x(l)} h_\mu(l) = \rho^* \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha^i(k)} \alpha^i(l) h_\nu(k) h_\mu(l). \tag{37.10}$$

При выводе мы использовали соотношения

$$\frac{\partial y^i}{\partial x_\mu} = \frac{\partial y^i}{\partial x_(\alpha)} h_\mu(\alpha) = \frac{\partial y^i}{\partial x(4)} h_\mu(4) + \frac{\partial y^i}{\partial x(l)} h_\mu(l),$$

в котором

$$\frac{\partial y^i}{\partial x_(4)} = \frac{1}{i}\frac{\partial y^i}{\partial s} = 0,$$

так как лагранжевы координаты не меняются вдоль мировых линий. Если ввести обозначение

$$\rho^* \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha^i(k)} \alpha^i(l) \equiv -S_{(kl)}, \tag{37.11}$$

то можно увидеть, что тензор $S_{(kl)}$ в локальных тетрадах совпадает с известным выражением для тензора напряжений в классической теории упругой среды в декартовых координатах [129], с той лишь разницей, что переменные Эйлера x_k заменяются на тетрадные сопутствующие переменные Эйлера $x(k)$. Используя проделанные вычисления, получаем для тензора энергии-импульса выражение

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon V_\mu V_\nu - S_{\mu\nu}, \quad \varepsilon = -\text{Ł} = \sqrt{\dot{g}}\rho_0^* c^2 \det\left\|\frac{\partial y^i}{\partial x(k)}\right\|\left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right), \tag{37.12}$$

$$S_{\mu\nu} = h_\mu(k)h_\nu(l)S(kl), \tag{37.13}$$

где $S_{\mu\nu}$ - тензор напряжений, отнесенный к пространству Минковского. Соотношение (37.12) совпадает с общим выражением работы [20], в которой величина ε и $S_{\mu\nu}$ не конкретизируется. Требования, которые в [20] накладываются на тензор напряжений,

$$S_{\mu\nu}V_\nu = 0, \quad S_{\mu\nu}V_\mu = 0, \tag{37.14}$$

в нашем случае выполняются тождественно, что следует из ортогональности тетрад вида

$$h_\mu(k)V_\mu = ih_\mu(k)h_\mu(4) = i\delta(k4) = 0.$$

Кроме того, для тензора $T_{\mu\nu}$ имеют место очевидные соотношения

$$\varepsilon = {}_{\mu\nu}V_\mu V_\nu, \quad -S_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\lambda}g^*_{\beta\nu}T_{\lambda\nu}. \tag{37.15}$$

Последние соотношения совпадают с аналогичными разложениями при отсутствии тепловых потоков, полученными в работах [134], [135].

По аналогии с классической механикой сплошной среды введем понятие упругого потенциала E или плотности энергии в единице собственного объема, который связан с потенциальной энергией упругого сжатия Π при помощи соотношения

$$E = \rho_0^*\Pi. \tag{37.16}$$

Рассматривая в соотношении (37.11) Π как функцию тензора Коши в локальных тетрадах (31.27), имеем

$$S(kl) = -\rho^*\frac{\partial\Pi}{\partial C(ab)}\frac{\partial C(ab)}{\partial\alpha^i(k)}\alpha^i(l) = -\frac{2\rho^*}{\rho_0^*}\frac{\partial E}{\partial C(ak)}C(al). \tag{37.17}$$

Так как мы рассматриваем здесь только изотропные среды, то, как известно из классической теории сплошных сред [44], [129], упругий потенциал можно представить как функцию основных инвариантов какого-либо тензора деформаций, например, тензора Коши. Известно также, что любой симметричный тензор второго ранга может иметь не более трех независимых инвариантов. В частности, основными инвариантами I_k тензора Коши $C(ab)$ будут в согласии со [129] выражения

$$I_1 = C(aa), \quad I_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon(ipq)\varepsilon(irs)C(pr)C(qs),$$

$$I_3 = \frac{1}{6}\varepsilon(ijk)\varepsilon(pqr)C(ip)C(jq)C(kr). \tag{37.18}$$

Из последнего соотношения вытекают равенства

$$\frac{\partial I_1}{\partial C(ij)} = \delta(ij), \quad \frac{\partial I_2}{\partial C(ij)} = C(ij) - C(kk)\delta(ij),$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial C(ij)} = C(ip)C(pj) - I_1 C(ij) - I_2\delta(ij). \tag{37.19}$$

Для дальнейших вычислений рассмотрим уравнение Гамильтона-Кэли, справедливое для любого симметричного тензора $K(ab)$, а именно

$$K(ip)K(pq)K(qj) = K_1 K(ip)K(pj) + K_2 K(ij) + K_3\delta(ij), \tag{37.20}$$

где K_i - основные инварианты тензора $K(ip)$. В частности, для тензора Коши уравнение Гамильтона-Кэли дает

$$C(ip)C(pq)C(qj) = I_1 C(ip)C(pj) + I_2 C(ij) + I_3\delta(ij). \tag{37.21}$$

Умножая обе части равенства (37.21) на обратный тензор Фингера $B(jl)$, определяемый формулой (31.37), получаем

$$C(ip)C(pl) = I_1 C(il) + I_2\delta(il) + I_3 B(il). \tag{37.22}$$

Тогда последнее равенство в (37.19) имеет вид

$$\frac{\partial I_3}{\partial C(ij)} = I_3 B(ij). \tag{37.23}$$

Соотношение (37.17) представим в виде

$$S(kl) = -\frac{2\rho^*}{\rho_0^*}\frac{\partial E}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial C(ak)}C(al) = -\frac{2\rho^*}{\rho_0^*}\Big[\frac{\partial E}{\partial I_1}C(kl)+$$

$$+\frac{\partial E}{\partial I_2}(C(al)C(ak) - C(nn)C(kl)) + I_3\frac{\partial E}{\partial I_3}\delta(kl)\Big]. \tag{37.24}$$

Используя (37.21), получим окончательно

$$S(kl) = -\frac{2\rho^*}{\rho_0^*}\Big[\Big(I_2\frac{\partial E}{\partial I_2} + I_3\frac{\partial E}{\partial I_3}\Big)\delta(kl) + \frac{\partial E}{\partial I_1}C(kl)) + I_3\frac{\partial E}{\partial I_2}B(kl)\Big]. \tag{37.25}$$

Из последнего соотношения следует, что тензор $S(kl)$ является симметричным. Тензор напряжений в пространстве Минковского сведется к виду

$$S_{\mu\nu} = -\frac{2\rho^*}{\rho_0^*}\Big[\Big(I_2\frac{\partial E}{\partial I_2} + I_3\frac{\partial E}{\partial I_3}\Big)g^*_{\mu\nu} + \frac{\partial E}{\partial I_1}C_{\mu\nu} + I_3\frac{\partial E}{\partial I_2}B_{\mu\nu}\Big]. \tag{37.26}$$

Таким образом, тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, полученный из канонического тензора энергии-импульса (37.4), оказался симметричным. Так как $S_{\mu\nu}V_\nu = 0$, то тензор напряжений имеет лишь шесть независимых компонент.

Рассмотрим переход от упругой среды к идеальной жидкости. В нерелятивистском случае такой переход, как известно из [3], сводится к формальной замене $\tilde{S}_{ik} \to -P\delta_{ik}$, где P - давление. Поэтому естественным переходом в релятивистском случае от упругого тела к идеальной жидкости будет соотношение

$$S(kl) = -P\delta(kl), \tag{37.27}$$

рассмотренное на гиперповерхности нормальной мировым линиям и являющееся поэтому релятивистски инвариантным. Из последнего соотношения следует,что

$$S(kl)h_\mu(k)h_\nu(l) = S_{\mu\nu} = -Pg^*_{\mu\nu}, \tag{37.28}$$

Аналогичное соотношение для идеальной жидкости вводится в работе [135]. Выразим тензор напряжений через энергию упругого сжатия

$$-S_{\mu\nu} = Pg^*_{\mu\nu} = \rho^* \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha^i(k)} \alpha^i(l) h_\nu(k) h_\mu(l). \tag{37.29}$$

Так как для идеальной жидкости $\Pi = \Pi(\rho^*)$, то

$$Pg^*_{\mu\nu} = \rho^* \frac{\partial \Pi}{\partial \rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial \alpha^i(k)} \alpha^i(l) h_\nu(k) h_\mu(l). \tag{37.30}$$

Выражение (37.9) по аналогии с (37.10) представим в форме

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial \alpha^\beta_\nu} \alpha^\beta_\nu = \frac{\partial \rho^*}{\partial \alpha^i(k)} \frac{\partial \alpha^i(k)}{\partial \alpha^\beta_\nu} \alpha^\beta_\mu = \frac{\partial \rho^*}{\partial \alpha^i(k)} \alpha^i(l) h_\nu(k) h_\mu(l). \tag{37.31}$$

Используя (37.9), формулу (37.30) можно записать как

$$Pg^*_{\mu\nu} = \rho^{*2} \frac{d\Pi}{d\rho^*} g^*_{\mu\nu}, \tag{37.32}$$

что эквивалентно

$$P = \rho^{*2} \frac{d\Pi}{d\rho^*} \tag{37.33}$$

или

$$\Pi = \int \frac{dP}{\rho^*} - \frac{P}{\rho^*}. \tag{37.34}$$

Таким образом, тензор энергии-импульса для идеальной жидкости имеет вид

$$T_{\mu\nu} = (\rho^* c^2 + \rho^* \Pi + P) V_\mu V_\nu + P\delta_{\mu\nu}. \tag{37.35}$$

Соотношения (37.33-37.35) в точности совпадают с аналогичными выражениями в монографии В. Фока [3]. Отметим, что при выводе (37.33) мы не использовали никаких дополнительных предположений, какие делались при выводе аналогичного соотношения в [3].

Уравнения движения упругой среды получим из законов сохранения (37.5). Используя выражение (37.12), имеем

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = V_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\varepsilon V_\nu) + \varepsilon V_\nu \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{37.36}$$

Умножая последнее соотношение на V_μ, получаем выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\varepsilon V_\nu) = -V_\mu \frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial x_\nu},$$

подстановка которого в (37.36) дает

$$\varepsilon \frac{dV_\mu}{ds} = g^*_{\mu\sigma} \frac{\partial S_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu}. \tag{37.37}$$

Последние уравнения представляют собой уравнения движения упругой среды.

Так как при выводе теоремы Нетер использовались "уравнения поля"(36.8), то естественно установить связь их с уравнениями движения. Если в электродинамике уравнениям поля приписывается явный смысл, то в теории упругости их смысл не ясен и поэтому его необходимо выяснить. Используя (37.11), находим

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial Ł}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\left(\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\varepsilon}\right)}\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\mu}\right) =$$

$$\frac{\partial Ł}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu} + \frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\varepsilon}{\partial x_\sigma}\right)}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\nu}\right)}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\nu}\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\left(\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\varepsilon}\right)}\right)\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\mu} = \frac{\partial y^\beta}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial Ł}{\partial y^\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\nu}\right)}\right)\right), \tag{37.38}$$

или

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial y^\varepsilon} = \frac{\partial Ł}{\partial y^\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial Ł}{\partial\left(\frac{\partial y^\varepsilon}{\partial x_\nu}\right)}\right) = 0. \tag{37.39}$$

Таким образом, "уравнения поля"(36.8) оказались полностью эквивалентными уравнениям движения (37.37), так как оба соотношения могут быть получены из одних и тех же законов сохранения

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

38. Тензор момента количества движения

Пусть преобразование (36.9) соответствует бесконечно малому преобразованию Лоренца, или, что то же самое, бесконечно малому повороту. Как известно, конечное преобразование Лоренца записывается в виде

$$x_{\mu'} = L_{\mu'\mu}x_\mu, \quad L_{\mu'\mu}L_{\mu'\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad L_{\mu'\mu} = \text{const}. \tag{30.22}$$

Рассмотрим бесконечно малые преобразования Лоренца, т.е.

$$L_{\mu\varepsilon} = \delta_{\mu\varepsilon} + \delta\omega_{\mu\varepsilon}, \tag{38.1}$$

где $\delta\omega_{\mu\varepsilon}$ - бесконечно малые параметры. Из условия ортогональности матриц Лоренца имеем

$$L_{\mu\varepsilon}L_{\mu\sigma} = \delta_{\varepsilon\sigma} + \delta\omega_{\sigma\varepsilon} + \delta\omega_{\varepsilon\sigma} + \delta\omega_{\mu\varepsilon}\delta\omega_{\mu\sigma} = \delta_{\varepsilon\sigma}. \tag{38.2}$$

Из (38.2), пренебрегая вторым порядком малости, имеем

$$\delta\omega_{\sigma\varepsilon} = -\delta\omega_{\varepsilon\sigma}. \tag{38.3}$$

Таким образом, соотношение (36.9) можно представить в виде

$$x'_\mu = x_\mu + \delta\omega_{\mu\varepsilon}x_\varepsilon. \tag{38.4}$$

С другой стороны, из (36.10) имеем

$$\delta x_\mu = \delta\omega_{\mu\varepsilon}x_\varepsilon = X_{\mu(\gamma\sigma)}\delta\omega_{(\gamma\sigma)}, \quad (\eta \to (\gamma\sigma)), \tag{36.10}$$

где индекс η заменен на "собирательный"индекс $(\gamma\sigma)$. Здесь скобки, естественно, не являются символом симметрирования. В результате имеем

$$(X_{\mu(\gamma\sigma)} - \delta_{\mu\gamma}x_\sigma)\delta\omega_{(\gamma\sigma)} = 0. \tag{38.5}$$

Учитывая антисимметрию бесконечно малых преобразований $\delta\omega_{\gamma\sigma}$ и их произвольность, имеем из (38.5), что

$$X_{\mu(\gamma\sigma)} = \frac{1}{2}(\delta_{\mu\gamma}x_\sigma - \delta_{\mu\sigma}x_\gamma). \tag{38.6}$$

Так как при преобразовании координат (38.4) функции поля y^μ ведут себя как совокупность скалярных функций, то

$$y'^\mu(x'_\gamma) - y^\mu(x_\gamma) = \delta y^\mu = 0. \tag{38.7}$$

С другой стороны, из (36.12)

$$\delta y^\mu(x_\varepsilon) = \psi^\mu_{(\gamma\sigma)}\delta\omega_{(\gamma\sigma)} = 0. \tag{38.8}$$

Из (38.8) следует, что либо $\psi^\mu_{(\gamma\sigma)} = \psi^\mu_{(\sigma\gamma)}$, либо $\psi^\mu_{(\gamma\sigma)} = 0$. Но так как функции поля y^μ есть скалярные функции при любых преобразованиях x_ε, (а не только при преобразованиях трансляций или поворотов), то из равенства нулю δy^μ в (36.12) и произвольности $\delta\omega_\eta$ вытекает, что $\psi^\mu_\eta = 0$, а следовательно и

$$\psi^\mu_{(\gamma\sigma)} = 0. \tag{38.9}$$

Подстановка (38.9) и (38.6) в (36.20) дает

$$\bar{\Theta}_{(\gamma\sigma),\varepsilon} = T_{\alpha\varepsilon}X_{\alpha(\gamma\sigma)} = \frac{1}{2}(T_{\gamma\varepsilon}x_\sigma - T_{\sigma\varepsilon}x_\gamma). \tag{38.10}$$

Введем обозначение

$${}^{0}_{(\sigma\gamma),\varepsilon} = T_{\gamma\varepsilon}x_\sigma - T_{\sigma\varepsilon}x_\gamma. \tag{38.11}$$

В квантовой теории поля обычно под последней величиной понимается орбитальный момент волнового поля, а под величиной

$$S_{\sigma\gamma,\varepsilon} = \frac{\partial \text{Ł}}{\partial\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x_\varepsilon}\right)}\psi^\nu_{(\sigma\gamma)} \tag{38.12}$$

понимается спиновый момент. Их сумма представляет собой полный момент. В нашем случае в силу (38.9) спиновый момент равен нулю, поэтому орбитальный и полный момент совпадают. Из (36.19) вытекает, что должны иметь место соотношения

$$2\frac{\partial\bar{\Theta}_{(\gamma\sigma),\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon}=\frac{\partial M^0_{(\sigma\gamma),\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon}=0, \tag{38.13}$$

что эквивалентно следующему выражению, вытекающему из дифференцирования (38.11) и закона сохранения энергии (37.5), а именно

$$\frac{\partial M^0_{(\sigma\gamma),\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon}={}_{\gamma\sigma}-T_{\sigma\gamma}=0. \tag{38.14}$$

Как мы доказали ранее, тензор энергии-импульса симметричен, поэтому равенство (38.14) удовлетворяется автоматически и из него имеют место закон сохранения момента количества движения сплошной изотропной упругой среды. Проведя те же самые вычисления, как и при получении выражения (36.21), имеем закон сохранения в виде

$$\bar{\ }^{0}_{\sigma\gamma}=-\frac{i}{c}\int(T_{\gamma4}x_\sigma-T_{\sigma4}x_\gamma)dV=\mathrm{const}. \tag{38.15}$$

Пространственные компоненты $\bar{M}^0_{ik}$ являются релятивистским обобщением закона сохранения момента импульса сплошной среды. Выясним, следуя [7], смысл сохраняющихся компонент $\bar{M}^0_{4i}$.

$$\bar{\ }^{0}_{4i}=x_4\Big(-\frac{i}{c}\int(T_{i4}dV\Big)+\frac{i}{c}\int x_iT_{44}dV=\mathrm{const}. \tag{38.16}$$

В силу (37.6) имеем

$$x_4P_i+\frac{i}{c}\int x_iT_{44}dV=\mathrm{const}. \tag{38.17}$$

В силу закона сохранения энергии

$$-\int T_{44}dV=W=\mathrm{const}. \tag{38.18}$$

Поделив обе части равенства (38.17) на W, получим

$$x_4\frac{P_i}{W}-\frac{i}{c}R_i=\mathrm{const},\quad R_i\equiv\frac{\int x_iT_{44}dV}{\int T_{44}dV}. \tag{38.19}$$

Здесь R_i есть релятивистское определение центра инерции системы. Дифференцируя (38.19) по времени t, получим с учетом сохранения полного импульса и энергии системы, что

$$\frac{dR_i}{dt}=v_i^c=c^2\frac{P_i}{W}=\mathrm{const}, \tag{38.20}$$

т.е. центр инерции замкнутой системы движется с постоянной скоростью v_i^c.

39. Релятивистский закон Гука

В классической механике сплошных сред под законом Гука понимают закон, устанавливающий связь между тензорами напряжений и деформаций. Мы попытаемся установить эту связь и в релятивистском случае. Поскольку на некоторой актуальной гиперповерхности, ортогональной мировым линиям, среда покоится, то ее свойства эквивалентны свойствам среды в лагранжевой сопутствующей системе отсчета при классическом рассмотрении. Поэтому все основные выводы классической теории сплошной среды эквивалентны выводам релятивистского рассмотрения сточки зрения гиперповерхностей, нормальных мировым линиям частиц среды. Хотя тензор кривизны таких гиперповерхностей в общем случае отличен от нуля, однако кривизна их зависит не от тензоров деформаций, а от тензоров скоростей деформаций. Таким образом, в рамках СТО кривизна гиперповерхностей не влияет на тензор напряжений упругого тела, зависящий от тензора деформаций.

Как мы отмечали ранее, в силу рассматриваемой нами кинематики, для любого актуального (начального) момента "времени"$y^4 = \mathrm{const}$ в каждой точке пространства-времени имеется четыре репера (два ортогональных и два аффинных), а именно:

1. Система $\{O, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ с векторным базисом h_μ (30.2), (30.38), $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, $x_4 = ict$, $-dS^2 = \delta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ выбирается как система отсчета, в которой определяется перемещение или движение (система наблюдателя).

2. Лагранжева система $\{M, y^k, \dot{y}^4\}$ с векторами базиса

$$\frac{\partial \vec{r}_0}{\partial y^k} = \vec{\dot{h}}_k, \quad \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \dot{y}^4} = \vec{\dot{h}}_4, \tag{31.11}$$

отвечающая положениям точек среды на некоторой начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 = \mathrm{const}$. В этой системе образы подвижных точек фиксированы. 4-радиус-вектор $\vec{r}_0$ соединяет начало координат СО с начальными координатами точек движущейся среды.

3. Лагранжева сопутствующая система $\{M, y^\alpha$ с векторами базиса

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y^\alpha} = \vec{\hat{h}}_\alpha, \tag{31.12}$$

отвечающая измененным положениям точек среды на рассматриваемой (актуальной) гиперповерхности y^4.

4. Эйлерова сопутствующая система, представляющая собой систему тетрад $h_\mu(\alpha)$, переносимых по Ферми-Уолкеру (30.75).

Дадим определение релятивистски упругого тела, пользуясь аналогией с известным классическим определением из монографии Л.И. Седова [44].

Назовем среду упругой, в которой компоненты тензора напряжений $\hat{S}^{ki}$, $(S(ki))$ на актуальной гиперповерхности для каждой частицы являются функциями компонент тензора деформаций $\hat{u}_{ij}$, $U(ij)$, компонент метрического тензора данной гиперповерхности $\hat{g}_{ij}$, $(\delta(ij))$, температуры $\hat{T}$ и других физико-химических параметров $\hat{\chi}_i$, т.е.

$$\hat{S}^{ij} = \hat{f}^{ij}(\hat{u}^{kl}, \hat{g}^{kl}, \hat{T}, \hat{\chi}_i), \tag{39.1}$$

$$S(kl) = f(kl)(U(kl), \delta(kl), \hat{T}, \hat{\chi}_i), \tag{39.2}$$

где первая формула соответствует сопутствующей лагранжевой, а вторая - сопутствующей эйлеровой системам отсчета. Так как в настоящей работе мы интересуемся чисто механическими процессами, то в дальнейшем параметры $\hat{T}$ и $\hat{\chi}_i$ указывать не будем. Конкретный вид функций $\hat{f}^{ij}$, $(f(ij))$ может быть различным для различных моделей сплошных сред. Как следует из опыта, напряжения и деформации во многих твердых телах связаны между собой законом Гука. Для малых деформаций, повторяя те же рассуждения, что и в классической теории упругости [44], можно написать

$$\hat{S}^{ij} = \hat{A}^{ijkl}\hat{u}_{kl}, \tag{39.3}$$

$$S(ij) = A(ijkl)U(kl). \tag{39.4}$$

Соотношения (39.3) и (39.4), заданные на актуальной гиперповерхности $y^4 = \text{const}$, назовем релятивистским законом Гука. Все входящие в эти выражения величины, т.е. тензоры напряжений, деформаций и связывающие их коэффициенты, являются совокупностью скалярных функций относительно преобразований Лоренца. Тензоры $\hat{A}^{ijkl}$, $A(ijkl)$ (первый является тензором относительно преобразований лагранжевых переменных y^k, а второй - относительно преобразований триад $\vec{h}(k)$) имеют 81 компоненту, но из-за симметрии тензоров напряжений и деформаций число независимых компонент $\hat{A}^{ijkl}$, $A(ijkl)$ равно 36. Если среда, подчиняемая закону Гука, обладает какими либо свойствами симметрии, то число независимых компонент $\hat{A}^{ijkl}$, $A(ijkl)$ еще сокращается. В частности, для изотропной среды все $\hat{A}^{ijkl}$, $A(ijkl)$ определяются всего двумя параметрами. Релятивистски изотропной средой (по аналогии с классической механикой сплошных сред) назовем такую среду, свойства которой одинаковы по всем направлениям, выбранным на некоторой актуальной гиперповерхности. Дадим более точное математическое определение симметрии и, в частности, изотропии, основываясь на известном классическом определении [44], с той лишь разницей, что все свойства среды мы рассматриваем на гиперповерхностях, ортогональных мировым линиям, в то время как при классическом описании свойства среды задаются в мгновенном состоянии на гиперплоскости $t = \text{const}$. Упругие свойства среды среды задаются с помощью тензоров $\hat{A}^{ijkl}$, $A(ijkl)$.

Будем говорить, что среда на актуальной гиперповерхности $y^4 = \text{const}$ обладает симметрией, если существует группа преобразований координат (триад), такая, что компоненты тензоров, задающих свойства среды, не меняются при преобразованиях, принадлежащих этой группе. В частности, среду назовем релятивистски изотропной, если компоненты тензоров, определяющие ее свойства, не меняются при любых ортогональных преобразованиях координат (триад) на актуальной гиперповерхности. Так как упругие свойства среды определяются тензором $A(ijkl)$, то из определения изотропии вытекает, что

$$A'(ijkl) = A(ijkl), \tag{39.5}$$

где

$$A'(ijkl) = \omega(ip)\omega(jq)\omega(kr)\omega(ls)A(pqrs), \quad \omega(ip)\omega(jp) = \delta(ij) \tag{39.6}$$

Для выявления смысла (39.5) рассмотрим два деформированных состояния сплошной среды на $y^4 = \text{const}$, которые имеют одинаковый вид в разных повернутых друг относительно друга системах $\vec{h}(a)$ и $\vec{h}'(a)$, связанных преобразованием

$$\vec{h}'(a) = \omega(ab)\vec{h}(b), \quad \omega(ab) = \text{const}. \tag{39.7}$$

$$U(ab) = U'(ab). \tag{39.8}$$

В системах $\vec{h}(a)$ и $\vec{h}'(a)$ имеем соответственно

$$S(ij) = A(ijkl)U(kl), \quad S'(ij) = A'(ijkl)U'(kl). \tag{39.9}$$

выполняется соотношение (39.5), то из равенства (39.8) следует

$$S(ij) = S'(ij). \tag{39.10}$$

Таким образом, если одинаковые деформации, в повернутых друг относительно друга системах, приводят к к одинаковым напряжениям, то среда изотропна. Если же $U(ab) = U'(ab)$, а $A(ijkl) \neq A'(ijkl)$, то $S(ij) \neq S'(ij)$, т.е. среда анизотропна. Точно так же как и в классической механике сплошной среды, можно найти, что для релятивистски изотропной среды

$$\hat{A}^{ijkl} = \lambda \hat{g}^{ij}\hat{g}^{kl} + \mu(\hat{g}^{ik}\hat{g}^{jl} + \hat{g}^{il}\hat{g}^{jk}), \tag{39.11}$$

$$A(ijkl) = \lambda\delta(ij)\delta(kl) + \mu(\delta(ik)\delta(jl) + \delta(il)\delta(jk)), \tag{39.12}$$

где λ и μ - коэффициенты Ламе, заданные на актуальной гиперповерхности и являющиеся поэтому скалярами относительно преобразований Лоренца. Для тензоров напряжений имеем

$$\hat{S}^{ij} = \lambda \hat{u}^k_k \hat{g}^{ij} + 2\mu \hat{g}^{ik}\hat{g}^{jl}\hat{u}_{kl}, \tag{39.13}$$

$$S(ij) = \lambda U(kk)\delta(ij) + 2\mu U(ij). \tag{39.14}$$

Соотношение (39.14) можно получить и из соотношения (37.17), если для упругого потенциала в локальных тетрадах выбрать такое же выражение, как и в классической теории упругости в декартовых координатах [43], а именно

$$E = \frac{\lambda}{2}U(ii)U(kk) + \mu U(ik)U(ik). \tag{39.15}$$

Используя последнее соотношение, формулу (37.17) представим в виде

$$S(kl) = -\frac{2\rho^*}{\rho_0^*}\frac{\partial E}{\partial C(ak)}C(al) = \frac{\rho^*}{\rho_0^*}\frac{\partial E}{\partial U(ak)}[\delta(al) - 2U(al)]. \tag{39.16}$$

Или, ограничиваясь линейным приближением, с учетом, что $\rho^* \approx \rho_0^*$, имеем (39.14). Переходя в (39.14) от тетрадного представления к галилееву, получим

$$S_{\mu\nu} = h_\mu(i)h_\nu(j)S(ij) = \lambda U_{\sigma\sigma}g^*_{\mu\nu} + 2\mu U_{\mu\nu}, \tag{39.17}$$

где $U_{\mu\nu}$ определяется соотношениями (31.19) и (31.52). Соотношение (39.17) является релятивистским обобщением известного закона Гука для изотропного тела в системе отсчета наблюдателя (пространстве Минковского).

Всякую деформацию можно представить в виде суммы деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия, т.е.

$$U(ik) = \Big[U(ik) - \frac{1}{3}\delta(ik)U(nn)\Big] + \frac{1}{3}\delta(ik)U(nn). \tag{39.18}$$

Первый член справа является девиатором, связанный с чистым сдвигом (шпур девиатора равен нулю), второй член связан со всесторонним сжатием. Поэтому соотношение (39.17) можно записать и в другой форме

$$S_{\mu\nu} = kU_{\sigma\sigma}g^*_{\mu\nu} + 2\mu\Big[U_{\mu\nu} - \frac{1}{3}g^*_{\mu\nu}U_{\sigma\sigma}\Big], \quad k = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{39.19}$$

Так как

$$S_{\mu\mu} = 3kU_{\sigma\sigma}, \quad g^*_{\mu\mu} = 3, \tag{39.20}$$

то из (39.19) вытекает, что

$$U_{\mu\nu} = \frac{1}{9k} S_{\sigma\sigma} g^*_{\mu\nu} + \frac{1}{2\mu}\Big[S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} g^*_{\mu\nu} S_{\sigma\sigma}\Big]. \tag{39.21}$$

Последняя формула определяет тензор деформаций по тензору напряжений.

40. Замкнутость системы уравнений релятивистской упругой среды

Обсудим полученные нами уравнения для описания поведения релятивистской упругой среды. Так как при этом для простоты рассмотрения мы не учитывали взаимодействия между механическими и термическими процессами, то полагали, что поле температур, которое будет влиять на плотность среды, считаем заданным из немеханических соображений. В силу того, что $V_\mu V_\mu = -1$, из четырех уравнений движения сплошной среды (37.37) лишь три уравнения являются независимыми. Они образуют систему трех уравнений для девяти неизвестных функций: трех пространственных компонент 4-скорости V_k и шести независимых компонент тензора напряжений S_{kn}. Наличие шести независимых компонент тензора напряжений связано с его симметрией и ортогональности 4-скорости, что дает

$$S_{k4} = i\frac{v_b}{c} S_{kb}, \quad S_{44} = -\frac{v_a v_b}{c^2} S_{ab}. \tag{40.1}$$

При этом плотность ρ^* удовлетворяет уравнению неразрывности (35.16), решение которого может быть записано в виде (35.14а). Представим выражение для плотности как функцию тензора деформаций Коши (31.27), (31.28). Замечаем, что

$$\det ||(ab)|| = \det\Big|\Big|\dot{g}_{kl} \frac{\partial y^k}{\partial x(a)} \frac{\partial y^l}{\partial x(b)}\Big|\Big|. \tag{40.2}$$

Откуда следует

$$\det\Big|\Big|\frac{\partial y^a}{\partial x(b)}\Big|\Big| = \frac{1}{\sqrt{\dot{g}_{kl}}} \sqrt{\det ||(ab)||}. \tag{40.3}$$

Используя (35.15), имеем с учетом (37.18)

$$\rho^* = \rho^*_0 \sqrt{\frac{1}{6}[2C_{\beta\nu} C_{\nu\sigma} C_{\sigma\beta} - 3C_{\mu\nu} C_{\nu\mu} C_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\mu\mu} C_{\nu\nu} C_{\sigma\sigma}]}. \tag{40.4}$$

Таким образом, плотность ρ^* зависит от тензоров Коши в тетрадном или галилеевом представлении.

Вычислим тензор напряжений $S_{\mu\nu}$, выражая его через тензор Коши, отнесенный к пространству Минковского. Из соотношений (37.13) и (37.17) получим

$$S_{\mu\nu} = -\frac{2\rho^*}{\rho^*_0} g^*_{\mu\beta} \frac{\partial E}{\partial C(\alpha\beta)} C(\alpha\nu). \tag{40.5}$$

Таким образом, уравнения движения сплошной среды (37.37) можно представить в виде

$$\rho^* c^2\Big(1+\frac{E}{\rho_0^* c^2}\Big)V_\varepsilon\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\varepsilon}=-\frac{2}{\rho_0^*}g^*_{\mu\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big(\rho^* g^*_{\sigma\beta}C_{\alpha\nu}\frac{\partial E}{\partial C_{\alpha\beta}}\Big), \tag{40.6}$$

где в (40.6) входят только величины, выражающиеся через тензор Коши, 4-скорость и ее производные. Отметим, что тензор Коши из-за ортогональности 4-скорости и симметрии имеет шесть независимых компонент. Так как для трех независимых компонент 4-скорости и шести независимых компонент тензора Коши имеется лишь три независимых уравнения движения, то для замкнутости системы необходимо еще шесть независимых уравнений. В качестве таковых можно использовать уравнения (34.3).

$$D_{\alpha\beta}\equiv V_\mu\frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\alpha}C_{\mu\beta}+\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\beta}C_{\mu\alpha}=0. \tag{34.3}$$

В силу того, что $D_{\alpha\beta}=D_{\beta\alpha}$ и $D_{\alpha\beta}V_\beta=0$, это уравнение имеет лишь шесть независимых компонент.

