Д. Тер Хаар, Г. Вергеланд

ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

§ 1. Введение

1.1. Необходимость релятивистской формулировки

Если электродинамика движущихся тел была неотложной задачей физики уже до того, как появились результаты Эйнштейна, соответствующее обобщение «Теории теплоты» было в том же самом смысле ни неизбежным, ни даже возможным. То, что именно так и должно быть, интуитивно ясно из следующих соображений. Термодинамическим равновесием по определению называется такое состояние, при котором всякие относительные движения отдельных частей системы прекращаются. Если такие движения не прекратились, они влекут за собой диссипацию энергии, а это означает неравновесное состояние. Поэтому совсем не удивительно, что появляются парадоксы, когда пытаются считать тела, находящиеся в относительном движении, в качестве частей одной и той же термодинамической системы.

Конечно, для некоторых систем, у которых существует внутреннее движение, возможно приписать локальные значения температуре и другим термодинамическим переменным, но тогда не может быть и речи о равновесии между смежными частями, которые движутся с конечными относительными скоростями.

Есть необходимость в теории движущихся систем в более широком смысле для тех случаев, когда следует рассматривать полный (линейный или угловой) импульс в качестве термодинамической переменной в том же самом смысле, в каком рассматривается энергия. Таким случаем является, например, термодинамика вращающегося тела (Ландау и Лифшиц); можно привести также другие примеры, относящиеся к не совсем обычным ситуациям.

Релятивистские эффекты при крайне высоких температурах могут играть, конечно, очень важную роль. Но тогда вещество ведет себя как смесь идеальных газов, и этот предельный случай не вызывает затруднений. В общем, релятивистская теория теплоты существенной практической роли не играет.

И все же физическая теория не может считаться удовлетворительной, если она не устанавливает однозначного соответствия между описаниями, которые различные *наблюдатели*, движущиеся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, получат для определенной термодинамической системы. И именно это представляется нам насущной задачей релятивистской формулировки термодинамики в настоящее время *.

1.2. История вопроса

Релятивистская формулировка термодинамики интересовала как самого Эйнштейна, так и некоторых других физиков, среди которых следует отметить Планка и Лауэ, начиная примерно с 1907 г. ** Основные результаты того времени можно привести в виде формул ***

$$\delta Q^{\text{рел}}/T = \delta S \text{ — инвариант.} \tag{1}$$

$$\delta Q = \delta Q^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{2}$$

$$T = T^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{3}$$

Здесь приняты следующие обозначения: T — абсолютная температура, отсчитанная в системе отсчета, движущейся со скоростью v относительно собственной системы термодинамической системы (которая обозна-

* D. Ter Haar, H. Wergeland. Thermodinamics and statistical mechanics in the special theory of relativity. Phys. Reports, 1, N 2, 31—54 (1971).

* Мы отсылаем к статье Ван-Кампена [1], где обсуждаются и другие соображения. Можем указать также обзорную статью Ландсберга, содержащую подробную библиографию.

** Литературу можно найти в статьях Мёллера [3] и Ландсберга [2].

*** В оригинальную работу Эйнштейна [4] вкралась опечатка, которая вызвала большое число недоразумений [см. его уравнение (23)]. Эйнштейн вовсе *не* предполагал произвольного скелинг-фактора. (Здесь имеется в виду формула (2).— *Прим. перев.*).

чается значком 0), S — энтропия, Q — количество тепла и, наконец, c — скорость света.

Статистическая механика идеального газа рассматривалась Юттнером [5], который интерпретировал полученные им выражения таким образом, что они согласовались с написанными выше формулами преобразования, полученными Планком и другими авторами.

Вплоть до самого последнего времени вопрос о релятивистской термодинамике считался вполне законченным почти что в момент появления теории относительности, шестьдесят лет назад.

Однако посмертная работа Отта [6] поставила под сомнение традиционную формулировку. Вместо формулы (2) преобразования количества тепла и формулы (3) для преобразования температуры Отт получил

$$\delta Q = \frac{\delta Q^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{и} \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{4}$$

Когда некоторое время спустя это явное расхождение с классическими формулами стало известно, началась оживленная дискуссия, которая до сих пор не привела ни к каким определенным выводам.

Сейчас, судя по всему, можно отметить по крайней мере три различные точки зрения по этому вопросу:

а) релятивистская термодинамика Планка и других правильна,

б) правильна релятивистская термодинамика Отта,

в) обе формулировки термодинамики — Отта и Планка — допустимы.

