

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Парадоксы Белла без введения скрытых параметров

А.В. Белинский

Теория скрытых параметров (ТСП) — традиционное, но не единственное основание для построения различных типов теоремы Белла. Отправной точкой может быть также признание существования положительно определенной функции распределения вероятностей. Исходя из этого предположения, не прибегая к дополнительным допущениям, в работе сформулированы и доказаны парадоксы Белла разнообразных видов. На конкретном примере показано, что формальный квантовый расчет иногда дает отрицательные значения фигурирующих в доказательстве совместных вероятностей. Сделана попытка выяснения физического смысла этого результата и предложен алгоритм измерения отрицательных совместных вероятностей такого типа.

PACS numbers: 03.65.+w

Содержание

Введение (435).

1. Неравенство Белла для двух наблюдателей (436).
2. Результаты квантовой теории (436).
3. Что означают отрицательные вероятности и как их измерить? (437).
4. Неравенства Белла для произвольного числа наблюдателей N (439).
5. Парадокс Грииббергера–Хорна–Цайлингера (440).
6. Неравенства Белла для недихотомных переменных (440).

Заключение (441).

Список литературы (441).

Введение

Под теоремой, или парадоксом, Белла обычно понимают некий количественный критерий справедливости *теории скрытых параметров* (ТСП), который можно проверить на практике. Но критерий этот не простой — он должен противоречить результатам *квантовой теории* (КТ). Возникающий конфликт — интересное поле деятельности экспериментаторов, данные которых, как правило, свидетельствуют в пользу КТ, но постоянно оспариваются приверженцами ТСП, ищущими все новые "лазейки" для ее спасения.

Начало истории ТСП положено знаменитой работой Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР) [1], которые пришли к выводу о неполноте описания квантовой механикой физической реальности. Бом [2] предложил экспе-

римент, иллюстрирующий доводы ЭПР. Беллу [3] удалось "формализовать" основные положения ТСП в виде неравенства, которое может нарушаться в рамках КТ.

К настоящему времени придумано множество разнообразных видов подобного рода неравенств, некоторые из которых проверены экспериментаторами, в большинстве отклоняющимися ТСП. Но спор не утихает, обрастает новыми подробностями и, по существу, переродился уже в самостоятельное направление современной физики, утратив, как представляется, свою первоначальную привлекательность. Сложность проблемы усугубляется еще и тем, что ТСП базируется на нескольких постулатах (в том числе и на вызывающем горячие споры постулате о *локальности*, т.е. отсутствии влияния двух удаленных измерительных приборов друг на друга). Поэтому причину несоответствия локальной ТСП результатам экспериментов можно искать в нарушении любого из этих постулатов. Ситуация, таким образом, неоднозначна.

Цель данной работы — не выяснение правых и виноватых затянувшейся тяжбы, а несколько иной взгляд на проблему, возможно, примиряющий обе стороны. Не привлекая в явном виде скрытых параметров, будем исходить просто из "здорового смысла", согласно которому вероятности, в том числе и совместные вероятности, не могут быть отрицательными. Этого *единственного* предположения достаточно для формулировки ряда парадоксов, первоначально разработанных применительно к локальной ТСП.

Я не хотел бы здесь расставлять приоритеты, поскольку они достаточно расплывчаты. В определенном смысле подобному подходу следовал Д'Эспанья [4] (см. также [5]), но наиболее последовательно его воплотили в жизнь Файн [6] и Де-Мюнж [7], доказав неравенства Белла (НБ) для двух ($N = 2$) наблюдателей (см. также [8–10] и цитируемую там литературу).

В разделе 1 данной работы предложен новый простой алгоритм доказательства неравенства Белла (НБ) для

А.В. Белинский. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119899, Москва, Ленинские горы
Тел. (095) 143-48-31. Факс (095) 939-31-13
E-mail: ilc@compnet.msu.su E-mail: postmast@spr.phys.msu.su

Статья поступила 17 декабря 1993 г.

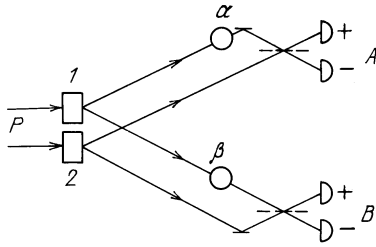


Схема интерферометра интенсивности с параметрическими источниками излучения для двух наблюдателей *A* и *B*. Коррелированные фотоны рождаются одновременно в нелинейных элементах 1 или 2 под действием общей когерентной накачки *P* и направляются к *A* и *B* по двум модам, одна из которых испытывает фазовую задержку (кружки). Моды смешиваются на 50 %-ных светоделителях (штриховые отрезки) и детектируются идентичными детекторами "+" и "-"

N = 2. В разделе 2 рассмотрена схема эксперимента по проверке этого неравенства и приведены данные квантовых расчетов, подтверждающие возможность его нарушения. В следующем разделе проанализирован смысл (если он, конечно, есть) возникающих при этом отрицательных совместных вероятностей и приведен алгоритм их косвенного измерения, т.е. восстановления их значений по данным эксперимента. В разделе 4 доказаны НБ для произвольного количества наблюдателей *N*, а в разделе 5 — сформулирован интересный парадокс Гринбергера–Хорна–Цайлингера (ГХЦ) типа "+1 = -1", также исходя лишь из предположения о существовании положительно определенной функции распределения вероятностей. Наконец, в разделе 6 произведено обобщение НБ для произвольного числа наблюдателей *N* на случай недихотомных переменных. Заключение посвящено подведению основных итогов работы.