Таким образом, для девяти неизвестных функций в нашем распоряжении имеется девять независимых уравнений, что и доказывает замкнутость системы уравнений, описывающих поведение релятивистского упругого континуума.

При наличии внешнего поля, действующего на упругую среду, в правой части уравнения движения (40.6) нужно добавить член, характеризующий взаимодействие среды с внешним полем.

Если мы получили решение в переменных Эйлера, то от них можно перейти и к переменным Лагранжа. Переход от одних переменных к другим при заданном поле 4-скорости $V_\mu(x_\varepsilon)$ связан с интегрированием дифференциальных уравнений. Для нахождения Лагранжевых координат y^k воспользуемся уравнением

$$V_\mu\frac{\partial y^k}{\partial x_\mu}=\frac{dy^k}{dS}=0, \tag{40.7}$$

означающим постоянство лагранжевых координат вдоль мировых линий частиц движущейся среды. Интегралом этих уравнений будут искомые функции $y^k=f^k(x_\mu)$. Для нахождения параметра y^4, нумерующего ортогональные мировым линиям гиперповерхности, воспользуемся формулой (31.48)

$$\frac{\partial y^4}{\partial x_\nu}=-\theta V_\nu. \tag{31.48}$$

Получим условия интегрируемости этой системы. Умножая обе части на V_μ, находим, что

$$\theta=V_\nu\frac{\partial y^4}{\partial x_\nu}. \tag{40.8}$$

После чего систему (31.48) можно записать в эквивалентной форме

$$g^*_{\nu\varepsilon}\frac{\partial y^4}{\partial x_\varepsilon}=0. \tag{40.9}$$

Рассмотрим выражение

$$g^*_{\mu\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Big(g^*_{\nu\varepsilon}\frac{\partial y^4}{\partial x_\varepsilon}\Big)=g^*_{\mu\sigma}\frac{\partial g^*_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial y^4}{\partial x_\varepsilon}+g^*_{\mu\sigma}g^*_{\nu\varepsilon}\frac{\partial^2 y^4}{\partial x_\sigma\partial x_\varepsilon}=0. \tag{40.10}$$

Переставляя индексы μ и ν, имеем

$$g^*_{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^*_{\mu\varepsilon}\frac{\partial y^4}{\partial x_\varepsilon}\right) = g^*_{\nu\sigma}\frac{\partial g^*_{\mu\varepsilon}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial y^4}{\partial x_\varepsilon} + g^*_{\nu\sigma}g^*_{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 y^4}{\partial x_\sigma \partial x_\varepsilon} = 0. \tag{40.11}$$

Вычитая из (4.10) выражение (4.11), воспользуясь (31.48), получаем

$$-\theta V_\varepsilon\left(g^*_{\mu\sigma}\frac{\partial g^*_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\sigma} - g^*_{\nu\sigma}\frac{\partial g^*_{\mu\varepsilon}}{\partial x_\sigma}\right) = 0. \tag{40.12}$$

Последнее соотношение после простых преобразований приводит к равенству

$$\omega_{\mu\nu} = 0, \tag{40.13}$$

где тензор угловой скорости вращения определен в (34.14) или (при выборе другой сигнатуры) в (1.4).

Таким образом, условия интегрируемости системы (31.48) сводятся к известному утверждению [20], что при отсутствии вращений мировые линии среды образуют нормальную конгруенцию. Если $\omega_{\mu\nu} \neq 0$, то система (31.48) несовместна, т.е. в этом случае нельзя построить гиперповерхности $y^4 = \text{const}$, которая ортогональна мировым линиям частиц среды.

Отметим, что при выводе тензоров деформаций мы допускали существование семейства гиперповерхностей, ортогональных мировым линиям. Однако, если глобальные гиперповерхности существуют при $\omega_{\mu\nu} = 0$, то в малой области изменения параметра y^k, когда рассматриваются две соседние мировые линии, всегда можно построить локально нормальную им гиперповерхность. Аппарат неголономных преобразований, развитый нами в главе 2, допускает рассмотрение произвольного движения сплошной среды как с отсутствием, так и с наличием вращений. Он позволяет легко обобщить полученные в этой главе результаты на случай произвольного движения континуума. Однако мы этим заниматься не будем, а решим некоторые конкретные задачи.

41. Плоские упругие волны в неограниченной изотропной среде

Рассмотрим распространение малых возмущений в упругих телах. При адиабатических деформациях тензор напряжений $S_{\mu\nu}$ связан с тензором деформаций $U_{\mu\nu}$ при помощи релятивистского закона Гука (39.17), (39.19), а уравнения движения упругой среды задаются формулой (37.37). Ранее при выводе тензоров деформаций (31.44), (31.56) в качестве начального состояния мы выбирали недеформированную среду, отображаемую точками некоторой начальной гиперповерхности $\dot{y}^4 = \text{const}$ с метрическим тензором $\dot{g}_{kl}$. Однако начальное состояние можно определять по разному. В общем случае формула (31.50) не имеет места, т.е.

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y^4} \neq \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^4}.$$

Правая часть формулы (31.45) с учетом (31.48) имеет вид

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\mu} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y^4}\frac{\partial y^4}{\partial x_\mu}\right)\left(\delta_{\varepsilon\mu} - \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial y^4}\frac{\partial y^4}{\partial x_\nu}\right) = \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial s}V_\mu\right)g^*_{\varepsilon\nu} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\sigma}g^*_{\sigma\mu}g^*_{\varepsilon\nu}.$$

Соответственно, правая часть (31.51) запишется в виде

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\mu}-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y^4}\frac{\partial y^4}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\nu}-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y^4}\frac{\partial y^4}{\partial x_\nu}\right)=\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\sigma}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\lambda}g^*_{\sigma\mu}g^*_{\lambda\nu}.$$

Поэтому тензор деформаций (31.52) можно представить в форме

$$U_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\Big[g^*_{\sigma\mu}g^*_{\varepsilon\nu}\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial u_\sigma}{\partial x_\varepsilon}-\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\sigma}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varepsilon}\Big)\Big]. \tag{41.1}$$

Переход к сопутствующим тетрадам дает

$$\begin{gathered}U_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}h_\mu(\alpha)h_\nu(\beta)h_\sigma(k)h_\mu(k)h_\varepsilon(l)h_\nu(l)\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial u_\sigma}{\partial x_\varepsilon}-\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\sigma}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varepsilon}\Big)=\\ =\frac{1}{2}\delta(\alpha k)\delta(\beta l)\Big(\frac{{}^*Du(l)}{\partial x(k)}+\frac{{}^*Du(k)}{\partial x(l)}-\frac{{}^*Du(\lambda)}{\partial x(k)}\frac{{}^*Du(\lambda)}{\partial x(l)}\Big),\\ U(ab)=\frac{1}{2}\Big(\frac{{}^*Du(b)}{\partial x(a)}+\frac{{}^*Du(a)}{\partial x(b)}-\frac{{}^*Du(\lambda)}{\partial x(a)}\frac{{}^*Du(\lambda)}{\partial x(b)}\Big),\\ U(a4)=U(44)=0.\end{gathered} \tag{41.2}$$

Отметим, что формула (41.1) получена для общего случая при условии, что 4-вектор перемещения $\vec{u}$ существует. Она обобщает формулу (31.52), в которой начальное состояние фиксировано.

Рассмотрим случай бесконечно малых деформаций. Среда, отображаемая точками некоторой актуальной гиперповерхности $y^4=\mathrm{const}$ (мы считаем, что вращения отсутствуют), в общем случае деформируема. В качестве начального состояния на этой же гиперповерхности введем такое воображаемое состояние, в котором на каждый элемент не действуют никакие силы. (Внешние поля мы здесь не рассматриваем.) Таким образом, на актуальной гиперповерхности среда находится в двух состояниях: истинном деформированном и "примысленном"(терминология [44]) недеформированном состоянии, по отношению к которому мы и будем измерять деформацию среды. Тот факт, что рассматриваемая гиперповерхность в общем случае искривлена, ни в коей мере не означает еще, что в среде отсутствуют или присутствуют деформации, так как кривизна гиперповерхности определяется не тензором деформаций, а тензором скоростей деформаций. Следовательно, для любой произвольной нормальной мировым линиям гиперповерхности, среда на которой деформирована, найдется такое поле скоростей для недеформированного состояния, которая индуцирует гиперповерхность, совпадающую с данной в общей области их задания.

Так как мы рассматриваем бесконечно малые деформации, а в качестве начального состояния выбираем состояние на актуальной гиперповерхности, то малы будут не только деформации, но и 4-векторы перемещения $\vec{u}$, которые по построению лежат в касательном к $y^4=\mathrm{const}$ пространстве. Откуда имеем

$$u(4)=0,\quad ih_\mu(4)u_\mu=V_\mu u_\mu=0. \tag{41.3}$$

Для малых деформаций соотношения (41.2) и (41.1) представляются в виде

$$U(ab)=\frac{1}{2}\Big(\frac{{}^*Du(b)}{\partial x(a)}+\frac{{}^*Du(a)}{\partial x(b)}\Big),\quad U(a4)=U(44)=0. \tag{41.4}$$

$$U_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^*_{\sigma\mu} g^*_{\varepsilon\nu} \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial u_\sigma}{\partial x_\varepsilon} \Big). \tag{41.5}$$

В силу соотношения (34.16) при отсутствии вращения видно, что при бесконечно малых $U_{\alpha\beta}$ малы также $\sigma_{\alpha\beta}$, следовательно, произведение $\sigma_{\mu\alpha} U_{\mu\beta}$ представляют более высокий порядок малости, чем $\sigma_{\alpha\beta}$ и $dU_{\alpha\beta}/ds$. Поэтому соотношение (34.16) сводится к виду

$$\sigma_{\alpha\beta} = V_\mu \frac{\partial U_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \tag{41.6}$$

Вычислим 4-ускорение dV_μ/ds, используя равенства

$$x_\mu - \dot{x}_\mu = u_\mu, \quad \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{du_\mu}{ds} + \frac{d\dot{x}_\mu}{ds} = \frac{du_\mu}{ds} + \frac{d\dot{x}_\mu}{d\dot{s}} \frac{d\dot{s}}{ds}.$$

Так как u_μ бесконечно мал, то собственное время на двух бесконечно близких мировых линиях отличается мало, поэтому

$$V_\mu - \dot{V}_\mu = \frac{du_\mu}{ds} = V_\varepsilon \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\varepsilon}. \tag{41.7}$$

Повторное дифференцирование (41.7) по s с учетом, что $d\dot{V}_\mu/ds = 0$, дает

$$\frac{dV_\mu}{ds} = \frac{dV_\varepsilon}{ds} \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\varepsilon} + V_\varepsilon V_\sigma \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x_\varepsilon \partial x_\sigma} = V_\varepsilon V_\sigma \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x_\varepsilon \partial x_\sigma}, \tag{41.8}$$

где сохранены члены одного порядка малости, так как рассматривается тот случай, когда малы не только деформации, но и перемещения и ускорения. При этом скорость v не предполагается малой, хотя малы ее градиенты.

Итак, как и в классической теории упругости, при выводе уравнений для упругих волн мы делаем следующие допущения: Считаем малыми величинами деформации, перемещения, градиенты скоростей и ускорения. Произведение любых из этих величин есть второй порядок малости. В полученных уравнениях будем оставлять только члены первого порядка малости.

Из этого допущения находим

$$\frac{dU_{\mu\nu}}{ds} = \frac{1}{2} g^*_{\sigma\mu} g^*_{\varepsilon\nu} \frac{d}{ds} \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial u_\sigma}{\partial x_\varepsilon} \Big). \tag{41.9}$$

Заметим, что соотношение (41.6), примененное к бесконечно малым деформациям, справедливо лишь в том случае, если начальное состояние фиксировано. Формулы (34.3) и (34.16) были получены при условии, что $\partial \dot{g}_{kl}/\partial y^4 = 0$. Для настоящей задачи это условие не имеет места. Обобщим, доказанное для соотношения (34.3) утверждение, на случай $\partial \dot{g}_{kl}/\partial y^4 \neq 0$. Для этого правую часть (34.2) представим в виде

$$\frac{\partial \dot{g}_{lj}}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial y^4} \Big(\frac{\partial \dot{x}_\varepsilon}{\partial \dot{y}^l} \frac{\partial \dot{x}_\varepsilon}{\partial \dot{y}^j} \Big) = \frac{\partial}{\partial \dot{y}^l} \Big(\frac{\dot{V}_\varepsilon}{\dot{\theta}} \Big) \frac{\partial \dot{x}_\varepsilon}{\partial \dot{y}^j} + \frac{\partial}{\partial \dot{y}^j} \Big(\frac{\dot{V}_\varepsilon}{\dot{\theta}} \Big) \frac{\partial \dot{x}_\varepsilon}{\partial \dot{y}^l} =$$

$$= \Big(\frac{\partial \dot{V}_\alpha}{\partial \dot{x}_\beta} + \frac{\partial \dot{V}_\beta}{\partial \dot{x}_\alpha} + + \dot{V}_\alpha \frac{d\dot{V}_\beta}{d\dot{s}} + \dot{V}_\beta \frac{d\dot{V}_\alpha}{d\dot{s}} \Big) \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial \dot{y}^l} \frac{\partial \dot{x}_\beta}{\partial \dot{y}^j} = 2\dot{\sigma}_{\alpha\beta} \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial \dot{y}^l} \frac{\partial \dot{x}_\beta}{\partial \dot{y}^j}. \tag{41.10}$$

Так как $\dot\sigma_{\alpha\beta} = \dot\sigma_{\beta\alpha}$, $\dot\sigma_{\alpha\beta}\dot V_\beta = 0$, то

$$\frac{\partial \dot g_{lj}}{\partial y^4} = 2\dot\sigma_{\alpha\beta}\Big(\frac{\partial \dot x_\alpha}{\partial \dot y^l}\frac{\partial \dot x_\beta}{\partial \dot y^j} + \frac{\partial \dot x_\alpha}{\partial \dot y^4}\frac{\partial \dot x_\beta}{\partial \dot y^j} + \frac{\partial \dot x_\alpha}{\partial \dot y^l}\frac{\partial \dot x_\beta}{\partial \dot y^4} + \frac{\partial \dot x_\alpha}{\partial \dot y^4}\frac{\partial \dot x_\beta}{\partial \dot y^4}\Big). \tag{41.11}$$

Соотношение (41.11) с учетом последнего равенства заменяется на

$$D_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^\varepsilon}\frac{\partial x_\beta}{\partial y^\sigma} = 2\dot\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial \dot x_\alpha}{\partial \dot y^\varepsilon}\frac{\partial \dot x_\beta}{\partial \dot y^\sigma}, \tag{41.12}$$

где $\partial/\partial\dot y^\alpha = \partial/\partial y^a$. Формула (41.12) справедлива для любых деформаций, если только начальное состояние задается на актуальной гиперповерхности. Для бесконечно малых деформаций, используя равенство $x_\mu - \dot x_\mu = u_\mu$, и отличие от нуля якобиана преобразования

$$\det\Big\|\frac{\partial x_\alpha}{\partial y^\varepsilon}\Big\| \neq 0$$

получаем

$$\sigma_{\alpha\beta} = \dot\sigma_{\alpha\beta} + \frac{dU_{\alpha\beta}}{ds}. \tag{41.13}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\sigma} = V_\lambda\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_\lambda \partial x_\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\lambda}V_\lambda\Big) - \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_\sigma}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\lambda} \approx$$

$$\approx \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\frac{du_\varepsilon}{ds} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \dot V_\varepsilon}{\partial x_\sigma}. \tag{41.14}$$

Используя последнее равенство, находим для (41.9)

$$\frac{dU_{\mu\nu}}{ds} \approx \sigma_{\mu\nu} - \dot\sigma_{\mu\nu}. \tag{41.15}$$

Таким образом, выражение (41.5) обращает (41.13) в тождество.

В разделе 40 было показано, что замкнутой системой для упругой среды является система из девяти уравнений, из которых три уравнения динамических и шесть - кинематических. Так как для бесконечно малых деформаций соотношение (41.5) является решением (41.13), то для нахождения трех независимых компонент 4-вектора u_ε остается три независимых уравнения движения (37.37), которые с использованием закона Гука, можно записать в виде

$$\varepsilon\frac{dV_\mu}{ds} = g^*_{\mu\sigma}\frac{\partial S_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = g^*_{\mu\sigma}\Big(\hat\lambda\frac{\partial g^*_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu}U_{\varepsilon\varepsilon} + \hat\lambda g^*_{\sigma\nu}\frac{\partial U_{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_\nu} + 2\mu\frac{\partial U_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu}\Big), \tag{41.16}$$

где $\hat\lambda$ и μ - коэффициенты Ламе для адиабатических процессов, заданные на актуальной гиперповерхности. Из (41.3) вытекает, что

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\varepsilon}u_\mu + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\varepsilon}V_\mu = 0,$$

или, отбросив члены второго порядка малости, находим

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\varepsilon}V_\mu \approx 0.$$

Из последнего соотношения имеем

$$\frac{\partial u_4}{\partial x_\varepsilon} = -\frac{V_k}{V_4}\frac{\partial u_k}{\partial x_\varepsilon} = i\frac{v_k}{c}\frac{\partial u_k}{\partial x_\varepsilon}, \quad U_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\varepsilon}. \tag{41.17}$$

Замечая, что

$$g^*_{\mu\sigma}\frac{\partial g^*_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{dV_\mu}{ds},$$

воспользуясь также допущением о малости, получаем из (41.16) уравнения

$$\varepsilon V_\sigma V_\beta \frac{\partial^2 u_a}{\partial x_\sigma \partial x_\beta} = \hat{\lambda} g^*_{a\nu}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\nu \partial x_k} + i\frac{v_k}{c}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\nu \partial x_4}\right) + \mu g^*_{\nu\alpha}\frac{\partial^2 u_a}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} +$$

$$+\mu g^*_{a\alpha}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\alpha \partial x_k} + \mu\frac{iv_k}{c}g^*_{a\alpha}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_4 \partial x_\alpha} + \Phi_a, \tag{41.18}$$

где

$$\Phi_a = \hat{\lambda}\frac{i}{c}g^*_{a\nu}\frac{\partial v_k}{\partial x_\nu}\frac{\partial u_k}{\partial x_4} + \mu\frac{i}{c}g^*_{a4}g^*_{\nu\alpha}\frac{\partial v_k}{\partial x_\nu}\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} +$$

$$+\mu\frac{i}{c}g^*_{a\alpha}g^*_{\nu 4}\frac{\partial v_k}{\partial x_\nu}\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \mu\frac{\partial V_\sigma}{\partial x_\sigma}\frac{\partial u_a}{\partial x_\varepsilon}V_\varepsilon - \varepsilon\frac{\partial V_\sigma}{\partial x_\sigma}\frac{\partial u_a}{\partial x_\varepsilon}V_\sigma. \tag{41.19}$$

Отметим, что Φ_a являются малыми величинами по сравнению с остальными членами уравнения (41.18), так как в них входят в явном виде произведения малых величин градиентов скоростей и градиентов деформаций.

Допустим теперь, что величины u_k являются функциями только от x_1 и x_4. Поле скоростей среды $\vec{v}$ пусть совпадает с осью x_1. Тогда для отдельных компонент u_k получим уравнения

$$[\varepsilon V_4^2 + (2\mu + \hat{\lambda})V_1^2]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_4^2} + 2V_1V_4[\varepsilon - (2\mu + \hat{\lambda})]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_4} +$$

$$+[\varepsilon V_1^2 + (2\mu + \hat{\lambda})V_4^2]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \Phi_1, \tag{41.20}$$

$$[\varepsilon V_4^2 + \mu V_1^2]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_4^2} + 2V_1V_4[\varepsilon - \mu]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_4} + [\varepsilon V_1^2 + \mu V_4^2]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \Phi_2, \tag{41.21}$$

$$[\varepsilon V_4^2 + \mu V_1^2]\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_4^2} + 2V_1V_4[\varepsilon - \mu]\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_4} + [\varepsilon V_1^2 + \mu V_4^2]\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = \Phi_3. \tag{41.22}$$

Исследуем полученные уравнения. Из (37.12) следует выражение

$$\varepsilon = \sqrt{\dot{g}}\rho_0^* c^2 \det\left\|\frac{\partial y^i}{\partial x(k)}\right\|\left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right),$$

которое для малых деформаций сводится к виду

$$\varepsilon \approx \rho_0^* c^2. \tag{41.23}$$

Как известно из классической теории упругости [43], [44], между коэффициентами Ламе и плотностью среды ρ_0^* существуют следующие соотношения

$$\hat{\lambda} + 2\mu = c_l^2\rho_0^*, \quad \mu = c_t^2\rho_0^*, \tag{41.24}$$

где c_l и c_t - продольные и поперечные скорости звука соответственно. Из (41.24) следует, что $c_l > c_t$. Рассмотрим движение "релятивистски твердого"тела. Для классически твердых тел скорости звука (продольные и поперечные) стремятся к бесконечности. В согласии же со СТО, любые взаимодействия передаются со скоростями, не превышающими скорость света в вакууме. По этой причине мы введем определение "релятивистски твердого"тела. Назовем тело "релятивистски твердым если продольная скорость звука c_l равна скорости света в вакууме c. Для "релятивистски твердого"тела в силу (41.23) имеем

$$\hat{\lambda} + 2\mu = \varepsilon = \rho_0^* c^2 = \rho_0^* c_l^2. \tag{41.25}$$

Для "релятивистски твердых"тел, пренебрегая поправками второго порядка малости Φ_1 по сравнению с другими членами, имеем вместо (41.20) уравнение

$$\Box u_1 \equiv \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big) u_1 = 0. \tag{41.26}$$

Последнее уравнение представляет собой хорошо известное уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x_1 со скоростью света в вакууме. Причем скорость света (как и должно быть в СТО) не зависит от скорости движения среды.

Для компактности записи уравнения (41.20) введем обозначения

$$-[\varepsilon V_4^2 + (2\mu + \hat{\lambda})V_1^2] = a_{11}, \quad x_4 = ict = ix, \quad x_1 = y,$$

$$a_{12} = \frac{1}{i} V_1 V_4 [\varepsilon - (2\mu + \hat{\lambda})], \quad a_{22} = [\varepsilon V_1^2 + (2\mu + \hat{\lambda})V_4^2], \tag{41.27}$$

после которых уравнение принимает вид

$$a_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \Phi_1 = 0. \tag{41.28}$$

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \phi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{41.29}$$

мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному, а именно

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2\bar{a}_{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{a}_{22}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} - \bar{\Phi}_1 = 0, \tag{41.30}$$

где

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial x}\Big)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial y}\Big)^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big) + a_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{22}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big)^2, \tag{41.31}$$

а функция $\bar{\Phi}_1$ не зависит от вторых производных.

Естественно поставить вопрос: как выбрать ξ и η, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму? Выберем переменные ξ и η так, чтобы $\bar{a}_{11} = 0$. Рассмотрим дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.

$$a_{11}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{41.32}$$

Воспользуемся леммой [82], которая гласит, что если $\phi(x, y) = \text{const}$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0, \tag{41.33}$$

то функция $z = \phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (41.32).

Уравнение (41.33) распадается на два уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{41.34}$$

Знак подкоренного выражения в этих уравнениях определяет тип уравнения (41.28). Используя (41.27), имеем

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \varepsilon(\hat{\lambda} + 2\mu) > 0. \tag{41.35}$$

Это означает, что уравнение (41.28) относится к гиперболическому типу. Уравнения (41.34) после несложных алгебраических преобразований, учитывая, что

$$V_1 = \frac{v_1}{c\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \quad V_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}},$$

сводятся к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_1 + c_l}{c + \frac{v_1 c_l}{c}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v_1 - c_l}{c - \frac{v_1 c_l}{c}}. \tag{41.36}$$

Характеристические уравнения (41.36) совпадают с характеристическими уравнениями для плоских волн в релятивистской газовой динамике [136]. Так как в нашем случае v_1 и c_l практически постоянны, то интегралами (41.36) будут выражения

$$y - \frac{v_1 + c_l}{c + \frac{v_1 c_l}{c}}x = C_1, \quad y - \frac{v_1 - c_l}{c - \frac{v_1 c_l}{c}}x = C_2. \tag{41.37}$$

Полагая

$$\xi = y - \frac{v_1 + c_l}{c + \frac{v_1 c_l}{c}}x, \quad \eta = y - \frac{v_1 - c_l}{c - \frac{v_1 c_l}{c}}x \tag{41.38}$$

и воспользуясь вышеупомянутой леммой, мы обратим в нуль коэффициенты $\bar{a}_{11}$ и $\bar{a}_{22}$ в уравнении (41.30), которое при $\bar{\Phi}_1 = 0$ сводится к виду

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{41.39}$$

Решением последнего уравнения будет

$$u_1 = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{41.40}$$

которое после подстановок (41.38) и (41.27) дают

$$u_1 = f_1\Big(x_1 - \frac{v_1 + c_l}{1 + \frac{v_1 c_l}{c^2}}t\Big) + f_2\Big(x_1 - \frac{v_1 - c_l}{1 - \frac{v_1 c_l}{c^2}}t\Big). \tag{41.41}$$

Решение (41.41) имеет простой физический смысл. Функции f_1 и f_2 представляют собой две плоские волны, бегущие навстречу друг другу со скоростями v_1' и v_2' относительно неподвижной системы отсчета. При этом

$$v_1' = \frac{v_1 + c_l}{1 + \frac{v_1 c_l}{c^2}}, \quad v_2' = \frac{c_l - v_1}{1 - \frac{v_1 c_l}{c^2}}. \tag{41.42}$$

Соотношения (41.42) представляют собой хорошо известный релятивистский закон сложения скоростей, направленных по одной прямой. Уравнения (41.21) и (41.22) решаются аналогично и их решения отличаются от (41.41) лишь заменой в (41.41) продольной скорости звука c_l на поперечную скорость звука c_t.

$$u_{2,3} = \bar{f}_1\Big(x_1 - \frac{v_1 + c_t}{1 + \frac{v_1 c_t}{c^2}}t\Big) + \bar{f}_2\Big(x_1 - \frac{v_1 - c_t}{1 - \frac{v_1 c_t}{c^2}}t\Big). \tag{41.43}$$

Таким образом, при отсутствии внешних сил решением уравнения (41.16) в акустическом приближении являются продольные и поперечные волны, которые распространяются независимо друг от друга. Фазовые скорости этих волн складываются (релятивистски) из соответствующих фазовых скоростей относительно неподвижной системы плюс (минус) скорости системы v_1 как целой. При $v_1 = 0$ решения (41.41), (41.43) описывают продольные и поперечные волны в изотропной среде в классической теории упругости в случае малых деформаций. Конечно, этот результат можно было ожидать с самого начала, а рассмотренная задача является некоторой предварительной проверкой построенного аппарата. Любопытно, что релятивистский закон сложения скоростей, вытекающий из преобразований Лоренца, получен из решения дифференциальных уравнений теории упругости.

42. Релятивистский осциллятор

Используя релятивистское уравнение Ньютона,

$$m_0 c\frac{dV_\mu}{ds} = F_\mu, \tag{42.1}$$

рассмотрим движение материальной точки вдоль оси x_1. В приведенном уравнении m_0 - масса покоя, F_μ - 4-вектор силы, определяемый обычным образом

$$F_k = \frac{f_k}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad F_4 = \frac{i f_k v_k}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{42.1}$$

где f_k - трехмерный вектор силы. Сопутствующие тетрады для данного движения определяются равенством

$$h_\mu(\alpha) = \begin{pmatrix} -iV_4 & 0 & 0 & iV_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iV_1 & 0 & 0 & -iV_4 \end{pmatrix}, \tag{42.2}$$

где α - номер строки, а μ - номер столбца. Переход к сопутствующим тетрадам дает

$$m_0 c h_\mu(k) \frac{dV_\mu}{ds} = h_\mu(k) F_\mu = F(k), \quad F(4) = 0. \tag{42.3}$$

Так как $V_1 = V$, $V_2 = V_3 = 0$, то

$$m_0 c h_\mu(1) \frac{dV_\mu}{ds} = m_0 \frac{dV}{dt}. \tag{42.3}$$

Поэтому уравнение (42.3) представим в виде

$$m_0 \frac{dV}{dt} = F(1) = h_1(1) F_1 + h_4(1) F_4 = \frac{1}{c} f_1. \tag{42.4}$$

Релятивистски инвариантным определением упругой силы будет равенство

$$F(1) = -\frac{1}{c} k_0 x(1), \tag{42.5}$$

где k_0 - коэффициент жесткости, заданный в сопутствующей тетраде и являющийся поэтому скаляром относительно преобразований Лоренца.

$$dx(1) = h_\mu(1) dx_\mu = L_{\mu\mu'} L_{\mu\nu'} h_{\mu'}(1) dx_{\mu'} = h_{\mu'} dx_{\mu'}. \tag{42.6}$$

Из (42.6) следует, что $dx(1)$ - скаляр относительно преобразований Лоренца ($L_{\mu\mu'}$ - матрица Лоренца).

$$x(1) = \int\limits_L h_\mu(1) dx_\mu. \tag{42.6}$$

Интегрирование производится вдоль прямой линии L, лежащей на гиперплоскости $dx(4) = 0$ и соединяющей мировую линию $x_k = 0$ с мировой линией рассматриваемой частицы. Равенство $dx(4) = 0$ эквивалентно

$$dx(4) = h_\mu(4) dx_\mu = \frac{1}{i} V_\mu dx_\mu = 0. \tag{42.7}$$

Считая, что на гиперплоскости $dx(4) = 0$ тетрадное поле постоянно, используя (42.7), получим

$$x(1) = \int\limits_0^{x_1} \Big(h_1(1) - \frac{V_1}{V_4} h_4(1) \Big) d\xi = \frac{i x_1}{V_4}. \tag{42.8}$$

Уравнение (42.3) представим в виде

$$m_0 \frac{dV}{dt} = -\frac{k_0}{c} \frac{x_1}{\sqrt{1+V^2}}. \tag{42.9}$$

Считая, что

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1} v = \frac{cV}{\sqrt{1+V^2}} \frac{dV}{dx_1},$$

получим

$$m_0 c^2 V \frac{dV}{dx_1} = -k_0 x_1. \tag{42.10}$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$V^2 = -\frac{k_0}{m_0 c^2} {x_1}^2 + C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 определим из условия, что при $x_1 = 0$ должно быть $V = V_0$. Откуда имеем

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{k_0 {x_1}^2}{m_0 V_0^2 c^2}}, \quad x_1 \leq A = \sqrt{\frac{m_0 V_0^2 c^2}{k_0}}. \tag{42.11}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = v = \frac{\sqrt{\frac{k_0}{m_0}(A^2 - x_1^2)}}{\sqrt{1 + \frac{k_0(A^2 - x_1^2)}{m_0 c^2}}} < c. \tag{42.12}$$

Интегрирование уравнения (42.12) приводит к соотношению

$$\omega_0 t + \phi_0 = \sqrt{1 + \frac{{\omega_0}^2 A^2}{c^2}} E\Big(\arcsin\frac{x_1}{A}, k\Big) \tag{42.13}$$

где ϕ_0 - произвольная постоянная,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}, \quad k^2 = \frac{\omega_0^2 A^2}{c^2 + \omega_0^2 A^2}, \tag{42.14}$$

а $E(u, k)$ - эллиптический интеграл второго рода. Если $\omega_0^2 A^2 / c^2 \ll 1$, то соотношение (42.13) сводится к классическому

$$x_1 = A \sin(\omega_0 t + \phi_0). \tag{42.15}$$

При

$$V_0^2 = \frac{\omega_0^2 A^2}{c^2} = \frac{k_0 A^2}{m_0 c^2} \gg 1, \tag{42.16}$$

т.е. когда потенциальная энергия деформации много больше энергии покоя частицы, можно пользоваться рядом [105]

$$E(u, k) = \frac{2}{\pi} E'(k) \ln \tan\Big(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\Big) + ...,$$

$$E'(k) = \frac{\pi}{2}\Big(1 - \frac{1}{2}k'^2 - ... - \Big[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\Big]\frac{k'^n}{2n-1} - ...\Big), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}. \tag{42.17}$$

При выполнении неравенства (42.16) $k' \ll 1$, поэтому $E'(k) \approx \pi/2$.

$$E(u, k) \approx \ln\, \tan\Big(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\Big), \quad u = \arcsin\Big(\frac{x_1}{A}\Big). \tag{42.18}$$

Формула (42.13) для рассматриваемого случая (42.16) представима в виде

$$\tan\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\Big(\frac{x_1}{A}\Big)\Big) = e^{\frac{ct}{a} + \frac{c\phi_0}{\omega_0 A}}. \tag{42.19}$$

Левая часть последней формулы может быть представлена в виде

$$\tan\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\Big(\frac{x_1}{A}\Big)\Big) = \frac{1 + \frac{x_1}{A}}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A^2}}}. \tag{42.20}$$

Используя (42.20), разрешив (42.19) относительно x_1, получаем

$$x_1 = A\tanh\Big(\frac{ct}{A} + \frac{c\phi_0}{\omega_0 A}\Big), \tag{42.21}$$

$$v = \frac{dx_1}{dt} = \frac{c}{\cosh^2\Big(\frac{ct}{A} + \frac{c\phi_0}{\omega_0 A}\Big)}, \tag{42.22}$$

Постоянную ϕ_0 определим из начальных условий. Пусть при $t = 0$ частица находилась в начале координат, т.е. $x_1 = 0$. Тогда

$$x_1 = A\tanh\Big(\frac{ct}{A}\Big), \quad v = \frac{c}{\cosh^2\Big(\frac{ct}{A}\Big)}. \tag{42.23}$$

Таким образом, когда энергия упругой деформации намного превышает энергию покоя частицы, колебательный процесс не имеет места. Частица, выходя из начала координат со скоростью близкой к скорости света, за бесконечное время достигает своего амплитудного значения.