1. Неравенство Белла для двух наблюдателей

Рассмотрим случайный процесс, характеризуемый четырьмя дихотомными переменными, принимающими единичные значения:

$$A = \pm 1, \quad A' = \pm 1, \quad B = \pm 1, \quad B' = \pm 1. \quad (1.1)$$

Предположим, что существует положительно определенная нормированная функция распределения вероятностей

$$P(A, A', B, B') \geq 0, \quad (1.2)$$

$$\sum_A \sum_{A'} \sum_B \sum_{B'} P(A, A', B, B') = 1, \quad (1.3)$$

для которой выполняются условия соответствия типа

$$P(A, A', B, B') + P(-A, A', B, B') = P(A', B, B'), \quad (1.4)$$

аналогично для других переменных и распределений низших размерностей.

Докажем НБ вида

$$|\Pi| \equiv \frac{1}{2} |\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle| \leq 1 \quad (1.5)$$

на основании (1.1)—(1.4). Впервые это сделано Файном

[6]. Предлагаемый далее вариант доказательства НБ (1.5) значительно проще известных [6, 10].

Дискретная функция распределения вероятностей (1.2) состоит из 2⁴ совместных вероятностей:

$$\begin{aligned} P_{AA'BB'}(++++) &\equiv \\ &\equiv P(A = +1, A' = +1, B = +1, B' = +1), \\ P_{AA'BB'}(+++-) &\equiv \\ &\equiv P(A = +1, A' = +1, B = +1, B' = -1) \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Выразим через них входящие в (1.5) средние, скажем,

$$\langle AB \rangle = P_{AB}(++) + P_{AB}(--) - P_{AB}(+-) - P_{AB}(-+), \quad (1.7)$$

где, например, согласно (1.4)

$$\begin{aligned} P_{AB}(++) &= P_{AA'BB'}(++++) + P_{AA'BB'}(+++-) + \\ &+ P_{AA'BB'}(+--+)+ P_{AA'BB'}(-++-). \end{aligned}$$

Подставим эти разложения в левую часть (1.5). В результате получим (нижние индексы при *P* опущены)

$$\begin{aligned} \Pi &\equiv \frac{1}{2} (\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle) = \\ &= P(++++) + P(+++-) - P(+--+)- \\ &- P(+--+)+ P(+--+)- P(+--+)+ \\ &+ P(+--+)- P(+--+)- P(-+++) + \\ &+ P(-+++) - P(-+++) + P(-+++) - \\ &- P(-+++) - P(-+++) + P(-+++) + \\ &+ P(-++-). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если бы все слагаемые правой части (1.8) входили в сумму со знаком плюс, то это было бы разложение единицы (1.3). Поскольку половина компонентов — с минусом, в силу (1.2), (1.3), сумма (1.8) заключена в интервале [-1, +1]. Таким образом, (1.5) доказано.

2. Результаты квантовой теории

Почему же неравенство (1.5), базирующееся на весьма общих посылках (1.1)—(1.4), нарушается на практике?

Рассмотрим схему простейшего эксперимента по проверке НБ (1.5) [11—13]. Два наблюдателя *A* и *B* (см. рисунок) одновременно регистрируют каждый по одному фотону на детекторах "+" или "-". Если наблюдатель *A* при фазовой задержке α зарегистрировал фотототчет на детекторе "+", то этому событию приписывается значение *A* = +1. Если то же событие произошло при фазовой задержке α' , то *A'* = +1. Аналогично кодируются фотототчеты на детекторе "-", а также в каналах наблюдателя *B*. "Штрихованным" переменным здесь соответствуют "штрихованные" фазовые задержки. Многократное повторение измерений позволяет вычислить входящие в (1.5) средние.

Квантовое состояние поступающих к наблюдателям фотонов описывается волновым вектором [11]

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} (a_1^+ b_1^+ + a_2^+ b_2^+) |0\rangle \equiv \\ &\equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (|10\rangle_a |10\rangle_b + |01\rangle_a |01\rangle_b), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где a_j^+ и b_j^+ — операторы рождения фотонов в двух сигнальных (поступающих к наблюдателю A) и холостых (к B) модах, $j = 1, 2$ соответствует номеру кристалла, излучающего данную моду (см. рисунок), а $|0\rangle$ обозначает вакуум.

Операторы чисел фотонов, регистрируемых детекторами "+" и "-" в канале A , имеют вид [11]

$$n_{\pm}^a \equiv a_{\pm}^+ a_{\pm} = \frac{1}{2} [n_1^a + n_2^a \pm (\sigma_-^a e^{iz} + \sigma_+^a e^{-iz})], \quad (2.2)$$

где $n_j^a \equiv a_j^+ a_j$, $\sigma^a \equiv a_1 a_2^+$, $\sigma_{\pm}^a \equiv (\sigma_{\pm}^a)^+$. Аналогичные соотношения определяют n_{\pm}^b в канале B .

Найдем предсказываемую квантовой теорией функцию распределения вероятностей $P_{\psi}(A, A', B, B')$, вычислив все составляющие ее 16 совместных вероятностей. Поскольку переменные (1.1) дискретны, эти совместные вероятности равны соответствующим моментам:

$$\begin{aligned} P_{AA'BB'}(++++) &= \langle \psi | n_+^a n_+^{a'} n_+^b n_+^{b'} | \psi \rangle, \\ P_{AA'BB'}(++++) &= \langle \psi | n_+^a n_+^{a'} n_+^b n_-^{b'} | \psi \rangle \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Штрихи здесь обозначают замену α на α' в (2.2) и (или) β на β' в канале B . В результате получим

$$\begin{aligned} P_{\psi}(A, A', B, B') &= \frac{1}{16} [1 + AA' \cos(\alpha - \alpha') + \\ &+ BB' \cos(\beta - \beta') + AA'BB' \cos(\alpha + \beta - \alpha' - \beta') + \\ &+ AB \cos(\alpha + \beta) + A'B \cos(\alpha' + \beta) + \\ &+ AB' \cos(\alpha + \beta') + A'B' \cos(\alpha' + \beta')]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Установим следующие фазы в каналах:

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = -\frac{\pi}{4}, \quad \beta' = \frac{\pi}{4},$$

что дает нарушения НБ (1.5). При этом некоторые совместные вероятности оказываются отрицательными (нижние индексы опущены):

$$\begin{aligned} P(++++) &= P(+--+)=P(-++-)= \\ &= P(----)=\frac{\sqrt{2}}{16}, \\ P(++--)=P(+--+)=P(-++-)= \\ &= P(----)=\frac{\sqrt{2}}{16}, \\ P(++-+)=P(+---)=P(-+++)= \\ &= P(----)=\frac{2-\sqrt{2}}{16}, \\ P(+++-)=P(+--+)=P(-+-)= \\ &= P(----)=\frac{2+\sqrt{2}}{16}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

а непосредственная подстановка (2.6) в (1.8) дает $\sqrt{2}$, т.е. НБ (1.5) не выполняется.

Таким образом, определение функции распределения вероятностей в форме $P_{\psi}(A, A', B, B')$ позволяет путем непосредственного сопоставления (2.4), (2.6) с исходными посылками (1.2)—(1.4) сделать однозначный вывод о причине нарушения (1.5). Итак, этой единственной причиной в случае существования функции распределения вероятностей $P(A, A', B, B')$ является несоблюдение, казалось бы, очевидного требования

(1.2), поскольку согласно (2.4), (2.6) условия нормировки (1.3) и соответствия (1.4) выполняются. Иными словами, формальное признание существования функции распределения вероятностей $P(A, A', B, B')$ не оставляет места для безусловного требования ее неотрицательности.

3. Что означают отрицательные вероятности и как их измерить?

Отрицательные [10, 14—20] и даже комплекснозначные [20, 21] распределения вероятностей в связи с парадоксом ЭПР и теоремой Белла неоднократно обсуждались в литературе. В более широком смысле подобные вопросы ставились еще Дираком [22] (см. также [20]). Дело в том, что функция распределения случайных величин, описываемых некоммутирующими операторами, не всегда положительно определена. Ярким примером является функция распределения Вигнера для координаты и импульса квантовой частицы. В ортодоксальном копенгагенском понимании квантовой механики таких функций распределения вероятностей не существует в силу невозможности проведения эксперимента по непосредственному их измерению. Тем не менее, косвенные методы измерений возможны. Это продемонстрировали авторы работы [23], восстановившие непрерывную двумерную функцию распределения Вигнера квадратурных компонент света в сжатом состоянии. Хотя отрицательных распределений при этом не наблюдалось, принципиальных ограничений такого рода квантовая теория не дает.

Функция распределения вероятностей $P_{\psi}(A, A', B, B')$ аналогична функции распределения Вигнера в том смысле, что не все входящие в нее наблюдаемые описываются коммутирующими операторами, например, A и A' . Они не могут быть измерены в одной реализации (единственный фотон наблюдателю A никак не зарегистрировать при различных фазовых задержках α и α'). Следовательно, прямые измерения $P_{\psi}(A, A', B, B')$ невозможны. Но означает ли это полную ее неопостижимость? Попытаемся ответить на этот вопрос в данном разделе.

Результаты рассмотренного выше эксперимента формально можно описывать дискретной четырехмерной функцией распределения вероятностей, которую в данном разделе удобнее обозначить как $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$. КТ предсказывает возможность получения не только знакопеременной $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$, но и знакопеременных трехмерных функций распределения вероятностей типа $P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B}$, $P_{\alpha\alpha'\beta'}^{AA'B'}$ и т.д., в чем легко убедиться, воспользовавшись (1.4) и (2.6) [10]. Вычисление последних по результатам эксперимента — цель дальнейшего изложения. Подчеркнем, что непосредственно измерить можно лишь двумерные функции распределения вероятностей $P_{\alpha\beta}^{AB}$, $P_{\alpha'\beta}^{A'B}$, $P_{\alpha\beta'}^{AB'}$, $P_{\alpha'\beta'}^{A'B'}$, а также одномерные P_{α}^A и P_{β}^B .

Сформулируем некоторые свойства $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$, которые позволят решить поставленную обратную задачу.