43. Прямолинейное релятивистское жесткое движение сплошной среды

В разделе 2 главы 1 мы рассматривали релятивистские жесткие равноускоренные НСО и доказали, что в пространстве Минковского в принципе невозможно жесткое в смысле Борна равноускоренное движение континуума. Пространство Минковского оказалось "тесным чтобы удовлетворить одновременно критериям жесткости и равноускоренности. Следовательно, возникает вопрос, какая НСО в СТО является аналогом классической жесткой равноускоренной системы отсчета? В научной литературе переход в жесткую "равноускоренную"(кавычки наши) НСО связывают с преобразованиями Меллера (2.11). Однако физический смысл координат и "времени"в НСО Меллера не обсуждается. Поэтому имеет смысл, не используя преобразования Меллера, описать жесткую НСО в рамках СТО на основе релятивистской механики сплошных сред [4]. Именно таким путем шел автор, ничего не подозревая в то время о преобразованиях Меллера.

Итак, поставим и решим следующую задачу. Пусть в момент времени $t = 0$ вдоль оси x_1 приходит в движение покоящаяся ранее сплошная среда. При этом, частица среды, находящаяся в покое в начальный момент времени в начале эйлеровых координат, движется так, что ее ускорение в локально сопутствующей системе отсчета постоянно и равно a_0. Требуется определить как будут двигаться остальные частицы среды, если движение среды является жестким в смысле Борна. Мы не можем требовать постоянства ускорения в локально сопутствующих тетрадах всех частиц, так как это требование не совместно с критерием жесткости по Борну. Очевидно, что в системе наблюдателя (O, x_1, x_2, x_3, x_4) поле 4-скорости V_μ имеет вид

$$V_1 = V_1(x_1, x_4), \quad V_2 = V_3 = 0, \quad V_4 = i\sqrt{1 + V_1^2}. \tag{43.1}$$

При этом

$$V_\mu = ih_\mu(4) = \theta\frac{\partial x_\mu}{\partial y^4},$$

$$h_\mu(\alpha) = \begin{pmatrix} -iV_4 & 0 & 0 & iV_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iV_1 & 0 & 0 & -iV_4 \end{pmatrix}, \tag{43.2}$$

где α - номер строки, а μ - номер столбца.

4-ускорение $a(\alpha)$ в локально сопутствующей системе имеет вид

$$a(\alpha) = h_\mu(\alpha)\frac{dV_\mu}{ds}, \quad a(2) = a(3) = a(4) = 0, \quad a(1) = \frac{i}{V_4}\frac{dV_1}{ds} = \frac{a_0}{c^2}, \tag{43.3}$$

где a_0 - обычное трехмерное ускорение.

Так как мы интересуемся сейчас движением индивидуальной частицы среды, покоящейся в начальный момент времени в начале координат, то для описания ее движения перейдем к переменным Лагранжа. Соотношение (43.3) примет вид

$$\theta\frac{\partial V_1}{\partial y^4} = \frac{\partial V_1}{\partial s} = \frac{V_4}{i}\frac{a_0}{c^2} = \sqrt{1+V_1^2}\frac{a_0}{c^2}, \tag{43.4}$$

где $s = c\tau$, $a_0 = \mathrm{const}$, τ - собственное время движущейся частицы. Интегрирование (43.4) при условии, что при $s = 0$ должно быть $V_1 = 0$, дает

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} = V_1 = \sinh\Big(\frac{a_0 s}{c^2}\Big), \quad \frac{\partial x_4}{\partial s} = V_4 = i\sqrt{1+V_1^2} = i\cosh\Big(\frac{a_0 s}{c^2}\Big). \tag{43.5}$$

Интегрирование последних уравнений при условии, что при $s = 0$ должно быть $x_1 = x_4 = 0$ приводит к хорошо известным соотношениям [7] (гиперболическое движение)

$$x_1 = \frac{c^2}{a_0}\cosh\Big(\frac{a_0 s}{c^2}\Big) - \frac{c^2}{a_0}, \quad x_4 = i\frac{c^2}{a_0}\sinh\Big(\frac{a_0 s}{c^2}\Big), \tag{43.6}$$

исключая s из которых, находим

$$x_1 = \frac{c^2}{a_0}\Big(\sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}} - 1\Big). \tag{43.7}$$

В отличие от равноускоренной системы Логунова [6], в которой все частицы среды совершают гиперболическое движение с равными друг другу и постоянными ускорениями в локально сопутствующей системе, мы требуем постоянства ускорения лишь для одной частицы среды. Все остальные частицы должны двигаться таким образом, чтобы сохранить конгруенцию мировых линий частиц среды жесткой в смысле Борна. В равноускоренной системе Логунова, в силу (2.10), нарушается критерий жесткости. В нашем случае, стараясь сохранить критерий жесткости и остаться в рамках СТО, мы вынуждены отказаться от равенства ускорений для всех частиц среды.

Для дальнейшего решения задачи воспользуемся критерием жесткости, т.е. решим уравнения

$$\sigma_{\mu\nu} = 0, \tag{43.8}$$

где $\sigma_{\mu\nu}$ задается формулой (34.12). Для рассматриваемого нам движения система уравнений (43.8) сводится к одному единственному уравнению

$$\sigma_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_1 V_\varepsilon\frac{\partial V_1}{\partial x_\varepsilon} = 0, \tag{43.9}$$

решение которого можно представить в виде

$$V_\mu x_\mu = \Psi(V_1), \tag{43.10}$$

где Ψ - произвольная функция. Для решения задачи Коши по отысканию функции Ψ воспользуемся условиями, что при x_1 и x_4, вычисленными в (43.6), V_1 и V_4 задаются соотношением (43.5). Откуда находим

$$\Psi(V_1) = -\frac{c^2}{a_0} V_1. \tag{43.11}$$

Подставив (43.11) в (43.10) и воспользуясь, что $V_1 = V_4 v_1/(ic)$, получим

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = \frac{a_0 t}{1 + \frac{a_0 x_1}{c^2}}. \tag{43.12}$$

Последнее соотношение определяет поле скоростей искомой жесткой СО в переменных Эйлера. При нерелятивистском рассмотрении $c \to \infty$ получаем классическое жесткое равноускоренное движение. Хотя предельный переход в формуле (43.12) приводит к классически правильному результату, однако распределение скоростей, на первый взгляд, приводит к противоречию с основным положением СТО, согласно которому скорость частиц среды не может быть больше скорости света в вакууме. Действительно, если фиксировать произвольную точку x_1, то можно всегда указать такой момент времени t, что скорость частиц среды v_1 в этой точке превысит скорость света c. Таким образом, или соотношение (43.12) не верно, либо область задания функции v_1 ограничена. Для выяснения этого вопроса рассмотрим движение среды с точки зрения лагранжевой системы координат. Интегрируя соотношение (43.12) при условии, что при $t = 0$ должно быть $x_1 = y^1$, где y^1 - начальные координаты точек континуума, получаем

$$x_1 = \frac{c^2}{a_0}\Bigg[\sqrt{\frac{a_0^2 t^2}{c^2} + \left(1 + \frac{a_0 y^1}{c^2}\right)^2} - 1\Bigg],$$

$$v_1(y^1, t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{\frac{a_0^2 t^2}{c^2} + \left(1 + \frac{a_0 y^1}{c^2}\right)^2}}. \tag{43.13}$$

Из полученного соотношения следует, что все частицы среды имеют скорость меньшую, чем скорость света, за исключением частиц с лагранжевыми координатами $y^1 = -c^2/a_0$, которые движутся со световой скоростью. Итак, поставленная задача имеет смысл лишь для тех точек континуума, начальные координаты которых $y^1 \geq -c^2/a_0$. Из соотношения (43.13) вытекает неравенство

$$\left(1 + \frac{a_0 x_1}{c^2}\right)^2 - \frac{a_0^2 t^2}{c^2} = \left(1 + \frac{a_0 y^1}{c^2}\right)^2 \geq 0,$$

которое эквивалентно неравенству

$$1 + \frac{a_0 x_1}{c^2} \geq \frac{a_0 t}{c}.$$

Откуда следует, что (43.12) удовлетворяет неравенству

$$\geq \frac{a_0 t}{1 + \frac{a_0 x_1}{c^2}} = v_1. \tag{43.14}$$

Таким образом, если мы фиксируем в (43.12) или (43.14) любую точку пространства $x_1 \geq -c^2/a_0$ то решение (43.14) справедливо лишь до того момента времени t, когда в фиксированную точку пространства не попадет "крайняя"частица, начальная координата которой $y^1 = -c^2/a_0$, а скорость $v_1 = c$. При любом фиксированном t в (43.14) решение справедливо для тех точек пространства x_1, которые больше координаты крайней частицы в момент времени t.

Полагая в формуле (43.13) $y^1 = 0$, получим выражения

$$x_1 = \frac{c^2}{a_0}\left[\sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}} - 1\right],$$

$$v_1(y^1, t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}, \tag{43.15}$$

которые совпадают с известными выражениями для смещения и скорости равноускоренного движения материальной точки среды, расположенной первоначально в начале координат [7].

Вычислим величину ускорения в сопутствующих тетрадах. Из выражений (43.10) и (43.11) находим

$$V_1 = \frac{a_0 t}{c}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{a_0 x_1}{c^2}\right)^2 - \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}. \tag{43.16}$$

В силу (43.3), ускорение в сопутствующих тетрадах имеет вид

$$a(1) = \frac{a_0}{c^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{a_0 x_1}{c^2}\right)^2 - \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}. \tag{43.17}$$

Переходя к переменным Лагранжа, получим

$$a(y^1, t) = \frac{a_0}{1+\frac{a_0 y^1}{c^2}}. \tag{43.18}$$

Таким образом, каждая фиксированная частица среды движется с постоянным в собственной системе отсчета ускорением, но эти ускорения не равны друг другу. Поэтому назвать такое движение релятивистски жестким и равноускоренным можно лишь весьма условно.

Легко проверить, что в силу выбранной нами кинематики тензор угловой скорости вращения $\omega_{\mu\nu}$ тождественно равен нулю, поэтому мировые линии образуют нормальную конгруенцию. Задача по отысканию параметра y^4 сводится к интегрированию уравнений

$$\overset{*}{g}_{\nu\varepsilon}\frac{\partial y^4}{\partial x_\varepsilon} = 0, \tag{40.9}$$

условия интегрируемости для которых $\omega_{\mu\nu} = 0$ в нашем случае выполнены. Если расписать по компонентам два уравнения из (40.9) для $\mu = 1, 4$, то оказывается, что оба из них сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial y^4}{\partial x_1} + \frac{v_1}{c^2}\frac{\partial y^4}{\partial t} = 0. \tag{43.19}$$

Два остальных уравнения сводятся к виду

$$\frac{\partial y^4}{\partial x_2} = \frac{\partial y^4}{\partial x_3} = 0,$$

решение которых $y^4 = y^4(x_1, t)$. Подставив из (43.12) в (43.19), получим уравнение

$$\frac{\partial y^4}{\partial x_1} + \frac{a_0 t}{c^2 + a_0 x_1}\frac{\partial y^4}{\partial t} = 0. \tag{43.20}$$

Решив последнее уравнение, получим

$$y^4 = f\Big(\frac{t}{a_0 x_1 + c^2}\Big). \tag{43.21}$$

Для определения функции f выберем $y^4 = is$ вдоль мировой линии частицы, выходящей из начала координат, для которой справедливы уравнения (43.6). Тогда

$$is = f\Big(\frac{1}{a_0 c}\tanh\frac{a_0 s}{c^2}\Big),$$

или

$$f(u) = i\frac{c^2}{a_0}\operatorname{artanh}(uca_0),$$

что дает

$$y^4 = i\frac{c^2}{a_0}\operatorname{artanh}\Big(\frac{a_0 t}{c + \frac{a_0 x_1}{c}}\Big) = i\frac{c^2}{a_0}\operatorname{artanh}\Big(\frac{v_1}{c}\Big). \tag{43.21}$$

Вычислим скалярный множитель

$$\theta = V_\varepsilon\frac{\partial y^4}{\partial x_\varepsilon}.$$

Вычисления дают

$$\theta = \frac{i}{\sqrt{\Big(1 + \frac{a_0 x_1}{c^2}\Big)^2 - \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}} = \frac{i}{1 + \frac{a_0 y^1}{c^2}}. \tag{43.22}$$

Величина θ является интегрирующим множителем, связывающим полный дифференциал dy^4 с ds, который полным дифференциалом не является.

Найдем уравнения конгруенции мировых линий для рассматриваемого движения, т.е. определим функции $x_\mu = x_\mu(y^\alpha)$. Так как начальная гиперповерхность, ортогональная мировым линиям, совпадает с гиперплоскостью $x_4 = 0$, то в качестве лагранжевых сопутствующих координат y^k можно выбрать начальные координаты покоящегося тела. В силу того, что среда движется вдоль оси x_1, имеем $x_2 = y^2$, $x_3 = y^3$. Разрешив совместно систему уравнений (43.21) и (43.13) относительно t и x_1, получим

$$t = \frac{c}{a_0}\Big(1 + \frac{a_0 y^1}{c^2}\Big)\sinh\Big(\frac{a_0 y^4}{ic^2}\Big), \quad x_1 = \frac{c^2}{a_0}\Big[\Big(1 + \frac{a_0 y^1}{c^2}\Big)\cosh\Big(\frac{a_0 y^4}{ic^2}\Big) - 1\Big]. \tag{43.23}$$

Если обозначить

$$\frac{y^4}{ic} \equiv T,$$

то закон движения (43.23) в точности совпадает с преобразованиями Меллера (2.11). Отметим, что в литературе преобразование Меллера (см., например, широко известную монографию В.А. Фока [3]) связывают (ошибочно!) с переходом от ИСО к жесткой равноускоренной НСО. Ошибка состоит в том, что НСО Меллера, являясь жесткой, не является равноускоренной. Об этом говорит формула (43.18), которая содержится и в книге Меллера [2]. Меллер (в отличие от его интерпретаторов) не считает свою систему равноускоренной.

Итак, неоднородное силовое поле приводит к релятивистски жесткому движению (очевидно, ускорение (43.18) может быть обусловлено только неоднородным силовым полем), а однородное силовое поле (система Логунова) приводит к нарушению жесткости. Это обстоятельство, на наш взгляд, является главной трудностью описания сплошной среды в рамках пространства Минковского. Только выходя за рамки плоского пространства-времени, можно добиться того, что однородное силовое поле не будет нарушать жесткости движущейся в нем среды. Это мы показали в главе 1.

Используя (42.23) и (42.22), вычислим метрический тензор на актуальной, ортогональной мировым линиям гиперповерхности.

$$\hat{g}_{kl} = \frac{\partial x_\mu}{\partial y^k}\frac{\partial x_\mu}{\partial y^l} = \delta_{kl}. \tag{43.24}$$

Таким образом, метрический тензор g_{kl} не зависит от параметра y^4. Следовательно, на любой, в том числе и на начальной гиперповерхности метрический тензор $\dot{g}_{kl} = \delta_{kl}$. Поэтому тензор деформаций

$$u_{kl} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{kl} - \dot{g}_{kl}) = 0. \tag{43.25}$$

Полученный результат не является неожиданным. Он вытекает из общей развитой здесь теории, согласно которой жесткое в смысле Борна движение из начального недеформированного состояния не приводит к возникновению в среде деформаций.

Характерной особенностью полученного решения является наличие "горизонта". Т.е такая НСО может осуществляться только ограниченными телами, размер которых вдоль оси x_1 в начальный момент времени определяется интервалом

$$-\frac{c^2}{a_0} < x_1 < \infty.$$

44. Объяснение эффектов ОТО на основе механики СТО и свойств НСО

Раздел 21 был посвящен моделированию полей гравитации в рамках ОТО. Однако существует и другая возможность объяснения всех эффектов ОТО на базе релятивистской механики СТО и учете свойств неинерциальности Земли, на которой вынужден находиться наблюдатель и его приборы. Известно, что одной из основных трудностей ОТО является та, что уравнения Эйнштейна (уравнения поля) общековариантны, в то время как все ее результаты не являются таковыми. Более того ..."эйнштейновской формулировке теории тяготения присущ тот основной недостаток, что она совершенно умалчивает о физической системе отсчета, относительно которой должны производиться измерения [40]."Однако не существует такого явления и нет такого наблюдателя, которых нельзя было бы отнести к какой либо системе отсчета. Иногда последняя задается помимо воли и желания экспериментатора. Он с его приборами, как правило, находится на Земле. Принадлежность наблюдателя к такой СО накладывает определенные поправки на результаты наблюдений, с которыми следует считаться. Подробно эти вопросы рассмотрены в работах В. И. Родичева [1], [13-15].

В предлагаемом разделе исследуются геометрические свойства пространства-времени НСО для случая, когда метрические тензоры на гиперповерхностях ортогональных мировым линиям для НСО и квази-ИСО совпадают. Метрический тензор НСО при этом однозначно определяется конгруенцией мировых линий, описывающих движение базиса НСО в силовом поле любой природы. Дается геометрическая интерпретация основных характеристик континуума, представляющих базис НСО. Показывается, что тензор аффинной деформации связности в локально сопутствующих тетрадах содержит в себе информацию о силовом поле, в котором движется этот базис, а также выражается через тензор скоростей деформаций и тензор угловой скорости вращения сплошной среды. На основе того, что гравитационная и инертная массы совпадают, из принципа наименьшего действия выводится тензор гравитационного поля и уравнения пробной массы в гравитационном поле. При этом, уравнения Эйнштейна не используются. Выводятся уравнения Гамильтона-Якоби в НСО для пробной массы, мировая линия которой может как принадлежать, так и не принадлежать конгруенции мировых линий базиса НСО. В качестве примеров, на основе предложенной в работе схемы, рассматривается движение в центрально-симметричном гравитационном поле. При этом, полученные результаты для смещения перигелия орбиты, отклонения луча света, и красного смещения такие же, как и в ОТО. На основании полученных результатов делаются выводы:

1. Сходство между законами Кулона и Ньютона позволяет построить теорию тяготения в плоском пространстве-времени по аналогии с электродинамикой.

2. Учет свойств НСО, в которой исследователь проводит свои измерения, является столь же необходимым, что и сами уравнения.

Показывается, что именно из-за того, что экспериментатор и его приборы находятся на Земле (а не на Солнце и звездах), три известных эффекта ОТО могут быть объяснены в рамках формализма, развитого в плоском пространстве-времени.

Перейдем к непосредственному решению поставленной задачи.

Рассмотрим многообразие, в котором задана конгруенция линий

$$x^\mu = f^\mu(y^\alpha). \tag{44.1}$$

Всюду в дальнейшем греческие индексы будут изменяться от единицы до четырех, а латинские - от единицы до трех. В каждой точке многообразия M зададим два тензорных поля.

$$g_{\mu\nu}(M) = g_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad \mathrm{tg}_{\mu\nu}(M) = \mathrm{tg}_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3, x^4). \tag{44.2}$$

Пусть $g_{\mu\nu}$ - есть метрический тензор пространства Минковского, а $\mathrm{tg}_{\mu\nu}$ - метрический тензор некоторого псевдориманова пространства, квадраты интервалов в которых между между одними и теми же точками выражаются соответственно как

$$-dS^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{44.3}$$

$$-d\tilde{S}^2 = \mathrm{t}g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu. \tag{44.4}$$

Конгруенцию (44.1) будем рассматривать с двух точек зрения:

1. Пусть (44.1) есть конгруенция мировых линий, отображающих в пространстве Минковского движение базиса некоторой СО, представляющей собой совокупность бесконечного числа тел, заполняющих все пространство (или часть его). Роль параметров y^α выполняют лагранжевы координаты, первые три из которых y^k постоянны вдоль каждой мировой линии частицы среды, а y^4 - переменный, "временной".

2. Пусть (44.1) есть конгруенция геодезических в псевдоримановом пространстве с каноническим параметром y^4.

Из определений 1, 2 вытекают следующие соотношения

$$\frac{DV^\mu}{dS} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial S^2} + \Gamma^\mu_{\varepsilon\sigma}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial S}\frac{\partial x^\sigma}{\partial S} = f^\mu, \tag{44.5}$$

$$\frac{\tilde{D}\tilde{V}^\mu}{dy^4} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial {y^4}^2} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\varepsilon\sigma}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial y^4}\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^4} = 0, \tag{44.6}$$

$$V^\mu = \Theta\frac{\partial x^\mu}{\partial y^4} = \frac{\partial x^\mu}{\partial S} = \Theta\tilde{V}^\mu, \tag{44.7}$$

где скалярный множитель Θ выбирается так, чтобы выполнить условие

$$g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = -1. \tag{44.8}$$

На основе (44.7) соотношение (44.6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial S^2} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\varepsilon\sigma}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial S}\frac{\partial x^\sigma}{\partial S} - V^\mu\frac{\partial \ln\Theta}{\partial S} = 0. \tag{44.9}$$

Учитывая (44.5), находим

$$S^\mu_{\varepsilon\sigma}V^\varepsilon V^\sigma = V^\mu\frac{\partial \ln\Theta}{\partial S} - f^\mu, \tag{44.10}$$

где

$$S^\mu_{\varepsilon\sigma} \equiv \tilde{\Gamma}^\mu_{\varepsilon\sigma} - \Gamma^\mu_{\varepsilon\sigma}. \tag{44.11}$$

Так как $S^\mu_{\varepsilon\sigma}$ представляет собой разность двух символов Кристоффеля в одной и той же точке пространства, то эта величина является общековариантным тензором аффинной деформации связности.

Прежде чем переходить к дальнейшему рассмотрению, проанализируем физический смысл определений 1 и 2. Соотношение (44.5) представляет собой релятивистский закон Ньютона в пространстве Минковского, а соотношение (44.6) - уравнения геодезических в псевдоримановом пространстве с равным нулю 4-ускорением $\tilde{f}^\mu$. Однако по определению решения уравнений (44.5) и (44.6) есть одни и те же величины (44.1), которые можно интерпретировать как закон движения сплошной среды в переменных Лагранжа в общей координации. При этом простые соображения подсказывают, что соотношения (44.6) можно интерпретировать как описание движения базиса НСО с точки зрения наблюдателей, связанных с точками этого базиса. Тогда по отношению к каждому из наблюдателей соответствующие точки базиса покоятся, т.е. относительная скорость и относительное ускорение базиса по отношению к таким наблюдателям равны нулю. Это видно и непосредственно из формулы (11.8), когда мировая линия произвольной пробной частицы совпадает с одной из мировых линий базиса. Очевидно, что при $V^\mu = U^\mu$ следует, что относительное 4-ускорение $K^\alpha = 0$.

Исчезновение же объективно существующего поля ускорений (силового поля) должно привести к появлению "чего-то другого чем является (как будет показано ниже) тензор аффинной деформации связности или производный от него тензор кривизны.

Целью этого раздела является установление связи между тензорами $g_{\mu\nu}$ и $\mathrm{tg}_{\mu\nu}$, т.е. между метрическим тензором пространства Минковского и метрическим тензором псевдориманова пространства, каким в общем случае описывается базис НСО, история движения которого отображается множеством мировых линий. Построим к этому семейству мировых линий (если это окажется невозможным в конечной, то ограничимся малыми областями, установив между ними связь) семейство ортогональных к ним гиперповерхностей, на которых выполняется условие ортогональности

$$V_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^k} = 0. \tag{44.12}$$

Используя (44.12) и тождество

$$V_\mu \delta^m_\nu u = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x_\nu} V_\mu, \tag{44.13}$$

получим

$$\frac{\partial y^4}{\partial x^\nu} = -\Theta V_\nu, \tag{44.14}$$

$$\nabla_\nu \frac{\partial y^4}{\partial x^\mu} = -\Theta \nabla_\nu V_\mu - V_\nu \frac{\partial \Theta}{\partial x^\mu}. \tag{44.15}$$

Воспользуясь равенством

$$\nabla_\nu \frac{\partial y^4}{\partial x^\mu} - \nabla_\mu \frac{\partial y^4}{\partial x^\nu} = 0, \tag{44.16}$$

соотношение (44.16) сведем к виду

$$\frac{DV_\mu}{dS} = -(\delta^\nu_\mu + V^\nu V_\mu)\frac{\partial \ln \Theta}{\partial x^\nu} = f_\mu, \tag{44.17}$$

или

$$\frac{DV_\mu}{dS} = -g^{*\mu\nu}\frac{\partial \ln \Theta}{\partial x^\nu} = f_\mu. \tag{44.18}$$

Полагая также

$$i\frac{\partial x^\mu}{\partial y^4} = \tilde{V}^\mu, \quad \frac{i}{\Theta} \equiv e^\phi, \tag{44.19}$$

$$\tilde{V}^\mu = \frac{i}{\Theta} V^\mu = e^{-\phi} V^\mu, \tag{44.20}$$

имеем

$$\frac{DV_\mu}{dS} = -g^{*\nu}_\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} = f_\mu. \tag{44.21}$$

Так как

$$\mathrm{tg}_{\mu\nu} \tilde{V}^\mu \tilde{V}^\nu = -1, \tag{44.22}$$

то вычитая из (44.22) выражение (44.8) и используя (44.20), находим

$$(\tilde{g}_{\alpha\beta} - e^{2\phi} g_{\alpha\beta}) V^\alpha V^\beta = 0. \tag{44.23}$$

Если бы V^α было произвольным, то из (44.23) вытекало бы

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}. \tag{44.24}$$

Однако V^α задано заранее и (44.24) не имеет места в общем случае. Общим решением (44.23) будет соотношение [13]

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} - e^{2\phi} g_{\alpha\beta} = e^{2\phi} a_{\alpha\beta}, \tag{44.25}$$

где $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ и $a_{\alpha\beta} V^\beta = 0$. Множитель $e^{2\phi}$ в правой части введен из удобства. Произвольный тензор $a_{\alpha\beta}$, лежащий на гиперповерхности, ортогональной мировым линиям, не может быть определен без дополнительных условий. Для выяснения этих условий рассмотрим на произвольной ортогональной мировым линям гиперповерхности квадрат "физического"пространственного расстояния между двумя бесконечно близкими частицами среды с точки зрения наблюдателей из двух пространств.

$$dl^2 = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^k} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^l} dy^k dy^l, \tag{44.26}$$

$$d\tilde{l}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^k} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^l} dy^k dy^l, \tag{44.27}$$

что дает

$$d\tilde{l}^2 - dl^2 = (\hat{\tilde{g}}_{kl} - \hat{g}_{kl}) dy^k dy^l, \tag{44.28}$$

где $\hat{\tilde{g}}_{kl}$ и $\hat{g}_{kl}$ - трехмерные "физические"тензоры. Для выяснения связи между пространственными метрическими тензорами рассмотрим двух наблюдателей. Пусть первый наблюдатель находится в данной НСО, т.е. движется вместе с одной из частиц среды, относительно которой его трехмерная скорость и ускорение равно нулю. Пусть второй наблюдатель движется равномерно так, что его скорость в какой то момент времени совпадает со скоростью рассматриваемой частицы среды. По отношению ко второму наблюдателю в данный момент времени рассматриваемая частица также покоится, но имеет отличное от нуля ускорение. Далее, оба наблюдателя измеряют пространственное расстояние между какими-либо двумя бесконечно близкими фиксированными точками частицы (т.е. расстояние между двумя бесконечно близкими мировыми линиями на гиперповерхности, которая к этим линиям ортогональна). В согласии с СТО, всякое неинерциальное движение локально инерциально. Поэтому мы можем ожидать, что результат измерений двух наблюдателей будет одинаков. Математически это означает обращение равенства (44.28) в нуль, что приводит к соотношению

$$\hat{\tilde{g}}_{kl} = \hat{g}_{kl}. \tag{44.29}$$

Умножая последнее равенство на

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^l}{\partial x^\nu}$$

и учитывая (44.7) и (44.14), а также равенства

$$\tilde{V}^\varepsilon = e^{-\phi} V^\varepsilon, \quad \tilde{V}_\varepsilon = e^{\phi} V_\varepsilon, \quad \tilde{V}^\varepsilon \tilde{V}_\varepsilon = V^\varepsilon V_\varepsilon = -1, \tag{44.30}$$

получим

$$\mathrm{tg}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \Big(1 - e^{2\phi}\Big) V_\mu V_\nu. \tag{44.31}$$

Последнее соотношение можно представить в виде

$$\mathrm{tg}_{\mu\nu} = e^{2\phi}(g_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}), \quad a_{\mu\nu} = \Big(e^{-2\phi} - 1\Big) g^*_{\mu\nu}. \tag{44.32}$$

Итак, требование (44.29) приводит к однозначному определению $\mathrm{tg}_{\mu\nu}$, если задать такое поле 4-силы, что будут выполняться условия интегрируемости системы (44.21) для отыскания поля скоростей и конформной функции ϕ. Из (44.31) найдем, что контрвариантный тензор $\mathrm{tg}^{\mu\nu}$ определяется равенством

$$\mathrm{tg}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \Big(1 - e^{-2\phi}\Big) V^\mu V^\nu \tag{44.33}$$

или, что то же самое

$$\mathrm{tg}^{\mu\nu} = e^{-2\phi}\Big(g^{\mu\nu} + b^{\mu\nu}\Big), \quad b^{\mu\nu} = \Big(e^{2\phi} - 1\Big) g^{*\mu\nu}. \tag{44.34}$$

Отметим, что в работе [13] тензоры $a_{\mu\nu}$ и $b^{\mu\nu}$ не конкретизированы и связаны лишь условием их ортогональности 4-скорости, которое в нашем случае выполняется тождественно. Конечно, вывод тензоров $a_{\mu\nu}$ и $b^{\mu\nu}$, основанный нами на равенстве бесконечно малых пространственных расстояний в сопутствующей СО для для двух различных наблюдателей, отнюдь не является строгим. Последнее слово в теоретических исследованиях всегда принадлежит эксперименту.

Рассмотрим геометрию движущегося континуума для найденного нами метрического тензора. Так как общий анализ геометрических свойств СО подробно изложен в [13], то мы остановимся только на свойствах, связанных с явным заданием метрических тензоров (44.31), (44.33). В силу (44.11)

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\varepsilon\sigma} = \Gamma^\mu_{\varepsilon\sigma} + S^\mu_{\varepsilon\sigma}, \tag{44.35}$$

где $\tilde{\Gamma}^\mu_{\varepsilon\sigma}$, $G^\mu_{\varepsilon\sigma}$ - символы Кристоффеля, соответствующие метрическим тензорам $\mathrm{tg}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ соответственно. Следовательно,

$$\tilde{\nabla}_\sigma \,\mathrm{tg}_{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0, \tag{44.35}$$

где $\tilde{\nabla}_s$ и ∇_σ - символы соответствующих ковариантных производных. Тензор аффинной деформации связности $S^\tau_{\mu\nu}$ может быть найден из соотношений

$$S^\tau_{\mu\nu} = \mathrm{tg}^{\tau\sigma} S_{\mu\nu,\sigma}, \quad S_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\Big(\nabla_\mu \,\mathrm{tg}_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \,\mathrm{tg}_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \,\mathrm{tg}_{\mu\nu}\Big). \tag{44.36}$$

Или с учетом (44.31) и (44.33) получим

$$S^\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{\tau\sigma}\Big(2V_\sigma V_{(\nu} T_{\mu)} + 2T V_\sigma \nabla_{(\mu} V_{\nu)} +$$

$$+ 2T V_\nu \nabla_{[\mu} V_{\sigma]} + 2T V_\mu \nabla_{[\nu} V_{\sigma]} - V_\mu V_\nu T_\sigma\Big), \tag{44.37}$$

где

$$T = \left(1 - e^{2\phi}\right), \quad T_\sigma = \frac{\partial T}{\partial x^\sigma}. \tag{44.38}$$

Найдем выражение для тензора аффинной деформации связности в сопутствующих тетрадах пространства Минковского, для которых выполняется условие

$$V^\mu = ih^\mu(4). \tag{44.39}$$

Отметим предварительное равенство

$$\mathrm{tg}^{\tau\sigma}\, h_\tau(\gamma) = h^\sigma(\gamma) + i\left(1 - e^{-2\phi}\right)V^\sigma\delta(4\gamma). \tag{44.40}$$

В результате находим

$$\begin{gathered} S(ab,c) = 0, \quad S(ab,4) = S(ba,4) = i\left(e^{-2\phi} - 1\right)\sigma(ab), \\ S(a4,4) = S(4a,4) = -S(44,a) = -f(a) = h^\nu(a)\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}, \\ S(44,4) = -i\frac{d\phi}{dS}, \quad S(4b,c) = S(b4,c) = \\ = -S(4c,b) = \frac{i}{2}\left(1 - e^{2\phi}\right)\omega(bc), \end{gathered} \tag{44.41}$$

где $\sigma(ab)$ и $\omega(ab)$ - соответственно тензоры скоростей деформаций и угловой скорости вращения в локальных тетрадах, которые в пространстве Минковского определены с помощью соотношений (34.12) и (34.14). Легко проверить, что подстановка выражения (44.37) в выражение (44.10) обращает последнее в тождество. Таким образом, мы видим, что тензор аффинной деформации связности в локальных тетрадах содержит в себе как информацию о силовом поле, так и кинематические характеристики континуума.