В силу условности выбора знаков переменных, зависящего при идентичных детекторах от нашего произвола, должна наблюдаться симметрия:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'} &= P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{\bar{A}\bar{A}'\bar{B}\bar{B}'}, \\ \bar{A} &= -A, \quad \bar{A}' = -A', \quad \bar{B} = -B, \quad \bar{B}' = -B'. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Следствие:

$$P_{\alpha}^A = \sum_{A'} \sum_B \sum_{B'} P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'} = \sum_{A'} \sum_B \sum_{B'} P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{\bar{A}\bar{A}'\bar{B}\bar{B}'} = \\ = P_{\alpha}^{\bar{A}} = P_{\beta}^B = P_{\beta}^{\bar{B}} = \frac{1}{2}, \quad (3.2)$$

что согласуется с результатами эксперимента [13]. Здесь использованы условия соответствия (1.4) и нормировки (1.3).

В силу симметрии "штрихованных" и "нештрихованных" переменных

$$P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'} = P_{\alpha'\alpha\beta'\beta}^{AA'BB'}. \quad (3.3)$$

В силу интерференционной природы эксперимента зависимость $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$ от одной из фазовых задержек должна быть гармонической типа

$$P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'} = G(\alpha', \beta, \beta') + H(\alpha', \beta, \beta') \cos(\alpha + \varphi(\alpha', \beta, \beta')). \quad (3.4)$$

Это соотношение выполняется и для функций распределения вероятностей низших размерностей. Оно следует из классического стохастического описания смещения интерферирующих волн на светоделителях. Действительно, удвоенная интенсивность излучения на детекторе "+" наблюдателя A есть

$$2n_{+}^a = |a_1 e^{-i\alpha} + a_2|^2 = \\ = |a_1| \exp(-i\alpha - i\varphi_1) + |a_2| \exp(-i\varphi_2)|^2 = \\ = |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1 a_2| \cos(\alpha + \varphi_1 - \varphi_2), \quad (3.5)$$

где a_j — комплексные амплитуды смешиваемых сигналов, а φ_j — их фазы. Аналогично для детектора "—"

$$2n_{-}^a = |a_1|^2 + |a_2|^2 - 2|a_1 a_2| \cos(\alpha + \varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.6)$$

Эти выражения соответствуют (3.4), если принять, что совместные вероятности пропорциональны интенсивностям. Не противоречит (3.4) и КТ (результату (2.4)).

По тем же причинам

$$P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{\bar{A}\bar{A}'\bar{B}\bar{B}'} = P_{(\alpha\pm\pi)\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}, \quad (3.7)$$

что следует из выражений (3.5), (3.6), поскольку добавление $\pm\pi$ к α эквивалентно взаимозамене n_{+}^a и n_{-}^a . Аналогично и для других переменных и соответствующих им фазовых задержек.

Восстановим в начале двумерную совместную вероятность

$$P_{\alpha\alpha'}^{++} \equiv P_{\alpha\alpha'}^{A=+1, A'=+1}. \quad (3.8)$$

Условие соответствия (1.4) дает

$$P_{\alpha}^{+} = P_{\alpha\alpha'}^{++} + P_{\alpha\alpha'}^{+-}. \quad (3.9)$$

Пусть $\alpha = \alpha'$, тогда $P_{\alpha\alpha}^{+-} = 0$, так как при этом $A \equiv A'$. Следовательно, с учетом (3.2)

$$P_{\alpha\alpha}^{++} = P_{\alpha}^{+} = \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

В силу (3.4) при взаимозамене α и α' имеем

$$P_{\alpha\alpha'}^{++} = G(\alpha) + H(\alpha) \cos(\alpha' + \varphi(\alpha)). \quad (3.11)$$

Согласно (3.7)

$$P_{\alpha\alpha}^{+-} = P_{\alpha\alpha+\pi}^{++} = 0. \quad (3.12)$$

Из (3.10)—(3.12) следует

$$G(\alpha) + H(\alpha) \cos(\alpha + \varphi(\alpha)) = \frac{1}{2}, \quad (3.13)$$

$$G(\alpha) - H(\alpha) \cos(\alpha + \varphi(\alpha)) = 0, \quad (3.14)$$

откуда

$$G(\alpha) = \frac{1}{4}, \quad (3.15)$$

$$H(\alpha) = [4 \cos(\alpha + \varphi(\alpha))]^{-1}, \quad (3.16)$$

причем в последнем соотношении полагаем

$$\cos(\alpha + \varphi(\alpha)) \neq 0. \quad (3.17)$$

Подстановка (3.15), (3.16) в (3.11) дает

$$P_{\alpha\alpha'}^{++} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \cos(\alpha' + \varphi(\alpha)) [\cos(\alpha + \varphi(\alpha))]^{-1} \right\} \equiv \\ \equiv P_{\alpha'\alpha}^{++}. \quad (3.18)$$

Последнее тождество получается согласно свойству (3.3) и выводится аналогично (3.2).

Из (3.18) следует

$$\varphi(\alpha) \equiv -\alpha \pm m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.19)$$

что не противоречит (3.17). Следовательно, с учетом (3.7) имеем

$$P_{\alpha\alpha'}^{AA'} = \frac{1}{4} [1 + AA' \cos(\alpha - \alpha')]. \quad (3.20)$$

Согласно (2.1), (2.2) формальный квантовый расчет моментов $\langle \psi | n_{\pm}^a n_{\pm}^a | \psi \rangle$, соответствующих совместным вероятностям $P_{\alpha\alpha'}^{\pm\pm}$, дает такой же результат. Его можно получить также с помощью (2.4) и последовательного применения (1.4).

Трехмерные функции распределения вероятностей связаны с двумерными распределениями простыми соотношениями типа

$$P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B} = \frac{1}{2} (P_{\alpha\beta}^{AB} + P_{\alpha'\beta}^{A'B} - P_{\alpha\alpha'}^{\bar{A}\bar{A}'}), \quad (3.21)$$

что легко проверить подстановкой в правую часть (3.21)

$$P_{\alpha\beta}^{AB} = P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B} + P_{\alpha\alpha'\beta}^{\bar{A}\bar{A}'\bar{B}} \text{ и т.д.}$$

Функции распределения вероятностей $P_{\alpha\beta}^{AB}$ и $P_{\alpha'\beta}^{A'B}$ определяются непосредственно из эксперимента и равны

$$P_{\alpha\beta}^{AB} = \frac{1}{4} [1 + AB \cos(\alpha + \beta)],$$

$$P_{\alpha'\beta}^{A'B} = \frac{1}{4} [1 + A'B \cos(\alpha' + \beta)]. \quad (3.22)$$

Подстановка (3.22) в (3.21) дает

$$P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B} = \frac{1}{8} [1 + AB \cos(\alpha + \beta) + A'B \cos(\alpha' + \beta) + AA' \cos(\alpha - \alpha')]. \quad (3.23)$$

Квантовый расчет соответствующих моментов дает такой же результат.

Очевидно, что совместные вероятности, составляющие функцию распределения вероятностей (3.23), могут быть отрицательными. Например,

$$P_{\alpha\alpha'\beta}^{+-+} = \frac{1}{8} (1 - \sqrt{2}) \quad (3.24)$$

при $\alpha = \pi/2, \alpha' = 0, \beta = \pi/4$.

Итак, по данным эксперимента (3.22) и приняв свойства (3.1)—(3.4) и (3.7), можно восстановить дискретные функции распределения вероятностей типа $P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B}$. Они связывают наблюдаемые величины, некоторые из которых описываются некоммутирующими операторами (в данном случае A и A'). Поэтому, как указывалось выше, их прямые измерения, как и функции распределения Вигнера, невозможны. В этом смысле подобные распределения лишены *операционального* смысла. Однако, как показано в [23] для непрерывного распределения Вигнера и в данной работе для дискретных распределений, косвенные методы их измерения возможны. При этом положительная определенность $P_{\alpha\alpha'\beta}^{AA'B}$ и функций подобного рода необязательна.

Что же все-таки означает отрицательная совместная вероятность? Дирак [20, 23] видел в ней "вполне определенный математически аналог отрицательной суммы денег". Добавим, что при описании результатов рассматриваемого эксперимента отрицательная вероятность *уменьшает* вероятность событий, ей соответствующих, и *увеличивает* вероятность противоположных событий. Например,

$$\langle AB \rangle = P_{\alpha\beta}^{++} + P_{\alpha\beta}^{--} - P_{\alpha\beta}^{+-} - P_{\alpha\beta}^{-+}, \quad (3.25)$$

$$P_{\alpha\beta}^{++} = P_{\alpha\alpha'\beta}^{+++} + P_{\alpha\alpha'\beta}^{+-+}. \quad (3.26)$$

Отрицательность $P_{\alpha\alpha'\beta}^{+-+}$ здесь означает, что вероятность результата $AB = +1$, компонентой которого является $P_{\alpha\alpha'\beta}^{+-+}$, падает, а вероятность противоположного результата ($AB = -1$) растет. Как и функция распределения Вигнера, многомерные распределения типа $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$ удобны в расчетах и дают возможность наглядного представления результатов. Ведь (2.4), (2.6) при соответствующем суммировании дают правильные значения двумерных вероятностей, например входящих в (3.22), которые можно измерить непосредственно. Еще одно преимущество использования $P_{\alpha\alpha'\beta\beta'}^{AA'BB'}$ — возможность однозначного разрешения парадокса Белла, заключающегося в нарушении НБ (1.5).

4. Неравенства Белла для произвольного числа наблюдателей N

Привлекательность НБ для $N > 2$ обусловлена прежде всего количественным ростом расхождений с предсказаниями квантовой теории в $2^{(N-1)/2}$ раз [11, 24, 25]. Однако этот раздел мы начнем с еще одного варианта доказательства НБ (1.5) для двух наблюдателей ($N = 2$),

который позволяет легко обобщить его на случай произвольного N .

Последовательно пронумеруем совместные вероятности (1.6), составляющие функцию распределения вероятностей (1.2), например, в последовательности, принятой в правой части (1.8):

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv P_{AA'BB'}(++++) \equiv \\ &\equiv P(A_1 = +1, A'_1 = +1, B_1 = +1, B'_1 = +1), \\ P_2 &\equiv P_{AA'BB'}(+++-) \equiv \\ &\equiv P(A_2 = +1, A'_2 = +1, B_2 = +1, B'_2 = -1) \text{ и т.д. до} \\ P_{16} &\equiv P_{AA'BB'}(----). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь мы вернулись к первоначальным обозначениям совместных вероятностей, принятым в первых двух разделах.