Тензор кривизны для НСО с учетом, что метрический тензор $g_{\mu\nu}$ принадлежит пространству Минковского, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{\tau}_{\mu\nu,\sigma.} &= 2\left[\partial_{[\mu}\tilde{\Gamma}^{\tau}_{\nu]\sigma} + \tilde{\Gamma}^{\tau}_{\lambda[\mu}\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\nu]\sigma}\right] = \\ &= 2\left[\nabla_{[\mu}S^{\tau}_{\nu]\sigma} + S^{\tau}_{\lambda[\mu}S^{\lambda}_{\nu]\sigma}\right]. \end{aligned} \tag{44.42}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи СО. Если в качестве СО рассмотреть квази-ИСО, для которой

$$\frac{DV_\mu}{\partial S} = -(\delta^\nu_\mu + V^\nu V_\mu)\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} = f_\mu = 0, \quad \nabla_{[\mu}V_{\nu]} = 0, \tag{44.43}$$

то

$$\sigma_{\alpha\beta} = \nabla_{(\mu}V_{\nu)}, \quad \omega_{\alpha\beta} = 0.$$

Тензор кривизны в этом случае представим в виде

$$\tilde{R}^{\tau}_{\mu\nu,\sigma.} = \left(1 - e^{-2\phi}\right)\left[\sigma^\tau_\nu\sigma_{\mu\sigma} - \sigma^\tau_\mu\sigma_{\nu\sigma}\right], \tag{44.44}$$

где $\phi = \text{const}$. Как мы показали ранее, тензор скоростей деформаций в пространстве Минковского совпадает со вторым основным тензором гиперповерхностей, ортогональных мировым линиям. Для жесткого в смысле Борна движения $\sigma_{\mu\nu} = 0$ и квази-ИСО превращается в ИСО с параллельными мировыми линиями. Таким образом, происхождение тензора кривизны квази-ИСО связано с тем фактом, что тела базиса квази-ИСО находятся в относительном движении.

Рассмотрим уравнения движения в поле тяжести пробной массы с точек зрения наблюдателей ИСО и НСО. Так как закон Кулона и закон Ньютона одинаков, то можно попытаться строить теорию гравитационного поля по аналогии с электродинамикой. Однако, как известно из опыта, между гравитационным полем и электростатическим имеется существенное различие. В гравитационном поле тела различных масс испытывают одинаковое ускорение. Как известно из СТО, движение частиц, из которых состоит тело, увеличивает массу этого тела. Так как гравитационная и инертная массы эквивалентны, то движение массы должно увеличивать и создаваемое ей гравитационное поле, в то время как в электродинамике величина заряда не зависит от скорости заряда.

Итак, действие для частицы, движущейся в заданном гравитационном поле, с точки зрения наблюдателей ИСО складывается из двух частей: из действия свободной частицы и из члена, описывающего взаимодействие частицы с полем.

$$S = \int_a^b \Big(-mcds + \frac{m_0}{c}\psi A_\mu dx^\mu\Big), \tag{44.45}$$

где m_0 - масса покоя пробной частицы, A_μ - 4-вектор потенциал, ψ - скаляр, описывающий отличие гравитационного поля от электромагнитного. Заметим, что если положить $\psi = 1$, $m_0 = e$, то получим действие для заряда, движущегося в электромагнитном поле, которое (с точностью до выбора сигнатуры метрики) совпадает с (21.2). Из принципа наименьшего действия обычным образом [7] получим

$$m_0 c\frac{DV'_\mu}{ds} = \frac{m_0}{c}F_{\mu\nu}V'^\nu, \tag{44.46}$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu(\psi A_\nu) - \nabla_\nu(\psi A_\mu) = \frac{\partial(\psi A_\nu)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial(\psi A_\mu)}{\partial x^\nu}, \tag{44.47}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = m_0 cV'_\mu + \frac{m_0}{c}\psi A_\mu = P_\mu. \tag{44.48}$$

Для определения смысла скаляра ψ воспользуемся тем, что в случае статического с точки зрения наблюдателя ИСО поля в галилеевой системе координат должен отсутствовать векторный потенциал, т.е. $A_k = 0$. В этом случае уравнение движения должно иметь вид

$$m_0 c\frac{DV'_k}{ds} = \frac{m_0}{c}\frac{\partial(\psi A_4)}{\partial x^k}V'_4. \tag{44.49}$$

Так как

$$V'_k = \frac{v_k}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad V'_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad A_4 = i\Phi_0,$$

$$ds = cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad \Phi_0 = -\frac{kM_0}{r}, \tag{44.50}$$

то

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m_0 v_k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big) = \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\psi \frac{k m_0 M_0}{r}\Big). \tag{44.51}$$

В последней формуле k - гравитационная постоянная, M_0 - масса источника гравитирующего тела, r - расстояние между центрами пробного тела и источника. Так как при возрастании скорости тела его масса возрастает, то должна возрастать и его потенциальная энергия взаимодействия. Поэтому скаляр ψ должен быть равен

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}},$$

где v' - величина относительной скорости между массами m_0 и M_0. Очевидно, что этот скаляр в общем случае можно представить в явном виде в лоренц ковариантной форме.

$$\psi = |V'_\mu V''_\mu|,$$

где V'_μ - 4-скорость пробного тела, V''_μ - 4-скорость источника. Так как в исходной ИСО источник покоится, то $V''_k = 0$, $V''_4 = i$ и поэтому

$$\psi = |V'_\mu V''_\mu| = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, уравнение (44.51) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m_0 v'_k}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\Big) = \frac{d}{dt}(m_e v'_k) = \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\frac{k m_e M_0}{r}\Big). \tag{44.52}$$

Таким образом, последнее уравнение напоминает классическое нерелятивистское уравнение движения, в котором масса покоя пробного тела m_0 заменена на эффективную массу движущегося тела m_e. Для электродинамики $\psi = 1$.

Для описания движения пробной частицы с точки зрения наблюдателя из НСО удобнее воспользоваться уравнением Гамильтона-Якоби. Пусть пробная частица движется по отношению к НСО так, что ее мировая линия не принадлежит конгруенции мировых линий, образующих базис НСО. Будем по-прежнему обозначать вектор 4-скорости пробной частицы относительно ИСО как V'^μ и как V^μ - поле скоростей базиса НСО по отношению к ИСО.

Рассмотрим предварительное выражение, на основе которого попытаемся вывести уравнение Гамильтона Якоби. Воспользуясь формулой (44.33), находим

$$\mathrm{t}g^{\mu\nu}\, m_0 c V'_\mu m_0 c V'_\nu = (g^{\mu\nu} + \chi V^\mu V^\nu) m_0^2 c^2 V'_\mu V'_\nu = -m_0^2 c^2 [1 - \chi (V^\mu V'_\mu)^2],$$

$$\chi \equiv 1 - e^{-2\phi}.$$

Если в это выражение подставить вместо $m_0 c V'_\mu$ его компоненты из (44.48), то получим

$$(g^{\mu\nu} + \chi V^\mu V^\nu)\Big(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - \frac{m_0}{c}\psi A_\mu\Big)\Big(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} - \frac{m_0}{c}\psi A_\nu\Big) +$$

$$+ m_0^2 c^2 [1 - \chi (V^\mu V'_\mu)^2] = 0. \tag{44.53}$$

Итак, получили уравнение Гамильтона-Якоби, которое описывает движение пробной массы для наблюдателей в НСО, использующих координаты ИСО пространства Минковского. Для перехода от НСО к ИСО в уравнении (44.53) нужно положить $\chi = 0$. Для дальнейших исследований перейдем к сопутствующим тетрадам базиса НСО, в котором $ih^\mu(4) = V^\mu$. Для этого случая уравнение (44.53) примет вид

$$(1-\chi)\Big(\frac{\partial S}{\partial x(4)} - \frac{m_0}{c}\psi A(4)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial S}{\partial x(k)} - \frac{m_0}{c}\psi A(k)\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(\frac{\partial S}{\partial x(k)} - \frac{m_0}{c}\psi A(k)\Big) + m_0^2c^2[1-\chi(iV'(4))^2] = 0. \qquad (44.54)$$

На основе полученного уравнения рассмотрим движение пробной массы в центрально-симметрическом гравитационном поле. Рассмотрим сначала случай, когда мировая линия рассматриваемой частицы принадлежит одной из мировых линий базиса НСО. Для этого случая $V'(4) = i$. Кроме того примем, что $A(k) = 0$. Тогда уравнение (44.54) будет иметь вид

$$(1-\chi)\Big[\Big(\frac{\partial S}{\partial x(4)} - \frac{m_0}{c}\psi A(4)\Big)^2 + m_0^2c^2\Big] + \frac{\partial S}{\partial x(k)}\frac{\partial S}{\partial x(k)} = 0. \qquad (44.55)$$

Конформную функцию ϕ определим из уравнений движения (44.21) и (44.46), записанных в сопутствующих тетрадах. Уравнение (44.21) в сопутствующих тетрадах представимо в виде

$$h^\mu(k)f_\mu = f(k) = -\frac{\partial\phi}{\partial x(k)}. \qquad (44.56)$$

Уравнение (44.6) с учетом $A(k) = 0$ в сопутствующих тетрадах представимо как

$$f(k) = \frac{i}{c^2}\frac{\partial(\psi_1 A(4))}{\partial x(k)}\frac{1}{1+\frac{A(4)\psi_1}{ic^2}} \qquad (44.57)$$

Полагая $A(4) = i\Phi$, находим из сравнения двух последних формул, что

$$\frac{\partial\phi}{\partial x(k)} = \frac{\partial}{\partial x(k)}\ln\Big(1+\frac{\psi_1\Phi}{c^2}\Big). \qquad (44.58)$$

Для дальнейших вычислений сделаем следующие физические допущения: В центре массивного тела, создающего гравитационное поле, выбираем начало координат ИСО. В качестве базиса НСО выбирается планетарная система отсчета [1], т.е. совокупность тел, движущихся по замкнутым орбитам в плоскости $\theta = \pi/2$ (т.е. плоскости x_1, x_2) вокруг оси x_3. Очевидно, что для наблюдателей, находящихся на одном из тел НСО, пространственные расстояния измеряются в гиперплоскости, ортогональной мировой трубке наблюдателей. Выбирая на этой гиперплоскости сферическую систему координат, начало которой связано с мировой линией начала координат ИСО, и учитывая, что движение тел (с точки зрения ИСО) происходит в одной плоскости, имеем

$$f(3) = -\frac{\partial\phi}{\partial x(3)} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x(k)} = \frac{\partial\phi}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x(k)} = \frac{\partial\phi}{\partial R}n(k), \quad k = 1,2,$$

$$n(k)n(k) = 1, \quad \phi = \ln\Big(1+\frac{\psi_1\Phi}{c^2}\Big). \qquad (44.59)$$

Для наблюдателя из планетарной НСО уравнение Гамильтона-Якоби сведется к виду

$$(1-\chi)\Big[-\frac{1}{c^2}\Big(\frac{\partial S}{\partial \tau}+\frac{m_0}{c}\psi_1\Phi\Big)\Big)^2+m_0^2c^2\Big]+\Big(\frac{\partial S}{\partial R}\Big)^2+\frac{1}{R^2}\Big(\frac{\partial S}{\partial u}\Big)^2=0, \tag{44.60}$$

где R - радиальные, u - угловые полярные координаты на гиперплоскости.

Для определения скаляра ψ_1 проинтегрируем (44.52), когда движение происходит по круговой орбите.

$$\psi_1=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x+O(x)}},\quad x\equiv\frac{kM_0}{Rc^2}=\frac{r_0}{2R}, \tag{44.61}$$

где M_0 - масса покоя тела, создающего гравитационное поле, r_0 - гравитационный радиус, $O(x)$ - члены большего порядка малости по x, чем x. Величина

$$1-\chi=\frac{1}{\Big(1+\frac{\psi_1\Phi}{c^2}\Big)^2}=1+2x+4x^2. \tag{44.62}$$

В последнем соотношении мы ограничились членами второго порядка малости по x.

По общим правилам решение уравнения Гамильтона-Якоби ищем в виде

$$S=-E_0\tau+Mu+S_R(R)$$

с постоянной энергией E_0 и моментом импульса M. Радиальная часть действия сводится к виду

$$S_R=\int\sqrt{\Big[\frac{1}{c^2}\Big(E_0-\frac{m_0\psi_1}{c}\Phi\Big)^2-m_0^2c^2\Big](1-\chi)-\frac{M^2}{R^2}}dR, \tag{44.63}$$

где

$$\Phi=-\frac{kM_0}{R},\quad -\frac{m_0\psi_1}{c}\Phi=\frac{m_0c^2x}{\sqrt{1-x+O(x)}}=m_0c^2\Big(x+\frac{1}{2}x^2\Big). \tag{44.64}$$

Раскрыв подкоренное выражение в (44.63) и ограничившись членами квадратичными по x, имеем

$$S_R=\int\Big[\Big(2E'm_0+\frac{E'^2}{c^2}\Big)(1+2x+4x^2)+2E_0m_0x+$$

$$+(5E_0m_0+m_0^2c^2)x^2-\frac{M^2}{R^2}\Big]^{1/2}dR, \tag{44.65}$$

где E' - нерелятивистская энергия (без энергии покоя). Так как мы рассматриваем нерелятивистский случай, то $E_0\gg E'$ и поэтому $E_0\approx m_0c^2$. Как известно из [7], поправочные коэффициенты при x и свободный член под корнем отражаются только на не представляющем особого интереса изменении связи между энергией и моментом частицы и параметрами ее ньютоновской орбиты (эллипса). Изменение коэффициента при $1/R^2$ приводит к более существенному эффекту - смещению перигелия орбиты. Траектория определяется из уравнения

$$u+\frac{\partial S_R}{\partial M}=\mathrm{const}.$$

Используя вычисления из [7], получим

$$\delta u = \frac{6\pi k M_0}{c^2 a(1-e^2)}, \tag{44.66}$$

где e - эксцентриситет эллипса, a - большая полуось, δu - перемещение ньютоновского эллипса за время одного оборота, т.е. смещение перигелия орбиты. Полученная формула (44.66) совпадает с аналогичным выражением из ОТО. Отметим, что если бы мы вывели эту формулу при $\psi_1 = 1$, что соответствует электродинамике, то получили бы значение перигелия с точки зрения НСО как

$$\delta u = \frac{5\pi Q q}{c^2 a(1-e^2) m_0} = \frac{5\pi Q^2 q^2}{c^2 M^2}, \tag{44.67}$$

где Q - заряд, создающий поле, q - противоположный по знаку пробный заряд. Сравнение последней формулы с (26.40), где рассматривалось движение электрона в поле протона, говорит о их совпадении. Переходя к ИСО (т.е. $\chi = 0$ в (44.63)), получим для случая модифицированного гравитационного взаимодействия

$$\delta u = \frac{2\pi k M_0}{c^2 a(1-e^2)}, \tag{44.68}$$

а для электродинамики

$$\delta u = \frac{\pi Q q}{c^2 a(1-e^2) m_0} = \frac{\pi Q^2 q^2}{c^2 M^2}. \tag{44.69}$$

Таким образом, смещение перигелия с точки зрения ИСО для модифицированной гравитации в три раза меньше, а для электродинамики в пять раз меньше, чем для наблюдателя из НСО.

Рассмотрим распространение светового луча в центрально-симметричном гравитационном поле с точки зрения наблюдателя из НСО. Так как мировая линия фотона не принадлежит конгруенции мировых линий базиса НСО, то в формуле (44.53) $V^\mu V'_\mu \neq 1$, но масса покоя $m_0 = 0$. Поэтому последний член в (44.53) выпадает. Следовательно, для описания фотона в (44.63) нужно положить $m_0 = 0$. Следует отметить одно очень существенное обстоятельство. Хотя $m_0 \to 0$, но $v \to c$ и $\psi \to \infty$, оставляя конечной величину энергии E

$$\frac{m_0 \psi}{c^2} = \frac{E}{c^2}. \tag{44.70}$$

Закон сохранения полной энергии фотона E_0 в поле тяжести имеет очевидный вид

$$E_0 = E - \frac{m_0 \psi M_0 k}{R} = E(1-x) = \text{const}. \tag{44.71}$$

Так как x - малая величина по сравнению с единицей, то

$$E = E_0\Big(1 - \frac{\Phi}{c^2}\Big). \tag{44.72}$$

Выразив энергию фотона через частоту ν и постоянную Планка h в виде

$$E = h\nu,$$

получим хорошо известный закон изменения частоты в поле тяжести

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{44.73}$$

Из формулы видно, что частота света возрастает с увеличением абсолютной величины потенциала.

Выражение (44.63) с учетом (44.62) и (44.71) можно представить в виде

$$S_R = \int \sqrt{\frac{E_0^2}{c^2}(1 + 4x + 11x^2) - \frac{M^2}{R^2}} dR, \tag{44.74}$$

Далее, полагая $E_0 = h\nu_0$, $M = m_0\psi c\rho$, где ρ - ближайшее расстояние до центра гравитирующего тела и пренебрегая x^2, получим

$$\frac{S_R}{h} = \Psi_R = \frac{\nu_0}{c} \int \sqrt{1 + \frac{2r_0}{R} - \frac{\rho^2}{R^2}}\, dR, \tag{44.75}$$

Выражение (44.75) в точности совпадает с радиальной частью эйконала Ψ_R, полученной из ОТО [7]. В последней формуле r_0 - гравитационный радиус гравитирующего тела

$$r_0 = \frac{2kM}{c^2}.$$

Из (44.75) следует, что под влиянием поля тяготения световой луч искривляется (притягивается к центру), так что угол между асимптотами траектории луча меньше π на величину

$$\delta u = \frac{4kM}{c^2\rho}. \tag{44.76}$$

С точки зрения наблюдателя ИСО ($\chi = 0$) и угол отклонения

$$\delta u = \frac{2kM}{c^2\rho}, \tag{44.77}$$

т.е. в два раза меньше.

Основным результатом этого раздела является тот, что именно из-за того, что наблюдатель и его приборы находятся на Земле, а не на Солнце и звездах, можно объяснить известные эффекты ОТО, не используя уравнения поля Эйнштейна.

Глава 10

РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ - ВРЕМЕНИ СВЯЗАННЫХ ЗАРЯДОВ

В этой главе найдена метрика пространства-времени вне и внутри заряженной по поверхности бесконечной проводящей тонкой цилиндрической оболочки конечного радиуса. Найдено электрическое поле и вычислена его энергия. Произведен аналитический расчет емкости цилиндрического и шарового конденсатора, учитывающий взаимодействие зарядов с создаваемым этими зарядами полем. Найдено поле и геометрия пространства-времени вне и внутри шара, равномерно заряженного по объему. Полученные выражения содержат поправки к их классическим аналогам и допускают экспериментальную проверку.

45. Электромагнитное поле бегущей волны, созданное током связанных зарядов

При классическом рассмотрении электромагнитного поля излучения бегущей волны тока, распространявшегося по тонкому криволинейному проводу, не учитывается, что заряды на поверхности провода испытывают силу отрицательного давления со стороны создаваемого ими поля. Представляет интерес учесть это взаимодействие. Уравнения Максвелла в общем случае совместно с условиями Лоренца будут иметь вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right) = -\frac{4\pi j^\mu}{c}, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\left(\sqrt{-g}A^\nu\right) = 0. \qquad (15.1)$$

Ввиду того, что

$$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} = 2\nabla_{[\mu}A_{\nu]},$$

другие уравнения Максвелла

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} \equiv 0$$

выполняются тождественно для любой метрики.

В соотношении (15.1), в отличии от уравнений Максвелла при наличии гравитационного поля, метрический тензор не известен. Поэтому эти уравнения нельзя непосредственно интегрировать.

Ранее были получены уравнения для нахождения статической плотности зарядов на проводнике произвольной формы, геометрии пространства-времени и электростатического поля, создаваемого таким проводником. Было показано, уравнение для плотности зарядов содержит неизвестные компоненты метрического тензора СО, зависящие от плотности связанных зарядов, от массы и величины пробных зарядов, задающих СО. Для нахождения геометрии пространства-времени СО пробные заряды закреплялись неподвижными относительно заряженного тела. Поэтому силы со стороны поля уравновешивались силами реакции связей. Метрика СО определялась формулой (23.6) и условия сопутствия (23.7). Компоненты метрического тензора в силу статичности поля не зависели от временной координаты y^0. Из за отсутствии вращения равнялись нулю g_{0k}.

Аналогичная процедура применима и при рассмотрении поля от нестационарного тока, но условия стационарности уже не будут выполнены. Компоненты метрического тензора должны удовлетворять еще и уравнениям структуры (1.7). Из сказанного следует, что решение поставленной задачи в общем виде аналитически затруднительно, поскольку переменный в пространстве и во времени ток обуславливает (в согласии с постулатом эквивалентных ситуаций) помимо нестационарного электромагнитного поля и поле нестационарного неоднородного метрического тензора.

Для выяснения физического смысла решения предельно упростим задачу, считая, что бегущая волна тока постоянной амплитуды J распространяется по бесконечному тонкому прямому цилиндрическому проводу. Пусть провод расположен на оси $y^3 = z$. Требуется вычислить напряженность электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей вне провода.

Без учета взаимодействия зарядов на проводе с создаваемым ими электрическим полем решение тривиально. Напряженность магнитного поля определяется формулой

$$H_\phi = \frac{2J}{c\rho} \tag{45.1}$$

Для нахождения электрического поля можно исходить из того, что волна распространяется по коаксиальной линии при бесконечном радиусе внешнего провода. Поэтому для электрического поля имеем

$$E_\rho = \frac{2\gamma}{\rho}, \tag{45.2}$$

где в силу формул (10) и (20) дополнения 1, связь между линейной плотностью заряда γ и током J дается простым соотношением

$$J = c\gamma, \qquad E_\rho = H_\phi. \tag{45.3}$$

(Отметим, что в (10) и (20) линейная плотность заряда обозначалась другой буквой σ). Соотношения (45.1-45.3) допускают и другую интерпретацию. Из анализа формул (37-39) дополнения 1 видно, что формулы (45.1-45.3), переведенные в систему СИ, представляют собой поле излучения бесконечной антенны вблизи одного из плеч, если антенна возбуждается ступенчатым напряжением. Переходя в (37-39) к пределу при $R_0, R_0' \to \infty$ и используя, что вблизи антенны $E_\theta \approx E_\rho$, убеждаемся в справедливости такой интерпретации. Ясно, что для произвольной точки аналогия неприменима, так как возбуждаемая ступенчатым напряжением антенна представляет собой два полубесконечных отрезка, заряженных разноименно. В нашей модели мы имеем дело с бесконечной прямой, заряженной одноименно. Поэтому вблизи каждого из плеч антенны в точке наблюдения вдали от генератора вклад в поле от тока в другом плече пренебрежимо мал. Именно по этой причине предложенная интерпретация справедлива. Следует отметить, что статические соотношения (45.1-45.3) справедливы, когда фронт волны поля уже прошел через точку наблюдения. Поэтому динамическая задача о нахождении электрического поля от бегущей волны тока сводится к статической. Статическая задача об электрическом поле прямой заряженной нити бесконечной длины с учетом взаимодействия связанных зарядов с полем решена в разделе 19. Сравнивая тетрадную компоненту поля $F_{(0)(1)}$ из (19.38) с радиальной компонентой поля E_ρ из (2d.2), убеждаемся в их тождественности.

Попытаемся ответить на вопрос: "Что нового по сравнению с (45.1) и (45.2) дает тот факт, что заряды на поверхности провода являются связанными?"

Для удобства сравнения с результатами параграфа 19, выбираем метрику в виде

$$dS^2 = \exp(\nu)(dy^0)^2 - \exp(\lambda)d\rho^2 - \rho^2 d\phi^2 - dz^2. \tag{19.28}$$

где ν и λ, исходя из симметрии задачи, зависят только от ρ.

Функции $\nu(\rho)$ и $\lambda(\rho)$ нуждаются в определении. Процедура их нахождения подробно описана в разделе 19. Так как магнитное поле не действует на покоящиеся пробные заряды, то оно не изменяет силы реакции связи, удерживающие эти заряды неподвижными в электрическом поле. Однако, созданное током магнитное поле, окружающее проводник, действует на поверхность проводника, сжимая провод вдоль радиуса. Так как мы считаем проводник идеально проводящим, то текущий по проводнику ток является поверхностным током [26]. Плотность заряда γ считаем отрицательной, так что по поверхности проводника движутся электроны, средняя скорость v которых ничтожно мала по сравнению с фазовой скоростью распространения бегущей волны тока, равной скорости света c. На каждый из электронов со стороны магнитного поля тока будет действовать сила Лоренца. Как известно [26], сжимающее давление определяется формулой

$$\vec{P} = -\vec{n}\frac{{H_e}^2}{8\pi}, \tag{45.4}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный вдоль радиуса провода, $H_e = H_\phi$ – магнитное поле снаружи провода у его поверхности. Таким образом, сжимающее давление по величине равно плотности энергии магнитного поля. Величина силы F, действующей на кусок цилиндрического провода площади S, на которой размещены N электронов равна очевидно

$$F = \frac{H_\phi^2 S}{8\pi}. \tag{45.5}$$

Отсюда в согласии с (45.3) на каждый электрон действует сила

$$F_1 = \frac{F}{N} = \frac{E_\rho^2 S}{8\pi N} = \frac{E_\rho 4\pi\sigma S}{8\pi N} = \frac{E_\rho e}{2}. \tag{45.6}$$

При выводе (45.6) учли, что $E_\rho = 4\pi\sigma$, где σ – поверхностная плотность заряда. Итак, сила со стороны магнитного поля на поверхностные электроны с точностью до знака совпала с силой со стороны электрического поля, вывод которой приведен в разделе 17. Таким образом, если в электростатике силой реакции связи, удерживающей создающие поле заряды на поверхности проводника неподвижными, была сила со стороны металлической решетки, то в магнитостатике эту роль выполняет сила Лоренца. В согласии с постулатом эквивалентных ситуаций, решение для электрического поля от бегущей ступенчатой волны тока, будет такое же, как и для электростатического поля заряженной нити. Так как компоненты метрического тензора входят в уравнения Максвелла, то магнитное поле зависит от метрики.

Решение для электрического поля получено нами ранее и имеет вид

$$A_0 = 2\gamma I_0(\alpha)K_0(\alpha), \qquad \alpha = \frac{\rho a_0}{2c^2} = \frac{\rho e E_0}{4mc^2}. \tag{19.27}$$

$$F_{01} = -\frac{\partial A_0}{\partial \rho} = \frac{\gamma a_0}{c^2}(K_1(\alpha)I_0(\alpha) - I_1(\alpha)K_0(\alpha)). \tag{19.32}$$

На поверхности цилиндра величина поля E_0 совпадает с тетрадной компонентой $F_{(0)(1)}$. Поэтому для величины α имеем

$$\alpha = \frac{\rho a_0}{2c^2} = \frac{\rho e E_0}{4mc^2} = \frac{\rho e\gamma}{R2mc^2}, \quad \rho \geq R. \tag{19.39}$$

E_0 - напряженность поля на поверхности цилиндра, I_0, I_1, K_0 K_1 - цилиндрические функции Бесселя в общепринятых обозначениях [82]. Для функций ν и λ было найдено

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{qA_0}{m_0c^2}. \tag{19.42}$$

$$\exp(\lambda/2) = -\frac{\rho}{2\gamma}\frac{\partial A_0}{\partial \rho}\frac{1}{1+\frac{qA_0}{m_0c^2}}. \tag{19.43}$$

Для электрического поля бегущей волны будут справедливы все приведенные выше формулы для статического электрического поля с учетом условия $\gamma = J/c$ из (2d.3).

Для нахождения магнитного поля воспользуемся решением цилиндрически-симметричных статических уравнений Максвелла в форме (15.1) с использованием найденной метрики и формул для потенциала и напряженности электрического поля.

Исходя из симметрии задачи, пространственные компоненты 4-потенциала

$$A^k = \delta_3^k A(\rho), \tag{45.7}$$

где $A(\rho)$ – модуль векторного потенциала $\vec{A}$. Очевидно, что при независимости скалярного потенциала от времени, из (45.7) и из (15.1) следует, что условие Лоренца выполняется тождественно. Уравнения Максвелла (15.1) сводятся к виду

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\exp\left(\frac{\nu-\lambda}{2}\right)\rho\frac{\partial A}{\partial \rho}\right) = -\frac{4\pi}{c}j^3, \quad \sqrt{-g} = \rho\exp\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right), \tag{45.8}$$

где j^3 – плотность тока.

Вне провода интегрирование (45.8) приводит к соотношению

$$\frac{\partial A}{\partial \rho} = \frac{k}{\rho}\exp\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right) = -\frac{k}{2\gamma}\frac{\partial A_0}{\partial \rho}\frac{1}{\left(1+\frac{qA_0}{m_0c^2}\right)^2}, \tag{45.9}$$

где k – постоянная интегрирования. Интегрируя (45.9) еще раз, находим

$$A = \frac{m_0c^2k}{2\gamma q}\left(\frac{1}{1+\frac{qA_0}{m_0c^2}} + c_1\right). \tag{45.10}$$

Сравнивая (45.9) с (45.1), используя, что в нерелятивистском приближении $\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $(\vec{\nabla}\times\vec{A})_\phi = -\partial A_z/\partial\rho$, находим $k = -2\gamma$. Постоянная c_1 - произвольна. Для определенности выберем ее так, чтобы в нерелятивистском приближении величины A и A_0 совпадали. В результате находим

$$A = -\frac{m_0 c^2}{q}\Big(\frac{1}{1+\frac{qA_0}{m_0c^2}} - 1\Big). \tag{45.11}$$

Тензор электромагнитного поля для рассматриваемой задачи имеет отличные от нуля компоненты $F_{01} = -F_{10}$, определяемые в (19.32) и $F_{13} = -F_{31}$, для которых имеем

$$F_{13} = -\frac{\partial A}{\partial \rho} = -\frac{\partial A_0}{\partial \rho}\frac{1}{\Big(1+\frac{qA_0}{m_0c^2}\Big)^2}, \tag{45.12}$$

Для отличных от нуля тетрадных компонент тензора поля с помощью тетрад (17.10) находим

$$F_{(1)(3)} = \frac{2J}{c\rho\Big(1+\frac{qA_0}{m_0c^2}\Big)}, \quad F_{(0)(1)} = E_{(\rho)} = \frac{2J}{c\rho}, \tag{45.13}$$

Итак, напряженность электрического поля в тетрадах в точности совпадает с классическим выражением, а напряженность магнитного поля содержит релятивистскую поправку. Найдем отличные от нуля аффинные и тетрадные компоненты тензора энергии-импульса. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в криволинейных координатах определяется формулой (17.14), а тетрадные компоненты тензора вычисляются по правилу (17.15). В результате для интересующих нас компонент плотности энергии и плотности импульса находим

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial A_0}{\partial \rho}\Big)^2 e^{-\lambda}e^{-2\nu}, \quad T^{(0)(0)} = \frac{\gamma^2}{\pi\rho^2}. \tag{45.14}$$

$$T^{03} = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial A_0}{\partial \rho}\Big)^2 e^{-\lambda}e^{-2\nu}, \quad T^{(0)(3)} = \frac{\gamma^2}{\pi\rho^2}\frac{1}{1+\frac{qA_0}{m_0c^2}}. \tag{45.15}$$

Вычислим энергию поля от элемента заряженной нити длины h, воспользуясь формулами (17.16) -(17.18), (19.18). Для тетрадной компоненты $T^{(0)(0)}$ тензора энергии-импульса имеем из (45.14) выражение

$$\begin{aligned} W &= \int \sqrt{-g}T^{\mu\nu}V_\nu\, dS_\mu = h\gamma\int_R^\infty F_{01}\, d\rho \\ &= -h\gamma\int_R^\infty \frac{\partial A_0}{\partial\rho}\, d\rho = A_0(R)\gamma h - A_0(\infty)\gamma h \end{aligned} \tag{45.16}$$

Так как по доказанному в (19.41) $A_0(\infty) = 0$, а нить по условию имеет радиус $R \to 0$, то соотношение (45.16) на основе (19.39) примет вид

$$W = A_0(R)\gamma h = 2\gamma^2 h I_0\Big(\frac{e\gamma}{2mc^2}\Big)K_0\Big(\frac{e\gamma}{2mc^2}\Big). \tag{45.17}$$

Из формулы (45.17) следует, что энергия электромагнитного поля внутри цилиндра длины h и бесконечного радиуса является конечной величиной, что резко отличается от классического значения электромагнитной энергии поля бегущей волны которая бесконечно велика.