Условие нормировки (1.3) теперь выглядит так:

$$\sum_M P_M = 1, \quad M = 1, 2, \dots, 2^{2N}. \quad (4.2)$$

Представим среднее произведения двух переменных, например A и B , в виде суммы

$$\langle AB \rangle = \sum_M A_M B_M P_M \quad (4.3)$$

и аналогично для других входящих в (1.5) средних. Следовательно,

$$\Pi \equiv \frac{1}{2} (\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle) = \sum_M S_M^{(2)} P_M, \quad (4.4)$$

где наблюдаемая Белла для двух наблюдателей

$$\begin{aligned} S_M^{(2)} &\equiv \frac{1}{2} (A_M B_M + A'_M B_M + A_M B'_M - A'_M B'_M) = \\ &= \frac{1}{2} [(B_M + B'_M) A_M + (B_M - B'_M) A'_M] \end{aligned} \quad (4.5)$$

может принимать лишь единичные значения ± 1 в силу (1.1). Следовательно, из (1.2), (4.2) и (4.4) следует (1.5).

Приведенное доказательство фактически представляет собой модификацию вывода НБ [11, 25, 26], построенного на концепциях локальной ТСП. Дальнейшее естественное обобщение состоит в переходе от двух к произвольному числу наблюдателей N .

Рассмотрим случайный процесс, описываемый $2N$ дихотомными переменными, принимающими единичные значения:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \pm 1, \quad A^{(1)'} = \pm 1, \quad A^{(2)} = \pm 1, \\ A^{(2)'} &= \pm 1, \dots, A^{(N)} = \pm 1, \quad A^{(N)'} = \pm 1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Предположим, что существует положительно определенная нормированная функция распределения вероятностей

$$P(A^{(1)}, A^{(1)'}, A^{(2)}, A^{(2)'}, \dots, A^{(N)}, A^{(N)'}) \geq 0, \quad (4.7)$$

$$\sum_{A^{(1)}} \sum_{A^{(1)'}} \dots \sum_{A^{(N)'}} P(A^{(1)}, A^{(1)'}, A^{(2)}, A^{(2)'}, \dots, A^{(N)}, A^{(N)'}) = 1, \quad (4.8)$$

удовлетворяющая условиям соответствия типа

$$\sum_{A^{(1)}} P(A^{(1)}, A^{(1)'}, A^{(2)}, A^{(2)'}, \dots, A^{(N)}, A^{(N)'}) = P(A^{(1)'}, A^{(2)}, A^{(2)'}, \dots, A^{(N)}, A^{(N)'}), \quad (4.9)$$

аналогично для других переменных и распределений низших размерностей.

Введем также наблюдаемую Белла вида

$$S_M^{(N)} = \frac{1}{2} [(A_M^{(N)} \pm A_M^{(N)'}) S_M^{(N-1)} \pm \pm (A_M^{(N)} \mp A_M^{(N)'}) S_M^{(N-1)'}] = \pm 1, \quad (4.10)$$

аналогичную использованной в [11, 25], однако здесь помеченные индексом M переменные (4.6) соответствуют не одной и той же совокупности скрытых параметров $\{\lambda\}$, а пронумерованы по соответствующим совместным вероятностям, как и (4.1).

Рекуррентное соотношение (4.10) позволяет перейти от наблюдаемой Белла для $N = 2$ к наблюдаемой Белла для $N = 3$ и т.д. Штрих в последнем члене (4.10) означает переобозначение входящих в наблюдаемую Белла для $(N - 1)$ наблюдателя штрихованных переменных на нештрихованные и наоборот, например,

$$S_M^{(2)} = \frac{1}{2} [(A_M^{(2)} \pm A_M^{(2)'}) A_M^{(1)} \pm (A_M^{(2)} \mp A_M^{(2)'}) A_M^{(1)'}], \quad (4.11)$$

$$S_M^{(2)'} = \frac{1}{2} [(A_M^{(2)'} \pm A_M^{(2)}) A_M^{(1)'} \pm (A_M^{(2)'} \mp A_M^{(2)}) A_M^{(1)}], \quad (4.12)$$

причем $S_M^{(1)} = A_M^{(1)}$.

Знаки в (4.10) произвольны, но если в первых круглых скобках — сумма, то во вторых должна быть разность и наоборот.

Сопоставление (4.7), (4.8) (или (4.2)), (4.10) позволяет заключить, что

$$\left| \sum_M S_M^{(N)} P_M \right| \leq 1. \quad (4.13)$$

Это и есть прообраз нелокального НБ для произвольного числа наблюдателей N . Его конкретный вид вычисляется из (4.10). При этом нужно произвести следующие формальные преобразования: убрать в (4.10) индексы M , выразить S_{N-1} и S_{N-1}' через переменные (4.6), раскрыть все круглые скобки, каждое слагаемое заключить в знаки усреднения. Полученное выражение по абсолютной величине не должно превышать единицы. Например, один из вариантов сочетания знаков в (4.10) для $N = 3$ дает

$$\frac{1}{2} |\langle A'BC \rangle + \langle AB'C \rangle + \langle ABC' \rangle - \langle A'B'C' \rangle| \leq 1. \quad (4.14)$$

Здесь для наглядности введена замена $A \equiv A^{(1)}$, $B \equiv A^{(2)}$, $C \equiv A^{(3)}$ и аналогично для "штрихованных" переменных.

Соотношение (4.14) совпадает с соответствующим НБ, выведенным на основании локальной ТСП [11, 25, 26]. То же относится и к НБ для произвольного N в силу формального совпадения наблюдаемой Белла (4.10) с соответствующим выражением, полученным исходя из концепций локальной ТСП [11, 25].

Как отмечалось выше, с ростом N увеличиваются количественные нарушения НБ в $2^{(N-1)/2}$ раз [11, 24, 25]. Например, левая часть (4.14) в рамках квантового рассмотрения при определенных условиях принимает значение 2 [11]. Кроме того, начиная с $N = 3$ можно наглядно сформулировать парадокс ГХЦ, которому и посвящен следующий раздел.

5. Парадокс Гринбергера–Хорна–Цайлингера (ГХЦ)

Этот интересный парадокс демонстрирует противоречие типа $+1 = -1$ [11, 25—27]. Он предполагает полную корреляцию результатов измерений, например,

$$\langle A'BC \rangle = A'BC = \langle AB'C \rangle = AB'C = \langle ABC' \rangle = ABC' = -\langle A'B'C' \rangle = -A'B'C' = 1, \quad (5.1)$$

что квантовая теория допускает. Именно в этом случае наступает нарушение НБ (4.14), о котором упоминалось в конце предыдущего раздела. Согласно (5.1) произведение

$$(A'BC)(AB'C)(ABC')(A'B'C') = -1. \quad (5.2)$$

Покажем далее, что это невозможно при выполнении требований (4.6)—(4.9).

В условиях полной корреляции, соответствующих (5.1), компоненты P_M , дающие $A'_M B_M C_M = -1$, должны быть равны нулю. То же относится к компонентам, дающим $A_M B'_M C_M = A_M B_M C'_M = -1$. В результате из 64-х компонентов P_M функции $P(A, A', B, B', C, C')$ остается только 8 ненулевых:

$$P(+++), P(++--), P(+--+), P(+-+), P(-++), P(-+-), P(-+-), P(-+++),$$

но все они дают $A'_M B'_M C'_M = +1$! Более того, нет ни одного компонента P_M , который в любых трех из рассматриваемых четырех сомножителей давал бы одинаковые знаки, а в четвертом — противоположный в силу того, что произведение

$$(A'_M B_M C_M)(A_M B'_M C_M)(A_M B_M C'_M)(A'_M B'_M C'_M) = (A_M A'_M B_M B'_M C_M C'_M)^2 = +1. \quad (5.3)$$

Следовательно, ограничения (4.7)—(4.9), если и допускают требуемую в данных условиях полную корреляцию, то лишь в случае, когда произведение (5.2) равно $+1$. Приведенные рассуждения легко обобщаются и на произвольные $N \geq 3$. Сформулированный парадокс ГХЦ не требует принятия гипотезы о локальности, отказ от которой, таким образом, его — этот парадокс — не разрешает.

6. Неравенства Белла для недихотомных переменных

Описанный в разделе 4 алгоритм доказательства НБ для произвольных N допускает также обобщение рассмотренных НБ на случай недихотомных переменных, заключенных в интервале $[-1, +1]$:

$$\begin{aligned} |A^{(1)}| \leq 1, \quad |A^{(1)'}| \leq 1, \quad |A^{(2)}| \leq 1, \quad |A^{(2)'}| \leq 1, \dots, \\ |A^{(N)}| \leq 1, \quad |A^{(N)'}| \leq 1. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Рассмотрим для таких условий в начале НБ для двух наблюдателей. Вернемся к наблюдаемой Белла (4.11) и докажем, что при выполнении (6.1) справедливо

$$|S_M^{(2)}| \leq 1. \quad (6.2)$$

С учетом (6.1) запишем

$$\begin{aligned} |(A_M^{(2)} \pm A_M^{(2)'})A_M^{(1)}| &= |A_M^{(2)} \pm A_M^{(2)'}| |A_M^{(1)}| = \\ &= |A_M^{(2)} \pm A_M^{(2)'}| - (1 - |A_M^{(1)}|) |A_M^{(2)} \pm A_M^{(2)'}| \leq \\ &\leq |A_M^{(2)} \pm A_M^{(2)'}|. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Аналогично

$$|(A_M^{(2)} \mp A_M^{(2)'})A_M^{(1)'}| \leq |A_M^{(2)} \mp A_M^{(2)'}|. \quad (6.4)$$

Сложим (6.3) с (6.4). В результате с учетом (4.11) получим

$$\begin{aligned} 2|S_M^{(2)}| &= |(A_M^{(2)} \pm A_M^{(2)'})A_M^{(1)} \pm (A_M^{(2)} \mp A_M^{(2)'})A_M^{(1)'}| \leq \\ &\leq |(A_M^{(2)} \pm A_M^{(2)'})A_M^{(1)}| + |(A_M^{(2)} \mp A_M^{(2)'})A_M^{(1)'}| \leq \\ &\leq |A_M^{(2)} \pm A_M^{(2)'}| + |A_M^{(2)} \mp A_M^{(2)'}| \leq 2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

откуда следует (6.2).

Итерационный характер алгоритма образования наблюдаемой Белла (4.10) позволяет заключить, что согласно (6.1), (6.2), $|S_M^{(3)}| \leq 1$ и т.д.:

$$|S_M^{(N)}| \leq 1. \quad (6.6)$$

Предположим теперь, что переменные (6.1) принимают конечное число значений K , что всегда выполняется на практике хотя бы вследствие конечного числа экспериментальных реализаций. Количество компонентов P_M функции распределения вероятностей P при этом возрастает до 2^{2KN} , но справедливость (4.13) в силу (6.6) сохраняется. Таким образом, при соблюдении условий (4.7)—(4.9) описанные выше НБ должны выполняться и в случае недихотомных переменных, удовлетворяющих (6.1).