При очень большой плотности зарядов на нити, т.е. при выполнении условия

$$\frac{e\gamma}{2mc^2} = \frac{eJ}{2mc^3} = \alpha_0 \gg 1 \tag{45.18}$$

имеем для энергии выражение

$$W = \frac{2\gamma hmc^2}{e} = 2Nmc^2, \tag{45.19}$$

где N - число электронов на длине h нити. Неравенство (45.18) эквивалентно неравенству

$$J \gg 10^5 A, \tag{45.20}$$

где ток выражен в амперах.

Итак, для очень больших токов предельная энергия электромагнитного поля внутри цилиндра высоты h и бесконечного радиуса равна удвоенной массе покоя N электронов, создающий ток на нити. Энергия электромагнитного поля поровну распределяется между энергиями электрического и магнитного полей, что следует из соотношений (19.51) и (45.19).

Ясно, что в реальном случае справедливо другое неравенство

$$\frac{e\gamma}{2mc^2} = \frac{eJ}{2mc^3} = \alpha_0 \ll 1 \tag{45.21}$$

Для слабых полей при условии (45.21), используя известные разложения для функций Бесселя [82], имеем из (19.44), (19.45)

$$I_0(\alpha) \simeq 1, \quad K_0(\alpha) \simeq -(\ln(\alpha/2) + C),$$

$$A_0(\alpha) \simeq -2\frac{J}{c}\Big(\ln\Big(\frac{\rho a_0}{2c^2}\Big) + C\Big), \quad -\frac{\partial A_0}{\partial \rho} \simeq \frac{2J}{c\rho}, \tag{45.22}$$

где $C = 0.57721566490...$ - есть постоянная Эйлера.

(45.22) с точностью до значения постоянных в потенциале совпадает с классическим выражением. Однако метрика пространства-времени даже в случае слабого поля остается римановой, которая в согласии с формулой (19.42) имеет вид,

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{qA_0}{m_0c^2}. \tag{45.23}$$

а вместо (19.43) имеем

$$\exp(\lambda/2) = \frac{1}{1 + \frac{qA_0}{m_0c^2}}. \tag{45.24}$$

Итак, как для сильного, так и для слабого полей энергия электрического поля от бегущей волны тока W_e равна энергии магнитного поля W_m. Приравнивая соответствующие соотношения для энергий их классическим аналогам,

$$W_m = \frac{L_m J^2 h}{2c^2}, \quad W_e = \frac{Q^2}{2C_e h}, \tag{45.25}$$

находим погонную индуктивность L_m и погонную емкость C_e бесконечно тонкого провода

$$L_m = 2I_0\Big(\frac{eJ}{2mc^3}\Big)K_0\Big(\frac{eJ}{2mc^3}\Big) \simeq 2(\ln\Big(\frac{4mc^3}{eJ}\Big) - C), \quad C_e = \frac{1}{L_m}. \tag{45.26}$$

Вычисление погонной индуктивности и емкости бесконечно тонкого провода при классическом рассмотрении приводит к принципиальным трудностям, связанным с бесконечной энергией поля точечного заряда. В нашем случае таких трудностей не возникает как для слабого, так и для сильных полей. Рассмотрим более подробно причины возникновения трудностей.

Как известно из [83], индуктивность единицы длины бесконечно длинного провода зависит от длины провода и вычисляется в наших обозначениях по формуле

$$L_m = 2\Big(\ln\Big(\frac{2h}{R}\Big) - \frac{3}{4}\Big). \tag{45.27}$$

Для этого же случая из работы [26] имеем

$$L_m = 2\ln\Big(\frac{h}{R}\Big). \tag{45.28}$$

С другой стороны для погонной индуктивности коаксиальной линии имеем из [87] соотношение

$$L_m = 2\ln\Big(\frac{b}{R}\Big), \tag{45.29}$$

где b - внешний, а R – внутренний радиус коаксиальной линии.

Ясно, что для бесконечной коаксиальной линии погонная индуктивность не зависит от длины провода, что и следовало ожидать. Казалось бы, что переход к однопроводной линии от коаксиальной должен получиться при стремлении внешнего радиуса к бесконечности. Однако этого не происходит, индуктивность в согласии с (45.29) стремится при этом к бесконечности.

Из анализа (45.27) и (45.28) видно, что зависимость погонной индуктивности длинного провода от длины провода – явная трудность классической теории поля.

Рассмотрим к какому результату приводит анализ нашей формулы (45.26), пригодной для слабых полей (малых токов). Эта формула может быть преобразована к виду

$$L_m = 2\Big(\ln\Big(\frac{4h_0}{r_0}\Big) - C\Big), \quad h_0 = \frac{h}{N}, \tag{45.30}$$

где N – число электронов на длине h куска провода, r_0 – классический радиус электрона. Так как концентрация зарядов на любом куске бесконечного провода очевидно постоянна, то погонная индуктивность естественно не зависит от длины провода, как и должно быть по логике вещей.

Умножив числитель и знаменатель под логарифмом в (45.30) на некий "формфактор" k, такой, чтобы выполнялось равенство

$$kr_0 = R, \qquad 4kh = 2h_1 \tag{45.31}$$

получим получим формулу для погонной индуктивности, аналогичную (45.27), (45.28), имеющую вид

$$L_m = 2\Big(\ln\left(\frac{2h_1}{R}\right) - C\Big), \quad h_1 = \frac{2h}{N}\frac{R}{r_0}. \tag{45.32}$$

Рассмотрим физический смысл величины h_1, имеющей размерность длины. Эту величину можно представить в виде

$$h_1 = 4R\frac{h}{2Nr_0} \tag{45.33}$$

Отношение $h/2Nr_0$ представляет собой отношение длины отрезка, на которой расположены N электронов к их общей длине при плотной упаковке. Сама формула (45.32) применима, когда $h/2Nr_0 \gg 1$. Формула (45.26) может быть представлена в виде удобном для сравнения с экспериментом

$$L_m = 21.11 - 2\ln\left(\frac{J}{J_0}\right), \quad J_0 = 1A, \tag{45.34}$$

где J_0 равен одному амперу и ток J измеряется в амперах. Рассчитаем по формуле (45.34) погонную емкость провода длиной 10 метров и радиуса 0.06 миллиметра при токе $J = 0.1$ Ампер. Для этого случая имеем $L_m = 25.715$. Увеличив ток в десять раз, получим $L_m = 21.11$.

Расчет по формуле (45.28) дает $L_m = 24.048$. Таким образом, несмотря на принципиально разные формулы расчета индуктивности, результаты оказались близкими.

Найдем формулу для погонной индуктивности коаксиальной линии для малых токов.

Вычисление энергии магнитного поля между центральным проводом и внешней оболочкой приводит к соотношению, вытекающему из (45.16), путем деления энергии на два и замены бесконечного внешнего радиуса на его конечное значение b.

$$W_m = \frac{1}{2}\gamma h(A_0(R) - A_0(b)) = \frac{J^2}{c^2}h\ln\left(\frac{b}{R}\right). \tag{45.35}$$

Приравнивая полученную энергию ее значению из (45.25), получаем формулу в точности совпадающую с (45.29), т.е. с классической величиной погонной емкости коаксиальной линии.

Итак, для малых токов в отличие от однопроводной линии для коаксиальной линии результаты оказались тождественными.

Для сильных токов будут проявляться различия. Общая формула для погонной индуктивности коаксиального кабеля будет иметь вид

$$L_m = 2\Big(I_0\Big(\frac{eJ}{2mc^3}\Big)K_0\Big(\frac{eJ}{2mc^3}\Big) - I_0\Big(\frac{eJb}{2mc^3R}\Big)K_0\Big(\frac{eJb}{2mc^3R}\Big)\Big). \tag{45.36}$$

Для больших токов можно воспользоваться известными асимптотическими разложениями для функций Бесселя [82].

$$I_0(\alpha) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}}e^{\alpha}, \quad K_0(\alpha) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}e^{-\alpha},$$

что приводит к соотношению

$$L_m = \frac{2mc^3}{eJ}\Big(1 - \frac{R}{b}\Big). \tag{45.37}$$

Энергия магнитного поля на единице длины в коаксиальной линии между центральным проводом и внешней оболочкой для сильных токов имеет вид

$$W_m = \frac{mc^3 J}{e}\Big(1 - \frac{R}{b}\Big) = \frac{Nmc^2}{h}\Big(1 - \frac{R}{b}\Big). \tag{45.38}$$

При $b \to \infty$ или $R \to 0$ энергия магнитного поля совпадает с энергией покоя масс зарядов на единице длины центрального провода. При этом заряды и токи из рассмотрения выпадают. Таким образом, очень сильные токи ($J \gg 10^5$ А) создают в пространстве магнитное поле внутри цилиндра длины h и бесконечного радиуса, энергия которого определяется произведением числа зарядов на длине h на энергию массы покоя заряда. При классическом рассмотрении магнитная энергия стремится к бесконечности, что лишено физического смысла и является принципиальной трудностью классической теории поля. Произведем расчет погонной индуктивности коаксиального кабеля для реального случая, имеющего место в полеобразующих системах, излучающих сильные импульсные электромагнитные поля. Аргумент в общей формуле (45.36) представим в виде

$$\frac{eJ}{2mc^3} = 2.9 \cdot 10^{-5} J, \tag{45.39}$$

где ток J измеряется в амперах. Ясно, что для реальных токов $J = 10^3\ A$ и отношения $b/R = 10$ величина аргументов в формуле (45.36) не превосходит

$$\frac{eJb}{2mc^3 R} = 0.29. \tag{45.40}$$

При этом аргумент в первых членах (45.36) будет в десять раз меньше. Используя малость аргументов и известные разложения для модифицированных функций Бесселя [82]

$$I_0(x) \approx 1 + \frac{x^2}{4}, \quad K_0(x) \approx -\Big(\ln\Big(\frac{x}{2}\Big) + C\Big) I_0(x) + \frac{x^2}{4}, \tag{45.41}$$

находим

$$L_m = 2\ln\Big(\frac{b}{R}\Big) + x^2\Big(\ln\Big(\frac{x}{2}\Big) + C - \frac{1}{2}\Big), \quad x = \frac{eJb}{2mc^3 R} = 0.29. \tag{45.42}$$

Соотношение (45.42) для рассматриваемого случая можно представить в виде

$$L_m = 2\ln\Big(\frac{b}{R}\Big)\Big(1 - 0.033\Big). \tag{45.43}$$

Таким образом, с ростом токов погонная индуктивность кабеля, а следовательно и его волновое сопротивление уменьшается. Для данного примера это уменьшение составляет 3%. Величина волнового сопротивления должна зависеть и от полярности подсоединения кабеля. Уменьшение индуктивности будет происходить, если минус импульсного генератора подсоединять к центральному проводнику.

Следует отметить, что полученные формулы для индуктивности коаксиального кабеля носят чисто иллюстративный характер и не имеют непосредственного практического применения. Соотношения требуют, чтобы радиус внутреннего провода, а, следовательно, и внешнего был соизмерим с классическим радиусом электрона. Ясно, что на практике всегда рассматриваются провода конечного радиуса намного превышающего классический радиус электрона.

Вопросам исследования проводов конечного радиуса, цилиндрическим конденсаторам, коаксиальным линиям и сравнению классической и предлагаемой теорий посвящен следующий раздел.

В заключение раздела рассмотрим вопрос об электромагнитном импульсе и электромагнитной массе поля тока бегущей волны. Тетрадные компоненты электромагнитного 4 - импульса поля бегущей волны определим в согласии со следующей формулой

$$P^{(\alpha)} = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}T^{\mu\nu}e^{(\alpha)}_{\nu}\,dS_{\mu} = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}T^{(0)(\alpha)}\,dV, \tag{45.44}$$

в которой нулевая компонента $P^{(0)}$ равна энергии поля W (45.16), поделенной на скорость света c, а пространственные тетрадные компоненты $P^{(k)}$ образуют трехмерный вектор импульса поля. В нашем случае отличной от нуля компонентой будет компонента $P^{(3)}$, для которой на основе (19.42), (19.43) и (45.15), имеем в цилиндрических координатах выражение

$$P^{(3)} = \frac{1}{c}\int \exp\Bigl(\frac{\lambda+\nu}{2}\Bigr)T^{(0)(3)}\rho d\rho d\phi dz = \frac{\gamma h m_0 c}{q}\ln\Bigl(1+\frac{qA_0(R)}{m_0c^2}\Bigr) \tag{45.45}$$

Для слабых токов, удовлетворяющих неравенству (45.21), между импульсом поля, энергией и электромагнитной массой m_{em} существуют следующие хорошо известные соотношения, вытекающие из сравнения формул (45.17) и разложенной в ряд Тейлора (с сохранением двух членов разложения) формулой (45.45).

$$W = cP^{(3)} = m_{em}c^2. \tag{45.46}$$

В отличии от чисто классического рассмотрения, энергия, импульс поля и его электромагнитная масса от куска провода конечной длины h являются конечными величинами даже для слабых токов. При классическом рассмотрении эти величины бесконечно велики. Для сильных токов, удовлетворяющих условиям (45.18) или (45.20), энергия импульс и электромагнитная масса поля от куска провода также конечна, однако электромагнитные массы, вычисленные разными способами через импульс и через энергию - различны. Для сильных токов импульс электромагнитного поля и электромагнитная масса имеют вид

$$P^{(3)} = Nmc\ln 3, \quad m'_{em} = Nm\ln 3. \tag{45.47}$$

Из формулы (45.19) для электромагнитной массы получим другое значение

$$\frac{W}{c^2} = m_{em} = 2Nm. \tag{45.48}$$

Как известно из классической теории поля [83], при вычислении электромагнитной массы поля частицы имеет место соотношение

$$\frac{m'_{em}}{m_{em}} = \frac{4}{3}. \tag{45.49}$$

При этом, при вычислении (45.49) в качестве энергии поля частицы (электрона) рассматривалась лишь собственная электростатическая энергия поля частицы, а при вычислении импульса поля рассматривалась суммарная величина энергий электрического и магнитного полей частицы. В нашем случае энергия поля (45.19) распределена поровну между энергиями электрического и магнитного полей. Поэтому можно ввести электростатическую массу поля $m_e = m_{em}/2$. Тогда получим соотношение

$$\frac{m'_{em}}{m_e} = \ln 3 = 1.1. \tag{45.50}$$

Итак, при нашем рассмотрении в согласии с (45.19) электрическая энергия поля тока бегущей волны в точности равна энергии покоя электронов на проводе, а электромагнитная масса поля, вычисленная по формуле (45.47), лишь незначительно превосходит электростатическую массу поля.

46. Поле заряженной тонкой бесконечной цилиндрической оболочки конечного радиуса

В предыдущем разделе мы рассмотрели электромагнитное поле излучения бегущей волны тока, распространявшегося по тонкому криволинейному проводу. Рассмотрение было как чисто классическим, так и учитывало, что заряды на поверхности провода взаимодействуют с создаваемым ими полем. Однако расчет был произведен в пределе бесконечно тонкого провода, что не позволяет проводить сравнение результатов с реальными системами.

Представляет интерес учесть конечную толщину провода и получить формулы для емкости цилиндрического конденсатора, индуктивности и волнового сопротивления однопроводной линии и коаксиального кабеля.

Известно [87], что при классическом рассмотрении погонная емкость однопроводной линии конечного радиуса и бесконечной длины стремится к нулю, а погонная индуктивность и волновое сопротивление стремятся к бесконечности. Причина этого связана связано с тем, что при классическом подходе напряженность электрического поля вне провода убывает обратно пропорционально расстоянию от центра цилиндра, что приводит к бесконечно большой энергии поля в окружающем пространстве (в цилиндре единичной длины, но бесконечно большого радиуса).

Как мы доказали для бесконечно тонкого провода, энергия поля вне провода в цилиндре единичной высоты и бесконечного радиуса является конечной величиной. Докажем, что величина энергии будет иметь конечное значение и вне провода конечной толщины.

Решение для электрического поля тонкой нити получено нами ранее в (19.27), (19.32), (19.39). Метрика пространства-времени определялась формулами (19.28), (19.42), (19.43).

Рассмотрим поле, обладающее цилиндрической симметрией, создаваемое бесконечно длинным заряженным металлическим полым цилиндром радиуса R. Считаем, что толщина стенок цилиндра мала по сравнению с его радиусом.

Совместим ось z с осью цилиндра, выбрав начало координат в центре цилиндра. Расчет поля будем производить в цилиндрической системе координат, воспользуясь для нахождения потенциала формулой (19.1), где r' - трехмерное (евклидово) расстояние от заряда

dQ до точки наблюдения , θ - угол между радиусом - вектором $\vec{r}$ и $\vec{i}$, $\vec{i} = \vec{a_0}/|\ \vec{a_0}\ |$. $\vec{i}$ для каждого элемента заряда dQ направлен к центру цилиндра перпендикулярно его поверхности. Величина "ускорения"a_0 для зарядов вычисляется по формуле (19.2).

Так как пространственная геометрия для метрики (2.18) - плоская, то из из формул евклидовой геометрии легко получить формулу, связывающую величины r' и θ с радиальной координатой ρ и угловой координатой ϕ цилиндрических координат.

$$r' \cos\theta = R - \rho\cos\phi. \tag{19.24}$$

Элемент заряда dQ на поверхности цилиндра можно представить в виде

$$dQ = \sigma R d\phi dz = \frac{\gamma}{2\pi} d\phi dz, \tag{19.25}$$

где σ и γ соответственно поверхностная и линейная плотности зарядов.

Потенциал от заряженного элемента поверхности проводящего цилиндра в согласии с (19.1) запишем в виде

$$dA_0 = \frac{\gamma}{2\pi r'} \exp\Big\{-\frac{a_0 r'(1 \mp \cos\theta)}{2c^2}\Big\} d\phi dz, \tag{46.1}$$

В последней формуле при выборе знака в экспоненте мы учитываем две возможности. Верхний знак означает, что заряды находятся на поверхности цилиндра с "ускорением направленным к центру цилиндра (например, на внутреннем электроде цилиндрического конденсатора). Нижний знак соответствует зарядам, находящимся на внутренней поверхности цилиндрической трубы (например, на наружном электроде цилиндрического конденсатора). Очевидно, что "ускорения"зарядов, направленные всегда внутрь металла на внутренней и внешней обкладках конденсатора имеют диаметрально противоположные направления, с чем и связан выбор знаков в (46.1)

Из (46.1) имеем

$$A_0 = \frac{2\gamma}{\pi} e^{\pm pR} \int_0^{\pi} e^{\mp p\rho\cos\phi} \Big(\int_{\rho_2}^{+\infty} \frac{e^{-pr'}}{\sqrt{r'^2 - \rho_2^2}}\, dr' \Big) d\,\phi, \tag{46.2}$$

где введены обозначения

$$p = \frac{a_0}{2c^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\phi}. \tag{46.3}$$

Вычисление внутреннего интеграла приводит к соотношению

$$A_0 = \frac{2\gamma}{\pi} e^{\pm pR} \int_0^{\pi} e^{\mp p\rho\cos\phi} K_0(\rho_2 p) d\,\phi \tag{46.4}$$

Если $R = 0$, то последнее соотношение приводится к виду, полученному нами ранее

$$A_0 = 2\gamma I_0(\alpha) K_0(\alpha), \qquad \alpha = \frac{\rho a_0}{2c^2} = \frac{\rho e E_0}{4mc^2}. \tag{19.27}$$

E_0 - напряженность поля на поверхности цилиндра, I_0, K_0 - цилиндрические функции Бесселя в общепринятых обозначениях [82].

Для вычисления интеграла (2d1.4) воспользуемся известной "теоремой сложения"для цилиндрических функций [105]. Предварительно введем следующие обозначения.

$$R_1 = Rp, \quad R_2 = \rho_2 p, \quad \rho_1 = R_1\frac{\rho}{R} = \rho p. \tag{46.5}$$

В частности для цилиндрических функций Ханкеля $H_0^{(1)}(iR_2)$ справедливо соотношение

$$H_0^{(1)}(iR_2) = J_0(iR_1)H_0^{(1)}(i\rho_1) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(iR_1)H_k^{(1)}(i\rho_1)\cos k\phi. \tag{46.6}$$

Последняя формула справедлива при условии $R_1 < \rho_1$. Учитывая связь между функциями Ханкеля и модифицированными функциями Бесселя

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2}\exp\Big(\frac{\pi i\nu}{2}\Big)H_\nu^{(1)}(iz), \quad J_k(iz) = i^k I_k(z), \tag{46.7}$$

находим

$$K_0(R_2) = I_0(R_1)K_0(\rho_1) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(R_1)K_k(\rho_1)\cos k\phi. \tag{46.8}$$

Учитывая последнюю формулу, вычислим интеграл (46.4)

$$A_0 = 2\gamma e^{\pm R_1}\Big[I_0(R_1)I_0(\rho_1)K_0(\rho_1) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\mp 1)^k I_k(R_1)I_k(\rho_1)K_k(\rho_1)\Big]. \tag{46.9}$$

Найденная формула справедлива при $\rho > R$, т.е. для потенциала вне цилиндра. Для потенциала внутри цилиндра при $\rho < R$ формула примет вид

$$A_0 = 2\gamma e^{\pm R_1}\Big[I_0(\rho_1)I_0(\rho_1)K_0(R_1) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\mp 1)^k I_k(\rho_1)I_k(\rho_1)K_k(R_1)\Big]. \tag{46.9a}$$

На границе цилиндра при $\rho = R$ обе формулы очевидно совпадают.

Найдем поведение потенциала (46.9) на больших расстояниях от цилиндра, т.е. полагая $\rho \gg R$. Используя известное асимптотическое разложение [47], применимое для больших z

$$I_\nu(z)K_\nu(z) \sim \frac{1}{2z}, \tag{46.10}$$

а также известную формулу суммирования

$$2\sum_{k=1}^{\infty}(\mp 1)^k I_k(z) = e^{\mp z} - I_0(z), \tag{46.11}$$

находим

$$A_0(\rho_1 \gg 1) = \frac{\gamma}{\rho_1} = \frac{2\gamma c^2}{a_0\rho} = \frac{2mc^2 R}{e\rho}, \tag{46.12}$$

где m - масса электрона, если цилиндр заряжен отрицательно, или масса ядра металла, при положительном заряде, e - заряд электрона, принимающий отрицательное значение при отрицательном заряде цилиндра и положительное значение (по величине равное заряду электрона) при положительном заряде цилиндра. Очевидно, что при $\rho \to \infty$ потенциал стремится к нулю, а не логарифмически расходится, как имеет место при классическом рассмотрении. Таким образом, поведение потенциала на бесконечности резко отличается от классического аналога, что в конечном итоге и приводит к устранению расходимости для энергии электромагнитного поля.

Отметим, что формула (46.12) применима не только для больших расстояниях от провода. Дело в том, что величины ρ_1, R_1 могут быть очень большими и на самой поверхности цилиндра малого радиуса, если плотности зарядов на проводе велики. Это следует непосредственно из равенств (46.3) и (46.5). Итак, для больших плотностей зарядов потенциал на поверхности цилиндра конечного радиуса из (46.12) имеет вид

$$A_0(R) = \frac{\gamma}{R_1} = \frac{2\gamma c^2}{a_0 R} = \frac{2mc^2}{e}. \tag{46.13}$$

Энергия электрического поля вне цилиндрической оболочки может быть вычислена по общей формуле (19.18f) и приводит к соотношению

$$W = Nmc^2. \tag{46.14}$$

Величина энергии поля вне проводящей при большой плотности зарядов на оболочке оказалась независимой от знака и величины заряда. Из приведенной формулы следует, что энергия поля отрицательно заряженной оболочки с зарядом $Q = Ne$ на длине h определяется суммарной энергией покоя ее N электронных масс. Для положительно заряженной оболочки роль массы играет масса ядра.

При классическом рассмотрении энергия поля вне оболочки стремится к бесконечности.

Исследуем поведение поля внутри цилиндрической оболочки.

Как известно, при классическом рассмотрении потенциал внутри оболочки постоянен и равен потенциалу оболочки, а напряженность электрического поля равна нулю. В поле связанных зарядов это не так. Как видно из решения (46.9a) потенциал внутри оболочки не является постоянной величиной. Поэтому отлична от нуля и напряженность поля, которая будет вычисляться по формуле

$$F_{01} = -4\gamma p e^{\pm R_1}\Big[I_0(\rho_1)I_1(\rho_1)K_0(R_1)+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}(\mp 1)^k K_k(R_1)I_k(\rho_1)\Big(I_{k-1}(\rho_1) - \frac{k}{\rho_1}I_k(\rho_1)\Big)\Big]. \tag{46.15}$$

Исследуем поведение потенциала внутри оболочки для случая слабых полей. Используя известные разложения для малых значений аргумента [47]

$$I_k(\rho_1) \sim \frac{\rho_1^k}{2^k\Gamma(k+1)}, \quad K_k(R_1) \sim \frac{1}{2}\Gamma(k)\frac{2^k}{R_1^k}, \tag{46.16}$$

где $\Gamma(k)$ - гамма-функция, получим после суммирования выражение

$$F_{01} = -\frac{2\gamma a_0}{c^2}e^{\pm R_1}\Big[-\frac{\rho_1}{2}\ln R_1 + \frac{1}{\rho_1}\sum_{k=1}^{\infty}(\mp 1)^k\frac{1}{k!}\Big(\frac{\rho_1^2}{2R_1}\Big)^k\Big] =$$

$$= -\frac{2\gamma a_0}{c^2} e^{\pm R_1} \Big[-\frac{\rho_1}{2} \ln R_1 + \frac{1}{\rho_1} \Big(\exp\Big(\mp \frac{\rho_1^2}{2R_1} \Big) - 1 \Big) \Big]. \tag{46.17}$$

Ограничиваясь членами, содержащими множитель $1/c^2$, получим для величины напряженности электрического поля выражение

$$F_{01} = -\frac{\partial A_0}{\partial \rho} = E(\rho) = \pm E_0 \frac{a_0 \rho}{2c^2} = \pm E_0 \frac{E_0 e \rho}{4mc^2}, \quad E_0 = \frac{2\gamma}{R}. \tag{46.18}$$

Здесь E_0 классическое значение напряженности на поверхности заряженного проводящего цилиндра. Из формулы следует, что в отличие от классического случая поле внутри полости не равно нулю. Поле линейно возрастает с ростом расстояния от центра, однако в отличие от потенциала напряженность на границе цилиндра терпит разрыв. Разность напряженностей вне и внутри цилиндра меньше, чем при классическом рассмотрении. Отношение внутренней напряженности $E_.$ внутри цилиндра к внешней напряженности на границе $E_. = {}_0$ дается формулой

$$\frac{E_.}{E_.} = \frac{eE_0\rho}{4mc^2}. \tag{46.19}$$

Очевидно, что это отношение равно нулю в центре цилиндра и максимально на границе раздела при $\rho = R$. Рассмотрим пример. Пусть цилиндр заряжен отрицательно и величина $E_0 = 10^6\ V/m$, а радиус цилиндра $R = 0.05\ m$. Тогда

$$\frac{E_.(R)}{E_.(R)} = \frac{eE_0R}{4mc^2} = R_1 = 0.024. \tag{46.20}$$

Для цилиндра, заряженного положительно, это отношение при тех же параметрах $\sim 10^{-6}$. При классическом рассмотрении это отношение равно нулю и не зависит от знака заряда. В соотношении (46.19) берется отношение аффинных компонент F_{01} тензора поля по разным областям от границы раздела оболочки, однако "физическими"величинами, измеряемые приборами в римановом пространстве-времени, являются тетрадные компоненты тензора поля.

Поэтому встает задача нахождения метрического тензора и поля тетрад во внутренней и внешней областях цилиндрической оболочки.

1. Метрический тензор внутри и вне цилиндрической оболочки

Совокупность электронов на поверхности цилиндрической оболочки не принадлежит конгруенции мировых линий базиса НСО (2.18), а включаются в совокупность мировых линий частиц базиса, принадлежащих цилиндрически - симметричной лагранжевой сопутствующей НСО с метрикой вида

$$dS^2 = \exp(\nu)(dy^0)^2 - \exp(\lambda)d\rho^2 - \rho^2 d\phi^2 - dz^2, \tag{19.28}$$

где ν и λ зависят только от ρ.

Функции $\nu(\rho)$ и $\lambda(\rho)$ нуждаются в определении. Для их нахождения воспользуемся решением цилиндрически-симметричных статических уравнений Максвелла с использованием метрики (19.28), аналогичных по записи уравнениям электродинамики в "заданном гравитационном поле"[7]. Затем сравним полученное решение с выражением для поля, получаемом из (46.9a).

Для отличной от нуля радиальной компоненты "индукции"D^1 имеем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\exp(\lambda/2)D^1\Big)=4\pi d. \tag{46.21}$$

В отличии от уравнения (19.29), используемого нами для нахождения поля от заряженной нити, в правой части равенства последнего уравнения стоит не ноль, а плотность источника, в которой d есть плотность "фиктивных"зарядов внутри цилиндрической полости. Введение "фиктивной"плотности зарядов является необходимым условием для удовлетворения внутри полости уравнению Максвелла (46.21), поскольку напряженность электрического поля внутри полости отлична от нуля. В классическом случае внутри полости решение тривиально и имеет вид $D^1=0$.

Решение (46.21) будет иметь вид

$$D^1=\frac{4\pi\exp(-\lambda/2)}{\rho}\int d\exp(\lambda/2)\rho d\rho. \tag{46.22}$$

Между "индукцией"D^1 напряженностью поля E^1 и компонентой тензора поля F_{01} существуют известные соотношения [7]

$$D_1=\gamma_{11}D^1=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}E_1,\quad E_1=F_{01},\quad \gamma_{kl}=-g_{kl}, \tag{46.22a}$$

где γ_{kl} - пространственный метрический тензор с определителем равным γ.

Ясно, что D^1 нельзя вычислить без знания функций $d(\rho)$ и $\lambda(\rho)$. Допустим, что рассматриваемый "фиктивный"заряд как и реальный должен удовлетворять уравнению неразрывности. В согласии с нашей общей идеологией незаряженная оболочка находилась в плоском пространстве -времени. Сразу после зарядки оболочки пространство время стало римановым и появился "эффективный"заряд. Через некоторое время, равное времени реллаксации, метрика стала статической, представимой в форме (19.28). Первоначально "фиктивный"заряд находился в недеформированном состоянии внутри цилиндрической полости и его плотность была постоянной. После реллаксации, плотнось фиктивного заряда стала различной в разных точках полости, имеющих разные радиальные координаты. Из закона сохранения "эффективного"заряда до и после деформаций среды (35.14а) вытекает равенство

$$d\sqrt{\gamma}=d_0\sqrt{\gamma}_0. \tag{46.23}$$

Из последней формулы следует

$$de^{\lambda/2}=d_0=const. \tag{46.24}$$

Интегрируя (46.22), получим

$$D^1=\frac{4\pi\exp(-\lambda/2)}{\rho}\int d\exp(\lambda/2)\rho d\rho=2\pi\exp(-\lambda/2)\rho d_0+C_1, \tag{46.25}$$

где d_0 - плотность фиктивных зарядов в недеформированном состоянии, C_1 - постоянная интегрирования. Постоянную интегрирования определим из соображений симметрии, учитывая что поле в центре оболочки должно быть равно нулю. Откуда $C_1=0$. Из (46.22а) находим

$$F_{01}=E_1=2\pi d_0\exp\Big(\frac{\lambda+\nu}{2}\Big)\rho. \tag{46.26}$$

Подстановка (46.15) в левую часть (46.26) позволяет отыскать первое уравнение, связывающие компоненты метрического тензора внутри цилиндрической оболочки.

$$\exp\left(\frac{\lambda+\nu}{2}\right) = \frac{F_{01}}{2\pi d_0 \rho}. \tag{46.26}$$

Для нахождения второго уравнения, связывающего эти функции, рассмотрим силу со стороны поля, действующую на пробный заряд q, находящийся внутри оболочки, закрепленный в точке с координатой ρ от оси цилиндра. Ясно, что при классическом рассмотрении эта сила равна нулю, так как поле внутри полости отсутствует. Для нашего случая это не так. Пусть масса пробного заряда m_0. Тогда вектор первой кривизны F^1 мировой линии этого заряда можно найти из соотношения (1.5), записав для закрепленных зарядов условие сопутствия для метрики (19.28) в виде

$$V^k = V_k = 0, \qquad V^0 = (g_{00})^{-1/2},$$

$$V_0 = (g_{00})^{1/2}, \quad F^1 = F(\rho), \quad F^0 = F^2 = F^3 = 0. \tag{19.34}$$

Откуда из (1.5) имеем

$$F^1 = \frac{1}{2}\frac{d\nu}{d\rho}\exp(-\lambda). \tag{19.35}$$

Эту же величину можно найти и из силы, действующей на заряд со стороны связи, удерживающей заряд в поле неподвижным. Эта сила численно равна силе со стороны поля и противоположна ей по знаку. Это следует из равенства нулю сил. В римановом пространстве из равенства нулю сил отнюдь не следует равенства нулю вектора первой кривизны (4 - ускорения).

$$F^1 = \frac{1}{2}\frac{d\nu}{d\rho}\exp(-\lambda) = -\frac{q}{m_0 c^2}F^{10}V_0.$$

Откуда имеем

$$\exp(\nu/2) = -\frac{q}{m_0 c^2}\int F_{01}\, d\rho = \frac{qA_0}{m_0 c^2} + {}_2, \tag{46.27}$$

где C_2 - постоянная интегрирования.

Постоянную интегрирования определим из естественного требования псевдоевклидовости метрики на оси цилиндрической оболочки, так как напряженность поля в центре цилиндра равна нулю. В результате имеем

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{q\Delta A_0}{m_0 c^2}, \quad \Delta A_0 = A_0(\rho) - A_0(0), \tag{46.28}$$

где ΔA_0 - разность потенциалов между точкой наблюдения и и точкой на оси цилиндра, A_0 определяется формулой (46.9a). Для функции λ получим соотношение

$$\exp\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{F_{01}}{2\pi d_0 \rho}\frac{1}{1+\frac{q\Delta A_0}{m_0 c^2}}. \tag{46.29}$$

В предыдущих формулах является неопределенной еще одна постоянная величина d_0 - "фиктивная"плотность заряда, которую также определим из требования псевдоевклидовости пространства-времени на оси цилиндра. Из сказанного следует

$$d_0 = \lim_{\rho\to 0} \frac{F_{01}(\rho)}{2\pi\rho\left(1+\frac{q\Delta A_0}{m_0 c^2}\right)}. \tag{46.30}$$

Для вычисления предела воспользуемся формулой (46.17), что дает

$$d_0 = \pm E_0 \frac{a_0 e^{\pm R_1}}{4\pi c^2}(1 \pm R_1 \ln R_1), \quad E_0 = \frac{2\gamma}{R}. \tag{46.31}$$

Выясним происхождение и физический смысл "фиктивной"плотности заряда.

В классической электростатике напряженность поля внутри проводника и внутри любой замкнутой полости всегда равна нулю. Заряды внутри проводника также отсутствуют. Этот факт является следствием справедливости закона Кулона для поля точечного заряда, что приводит к справедливости уравнения Лапласа для потенциала вне заряда. С наших позиций, связанные заряды не создают вокруг себя сферически симметричного кулоновского поля, что приводит к нарушению уравнения Лапласа и к появлению отличного от нуля поля внутри замкнутой проводящей оболочки. Оставаясь в рамках квазимаксвелловской теории, аналогичной теории Максвелла в "заданном гравитационном поле мы были вынуждены вводить "фиктивные"заряды. Без этого было не возможно удовлетворить уравнениям Максвелла в полости. Попытка в уравнении (46.21) с нулевой правой частью использовать тривиальное решение $D^1 = 0$, как в классике, обречена на неудачу, поскольку внутри полости F_{01} в согласии с (46.15) отлична от нуля. Особенностью "фиктивных"зарядов является то, что они создают поле только внутри оболочки и не влияют на поле вне оболочки. Поле "фиктивных"зарядов замкнуто и меняет геометрию пространства-времени внутри полости. Это резко отличается от классической теории поля, так как поле реальных зарядов, насильственно введенных внутрь полости, изменяет и внешнее решение. В принципе поле "фиктивных"зарядов можно измерить. Существует ли на самом деле поле в полости может решить только эксперимент.

Вычислим "физические т.е. тетрадные компоненты поля внутри оболочки. В тетрадах (17.10) на основе формул (46.22), (46.22a) $F_{(0)(1)}$ компонента тензора электромагнитного поля имеет вид

$$F_{(0)(1)} = \exp\left(-\frac{\lambda+\nu}{2}\right)F_{01} = 2\pi d_0 \rho. \tag{46.31}$$

Таким образом, тетрадная компонента поля, которую и измеряет физический прибор, оказалась отличной от нуля. Вычислим отношение тетрадной компоненты поля внутри цилиндра $F_{(0)(1)}$ к тетрадной компоненте поля вне цилиндра $F'_{(0)(1)}$ на границе раздела, т.е. устремляя к R значения ρ вне и внутри цилиндра.

$$\frac{F_{(0)(1)}}{F'_{(0)(1)}} = \frac{F_{(0)(1)}}{E_0} = \frac{a_0 R e^{\pm R_1}}{2c^2}(1 \pm R_1 \ln R_1)$$

Отношение тетрадных компонент тензора поля отличается от отношения аналогичных аффинных компонент (46.20). Рассмотрим пример, приведенный раннее. Пусть цилиндр заряжен отрицательно и величина $E_0 = 10^6\ V/m$, а радиус цилиндра $R = 0.05\ m$. Тогда отношение (46.20а) равно 0.022, вместо 0.024 для отношения аффинных компонент тензора поля.

Вычислим энергию поля внутри цилиндрической оболочки радиуса R и высоты h. Тетрадная компонента тензора энергии-импульса внутри цилиндра $T^{(0)(0)}$ в согласии с (17.14), (17.15) и полем тетрад (17.10) имеет вид

$$T^{(0)(0)} = \frac{1}{8\pi} 4\pi^2 {d_0}^2 \rho^2 \tag{46.32}$$

Энергия поля внутри полости в согласии с (17.16f) имеет вид

$$W = \int_{V_1} \sqrt{-g} T^{(0)(0)} d^3y = \frac{\pi d_0 h}{2} \int_0^R F_{01} \rho^2 d\rho, \tag{46.33}$$

где F_{01} определяется из (46.15). При классическом рассмотрении энергия поля внутри цилиндра равна нулю. Для слабых полей $E_0 \sim 10^6\ V/m$ или меньше для вычисления энергии поля можно воспользоваться формулой (46.17), которая с учетом (46.31) приводится к виду

$$W_1 = W_0 \frac{a_0^2 R^2}{8c^4} e^{\pm 2R_1} (1 \pm R_1 \ln R_1)^2, \quad W_0 = \frac{\pi R^2 h E_0^2}{8\pi} \tag{46.34}$$

В последней формуле ввели величину W_0 численно равную величине энергии электрического поля внутри цилиндра высоты h и радиуса R при условии постоянства поля внутри цилиндра напряженности E_0. Вычислим энергию поля вне цилиндра, воспользовавшись общей формулой

$$W_2 = \frac{1}{2} A_0 \int \rho \sqrt{\gamma}\, dV = \frac{1}{2} A_0 Q. \tag{19.18f}$$

Из формулы (46.9) находим для $A_0(R)$ в случае слабых полей выражение

$$A_0(R) = 2\gamma e^{\pm R_1} [-\ln R_1 \mp R_1/2]. \tag{46.35}$$

Выражение для энергии поля вне цилиндра примет вид

$$W_2 = 2 W_0 e^{\pm R_1} [-\ln R_1 \mp R_1/2]. \tag{46.36}$$

Найдем отношение внутренней энергии поля в цилиндре к внешней энергии вне цилиндра.

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{a_0^2 R^2}{16 c^4} \frac{(1 \pm R_1 \ln R_1)^2}{[-\ln R_1 \mp R_1/2]} e^{\pm R_1}. \tag{46.37}$$

Пусть цилиндр заряжен отрицательно и величина $E_0 = 10^6\ V/m$, а радиус цилиндра $R = 0.05\ m$. Тогда отношение энергий

$$\frac{W_1}{W_2} = 3 \cdot 10^{-5}. \tag{46.38}$$

Для случая слабых полей потенциал внутри цилиндра меняется по закону

$$A_0(\rho) = -2\gamma e^{\pm R_1} \left[\ln R_1 \pm \frac{R_1}{2} \frac{\rho^2}{R^2} \right]. \tag{46.39}$$

Разность потенциалов $\Delta A_0(\rho)$ между центром цилиндра и произвольной точкой внутри цилиндра

$$\Delta A_0(\rho) = \mp 2\gamma e^{\pm R_1} \frac{R_1}{2} \frac{\rho^2}{R^2}. \quad (46.40)$$

Метрика пространства–времени, если в качестве пробных частиц внутри цилиндра поместить электроны с зарядом e и массой m, для этого случая имеет вид

$$\exp(\nu/2) = 1 \mp \frac{E_0^2 \rho^2 e^2}{8m^2 c^4} = \exp(-\lambda/2). \quad (46.41)$$

Итак, для слабых полей метрика пространства–времени внутри цилиндра близка к метрике пространства Минковского, так как содержит метрические коэффициенты, отличающиеся от единицы на величины, пропорциональные $1/c^4$.

Вне цилиндра метрика будет иметь вид

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{qA_0}{m_0 c^2}. \quad (19.42)$$

$$\exp(\lambda/2) = -\frac{\rho}{2\gamma} \frac{\partial A_0}{\partial \rho} \frac{1}{1 + \frac{qA_0}{m_0 c^2}}, \quad (19.43)$$

где A_0 определяется формулой (46.9). Для малых значений аргумента в A_0 (т.е. для слабых полей и небольших расстояний от центра цилиндра), имеем

$$A_0(\rho) = 2\gamma e^{\pm R_1}[-\ln \rho_1 \mp R_1/2]. \quad (46.42)$$

Откуда для метрики получим

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{qA_0}{m_0 c^2} = \exp(-\lambda/2). \quad (46.43)$$

Для больших расстояний от оси цилиндра (даже и в случае слабых полей) аргумент в (46.9) велик. Поэтому для $A_0(\rho)$ можно воспользоваться асимптотической формулой (46.12). Если в качестве пробных частиц, задающих СО, выбрать электроны, то для больших расстояний от оси цилиндра метрика примет вид

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{2R}{\rho}, \quad \exp(\lambda/2) = \frac{2mc^2}{e\rho E_0} \frac{1}{1 + \frac{2R}{\rho}}. \quad (46.44)$$

Любопытно отметить, что и на больших расстояниях от оси цилиндра метрика не является плоской. Полагая $R/\rho \to 0$, находим для метрики выражение

$$dS^2 = (dy^0)^2 - \frac{(2mc^2)^2}{(eE_0\rho)^2} d\rho^2 - \rho^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (46.45)$$

Вычислим погонную емкость бесконечного цилиндра радиуса R. При классическом рассмотрении эта величина равна нулю, поскольку энергия поля вне цилиндра стремится к бесконечности. При нашем подходе погонная емкость C_p отлична от нуля и определяется формулой

$$C_p = \frac{Q^2}{2Wh} = \frac{\gamma}{A_0(R)} =$$

$$= \frac{1}{2e^{R_1}\Big[I_0^2(R_1)K_0(R_1) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k I_k^2(R_1)K_k(R_1)\Big]}. \qquad (46.46)$$

При выводе воспользовались формулой (2d1.9) при $\rho = R$ и выбрали верхний знак. Для слабых полей $R_1 \ll 1$ формула упрощается и сводится к виду

$$C_p = \frac{1}{2\ e^{R_1}[-\ln R_1 - R_1/2]} = \frac{1}{\ln R_1^{-2}}. \qquad (46.47)$$

Для очень сильных полей $R_1 \gg 1$

$$C_p = \frac{\gamma e}{2mc^2} = \frac{E_0 e R}{4mc^2} = R_1. \qquad (46.48)$$

Например, для цилиндра, заряженного отрицательно, величине $E_0 = 10^6\ V/m$, и радиус цилиндра $R = 0.05\ m$ получим для емкости 1 метра длины величину емкости $C_p = 13.4$ сантиметра. Для цилиндра, заряженного положительно, имеем

$$R_1^+ = \frac{R_1}{N}, \quad N = \frac{m_p}{m}A, \qquad (46.49)$$

где m_p - масса протона, m - масса электрона, A - число нуклонов в ядре. Для погонной емкости положительно заряженного цилиндра C_p^+ находим

$$C_p^+ = \frac{1}{\ln N^2 + \ln R_1^{-2}}. \qquad (46.50)$$

Для алюминиевого цилиндра, заряженного положительно, при напряженности поля и размерах, указанных выше, расчет по формуле (46.50) дает при $N = 5 * 10^4$ значение емкости 1 метра длины $C_p^+ = 3.4$ сантиметра.

47. Цилиндрический конденсатор

Рассмотрим цилиндрический конденсатор бесконечной длины, представляющий собой две коаксиальные цилиндрические оболочки радиусов b и d, $b < d$. Требуется вычислить погонную емкость такого конденсатора для следующих двух случаев:

а). Внутренний цилиндр заряжен положительно, а внешний – отрицательно,

б). Внутренний цилиндр заряжен отрицательно, а внешний – положительно.

а). Для слабых полей, которые мы здесь и будем рассматривать, имеем из (46.9) вклад в потенциал поля между обкладками, созданный внутренним положительно заряженным цилиндром в виде

$$A_0^+(\rho) \simeq -2\gamma\Big(\ln\Big(\frac{\rho a_0}{2c^2}\Big) + C\Big), \qquad (47.1)$$

где $C = 0.577...$ - есть постоянная Эйлера. Потенциал поля в зазоре, обусловленный внешним отрицательно заряженным полым цилиндром имеет вид

$$A_0^-(\rho) = 2|\gamma|e^{-d_1}\Big[\ln d_1 - \frac{d_1}{2}\frac{\rho^2}{d^2}\Big]. \qquad (47.2).$$

Формула (47.2) получена из формул (46.5), (46.39) выбором нижних знаков, заменой $d_1 = R_1$, $d_1 = dp$, $d = R$ и учетом того, что $\gamma < 0$.

Разность потенциалов между внутренней и внешней обкладками конденсатора

$$\Delta A_0^+ = A_0^+(b) - A_0^+(d) = 2|\gamma| \ln \frac{d}{b},$$

$$\Delta A_0^- = A_0^-(b) - A_0^-(d) = 2|\gamma| e^{-d_1} \frac{d_1}{2}\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right),$$

$$\Delta A_0 = \Delta A_0^+ + \Delta A_0^- = 2|\gamma|\left(e^{-d_1}\frac{d_1}{2}\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right) + \ln\frac{d}{b}\right). \tag{47.3}$$

Откуда находим выражение для погонной емкости C^+

$$C^+ = \frac{|\gamma|}{\Delta A_0} = \frac{1}{2\left(e^{-d_1}\frac{d_1}{2}\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right) + \ln\frac{d}{b}\right)}. \tag{47.4}$$

Учитывая, что

$$d_1 = \frac{eE_0 d}{4mc^2}, \quad C_0 = \frac{1}{2\ln\frac{d}{b}}, \quad U = bE_0 \ln\frac{d}{b}, \tag{47.5}$$

где C_0 - классическое значение погонной емкости бесконечного цилиндрического конденсатора, а U - классическое выражение для приложенного к нему напряжения, получим

$$C^+ = \frac{_0}{1 + \frac{eC_0U}{4mc^2}\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right)}. \tag{47.6}$$

б). Пусть внутренний цилиндр заряжен отрицательно, а внешний – положительно. Для этого случая находим из (46.42)

$$A_0^-(\rho) = 2|\gamma| e^{b_1}\left[\ln\left(\frac{\rho e E_0}{4mc^2}\right) + \frac{b_1}{2}\right], \quad b_1 = \frac{eE_0 b}{4mc^2}. \tag{47.7}$$

"Релятивистская"разность потенциалов потенциалов

$$A_0^-(b) - A_0^-(d) = -2|\gamma| e^{b_1}\ln\left(\frac{d}{b}\right), \quad A_0^+(b) - A_0^+(d) = 0. \tag{47.8}$$

Откуда находим для емкости C^- выражение

$$C^- = {}_0 \exp\left(-\frac{eC_0U}{2mc^2}\right). \tag{47.9}$$

Следует отметить, что в отличие от классики, понятие емкости в нашем случае неоднозначно. При классическом рассмотрении заряженной проводящей оболочки поле внутрь полости не проникает. Поэтому при классическом рассмотрении для емкости уединенного проводника C справедливы соотношения

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q^2}{2W}, \tag{47.10}$$

где Q - заряд, U - потенциал, W - энергия поля вне проводника. При нашем рассмотрении поле может проникать и внутрь проводящей оболочки, поэтому расчет по формуле (47.10) как для уединенной оболочки, так и для конденсатора приводит к разным значениям емкости. В качестве альтернативы можно указать еще одну формулу для емкости уединенной проводящей оболочки.

$$C = \frac{Q}{A_{(0)}}, \tag{47.11}$$

где $A_{(0)}$ - тетрадная временная компонента 4-потенциала на поверхности проводника. Только эксперимент позволит выяснить какая из приведенных формул выражает действительную емкость оболочки.

Внутрь сплошного заряженного проводника в электростатике поле проникать не может. В противном случае это бы привело к возникновению внутри проводника электрического тока. В отличие от классического рассмотрения, при нашем подходе не все заряды расположены на поверхности проводника. Часть зарядов расположены внутри проводника с таким распределением внутренних зарядов, которые компенсируют плотность "фиктивных"зарядов (см. например (47.21)), создавая в совокупности с "фиктивными"зарядами нулевое поле внутри проводника. Для уединенной емкости сплошного проводника оба выражения (47.10) эквивалентны, где под величиной заряда Q понимается заряд на поверхности проводника.

Таким образом, при нашем подходе емкость сплошного проводника и емкость проводящей оболочки такой же формы, как и поверхность сплошного проводника, могут не совпадать.

В отличие от плоского конденсатора или уединенного проводника, емкость цилиндрического конденсатора уменьшается при возрастании напряжения. Это связано с характером изменения поля проводника. Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора (47.8) больше, чем при классическом рассмотрении, что и приводит к уменьшению емкости. В случае плоского конденсатора разность потенциалов между обкладками меньше, чем в классике. Откуда следует возрастание емкости по сравнению с классическим выражением. Если, сохраняя расстояние между обкладками цилиндрического конденсатора h неизменными, неограниченно увеличивать его радиус b, то цилиндрический конденсатор вырождается в плоский. Из формулы (46.12) справедливой не только для больших расстояний от цилиндра, но также и для цилиндров больших радиусов, находим

$$\Delta A_0 = \frac{E_0 c^2 h}{a_0 \rho}, \quad C^- = C_0 \frac{a_0 b}{c^2}, \tag{47.12}$$

где C_0 - классическое значение емкости плоского конденсатора. Ясно, что $C^- > C_0$, т.к. асимптотическая формула (46.12) применима при условии $a_0 b/c^2 \gg 1$.

Емкость любого уединенного проводника можно рассматривать как емкость конденсатора, одна из обкладок которого удалена в бесконечность. Так как энергия поля связанных зарядов во всех рассмотренных примерах оказалась меньше энергии поля свободных зарядов, то емкость уединенных проводников любой формы должна быть больше их классической емкости. Величины емкости должны зависеть от знака заряда и возрастать от прикладываемого напряжения.

48. Поле шара, заряженного по объему

Рассмотрим электростатическое поле, обладающее центральной симметрией. Пусть такое поле создано, например, шаром, равномерно заряженным по объему. Как известно из классической электростатики, напряженность электрического поля в центре шара равна нулю, возрастая по линейному закону внутри шара и убывая вне шара, как поле от точечного заряда, помещенного в центр шара. В нашей модельной задаче считаем для простоты диэлектрическую проницаемость равной единице. К такой задаче можно подойти, рассматривая облако постоянной плотности из зарядов, связанных невесомыми нитями длин от нуля до R, закрепленных в общем центре. Следовательно, поле, создаваемое каждым из зарядов будет таким же, как если бы каждый из зарядов двигался равноускоренно с ускорением направленным к центру шара. Ясно, что хотя "ускорение"каждого отдельного заряда постоянно, однако эти "ускорения"не равны друг другу. Чем ближе заряд расположен к центру шара, тем с меньшей силой действует на него электрическое поле, созданное другими зарядами системы.

В нашей задаче требуется найти напряженность и энергию электрического поля внутри и вне шара и геометрию пространства- времени в этих областях. Из раздела 19 ясно, что геометрия пространства - времени вне и внутри шара - риманова. Получаемая кривизна пространства - времени в общем случае другой природы, чем в ОТО. Она обусловлена электромагнитным полем связанных зарядов, физическая ситуация которых эквивалентна их "размещению"в некоторой НСО. Хотя пространство-время и искривлено, однако напряженность поля в "физическом"репере (тетрадах) совпадает с кулоновой. Так как любой экспериментатор фактически измеряет поля в "физических"координатах, то непосредственное измерение напряженности, например, с помощью крутильных весов, не отличается от кулоновского значения. Римановость пространства - времени проявляется при вычислении энергии поля. Как мы указывали ранее, для положительно заряженного тела реальные релятивистские поправки малы, а для отрицательно заряженного шара эти поправки могут оказаться значительными. Для отрицательно заряженного по объему тела элементарным связанным зарядом является электрон. Для расчета потенциала A_0 заряженного по объему шара будем исходить из формулы (19.1), в которой ускорение a_0 связанной заряженной частицы внутри шара определим по формуле

$$a_0 = \frac{F_1}{m}, \tag{48.1}$$

в которой требуется определить F_1, действующей со стороны связи на электрон массы m. Очевидно, что эта сила равна по величине и противоположна по знаку силе на электрон со стороны поля, созданного другими зарядами системы. Для ее нахождения используем известный максвелловский тензор напряжений электрического поля в пустоте [26], который в локальных тетрадах представим в виде

$$\sigma_{(i)(k)} = \frac{1}{4\pi}\Big(E_{(0)}E_{(k)} - \frac{E^2}{2}\delta_{(i)(k)}\Big). \tag{48.2}$$

Рассмотрим в шаре мысленно выделенную концентрическую сферу радиуса x и найдем силу со стороны поля на внутреннюю поверхность этой сферы

$$F_{(i)}(x) = -\oint \sigma_{(i)(k)} n_{(k)} df = -\frac{Q^2 x^4}{2R^6} n_{(i)}, \quad E_{(i)} = -E n_{(i)}. \tag{48.3}$$

Здесь $n_{(i)}$ - единичный вектор, направленный по радиусу от центра, df - элемент поверхности сферы, Q - полный заряд шара. На внешнюю поверхность концентрической сферы радиуса $x + dx$ очевидно действует сила $F_{(i)}(x + dx)$

$$F_{(i)}(x+dx) = \frac{Q^2(x+dx)^4}{2R^6} n_{(i)} = \frac{Q^2x^4}{2R^6} n_{(i)} + \frac{2Q^2x^3dx}{R^6} n_{(i)}. \tag{48.4}$$

Отсюда на dN электронов, расположенных в слое толщины dx действует сила со стороны поля $dF_{(i)}$

$$dF_{(i)}(x) = \frac{2Q^2x^3dx}{R^6} n_{(i)}. \tag{48.5}$$

Очевидно, что число частиц dN в шаровом слое толщины dx так относится к полному числу частиц в шаре N, как отношение объема шарового слоя к объему шара, т.е.

$$dN = \frac{3Nx^2dx}{R^3}. \tag{48.6}$$

Отсюда сила $F_{1(i)}$ действующая со стороны поля на электрон с зарядом e вычисляется по формуле

$$F_{1(i)}(x) = \frac{2eQx}{3R^3} n_{(i)}. \tag{48.7}$$

"Ускорение"a_0, обусловленное силой связи, направлено к центру сферы и вычисляется по формуле

$$a_0(x) = \frac{2eQx}{3mR^3}. \tag{2d3.8}$$

В плоском пространстве Минковского при равновесии заряда в поле ускорение равно нулю. В римановом пространстве при равновесии зарядов их мировые линии искривлены и роль ускорений играют векторы первой кривизны мировых линий зарядов. В принципе, подставляя 48.8 в (19.1) и произведя интегрирование по объему шара, можно найти потенциал A_0 в любой точке вне и внутри шара. Однако можно воспользоваться уже найденными нами ранее результатами из раздела 19, как промежуточными, где мы нашли потенциал вне заряженной сферы радиуса R в согласии с формулой (19.3a).

Формула (19.3a) может быть представлена в явном виде, пригодном как для потенциала вне так и внутри сферы, а именно

$$A_0 = \frac{Qe^{-s^2}}{2Rs} \int_{s(|1-a|-a)}^{s} \exp(u^2)du, \quad s = \sqrt{\frac{a_0r^2}{4c^2R}}, \quad a = \frac{R}{r}. \tag{48.9}$$

Для $a > 1$, т.е. для потенциала внутри сферы имеем

$$A_0 = \frac{Qe^{-s^2}}{2Rs} \int_{-s}^{s} \exp(u^2)du = \frac{Qe^{-s^2}\sqrt{\pi}\Phi(is)}{2iRs}, \quad a > 1. \tag{48.10}$$

Для потенциала вне сферы ($a < 1$) получим

$$A_0 = \frac{Qe^{-s^2}}{2Rs} \int_{-s(2a-1)}^{s} \exp(u^2)du = \frac{Qe^{-s^2}\sqrt{\pi}(\Phi(is) - \Phi(-is(2a-1))}{4iRs}. \tag{48.11}$$

Для расчета потенциала заряженного по объему шара разобьем шар на множество концентрических шаровых слоев и суммируя вклады от каждого слоя найдем искомые потенциалы вне и внутри шара. Рассмотрим шаровой слой с внутренним радиусом x и внешним радиусом $x + dx$. В согласии с (48.8) и (48.9) для s находим

$$s = \frac{r}{2R}\sqrt{\frac{2Qe}{3Rmc^2}}. \tag{48.12}$$

Величина s оказалась независимой от x. Если использовать формулу (48.11) применительно к слою толщины dx, содержащий заряд dQ и просуммировать по всем слоям, то получим потенциал вне шара A_0'

$$A_0' = \frac{3Qe^{-s^2}}{2R^3 s}\int_0^R x\Big(\int_{-s(2x/r-1)}^{s}\exp(u^2)du\Big)dx =$$

$$= \frac{3Qe^{-s^2}\sqrt{\pi}}{4iR^3 s}\int_0^R (\Phi(is) - \Phi(-is(2x/r-1))xdx =$$

$$= \frac{3Qe^{-s^2}\sqrt{\pi}}{4iR^3 s}\Big(\frac{\Phi(is)R^2}{2} - \int_0^R \Phi(-is(2x/r-1))xdx\Big). \quad (48.13)$$

Для потенциала A_0' внутри заряженного шара на расстоянии x от центра шара следует учесть, что часть слоев лежит вне x, а часть - внутри x. Поэтому потенциал представим в виде

$$A_0' = \frac{3Qe^{-s^2}}{2R^3 s}\Big[\int_0^r x\int_{-s(2x/r-1)}^{s}\exp(u^2)dudx + \int_r^R x\int_{-s}^{s}\exp(u^2)dudx\Big] =$$

$$= \frac{3Qe^{-s^2}\sqrt{\pi}}{4iR^3 s}\Big[\int_0^r (\Phi(is) - \Phi(is(1-2x/r))xdx + \Phi(is)(R^2-r^2)\Big]$$

$$= \frac{3Qe^{-s^2}\sqrt{\pi}}{4iR^3 s}\Big(\Phi(is)(R^2 - r^2/2) - \int_0^r \Phi(-is(2x/r-1))xdx\Big). \quad (48.14)$$

Используя известное разложение, справедливое для малых значений s

$$\Phi(is) = \frac{2is}{\sqrt{\pi}}e^{s^2} \quad (48.15)$$

и переходя к пределу при $s \to 0$, получим для потенциалов A_0' (48.13) и (48.14) классические значения

$$A_0'(r) = \frac{Q}{r}, \quad r > R, \quad A_0'(r) = \frac{3Q}{2R^3}\Big(R^2 - \frac{r^2}{3}\Big), \quad r < R. \quad (48.16)$$

Отметим во избежание недоразумений, что на каждый из электронов в шаре действуют постоянные (для каждого!) силы реакции связи. Поэтому в согласии с постулатом эквивалентных ситуаций и (2.18) каждый из электронов внутри шара, находится в касательном плоском пространстве но римановом пространстве-времени. Поэтому корректна операция интегрирования по объему в плоском пространстве. С другой стороны, совокупность частиц, задающих СО как внутри тела, так и вне его, включим в совокупность мировых линий СО, принадлежащей сферически-симметричной лагранжевой сопутствующей СО с метрикой вида (19.4)

$$dS^2 = \exp(\nu)(dy^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \exp(\lambda)(dr)^2, \quad (19.4)$$

где ν и λ зависят только от r.

Функции $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ нуждаются в определении. Для их нахождения воспользуемся решением сферически-симметричных статических уравнений Максвелла с использованием метрики (19.4), аналогичных по записи уравнениям электродинамики в "заданном гравитационном поле"[7]. Затем сравним полученное решение с выражением для поля, получаемом из (48.13), (48.14).

Для отличной от нуля радиальной компоненты "индукции"D^1 вне шара имеем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\sin\theta\exp(\lambda/2)D^1\Big)=0, \tag{19.5}$$

решением которого будет

$$D^1=\frac{Q}{r^2}\exp(-\lambda/2). \tag{19.6}$$

В (19.5) и (19.6) между "индукцией"D^1 напряженностью поля E^1 и компонентой тензора поля F_{01} существуют известные [7] соотношения

$$D_1=\gamma_{11}D^1=\frac{Q}{r^2}\exp(\lambda/2)=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}E_1,\quad E_1=F_{01},\quad \gamma_{kl}=-g_{kl}, \tag{19.7}$$

где γ_{kl} - пространственный метрический тензор с определителем равным γ. Из рассмотренного следует соотношение

$$F_{01}=-\frac{\partial A_0'}{\partial r}=\frac{Q}{r^2}\exp\Big(\frac{\lambda+\nu}{2}\Big), \tag{48.17}$$

в котором F_{01} определяется дифференцированием по радиусу выражения (48.13). Последнее соотношение является уравнением, связывающим две неизвестные функции $\lambda(r)$ и $\nu(r)$. Для нахождения второго уравнения для этих функций рассмотрим силу со стороны поля, действующую на пробный заряд q, закрепленный в точке с координатой r от центра шара. Эти заряды определяют базис СО вне заряженного шара. Пусть масса пробного заряда m_0. Тогда вектор первой кривизны F^1 мировой линии этого заряда можно найти из соотношения (1.5), записав для закрепленных зарядов условие сопутствия для метрики (19.4) в виде

$$V^k=V_k=0,\qquad V^0=(g_{00})^{-1/2},$$

$$V_0=(g_{00})^{1/2},\quad F^1=F(r),\quad F^0=F^2=F^3=0. \tag{19.10}$$

Откуда из (1.5), (19.4) и (19.10) имеем

$$F^1=\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\exp(-\lambda). \tag{19.11}$$

С другой стороны, эту величину можно найти и из силы, действующей на заряд со стороны связи, удерживающей заряд в поле неподвижным. Эта сила численно равна силе со стороны поля и противоположна ей по знаку.

$$F^1=\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\exp(-\lambda)=-\frac{q}{m_0c^2}F^{10}V_0=$$

$$-\frac{Qq}{m_0c^2r^2}\exp(-\lambda/2). \tag{19.12}$$

Из (19.8)-(19.12) находим

$$\exp(\nu/2)=-\frac{q}{m_0c^2}\int F_{01}\,dr=\frac{q}{m_0c^2}A_0'(r)+C_1, \tag{48.18}$$

где $A'_0(r)$ определена в (48.13). Постоянную интегрирования C_1 определим из требования евклидовости пространства на бесконечности. Так как $A'_0(\infty) = 0$, то $C_1 = 1$, поэтому имеем

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{qA'_0}{m_0c^2}. \tag{48.19}$$

Используя (48.17), получим

$$\exp\Big(\frac{\lambda}{2}\Big) == -\frac{\frac{r^2}{Q}\frac{\partial A'_0}{\partial r}}{1 + \frac{qA'_0}{m_0c^2}}. \tag{48.20}$$

Точно таким же способом, как и выше, можно определить геометрию и внутри заряженного шара, используя значения для потенциала (48.14). Индукцию D^1 определим из уравнения Максвелла (19.18с), которое в нашем случае сведется к виду

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{\gamma}D^1) = 4\pi\rho \tag{48.21}$$

Формальное решение имеет вид

$$D^1 = \frac{4\pi}{\sqrt{\gamma}}\int \rho\sqrt{\gamma}dr, \tag{48.22}$$

однако для вычисления интеграла нужно знать значение $\rho\sqrt{\gamma}$. Естественно, что рассматриваемые заряды должны удовлетворять уравнению неразрывности. В согласии с нашей общей идеологией незаряженный шар находился в плоском пространстве -времени. Сразу после зарядки шара зарядом с постоянной плотностью ρ_0 пространство время стало римановым и плотность заряда ρ вообще говоря изменилась. Через некоторое время, равное времени реллаксации, метрика стала статической, представимой в форме (19.4). Из закона сохранения заряда до и после деформаций среды (35.14a) вытекает равенство

$$\rho\sqrt{\gamma} = \rho_0\sqrt{\gamma}_0, \tag{48.23}$$

где $\sqrt{\gamma}_0 = r^2\sin\theta$ - якобиан перехода в сферической системе координат плоского пространства. Последняя формула позволяет произвести интегрирование (48.22). В результате находим

$$D^1 = \frac{Q}{R^3}r\exp\Big(-\frac{\lambda}{2}\Big). \tag{48.24}$$

$$F_{01} = -\frac{\partial A'_0}{\partial r} = \frac{Qr}{R^3}\exp\left(\frac{\lambda+\nu}{2}\right), \tag{48.25}$$

где $A'_0(r)$ определяется из (48.14). По аналогии с (48.18), определяя постоянную интегрирования C_1 из требования евклидовости пространства в нуле, (что естественно, так как в центре сферы сила на заряд со стороны поля равна нулю) получим

$$C_1 = 1 - \frac{qA'_0(0)}{m_0c^2}, \tag{48.26}$$

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{qA'_0(r)}{m_0c^2} - \frac{qA'_0(0)}{m_0c^2}, \tag{48.27}$$

$$\exp(\lambda/2) = -\frac{\frac{\partial A_0'}{\partial r} R^3}{Qr\left(1 + \frac{qA_0'(r)}{m_0c^2} - \frac{qA_0'(0)}{m_0c^2}\right)}. \tag{48.28}$$

Займемся анализом полученных соотношений.