Заключение

Подведем некоторые итоги. В широком понимании семейство различных вариантов теоремы Белла (или парадокса Белла) включает две стадии. На первой формулируется некое соотношение на основании классических представлений, таких как ТСП или просто "здоровый смысл". Это соотношение чаще имеет форму неравенства, но иногда представляет собой просто алгебраическую формулу, как например, парадокс ГХЦ или Кохена–Спекера (см., например, [11]). Объектом описания при этом может быть как частная конкретная модель, так и произвольный случайный процесс вообще.

Вторая стадия теоремы Белла опровергает первую и базируется на квантовомеханическом описании процесса. Поскольку для опровержения некоего суждения достаточно даже одного конкретного примера, на второй стадии обычно рассматривается конкретная физическая модель, но иногда опровержение может носить самый общий характер, как, например, оригинальная версия уже упомянутого парадокса Кохена–Спекера (подробнее см., например, [11]).

Если исходить из "здорового смысла" и признать существование неотрицательной функции распределения вероятностей, то приходим к несоответствию квантовомеханическим результатам принципиально осуществимых и отчасти уже осуществленных (для $N=2$) экспериментов, способных продемонстрировать нарушения НБ или парадокс ГХЦ. Единственный аргумент, объясняющий возникающие противоречия, состоит в том, что в таких случаях не существует положительно определенной функции распределения вероятностей.

Автор благодарен Д.Н. Клышко, М.В. Чеховой за полезные обсуждения изложенных результатов и замечания по тексту статьи, а также А.П. Крыловой за неоценимую помощь в области библиографии.

Работа была поддержана грантом "Исследование квантовых эффектов в нелинейной оптике". Я также благодарен Международному научному фонду Сороса за финансовую поддержку.

Список литературы

1. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935); перевод: УФН **16**, 440 (1936).
2. Bohm D. *Quantum Theory* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1951); перевод: Бом Д. *Квантовая теория* (М.: Физматгиз, 1961).
3. Bell J.S. *Physics* **1**, 195 (1964).
4. D'Espagnat B. *Sci. Am.* **241** (5), 128 (1979).
5. Гриб А.А. УФН **142**, 619 (1984).
6. Fine A. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 291 (1982).
7. De Muynck W.M. *Phys. Lett. A* **114**, 65 (1986).
8. De Muynck W.M. *Found. Physics* **16**, 973 (1986).
9. Szabo L.E. *Found. Physics Lett.* **6**, 191 (1993).
10. Белинский А.В. УФН **164** (2), 231 (1994).
11. Белинский А.В., Клышко Д.Н. УФН **163** (8), 1 (1993).
12. Klyshko D.N. *Phys. Lett. A* **132**, 299 (1988).
13. Rarity J.G., Tapster P.B. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495 (1990).
14. Ivanovic J.D. *Lett. Nuovo Cimento* **22**, 14 (1978).
15. Polubarinov I.V. *Communication of the Joint Institute for Nuclear Research* (Dubna, E2-88-80).
16. Muckenheim W. *Lett. Nuovo Cimento* **35**, 300 (1982).
17. Home D., Lepore V.L., Selleri F. *Phys. Lett. A* **158**, 357 (1991).
18. Wodkiewicz K. *Phys. Lett. A* **129**, 1 (1988).
19. Agarwal G.S., Home D., Schleich W. *Phys. Lett. A* **170**, 359 (1992).
20. Home D., Selleri F. *Riv. Nuovo Cimento* **14**, 1 (1991).
21. Youssef S. *Communication of the Supercomputer Computations Research Institute* (Florida, FSU-SCRI-(93-77)).
22. Dirac P.A.M. *Proc. R. Soc. London A* **180**, 1 (1941).
23. Smithy D.T., Beck M., Raymer M.G., Faridani A. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1244 (1993).
24. Mermin N.D. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1838 (1990).
25. Belinsky A.V., Klyshko D.N. *Phys. Lett. A* **176**, 415 (1993).
26. Klyshko D.N. *Phys. Lett. A* **172**, 399 (1993).
27. Greenberger D.M., Horn M.A., Shimony A., Zeilinger A. *Am. J. Phys.* **58**, 1131 (1990).

BELL'S PARADOXES WITHOUT INTRODUCING HIDDEN VARIABLES**A.V. Belinsky**

*Physics Department, M.V. Lomonosov State University
Leninskiye Gory, 119899, Moscow, Russian Federation
Tel. (095) 143-4831
Fax (095) 939-3113
E-mail: ilc@compnet.msu.su
E-mail: postmast@spr.phys.msu.su*

A hidden variables theory (HVT) is a traditional basis for Bell's theorem of various types, but not the single one. The initial assumption may be also an existence of a nonnegative probability distribution function. In the paper the different versions of Bell's paradoxes are formulated and proved from this assumption without any additional one. For the concrete example it is shown, that the formal quantum calculations sometimes give negative values of the joint probabilities figured in the proof. I try to clarify the physical nature of this result and propose the method of experimental measuring of these type negative joint probabilities.

Bibliography — 27 references

Received 17 December 1994