Если в метрики (48.19), (48.20), (48.27), (48.28) подставить классическое значение для потенциала (48.16) то получим выражения

$$\exp\nu = \left(1 + \frac{qQ}{rm_0c^2}\right)^2. \tag{48.29}$$

Используя (48.17), получим

$$\exp\lambda == \frac{1}{\left(1 + \frac{qA_0'}{m_0c^2}\right)^2}. \tag{48.30}$$

$$\exp\nu = \left(1 - \frac{3qQr^2}{2R^3m_0c^2}\right)^2. \tag{48.31}$$

$$\exp\lambda == \frac{1}{\left(1 - \frac{3qQr^2}{2R^3m_0c^2}\right)^2}. \tag{48.32}$$

Очевидно, что для слабых полей вне заряженной сферы геометрия пространства-времени подобна геометрии поля Шварцшильда в ОТО (после переобозначения постоянных взаимодействия), а внутри шара при тех же условиях совпадает с геометрией пространства постоянной кривизны де Ситтера [20]. Любопытно отметить, что точные решения уравнений Эйнштейна в нашем случае эквивалентны нерелятивистскому приближению. Следует отметить также, что потенциал вне заряженного по объему шара отличается от потенциала заряженной сферы, имеющей одинаковые с шаром радиус и заряд.

Представляет интерес вычислить энергию электрического поля заряженного шара. Для этого воспользуемся формулой (19.18e), отбрасывая интеграл по объему от дивергенции, дающий ноль.

$$W = \frac{1}{2}\int \rho A_0' \sqrt{\gamma}\, dV, \tag{48.33}$$

где A_0' определяется из (48.14). В согласии с (48.23) интеграл сведется к виду

$$W = 2\pi\rho_0 \int_0^R r^2 A_0'(r)\, dr. \tag{48.34}$$

Если подставить в последнюю формулу классическое значение потенциала (48.16) то получим

$$W = 2\pi\rho_0 \int_0^R r^2 \frac{3Q}{2R^3}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) dr = \frac{3Q^2}{2R} \tag{48.35}$$

классическое выражение для энергии заряженного по объему шара. Для нашего случая получим для безразмерной энергии поля на один электрон $W_0 = W/(Nm_0c^2)$ выражение

$$W_0 = \frac{9}{4} z\Big[\int_0^1 \frac{y^2 e^{-s^2}}{s} \int_0^y v \int_{(s(1-2v)}^s e^{u^2} du dv dy +$$

$$+2\int_0^1 \frac{y^2 e^{-s^2}}{s}\int_y^1 v\int_0^s e^{u^2}dudvdy\Big],$$

$$y=\frac{r}{R},\quad z=\frac{r_0}{r},\quad s=\frac{y}{2}\sqrt{\frac{2z}{3}},\quad r_0=\frac{eQ}{m_0c^2}. \tag{48.36}$$

Если последнюю формулу применить к одному точечному электрону , то получим не бесконечную величину, как при классическом рассмотрении, а конечную, не превышающую $W_0 = 5.7$ Численное вычисление интеграла (48.36) приводит к значениям $W_0(1/6000) = 9.167*10^{-5}$, $W_0(1) = 0.516$, $W_0(25) = 4.411$, $W_0(500) = 5.555$, $W_0(1000) = 5.588$, $W_0(5000) = 5.637$, $W_0(10000) = 5.675$. Из анализа значений следует, что для малых значений z имеет место классическое выражение, а для очень больших z, соответствующих значению радиуса много меньшего классического, энергия не является расходящейся величиной. Следует отметить, что поле электрона, "заряженного"по объему, обладает большей энергией, чем поле электрона, "заряженного"по поверхности, как и при классическом рассмотрении. В классике это отношение равно 6/5, при нашем рассмотрении 5.67/2.

49. Сферический конденсатор

Рассмотрим сферический конденсатор, представляющий собой две концентрические радиусов R_1 и R_2, $R_2 > R_1$. Требуется вычислить емкость такого конденсатора для следующих двух случаев:

а). Внутренняя оболочка заряжена положительно, а внешняя – отрицательно,

б). Внутренняя оболочка заряжена отрицательно, а внешняя – положительно.

а). Для слабых полей, которые мы здесь и будем рассматривать, имеем из классики (напомним, что для слабых полей поле положительных зарядов совпадает с классическим) вклад в потенциал поля между сферами, созданный внутренней положительно заряженной оболочкой в виде

$$A'_{10}=\frac{Q}{r},\quad R_1\le r\le R_2. \tag{49.1}$$

Отрицательные заряды (электроны), находящиеся на внутренней стороне внешней оболочки, будут притягиваться полем к центру сфер. Следовательно, сила со стороны металлической решетки, удерживающая электроны на поверхности металла, будет направлена по радиусу от центра сферы и поэтому будет вызывать положительное "ускорение". Внешний потенциал от такой сферы определяется формулой (19.3). Можно показать, что формула для потенциала, справедливая вне и внутри сферы радиуса R с положительным "ускорением"зарядов будет иметь вид

$$A'_0=\frac{Qe^{\zeta^2}}{2R\zeta}\int_{\zeta(a+|1-a|)}^{\zeta(2a+1)}\exp(-u^2)du,\quad a=\frac{R}{r},\quad \zeta=\frac{r}{R}\sqrt{\frac{eQ}{8mc^2R}} \tag{49.2}$$

Последняя формула может быть представлена в виде

$$A_0=\frac{Q\exp(\zeta^2)\sqrt{\pi}}{4R\zeta}\Big[\Phi(\zeta(1+2a))-\Phi(\zeta(a+|1-a|)\Big], \tag{49.3}$$

которая переходит в (19.3) при $a < 1$. Для нас интересен сейчас обратный случай, когда $a > 1$. Для этого случая имеем

$$A_0 = \frac{Q\exp(\zeta^2)\sqrt{\pi}}{4R\zeta}\Big[\Phi(\zeta(1+2a)) - \Phi(\zeta(2a-1)\Big], \tag{49.4}$$

Для случая слабого поля, используя известное разложение

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot 3...(2n+1)}z^{2n+1}, \tag{49.5}$$

поучим

$$A_0^-(r) = -\frac{|Q|}{R_2}\Big(1+\zeta_2^2\Big(\frac{2}{3}-4a^2\Big)\Big), \quad \zeta_2 = \frac{r}{R_2}\sqrt{\frac{|e||Q|}{8mc^2R_2}} \tag{49.6}$$

Разность потенциалов между внутренней и внешней обкладками конденсатора

$$\Delta A_0^+ = A_0^+(R_1) - A_0^+(R_2) = |Q|\Big(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\Big),$$

$$\Delta A_0^- = A_0^-(R_1) - A_0^-(R_2) = \frac{|Q|}{R_2}\frac{2}{3}\Big(1-\frac{R_1^2}{R_2^2}\Big)\delta_2^2, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{|e||Q|}{8mc^2R_2}}, \tag{49.7}$$

$$\Delta A_0 = \Delta A_0^+ + \Delta A_0^- = \frac{|Q|}{R_1} - \frac{|Q|}{R_2} + \frac{|Q|}{R_2}\frac{2}{3}\delta^2(1-R_1^2/R_2^2). \tag{49.8}$$

Используя очевидное равенство

$$\frac{Q}{R_2} = \frac{|U|R_1}{R_2-R_1}, \tag{49.9}$$

где $|U|$ - величина подаваемого на конденсатор напряжения, находим выражение для емкости C^+

$$C^+ = \frac{|Q|}{|\Delta A_0|} = \frac{C_0}{1+\frac{C_0R_1(R_1+R_2)|U||e|}{12R_2^3mc^2}} \tag{49.10}$$

где C_0 - классическое значение емкости сферического конденсатора.

б). Пусть внутренняя сфера заряжена отрицательно, а внешняя – положительно. Для этого случая находим из (19.3а) и (49.5)

$$A_0^-(r) = -\frac{|Q|}{r}\Big(1+\frac{4}{3}\delta_1^2 - 2\delta_1^2\frac{r}{R_1}\Big), \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{|e||Q|}{8mc^2R_1}} \tag{49.11}$$

Точно таким же способом, как и для предыдущего случая, имеем для емкости C^- выражение

$$C^- = \frac{|Q|}{|\Delta A_0|} = \frac{C_0}{1+\frac{C_0|U||e|}{6R_2mc^2}}. \tag{49.12}$$

Из анализа формул (49.10) и (49.12) следует, что емкость сферического конденсатора, (как и цилиндрического) уменьшается от приложенного к нему напряжения, а емкость уединенного проводника и плоского конденсатора, наоборот, – возрастает. Обе формулы (49.10) и (49.12) очевидно совпадают, если зазор h между обкладками много меньше внутреннего радиуса сферы. Физический смысл этого ясен, так как при малом зазоре между обкладками "ускорения"электронов для двух разных случаев практически совпадают по величине, что и приводит к одинаковому уменьшению емкости.

Однако обстоятельство, что емкость плоского конденсатора возрастает от приложенного напряжения, а сферического – уменьшается, кажется очень странным, поскольку плоский конденсатор легко получить из сферического конденсатора при стремлении радиусов сфер к бесконечности и сохранении зазора между сферами неизменным. Докажем, что и здесь нет никакого парадокса. Рассмотрим первый случай, когда внутренняя сфера заряжена положительно, а внешняя сфера – отрицательно. Устремим радиус внутренней сферы к бесконечности, с сохранением зазора между сферами h и поверхностной плотности заряда σ на каждой из сфер. Для определения потенциала между сферами воспользуемся формулой (49.4), в которой при постоянной плотности σ величины ζ и δ будут не малы, как для конденсатора конечных радиусов, а, наоборот, будут бесконечно возрастать с ростом радиусов сфер. Это вытекает из очевидного равенства

$$\zeta^2 = \frac{r^2}{R^2}\frac{e\pi\sigma R}{2mc^2}. \tag{49.13}$$

Поэтому формулу (49.4) будем рассматривать при больших значениях ζ, воспользуясь разложением (19.22). В результате получим формулу

$$A_0(r) = -\frac{|Q|R_2}{4r^2\delta_2^2\left(\frac{2R_2}{r}-1\right)}\exp\left(-4\delta_2^2\left(1-\frac{r}{R_2}\right)\right). \tag{49.14}$$

Из последней формулы имеем.

$$A_0(R_2) = -\frac{|Q|R_2}{4R_2^2\delta_2^2}, \tag{49.15}$$

$$A_0(R_1) = -\frac{|Q|}{4R_2\delta_2^2\left(1-\frac{h^2}{R_2^2}\right)}\exp\left(-\frac{|E||e|h}{2mc^2}\right). \tag{49.16}$$

где $|E| = 4\pi|\sigma|$ - суммарная напряженность поля между сферами, созданная полем обеих сфер. Для модуля разности потенциалов, учитывая, что $h/R_2 \ll 1$ имеем

$$|\Delta A_0| = \frac{2mc^2}{|e|}\left(1-\exp\left(-\frac{|E||e|h}{2mc^2}\right)\right). \tag{49.17}$$

Из последнего соотношения следует формула

$$C^+ = \frac{C_0|e|U}{2mc^2\left(1-\exp\left(-\frac{|U||e|}{2mc^2}\right)\right)}, \tag{49.18}$$

совпадающая с формулой (17.19) для плоского конденсатора. Для слабых полей $|e||U|/mc^2 \ll 1$ имеем

$$C^+ = C_0\left(1+\frac{|e||U|}{4mc^2}\right), \tag{49.19}$$

что совпадает с (17.20). На первый взгляд кажется странным, что для нахождения емкости сферического конденсатора очень большого радиуса мы учитывали вклад в поле только от внешней оболочки. В классическом случае внешняя оболочка вообще не дает вклада в поле внутри ее. С другой стороны, при выводе емкости плоского конденсатора, вклад в поле между пластинами распределяется поровну между положительно и отрицательно заряженными бесконечно тонкими пластинами. Полное значение напряженности $2\pi\sigma + 2\pi\sigma = 4\pi\sigma$. Это же значение напряженности можно получить, считая, что поле между пластинами конечной толщины создается одной пластиной и замыкается на другой. При этом все заряды расположены очевидно на внутренних поверхностях пластин с плотностью зарядов 2σ. Поэтому значение напряженности поля внутри конденсатора $4\pi\sigma$ и оно создано одной (любой) из пластин. Именно это обстоятельство мы учли при выводе последних формул. Тем же способом, что и для цилиндрического конденсатора, можно найти геометрию пространства-времени вне и внутри сферического конденсатора. Мы этим заниматься не будем, ограничившись нахождением геометрии пространства-времени внутри отрицательно заряженной оболочки (вне оболочки геометрия была рассмотрена ранее). Для потенциала внутри сферы радиуса R имеем формулу (2d3.10), которая для случая слабого поля с помощью формулы (49.5) представима в виде

$$A_0 = -\frac{|Q|}{R}\Big(1 - \frac{2}{3}s^2\Big), \quad s = \sqrt{\frac{a_0 r^2}{4c^2 R}} = \frac{r}{R}\sqrt{\frac{|e||Q|}{8mc^2 R}}. \tag{49.20}$$

Ясно, что при классическом приближении потенциал внутри сферы будет всюду постоянен и равен $A_0 = -|Q|/R$, а напряженность поля равна нулю. В нашем случае это не так. Для напряженности поля внутри сферы имеем

$$|F_{01}| = \frac{|Q|}{R^2}\frac{a_0 r}{3c^2}. \tag{49.21}$$

Очевидно, что в центре сферы напряженность поля равна нулю и возрастает по линейному закону внутри сферы. Таким образом, на классическом языке внутри сферы как бы существует некоторый распределенный фиктивный заряд постоянной плотности ρ_0. Для ее нахождения "размажем"поверхностный заряд Q равномерно по объему сферы Тогда получим классическое значение напряженности поля E внутри сферы в виде

$$E = \frac{Qr}{R^3} = \frac{4}{3}\pi\rho r, \tag{49.22}$$

где ρ - классическое значение плотности заряда. Из сравнения двух последних выражений находим

$$\rho_0 = \rho\frac{a_0 R}{3c^2} = \frac{\sigma a_0}{c^2}, \quad \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}, \tag{49.23}$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

На основании рассмотренного следует, что для нахождения метрики внутри заряженной по поверхности сферы можно воспользоваться тем же самым методом, что и для нахождения геометрии внутри шара равномерно заряженного по объему, рассмотренной в предыдущем разделе. Для нахождения метрики будем исходить из интервала (19.4), где ν и λ зависят только от r. Функции $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ нуждаются в определении. Для их нахождения воспользуемся решением сферически-симметричных статических уравнений Максвелла с использованием метрики (19.4), аналогичных по записи уравнениям электродинамики в "заданном гравитационном поле"[7]. Затем сравним полученное решение с выражением для потенциала и поля, получаемом из (49.20), (49.21). Индукцию D^1 определим из уравнения Максвелла (19.18c), которое в нашем случае сведется к виду

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma'}}\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{\gamma'}D^1) = 4\pi\rho_0' \tag{49.24}$$

Формальное решение имеет вид

$$D^1 = \frac{4\pi}{\sqrt{\gamma'}} \int \rho_0' \sqrt{\gamma'} dr, \tag{49.25}$$

однако для вычисления интеграла нужно знать значение $\rho_0'\sqrt{\gamma'}$. Допустим, что рассматриваемый "фиктивный"заряд как и реальный должен удовлетворять уравнению неразрывности. В согласии с нашей общей идеологией незаряженная оболочка находилась в плоском пространстве -времени. Сразу после зарядки оболочки пространство время стало римановым и появился "эффективный"заряд. Через некоторое время, равное времени реллаксации, метрика стала статической, представимой в форме (19.4). Первоначально "фиктивный"заряд находился в недеформированном состоянии внутри сферической полости и его плотность была постоянной. После реллаксации, плотнось фиктивного заряда стала различной в разных точках полости, имеющих разные радиальные координаты. Из закона сохранения "эффективного"заряда до и после деформаций среды вытекает равенство

$$\rho_0'\sqrt{\gamma'} = \rho_0\sqrt{\gamma_0}, \tag{49.26}$$

где $\sqrt{\gamma_0} = r^2\sin\theta$ - якобиан перехода в сферической системе координат плоского пространства. Последняя формула позволяет произвести интегрирование (49.25). В результате находим

$$|D^1| = \frac{|Q^*|}{R^3} r \exp\Big(-\frac{\lambda}{2}\Big), \quad Q^* = Q\frac{a_0 R}{3c^2}. \tag{49.27}$$

$$|F_{01}| = \Big|-\frac{\partial A_0}{\partial r}\Big| = \frac{|Q^*|r}{R^3}\exp\Big(\frac{\lambda+\nu}{2}\Big), \tag{49.28}$$

где $A_0(r)$ определяется из (49.20).

Сравнивая (49.28) и (49.21), находим

$$\exp\Big(\frac{\lambda+\nu}{2}\Big) = 1, \tag{49.29}$$

т.е. первое уравнение, связывающее неизвестные функции $\lambda(r)$ и $\nu(r)$. Функцию $\nu(r)$ определим из из (49.27) и (49.20), что дает

$$\exp(\nu/2) = 1 + \frac{Q^2e^2r^2}{12m^2c^4R^4}, \tag{49.30}$$

$$\exp(\lambda/2) = \frac{1}{1+\frac{Q^2e^2r^2}{12m^2c^4R^4}}. \tag{49.31}$$

Здесь в качестве СО была выбрана совокупность электронов, закрепленных внутри сферы. Очевидно, что для слабых полей внутри заряженной сферы геометрия пространства-времени совпадает с геометрией пространства постоянной кривизны де Ситтера [20], однако в отличие от шара, заряженного по объему, отклонение от плоской метрики пропорционально $1/c^4$, т.е. геометрия пространства-времени внутри заряженной сферы почти плоская. Отметим, что внутри заряженной сферы в отличие от классического рассмотрения поле присутствует. В частности, для слабых полей отношение аффинных компонент полей, которые в согласии с (49.29) совпадают с "физическими"или тетрадными, на границе раздела E/E определяется величиной

$$\frac{E}{E} = \frac{a_0R}{3c^2} = \frac{eQ}{6mRc^2} = \frac{eU}{6mc^2}. \tag{49.32}$$

При численной оценке последней формулы мы сталкиваемся с принципиальными трудностями, которые противоречат экспериментальным данным. О причине возникновения этих трудностей и путях их преодоления пойдет речь в следующем разделе.

50. Трудности теории связанных зарядов и возможные пути выхода

Одной из главных трудностей, возникающих в расчетах полей от связанных зарядов, являются огромные поправки по сравнению с классическими расчетами. Например, при вычислениях емкости уединенных тел и конденсаторов при реальных напряжениях 50 киловольт получаются отклонения от классических результатов порядка одного двух процентов. Если бы такие большие поправки действительно имели место, то они бесспорно были бы давно обнаружены. Однако отсюда вовсе не следует, что предлагаемый подход абсурден. Все упирается в вопрос: "О какой емкости идет речь в экспериментах?"В плоском пространстве - времени такого вопроса не стоит в принципе. В искривленном пространстве-времени вопрос измерений является одним из центральных. Здесь мы сталкиваемся с теми же самыми трудностями, что и в ОТО. Частично эти трудности можно преодолеть, используя в расчетах локальные тетрады. Нами ранее было показано, что в локальных тетрадах поле заряженной плоскости однородно, а поле вне заряженного шара в тетрадах - кулоново. К классическому виду сводится в тетрадах и поле вне заряженного бесконечного цилиндра и нити. Поэтому, вычисляя в тетрадах емкость точно так же, как и в классике по формуле

$$C = \frac{Q}{\int F_{(0)(1)} dx^1}, \qquad (50.1)$$

получим выражения в точности совпадающие с классическими.

Итак, для уединенного проводника и конденсатора мы рассмотрели четыре типа определения емкости (19.16), (19.21), (2d2.11) и (50.1). В пространстве Минковского все эти определения полностью эквивалентны. В пространстве Римана ситуация несколько иная. Например, емкость сферы, вычисленная по формулам (19.16) и (19.21), совпадает друг с другом, но отличается от емкости (2d2.11) и (50.1). Поэтому только тщательный эксперимент может дать ответ на вопрос, что считать емкостью в римановом пространстве.

Рассмотрим другой пример - поле внутри заряженной поверхности. В классике это поле равно нулю для любой формы выбранной поверхности. Это обстоятельство является своего рода проверкой закона Кулона. Насколько точен закон Кулона? Такой вопрос волновал очень многих исследователей. Сам Кулон непосредственно измерял силу взаимодействия зарядов, используя крутильные весы. Он повторил опыт английского ученого Кавендиша по гравитационному взаимодействию. Интерес к точности закона Кулона не случаен. Знание поправки к закону Кулона позволяет оценить верхнюю границу массы покоя фотона, равенство нулю которой является одним из самых главных законов физики. Если переписать потенциал поля точечного заряда в виде

$$A_0 = \frac{Q}{r^{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon \ll 1, \qquad (50.2)$$

то как показывают современные исследования $\varepsilon < 6 * 10^{-17}$. В нашем случае закон Кулона в тетрадах справедлив вне заряженного тела с любой степенью точности, однако внутри заряженных поверхностей поле, вычисленное как в аффинном репере, так и в тетрадах отлично от нуля.

Если воспользоваться формулой (49.32), то при потенциале на сфере в 50 киловольт напряженность поля внутри сферы вблизи ее поверхности будет составлять 1.6% от значения напряженности на ее поверхности. Например, при радиусе сферы равном одному метру напряженность на поверхности сферы равна 50000 /, а внутри сферы нарастать от нуля (в центре сферы) до 800 / вблизи границы. При классическом рассмотрении поле внутри сферы отсутствует. На первый взгляд кажется, что полученные нами результаты присутствия поля внутри сферы полностью противоречат экспериментальным данным. Как известно из [120], первым исследователем, заметившим отсутствие поля внутри заряженной сферы, был Бенджамен Франклин. Простейший опыт по проверке поля внутри заряженной сферы - это попытка зарядить тело, дотронувшись им до внутренней части заряженного сферического проводника. Так как тело в этом случае не получало заряда и заряжалось при соприкосновении с наружной частью сферы, то из из этого опыта следовало, что внутреннее поле составляло несколько процентов от внешнего. Закон Кулона был проверен очень тщательно Максвеллом с помощью чувствительного электрометра, который помещали внутрь большой сферы, заряженной до высокого напряжения. Стрелка электрометра практически не отклонялась при соприкосновении незаряженного пробного тела с внутренней частью сферы, а затем с электрометром. Опыт был повторен и усовершенствован Плимптоном и Лафтоном в 1936г и также привел к подтверждению с большей точностью отсутствия поля внутри заряженной сферы.

Почему же в нашем случае внутри сферы поле присутствует?

Все дело в том, что проведенные нами расчеты относятся не к реальной металлической сфере толщиной порядка , а к идеальной сфере толщиной порядка классического диаметра электрона или много меньшей. Фактически мы рассчитали поле наружного электронного слоя, сплющенного в бесконечно тонкий равномерный по плотности слой. С точки зрения классической электростатики и известной теоремы Ирншоу [121] в электростатике невозможна устойчивая статическая конфигурация электрических зарядов. Хотя доказательство теоремы основывается, в сущности, лишь на обратной пропорциональности квадрату расстояний сил взаимодействия между точечными зарядами системы, однако ясно, что и в нашем случае, когда расстояние между зарядами много больше размеров зарядов, будет справедлив закон Кулона, а, следовательно, и теорема Ирншоу. Очевидно, что на поверхности идеальных заряженных проводников существуют некоторые силы неэлектростатического происхождения, которые препятствуют выходу зарядов за поверхность проводника. Именно эти силы обеспечивают устойчивость заряженного проводника. В противном случае электроны на поверхности проводника под влиянием взаимного отталкивания разлетелись бы по сторонам и покинули поверхность проводника. Используя терминологию из механики, силы, удерживающие электроны на поверхности заряженного проводника, являются силами реакции связи. При выводе формул для потенциала заряженных проводников мы использовали соотношения (19.1) и (19.2), где в (19.2) m - масса электрона. Фактически, при выводе потенциала заряженной металлической сферы мы подменили силы связи со стороны решетки силами натяжений невесомых нитей одинаковой длины, связанных в общем центре, на концах которых "подвешены"электроны. Таким образом, мы свели задачу о заряженной металлической сфере к "чистой"задаче, связанных (в буквальном смысле) в едином центре электронов. Встает законный вопрос о правомерности такой аппроксимации.

Можно указать и другую модель в рамках классической теории поля, в которой удерживать электроны на поверхности металла будет некоторая упругая пленка. Эта пленка аналогична пленке Пуанкаре, удерживающей электрон от разрыва. Если придерживаться такой модели, то в формуле (19.2) m - это уже не "голая"масса электрона, а масса электрона в "шубе". При этом масса масса "шубы"может быть по величине много больше массы электрона. Строго эта задача решается в квантовой механике твердого тела, где вводится эффективная масса электронов при рассмотрении их динамики в кристалле. В согласии с [122] эта эффективная масса может не иметь ничего общего с реальной массой электрона. В реальных кристаллах она может быть раз в 20 больше, чем масса электрона в пустом пространстве. Указанное увеличение массы электрона в пустом пространстве соответствует случаю, когда напряженность внешнего поля направлена вдоль проводника. При этом эффективная масса электрона вычисляется в согласии с формулой [123]

$$m = \frac{e\tau}{u} = \frac{e^2 n\tau}{\lambda} = \frac{e^2\tau n E}{j}, \tag{50.3}$$

где e - заряд электрона, E - напряженность внешнего поля, τ - среднее время свободного пробега, u - подвижность электрона, j - плотность тока, λ - удельная проводимость металла, n - концентрация свободных электронов в металле.

Если последнюю формулу применить для случая, когда внешнее поле направлено перпендикулярно проводнику, то при близкой к нулю плотности тока термоэлектронной эмиссии (что и есть в электростатике!) подвижность электронов в направлении нормальном проводнику исчезающе мала. Это приводит к очень большому увеличению эффективной массы. Это означает, что электрон в "шубе"намного массивнее "голого". Таким образом, подставляя в формулу (49.32) вместо массы "голого"электрона массу "одетого"электрона, мы получим исчезающе малое поле внутри заряженной полости. Очевидно, что массу "одетого"электрона нужно подставлять вместо массы "голого"и при расчете емкости конденсаторов. Ясно, что вычисления массы "шубы"электрона требует применения строгой квантовой теории. Однако можно привести и простую оценочную формулу для вычисления эффективной массы электрона, если воспользоваться известной формулой Ричардсона – Дешмана [124] для плотности тока при рассмотрении термоэлектронной эмиссии. При вычислении этой плотности тока в [124] использовалась модель идеального электронного газа с применением статистики Ферми-Дирака и учетом спина электрона. При этом оказалось, что

$$j = AT^2 \exp\left(-\frac{b}{kT}\right), \quad A = \frac{4\pi mek^2}{h^3} = 120a/(c^2 * K^2), \tag{50.4}$$

где A - постоянная, одинаковая для всех металлов, k - постоянная Больцмана, h - постоянная Планка, T - абсолютная температура по шкале Кельвина, m - масса "голого"электрона, b - работа, которую должен совершить электрон, чтобы с уровня Ферми выйти наружу металла. Найденная формула имеет простой физический смысл. Величина AT^2 представляет собой число электронов, которые ударяются о единицу поверхности металла в единицу времени. Умножение на экспоненциальный множитель из этого числа частиц выбирает те частицы, которые в состоянии преодолеть потенциальный барьер на границе металла.

Из формул (50.3) и (50.4) находим

$$m = \frac{e^2 \tau n E}{AT^2} \exp\left(\frac{b}{kT}\right). \qquad (50.5)$$

В качестве иллюстрации расчета эффективной массы электрона рассмотрим пример, приводимый нами выше. Имеем медную сферу радиуса равного метру, заряженную до потенциала $U = 5 * 10^4\ B$. Если ввести обычное правдоподобное предположение, что на каждый атом приходится один свободный электрон, то то концентрация этих электронов будет иметь вид

$$n = \frac{N\rho}{A'} = 8.5 * 10^{22-3}, \quad A' = 63, \quad \rho = 8.9/^3. \qquad (50.6)$$

Здесь N - число Авогадро, A' - атомный вес, ρ - плотность меди. Время электрона между двумя столкновениями вычислим по известной из общей физики формуле [124]

$$\tau = \frac{2m\lambda}{ne^2} = 5 * 10^{-14}c, \quad \lambda = 5.3 * 10^{17}c^{-1}. \qquad (50.7)$$

Полагая, что температура $T = 300K$, после подстановки полученных данных находим выражение для эффективной массы в виде

$$m = \frac{2m\lambda E}{AT^2} \exp\left(\frac{b}{kT}\right) = 55.43 \cdot m \cdot \exp\left(\frac{b}{kT}\right). \qquad (50.8)$$

Займемся анализом полученной формулы. Если положить в ней $b = 4.47$, что соответствует работе выхода для меди, то получим для эффективной массы огромное выражение порядка $5.5 \cdot 10^{76} m$, что будет означать на классическом языке, что электроны при данной температуре практически не покидают поверхность металла (электростатика!), оставаясь под пленкой Пуанкаре вблизи границы металла. Это и приводит к исчезающе малой плотности тока эмиссии j вне металла и отсюда - к огромной эффективной массе. Однако нас интересуют не те частицы, которые преодолевают потенциальный барьер и покидают поверхность металла, а те, которые остаются вблизи поверхности и создают электрическое поле. Для этих частиц эффективная масса может быть получена по формуле (50.8) без экспоненциального множителя.

$$m = \frac{2m\lambda E}{AT^2} = 55.43 \cdot m. \qquad (50.9)$$

В этом случае эффективная масса электрона в 55 раз превышает массу покоя электрона. Следовательно, в рассмотренном выше примере максимальная напряженность поля в полости будет не 800 /, а всего лишь 14.5 $B/$ при наружной напряженности на сфере 50000 /.

Выясним физический смысл обстоятельства, что "свободные"электроны удерживаются на поверхности металла, воспользуясь одной из возможных причин, обсуждаемых в [124]. Как известно, электроны при тепловом движении могут пересекать поверхность металла и удаляться на расстояния порядка атомных. Эти электроны не дают вклада в ток эмиссии, но входят в электронную атмосферу над поверхностью металла, плотность которой очень быстро убывает в зависимости от расстояния от поверхности. Положительный слой заряженных ионов поверхности совместно с электронным облаком образуют двойной электрический слой, который подобен по действию конденсатору. Этот слой не создает поля во внешнем пространстве, но для его преодоления требуется производство работы "выхода". Существуют и другие причины объяснения работы выхода, например, учет взаимодействия между электроном, покидающим поверхность металла, с его зеркальным изображением.

Подчеркнем, что область применения метода связанных зарядов пригодна для классического описания микрочастиц с учетом давления Пуанкаре и для качественного анализа заряженных макросистем. Количественное описание последних приводит к завышенным поправкам, не соответствующим опытным данным. Как мы показали выше, причина несоответствия опытным данным связана как с существенно квантовыми эффектами, так и учетом теплового движения электронов в металле даже в электростатике. Ясно, что предложенный нами учет квантовых и тепловых эффектов весьма приблизителен. Для более точного описания нужно знать детальный механизм образования поверхностной пленки Пуанкаре. Так как поверхностные эффекты в пограничных слоях не являются предметом исследования в данной книге, то мы этим заниматься не будем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим главные задачи, которые с нашей точки зрения, получили здесь решение.

I. Системы отсчета

Все НСО в работе разбиты на два класса:

1. НСО с заданным законом движения.

2. НСО с заданной структурой.

В предлагаемой работе доказано, что:

1. Преобразование Меллера (НСО 1-го класса) не описывают перехода к глобально равноускоренной НСО. Каждая из лагранжевых частиц движется с постоянным ускорением, но эти ускорения не равны друг другу. Поэтому интерпретировать преобразования Меллера с переходом в релятивистскую равноускоренную НСО не совсем законно.

2. Преобразование Логунова (НСО 1-го класса), описывающее переход от ИСО к релятивистской равноускоренной НСО, в которой каждая из лагранжевых частиц базиса движется с постоянным ускорением, приводит к нарушению жесткости. Таким образом, глобально равноускоренная система Логунова не является релятивистски жесткой.

Получили парадоксальный результат. Одинаковая для всех частиц физическая ситуация привела к движению частиц относительно друг друга (система Логунова). Для того чтобы эти частицы были взаимно неподвижны, необходимо к ним прикладывать разные силы (система Меллера).

Таким образом, в рамках СТО на основе НСО 1-го класса нельзя построить логически стройную теорию упругости, [117-119] основанную на отсутствии в твердом теле деформаций и напряжений, если это тело движется свободно в однородном силовом поле. Одинаковые стационарные физические условия для каждой из частиц среды приводят к нестационарной метрике.

Описание жестких НСО в рамках СТО приводит к логическим трудностям, которые оказалось возможным преодолеть путем выхода за рамки плоского пространства–времени.

Это вытекает непосредственно из полученных автором уравнений структуры.

На основе уравнений структуры построена теория релятивистской жесткой равноускоренной НСО 2-го класса, которая реализуется в римановом пространстве постоянной кривизны. Подход при построении НСО базируется на очевидном требовании отсутствия деформаций и напряжений в твердом теле при его поступательном движении в однородном силовом поле.

Одним из главных вопросов, рассмотренных в работе, это правила перехода от НСО 2-го класса к ИСО и наоборот.

Т.к. метрика НСО — риманова, то никакими координатными преобразованиями, в том числе и содержащими время, нельзя перейти от ИСО пространства Минковского к НСО пространству Римана, т.к. нельзя создать или обратить в ноль тензор кривизны Римана–Кристоффеля, используя любые координатные преобразования.

Поэтому возникают трудности при интерпретации измерений физических величин, выражаемых через геометрические объекты. Эти трудности частично преодолены введением "эталонных"координат, которые совпали с галилеевыми координатами в пространстве Минковского. Опираясь на "затравочные"координаты плоского пространства–времени, мы построили метрологию НСО в римановом пространстве–времени, что позволило выяснить метрический смысл измеряемых физических величин.

В качестве примера рассмотрено равноускоренное движение космического корабля с "земным"ускорением $_0 = 9.8\ /^2$. Релятивистский эффект сокращения собственного времени оказался значительно более выражен, чем в СТО, что внушает оптимизм в достижении цели при дальних межзвездных путешествиях. Из законов движения следует, что двигаясь с ускорением $_0 = 9.8\ /^2$ за время (по часам космонавта) меньшее 354 суток можно попасть в любую удаленную точку Вселенной, если последнюю, вопреки релятивистской космологии, отнести к пространству Минковского. Близкие результаты были получены в [16], [17], используя (без ссылки) метрику, полученную нами ранее [18].

Хотя в пространстве Минковского космонавт пролетает бесконечно большое расстояние, однако относительно квази–ИСО длина пути l остается конечной и и не превосходит c^2/a_0. Физический смысл конечности расстояния l относительно квази–ИСО связан с представлением метрики, учитывающей лоренцево сокращение квази–ИСО относительно НСО.

Найденные эталонные координаты и время позволили ввести в римановом пространстве преимущественную систему координат, построить в этой системе поле тетрад и сформулировать пять правил преобразования геометрических объектов от равноускоренной НСО к ИСО.

II. Связь НСО и уравнениями Эйнштейна

Наличие кривизны пространства–времени позволило установлению связи с уравнениями Эйнштейна. Автором найдено точное решение системы уравнений Эйнштейна–Максвелла, с "космологической постоянной где в качестве источника в уравнениях Эйнштейна используется тензор энергии–импульса электромагнитного поля. В качестве "космологической постоянной"выступает величина $\Lambda = {a_0}^2/(2c^4)$, где a_0 — ускорение, c — скорость света. Найденное решение описывает невзаимодействующую заряженную пыль, находящуюся в равновесии в "параллельных"однородных электрическом и гравитационном полях. Доказано, что частицы пыли, обладающие зарядом протона, должны иметь массу порядка массы стабильных элементарных черных дыр "максимонов"[21].

III. Постулат эквивалентных ситуаций и его следствия

Развитие нетрадиционного подхода к НСО привело к кругу задач, которые на первый взгляд не имеют никакого отношения к НСО, но на самом деле оказались с ними тесно связанными.

В стандартной физической теории кривизну пространства–времени связывают с решениями уравнений Эйнштейна или уравнений Эйнштейна–Максвелла при разных тензорах энергии-импульса материи.

На стыке ОТО и НСО возникла новая область исследований, связывающих геометрию пространства–времени с классическими (неквантовыми) полями связанных зарядов. На основе **"постулата эквивалентных ситуаций** сформулированного автором [107], **поле точечного заряда "подвешенного"на нити в постоянном электрическом поле,**

эквивалентно полю от этого заряда в равноускоренной НСО, если натяжения нитей, ускоряющей заряд и удерживающей заряд в поле, равны.

Этого постулата нет в классической электродинамике, где считается, что поле, покоящегося в ИСО точечного заряда, является кулоновым сферически–симметричным вне зависимости от того является ли заряд свободным или сумма сил, действующих на заряд , равна нулю. С другой стороны, поле от этого же заряда, движущегося равноускоренно, в согласии с классической электродинамикой для наблюдателя в НСО будет аксиально–симметричным вне зависимости от того или иного метода перехода в НСО.

Итак, одинаковая физическая ситуация, в которой находятся заряды (одинаковые натяжения нити), приводит к полям с разной симметрией! Налицо парадокс, попытка разрешения которого предпринята в данной работе.

Точное статическое решение для поля заряда в равноускоренной НСО, реализуемое в римановом пространстве–времени в совокупности с "постулатом эквивалентных ситуаций"позволяет в принципе отыскивать структуру пространства–времени и находить поля от заряженных проводников произвольной формы. Оказалось, что для тел, заряженных положительно, "релятивистские поправки"малы и справедлива обычная электростатика в пространстве Минковского. Для проводников, заряженных отрицательно или находящихся во внешнем электрическом поле эти поправки могут быть значительными. В работе выяснена причина этого явления и предложены простейшие эксперименты, позволяющие подтвердить или опровергнуть предсказанные эффекты.

На основе решения для поля заряженной бесконечной тонкой пластины предсказан эффект увеличения емкости плоского конденсатора на 2.4% при приложении к нему напряжения в 50 кВ.

Предсказано отсутствие полной экранировки поля внутри заряженной отрицательно металлической оболочки. Здесь следует иметь в виду, что указанные эффекты являются "чистыми"и могут сильно отличаться от экспериментальных данных. Причины этого рассмотрены в предыдущем разделе.

IV. Электродинамика в НСО 1-го и 2-го классов критерий стационарности (отсутствия излучения)

В работе рассмотрены примеры расчета электромагнитных полей в равноускоренной НСО. Сформулирован критерий отсутствия излучения у заряда или системы зарядов, связанный с равенством нулю обобщенной силы радиационного трения. Показано, что заряд, совершающий гиперболическое движение достаточно долго не излучает электромагнитной энергии, что согласуется с точкой зрения М. Борна, В. Паули и В. Гинзбурга. Найденное решение в римановом пространстве–времени оказалось аналогом решения М. Борна в пространстве Минковского. В отличие от решения Борна найденное решение не имеет "горизонта за которым образуется волновая зона, поэтому излучение отсутствует во всей области пространства–времени ИСО.

В построенной автором [18] жесткой равномерно вращающейся системе отсчета, реализуемой в римановом пространстве–времени, для заряженных частиц, "вмороженных"во вращающийся диск, также выполняется критерий отсутствия излучения.

Решена задача о распространении электромагнитных волн в равноускоренной НСО и рассмотрено преобразование полей из НСО в ИСО. Произведен расчет продольного эффекта Допплера и расчет этого же эффекта в НСО Меллера. Сравнение привело к отличным друг от друга результатам, и только эксперимент может установить какой из этих подходов правомерен.

V. Электростатическое поле и пространство-время вне заряженного металлического шара

На основе "постулата эквивалентных ситуаций уравнений структуры и уравнений Максвелла найдено точное выражение для поля и геометрии пространства–времени вне заряженного металлического шара. Если сила кулоновского отталкивания между зарядами на поверхности шара равна силе ньютоновского притяжения и между пробными зарядами вне шара выполнено аналогичное равенство, то из нашего решения с большой степенью приближения вытекает известное точное решение Райснера–Нордстрема, характеризующее электровакуумное статическое сферически–симметричное совместное решение уравнений Эйнштейна и Максвелла для поля электрически заряженной точечной массы.

Если радиус заряженного шара устремить к нулю, и "размазать"на сфере заряд электрона, то получим поле точечного заряда.

В работе найдено точное выражение для энергии поля точечного заряда W, которое равняется $W = 2mc^2$ и не зависит от величины заряда. Это выражение устраняет известную главную трудность классической и квантовой электродинамики, приводящей к бесконечной собственной энергии точечного заряда.

Таким образом наш подход делает классическую электродинамику внутренне–непротиворечивой при переходе к любым достаточно малым расстояниям, устраняя с одной стороны расходимость собственной энергии, и рассматривая с другой стороны элементарные частицы как точечные в согласии с [7].

VI. Гравитационное поле от сферического классически и и релятивистски жесткого тела.

С целью строгого определения физической СО, помимо метрики вводится вводится множество наблюдателей. Эти наблюдатели измеряют посредством основных измерительных приборов, таких, как масштабы, часы, эталонные массы, акселерометры.

На основе сферически–симметричной НСО, в которой скорость звука равна скорости света, а ускорение (в тетрадах) соответствует ньютоновскому, найдена метрика пространства–времени, лишь незначительно отличающаяся от метрики Шварцшильда. Расчет известных эффектов ОТО по найденной метрике близок к классическим. Отличие проявилось лишь в расчете смещения перицентра, который составляет 5/6 от шварцшильдовского. При выводе метрики уравнения Эйнштейна не использовались.

Когда в качестве сферически–симметричной НСО было выбрано жесткое тело в классическом смысле этого слова, а закон всемирного тяготения Ньютона считался точным, то пространство–время в такой модели оказалось римановым с плоским пространственным сечением. Последняя модель менее точно учитывала эффекты ОТО, давая для смещения перигелия планет величину в 3 раза меньшую, а для отклонения света — величину в 2 раза меньшую, чем расчет по метрике Шварцшильда.

VII О метрологии в ОТО

Один из разделов посвящен вопросам метрологии в сферически–симметричном гравитационном поле, рассмотренных в рамках ОТО [48]. Центральному сферически–симметричному гравитационному полю в пустоте, определяемому из уравнений Эйнштейна, было сопоставлено некоторое эквивалентное силовое поле в пространстве Минковского и отображено движение по геодезическим линиям частиц базиса Леметра в пространстве Эйнштейна на движение этого базиса по мировым линиям в пространстве Минковского. Найдено выражение для напряженности поля, в котором движется этот базис, и получено выражение для энергии поля. Найдена преимущественная система координат, координаты и время которой совпали с координатами и временем в пространстве Минковского. Оказалось, что радиальная координата Шварцшильда r эквивалентна величине радиуса вектора в пространстве Минковского, а временная координата Шварцшильда t не совпадает со временем пространства Минковского T. Отсюда нашел объяснение известный парадокс ОТО, согласно которому "координатная"скорость частиц базиса Леметра стремится к нулю при приближении к гравитационному радиусу, в то время как сила, действующая на частицы при этом (с точки зрения ОТО) стремится к бесконечности.

На основе найденных формул предсказан следующий эффект:

скорость света, испускаемого с поверхности земли перпендикулярно ей, должна быть меньше скорости света, падающего из бесконечности перпендикулярно поверхности на 11.2 км/сек.

Рассмотрено отображение на пространство Минковского известного решения Толмана, из которого найдено, что при плотности вещества близкой к критической, Вселенная по часам "модели"имеет значительно больший "возраст чем по часам "оригинала". Понятие "расстояния"в космологии не имеет однозначного смысла и не имеется ни одного "расстояния которое можно было бы назвать "правильным"[49]. Предлагаемый в работе метод позволил считать "правильными"евклидовы расстояния для закрытой и открытой моделей. Исследования показали, что связь между ОТО, СТО и законом всемирного тяготения Ньютона оказалось более тесной, чем обычно предполагается.

Из разобранных примеров видно, что простейшие НСО можно реализовать в римановом пространстве–времени, однако не исключена возможность, что и оно, может оказаться "тесным чтобы описать свойства произвольных НСО.

Дано одно из простейших обобщений риманова пространства — пространство метрической связности [50]. В этом пространстве выведены уравнения структуры, которые являются более общими, чем в римановом.

VIII. Динамика в поле связанных зарядов

Рассмотрено движение заряженных частиц в полях связанных зарядов для случаев плоской и сферической симметрии. Проведено сравнение с результатами, получаемыми при классическом рассмотрении в СТО и ОТО.

Показано, что между рассмотрением движения заряженных частиц в электростатическом поле пространства Минковского и движением в поле связанных зарядов в пространстве Римана имеется принципиальное различие. В пространстве Минковского искривлена мировая линия движущейся в поле частицы, а в пространстве Римана искривлена мировая линия закрепленной в поле частицы. Математический аппарат для заряда, движущегося в электростатическом поле, подобен аппарату в ОТО при рассмотрении движения частиц в статическом гравитационном поле. В отличие от ОТО метрика для поля от связанных зарядов определяется не из уравнений Эйнштейна, а из уравнений Максвелла и уравнений структуры.

Важной особенностью, найденной нами в отличие от СТО и ОТО, является возможность устойчивого статического равновесия электрона в поле протона на расстоянии равном классическому радиусу электрона r_0 от центра протона. Допускаются и радиальные колебания относительно r_0. Это говорит о (качественной в рамках модели) возможности существования нейтральной стабильной частицы размерами порядка r_0.

Кроме классических полей связанных структур, рассмотрены простейшие возможности учета квантовых эффектов. На основе метода Бора и Зоммерфельда объяснен спектр атома водорода с помощью квантования адиабатических инвариантов.

Получены формулы для тонкой структуры уровней атома водорода без использования решения уравнения Дирака.

Предлагаемый в книге подход по структуре близок подходу Бора - Зоммерфельда, но имеет и принципиальное различие.

В отличие от подхода Зоммерфельда, использующего движение электрона в поле протона в рамках СТО плоского пространства - времени, в книге рассмотрено движение электрона по геодезической в рамках римановой геометрии, обусловленной полем элементов связанных зарядов протона. Поле протона, как таковое, в нашем подходе в явном виде отсутствует, проявляясь в виде искривленной геометрии пространства - времени.

На основе постулата эквивалентных ситуаций исследовано электромагнитное поле бегущей волны, созданное током связанных зарядов. Показано, что вычисление погонной индуктивности и емкости бесконечно тонкого провода при классическом рассмотрении приводит к принципиальным трудностям, связанным с бесконечной энергией поля точечного заряда. В нашем случае таких трудностей не возникает как для слабого, так и для сильных полей. Энергия магнитного поля вне тонкого провода для больших токов ($J \gg 10^5$ А) совпала с энергией покоя масс зарядов провода. При этом заряды и токи из рассмотрения выпадают. При классическом рассмотрении магнитная энергия, (как и электрическая) стремится к бесконечности, что является принципиальной трудностью классической теории поля.

Таким образом, развитие нетрадиционного подхода к НСО совместно с **постулатом эквивалентных ситуаций** привело к возникновению совершенно новой области исследований и пересмотру некоторых положений классической теории поля. Предлагаемая модель устранила основное противоречие между точечностью заряженных частиц и их бесконечной собственной энергией. Оказалось, что не только гравитационное, но и электромагнитные поля могут искривлять геометрию пространства–времени.

Список литературы

[1] Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере. – М.: Наука, 1974.

[2] Меллер К. Теория относительности. Пер. с англ. – М.: Атомиздат, 1975.

[3] Фок В.А. Теория пространства времени и тяготения. – М.: Физматгиз, 1961.

[4] Подосенов С.А. Прямолинейное жесткое по Борну движение континуума с постоянным ускорением в сопутствующей тетраде. – В кн.: Проблемы теории гравитации. Теор. и мат. физ. Сер.А, Вып.1, – М.: ВНИИОФИ, 1972, С. 95 - 104.

[5] Седов Л.И., Ципкин А.Г. Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. – М.: Наука, 1989.

[6] Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. – М.: Наука, 1987.

[7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973.

[8] Hill E.L. // Phys. Rev. – 1946. – V. 69. – P. 488.

[9] Laue M. // Relativitālstheorie –1921. –V. 2. –P. 24. (Vieweg, Braunschweig).

[10] Rosen N. // Phys. Rev. – 1946. – V. 70. – P. 93.

[11] Rosen N. // Phys. Rev. – 1947. – V. 71. – P. 54.

[12] Родичев В.И. – В кн.: Эйнштейновский сборник 1968. М.: Наука, С. 115.

[13] Родичев В.И. – В кн.: Эйнштейновский сборник 1971. М.: Наука, С. 88.

[14] Родичев В.И. – В кн.: Эйнштейновский сборник 1974. М.: Наука, С. 286.

[15] Мицкевич Н.В. // Итоги науки и техники. Сер. клас. теория поля и теория гравитации. //ВИНИТИ – 1991. – Вып. 3. – С. 108.

[16] Desloge E.A. // Am. J.Phys. – 1989. – V. 57. – No. 12. – P. 1121.

[17] Desloge E.A. // Int. J. Theor. Phys. – 1990. – V. 29. – No. 2. – P. 193.

[18] Подосенов С.А. Геометрические свойства неинерциальных систем отсчета в релятивистской механике – В кн.: Дискуссионные вопросы теории относительности и гравитации. – М.: Наука, 1982, С. 95 - 103.

[19] Власов А.А. Статистические функции распределения. – М.: Наука, 1966.

[20] Синг Дж. Л. Общая теория относительности. Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

[21] Марков М.А. – В кн.: Теоретико–групповые методы в физике. Т. 1. – М.: Наука, 1986, С. 7.

[22] Иваницкая О.С. Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. – Минск.: Наука и техника, 1969.

[23] Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. – М.: Энергоиздат, 1982.

[24] Зельманов А.Л. Труды VI совещания по по вопросам космогонии. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.

[25] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967.

[26] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.

[27] Гинзбург В.Л. Об излучении и силе радиационного трения при равномерно ускоренном движении заряда. // УФН – 1969. – Т. 98. – Вып. 3. – С. 569 - 585.

[28] Born M. // Ann. d. Phys. – 1909. – V. 30. – No. 1.

[29] Teitelboim C. // Phys. Rev. D. – 1970. – V. 1. – P. 1572.

[30] Teitelboim C. // Phys. Rev. D. – 1971. – V. 3. – P. 1572.

[31] Villaroel D. // Ann. of Phys. – 1974. – V. 80. – P. 241.

[32] Villaroel D. // Ann. of Phys. – 1975. – V. 81. – P. 113.

[33] Pirani F. // Phys. Rev. – 1957. – V. 105. – P. 1089.

[34] Гуцунаев Ц.И., Ермолаев Ю.Г., Терлецкий Я.П. // Изв. вузов, сер. физ. – 1976. – N. 5. – С. 151.

[35] Маглеванный И.И. Электромагнитное поле точечного заряда в неинерциальных системах отсчета. – В кн.: Дискуссионные вопросы теории относительности и гравитации. – М.: Наука, 1982, С. 72 - 84.

[36] Паули В. Теория относительности. Пер. с нем. – М.: Наука, 1983.

[37] Полозов М.Н., Кременьков О.В. // Изв. АН БССР. – 1974. – N 1. – С. 73.

[38] Подосенов С.А. Геометрические свойства сопутствующих систем отсчета в специальной теории относительности. – В кн.: Теория относительности и гравитация. – М.: Наука, 1976, С. 100 - 106.

[39] Подосенов С.А. Структура тензора кривизны НСО в СТО. – В кн.: Теория относительности и гравитация. – М.: Наука, 1976, С. 107 - 114.

[40] Денен Г. – В кн.: Эйнштейновский сборник 1969 — 1970. – М.: Наука, С. 140.

[41] Дозморов И.М. Гравиинерциальные системы отсчета. – В кн.: Теория относительности и гравитация. – М.: Наука, 1976, С. 73 - 100.

[42] Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.

[43] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1965.

[44] Седов Л.И. Механика сплошной среды. – Т. 1. – М.: Наука, 1970.

[45] Подосенов С.А. Релятивистская динамика упругой среды в СТО. – В кн.: Проблемы теории гравитации. Теор. и мат. физ. Сер.А, Вып.1, – М.: ВНИИОФИ, 1972, С. 72 - 82.

[46] Подосенов С.А. Дисс. на соискание уч. степ. канд. физ-мат. наук. Релятивистская механика деформируемой среды в тетрадной формулировке. – М.: УДН, 1972.

[47] Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. Пер. с англ. – М.: Наука, 1979.

[48] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. Пер. с нем. – М.: Наука, 1965.

[49] Мак–Витти Г.К. Общая теория относительности и космология. Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

[50] Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. Пер с англ. – М.: Наука, 1965.

[51] Подосенов С.А. Тетрадное рассмотрение вращательного и колебательного движения в СТО. // Изв. вузов, сер. физ. – 1970. – N. 11. – С. 74 - 80.

[52] Норден А.П. Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1976.

[53] Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. – М.: Наука, 1969.

[54] Зельманов А.Л. Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в общей теории относительности. // Доклады АН СССР.– 1956. – Т.107.–N. 6. – С. 815 -818.

[55] Schott G. Electromagnetic Radiation.– Cambrige, pp. 63-69, 1912.

[56] Rosen N. // Phys. Rev. – 1940. – V. 57. – P.147, 150.

[57] Петров А.З. – Препринт ИТФ-71-130Р, Киев, 1971.

[58] Синюков Н.С. Геодезическое отображение римановых пространств. – М.: Наука, 1979.

[59] Подосенов С.А. Моделирование центрально-симметричного гравитационного поля. – В кн.: Тезисы докладов 4 -ой Всесоюзной конференции по современным теоретическим и экспериментальным проблемам теории относительности и гравитации.– Минск, БГУ, 1976, С. 258 - 260.

[60] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Релятивистская астрофизика. – М.: Наука, 1967.

[61] Керес Х.П. Исследования по теоретической физике. Тр. ИФА АН ЭССР, 20, Тарту, 1963.

[62] Podosenov S.A., Svekis Y.G., and Sokolov A.A. Transient Radiation of Traveling Waves by Wire Antennas, //IEEE Trans. Electromagn. Compat.– 1995.– Vol. 37.– No. 3.– pp. 367 - 383.

[63] Подосенов С.А., Соколов А.А. О нестационарном излучении проволочной антенны бегущей волны. // Зарубежная радиоэлектроника. – 1995.– N4. – С. 12–18.

[64] Sengupta D.L. and Tai C.-T. Radiation and reception of transients by linear antennas, in *Transient electromagnetic Fields*, L.B.Felsen, Ed., New York: Springer-Verlag.– 1976. pp. 181-235.

[65] Chen Z.-G. Theoretical solutions of transient radiation from travelling-wave linear antennas, // IEEE Trans. Electromagn. Compat. – 1988.– vol. 30.– pp. 80–83.

[66] Zhan J.and Qin Q.L. Analytic solutions of travelling-wave antennas excited by nonsinusoidal currents, //IEEE Trans. Electromagn. Compat.– 1988.– vol. 31. – pp. 328–330.

[67] Liu F.and Wang W.B. An analysis of the transient fields of linear antennas, // IEEE Trans. Electromagn. Compat.–1989.– vol. 31.– pp. 404–409.

[68] Rothwell E.J., Cloud M.J, and Ilavarasan P. Transient field produced by a travelling-wave wire antenna, // IEEE Trans. Electromagn. Compat.– 1991.– vol. 33.– pp. 172–178.

[69] Klaasen J.J.A. An efficient method for the performance analysis of bounded-wave nuclear EMP simulators, // IEEE Trans. Electromagn. Compat.– 1993.– vol. 35. pp. 329–338.

[70] Ковалев И.П., Пономарев Д.М., Клюев Е.А. // РЭ. – 1991.– Т.36. N5.– С.861 - 868.

[71] Miller E. and Landt J. // Proc. IEEE.–1980.– vol. 68.– no. 11.– pp. 1396–1423.

[72] Подосенов С.А., Соколов А.А. Расчет нестационарных проволочных излучателей в задачах электромагнитной совместимости. // Метрология. – 1994.– N1.– С.– 17-25.

[73] Подосенов С.А., Соколов А.А. Нестационарное излучение V - образной и линейной антенн. // Метрология. – 1994.– N1.– С.– 26-35.

[74] Айзенберг Г.З., Белоусов С.П., Журбенко Э.М. и др. Коротковолновые антенны. М.: Радио и связь, 1985.

[75] Леонтович М., Левин М. К теории возбуждений колебаний в вибраторах антенн. //ЖТФ.– 1944.– Т.14.- N9.– С.–481-506.

[76] Беннет С.А., Росс Дж. Ф.// ТИИЭР.– 1978.– Т.66.– N3.–С. 299-318.

[77] Беннет С.А. - Численные методы теории дифракции. М.: МИР, 1982, пер. с англ., С. 47.

[78] Mittra R., Integral equation methods for transient scattering, in Transient Elecctromagnetic Fields, Felsen L.B., E.d. New York: Springer-Verlag, 1976. pp. 73–128.

[79] Баум К.Э.// ТИИЭР. – 1976.– Т.64.– N11.– С. 1598-1617.

[80] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ,1954.

[81] Agrawal A.K., Price H.J., Gurbaxani S.H. Transient response of multiconductor transmission lines excited by a nonuniform electromagnetic field, // IEEE Trans. Electromagn. Compat.– 1980.– V.22.– N2.–pp. 119-129.

[82] Тихонов А.Н. и Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

[83] Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: ИЛ, 1958.

[84] Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. М.: ГИТТЛ, 1955.

[85] Стрэттон Д.А. Теория электромагнетизма. М.Л.: ГИТТЛ, 1948.

[86] Щелкунов С., Фриис Г. Антенны (Теория и практика). М.: Советское радио, 1955.

[87] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.

[88] R.F.Harrington. Field Computation by Moment Methods, New York: Macmillan, 1968.

[89] Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд-во АН СССР, 1948.

[90] Миттра Р. Вычислительные методы в электродинамике. М.: МИР, 1977.

[91] Подосенов С.А., Соколов А.А. Расчетный измерительный преобразователь импульсного электромагнитного поля // Измерительная техника. – 1991.– N1.–С.– 41-43.

[92] Подосенов С.А., Соколов А.А. Теория взаимодействия импульсного электромагнитного поля с двухпроводными линиями передачи в неоднородных средах. // Измерительная техника. – 1993.– N9.– С.– 44-48.

[93] Подосенов С.А., Соколов А.А. Аналитический расчет взаимодействия импульсного электромагнитного поля с двухпроводными линиями передачи в неоднородных средах. // Измерительная техника. – 1993.– N10.– С.– 47-50.

[94] Подосенов С.А., Свекис Я.Г., Соколов А.А., Сахаров К.Ю. Измерение напряженности импульсного электромагнитного поля с помощью полосковой линии передачи. // Измерительная техника. – 1993.– N11.– С.– 56-60.

[95] Подосенов С.А., Соколов А.А., Альбетков С.В. Теория взаимодействия импульсного электромагнитного поля с двухэлектродной рупорной антенной. // Измерительная техника. – 1994.– N1.– С.– 26-28.

[96] Альбетков С.В., Соколов А.А., Подосенов С.А. Экспериментальные исследования измерительных преобразователей на основе ТЕМ - рупора. // Измерительная техника. – 1994.– N2.– С.– 48-51.

[97] Подосенов С.А., Соколов А.А. Расчет коэффициента преобразования диполя в виде эллипсоида вращения и бисферического диполя. // Метрология. – 1994.– N2.– С.– 30-38.

[98] Подосенов С.А., Соколов А.А., Альбетков С.В. Аналитический расчет взаимодействия импульсного электромагнитного поля с двухэлектродной рупорной антенной. // Измерительная техника. – 1994.– N3.– С.– 48-52.

[99] Подосенов С.А., Свекис Я.Г., Соколов А.А. Компактный полосковый измерительный преобразователь импульсного электромагнитного поля. // Измерительная техника. – 1994.– N4.– С.– 45-47.

[100] Podosenov S.A., Sokolov A.A. Linear Two-Wire Transmission Line Coupling to an External Electromagnetic Field, Part I: Theory, //IEEE Trans. Electromagn. Compat.– 1995.– Vol. 37.– No. 4.– pp. 559-566.

[101] Podosenov S.A., Sakharov K.Ya, Svekis Y.G., and Sokolov A.A. Linear Two-Wire Transmission Line Coupling to an External Electromagnetic Field, Part II: Specific cases, experiment, // IEEE Trans. Electromagn. Compat.– 1995.– Vol. 37.– No. 4.– pp. 566-574.

[102] Podosenov S.A., Sokolov A.A., and Al'betkov S.V. Excitation of a V - Antenna by a Pulse Electromagnetic Field. //IEEE Trans. Electromagn. Compat.– 1996.– Vol. 38.– No. 1.– pp. 31-42.

[103] Podosenov S.A., Sokolov A.A., and Al'betkov S.V. Method for Determing the Electric and Magnetic Polarizability for Arbitrarily Shaped Conducting Bodies. // IEEE Trans. Electromagn. Compat.– 1997.– Vol. 39.– No. 1.– pp. 1-10.

[104] Mikheev O.V., Podosenov S.A., Sakharov K.Ya, Svekis Y.G., Sokolov A.A., and Turkin V.A. New Method for Calculating Pulse Radiation from an Antenna with a Reflector. // IEEE Trans. Electromagn. Compat.– 1997.– Vol. 39.– No. 1.– pp. 48-54.

[105] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971

[106] Gang Wang and Wen-Bing Wang, Comments on "Transient Radiation of Traveling Waves by Wire Antennas *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 39, no. 3, August, 1997, p. 265.

[107] Подосенов С.А. Структура пространства-времени и поля связанных зарядов. // Изв. вузов, сер. физ. – 1997. – N. 10. – С. 63 - 74.

[108] Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. Пер. с англ. – М.: Наука, 1974.

[109] Иваненко Д.Д. и Соколов А.А. Классическая теория поля. – М.: ГИТ-ТЛ, 1951.

[110] Тоннела М-А. Основы электромагнетизма и теории относительности. – М.: ИЛ, 1962.

[111] Бергман П.Г. Введение в теорию относительности. – М.: ИЛ, 1947.

[112] Берестецкий В.Б, Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория, часть 1. – М.: Наука, 1968.

[113] Давыдов А.С. Квантовая механика. – М.: Физ-матгиз, 1963.

[114] Подосенов С.А., Труханов Г.Я. Теория нестационарного замедления нейтронов в тяжелой среде с произвольными сечениями рассеяния и захвата. // Атомная энергия, т.49 – 1980. – вып. 5 – С. 278 - 283.

[115] Подосенов С.А., Труханов Г.Я. Теория распространения импульса замедляющихся нейтронов в тяжелой среде с произвольными сечениями рассеяния и захвата. // Атомная энергия, т.52 – 1982. – вып. 1 – С. 47 - 51.

[116] Подосенов С.А., Труханов Г.Я. О функции распределения промежуточных нейтронов в тяжелых однородных средах. // Атомная энергия, т.52 – 1982. – вып. 6 – С. 427 - 429.

[117] Подосенов С.А. Движение газа в центрально- симметричном поле тяжести. // Вестник Московского Университета, серия 3, физика, астрономия – 1964. – N. 4. – С. 14 -22.

[118] Подосенов С.А. Тетрадная формулировка движения упругой среды в СТО. // Изв. вузов, сер. физ. – 1970. – N. 4. – С. 45 - 54.

[119] Подосенов С.А. Тетрадная формулировка динамики изотропной упругой среды в СТО. // Изв. вузов, сер. физ. – 1970. – N. 11. – С. 67 - 73.

[120] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. т.5, Электричество и магнетизм. – М.: Изд. МИР, 1977.

[121] Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: ГИТ-ТЛ, 1956.

[122] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. т.9, Квантовая механика (II). – М.: Изд. МИР, 1967.

[123] Гольдин Л.Л., Новикова Г.И. Введение в квантовую физику. – М.: Наука, 1988.

[124] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.III. Электричество. – М.: Наука, 1977.

[125] Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. – М.: Высшая школа, 1964.

[126] Никольский В.В. Антенны. – М.: Связь, 1966.

[127] Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989.

[128] Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – М.: ГИИЛ, 1948.

[129] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. – М.: ИЛ, 1963.

[130] Подосенов С.А. Релятивистская кинематика деформируемой среды в СТО. – В кн.: Проблемы теории гравитации. Теор. и мат. физ. Сер.А, Вып.1, – М.: ВНИИОФИ, 1972, С. 60 - 72.

[131] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М.: Гостехиздат, 1957.

[132] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. – М.: Физматгиз, 1962.

[133] Станюкович К.П. Гравитационное поле и элементарные частицы. – М.: Наука, 1965.

[134] Ecart C. // Phys. Rev. – 1940. – V. 58. – P. 919.

[135] Salzman G., Taub A.H. // Phys. Rev. – 1954. – V. 95. – P.1659.

[136] Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. – М.: Гостехтеоризадат, 1955.

[137] Irvine W.M. // Physica – 1964. – V. 30. – P. 1160.

[138] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Физматгиз, 1958.