Четвертая точка зрения, которую, быть может, стоит привести, высказана Ландсбергом и его сотрудниками. Она состоит в том, что физическое значение имеют только термодинамические параметры, взятые в собственной системе отсчета. Хотя такая исходная точка зрения кажется весьма ограниченной, она тем не менее может служить основой лоренц-инвариантной теории.

Вопрос состоит в том, чтобы понять, откуда проистекает возможность возникновения столь противоречивых мнений? Действительно ли классики, предложившие соотношения (1), (2) и (3), ошиблись при подсчете изменений энергии и импульса термодинамической системы, как это следовало из рассуждений Отта?

Все авторы соглашаются относительно соотношения [1]:

энтропия инвариантна. Это фундаментальное предложение, которое остается справедливым и в общей теории относительности, обычно обосновывают больцмановским соотношением между энтропией и «термодинамической вероятностью» *. Поскольку последняя очевидным образом инвариантна, отсюда и следует утверждение.

Количество тепла Q, с другой стороны,— это величина, законы преобразования которой непосредственно не даны. В правой части равенства, определяющего первое начало термодинамики, однако,

$$\delta Q = \delta U + \delta L, \tag{5}$$

где δL представляет собой «работу», стоят величины, законы преобразования которых однозначно определены механикой системы, и Мёллер [3] показал, как это можно фактически сделать. Самая тонкая часть здесь — это преобразование члена, описывающего «работу» δL, поскольку «работа, совершаемая телом над окружающими его телами», не имеет прямого физического смысла, за исключением того случая, когда тело рассматривается в собственной системе. Мёллер провел преобразование со всеми подробностями для одного конкретного случая, и его результат был подтвержден другими примерами Бревиком [7] и Седерхольмом [8].

В настоящей статье, однако, мы будем избегать величин, преобразования для которых сложны или противоречивы,— в частности величины «работы», которая была принципиальным источником расхождения во мнениях.

Как мы увидим, такой подход открывает свободную дорогу дедукции и приводит к формулировке релятивистской теории тепла в форме, предложенной Оттом.

Вместе с тем, поскольку наша аргументация носит чисто формальный характер, она не может опровергнуть альтернативные формулировки с другими соотношениями между символами и физическими величинами. Относительные достоинства различных формулировок могут быть выявлены в конечном счете их применением к результатам экспериментов; однако предложить подходящие эксперименты для такого сравнения весьма трудно.

* Поскольку этот аргумент выходит за рамки феноменологической термодинамики, следует указать, что инвариантность энтропии может быть установлена и без ссылки на ее статистическую интерпретацию; мы еще вернемся к этому вопросу.

§ 2. Термодинамика

2.1. Замкнутые системы

Если тело, не имеющее механического взаимодействия с окружающей средой, приобретает энергию в форме тепла в количестве ΔQ^0 (в собственной системе), его масса покоя (M) возрастает на величину $\Delta Q^0/c^2$. Соответственно этому, первое начало термодинамики принимает форму

$$\Delta Q^0 = \Delta\,(Mc^2); \tag{6}$$

если к тому же процесс обратимый и изотермический, энтропия системы возрастает на величину $\Delta S^0 = \Delta(Mc^2)/T^0$.

Для отклонений от состояний равновесия, согласно второму началу,

$$(\delta S^0)_{M,V^0,\ldots} < 0 \quad \text{или} \quad (\delta M)_{S^0,V^0,\ldots} > 0; \tag{7}$$

эти соотношения представляют собой условия равновесия Гиббса, записанные в инвариантной форме.

Чтобы придать им вид, который не был бы жестко привязан к собственной системе отсчета, мы заметим следующее.

а) Полная энергия тела

$$E = Mc^2/\sqrt{1-\beta^2} \tag{8}$$

представляет собой положительную монотонную функцию лоренцовского инварианта M.

б) Скорость $v = \beta c$ служит только для выделения определенной лоренцовской системы отсчета и остается, следовательно, постоянной * во время протекания всех термодинамических процессов, которые происходят с телом.

в) Если объем тела в собственной системе (V^0) выдерживается неизменным во время термодинамического процесса, соответствующий объем

$$V = V^0\sqrt{1-\beta^2}, \tag{9}$$

который определяется *одновременно* в другой лоренцовской системе отсчета, также остается постоянным.

Таким образом, возвращаясь к отклонениям от состояния равновесия (7), рассматриваемого из инерциальной системы, относительно которой тело имеет постоянную скорость v, из $\delta M > 0$ следует $\delta E > 0$, и, поскольку энтропия инвариантна, из $\delta S^0 = 0$ следует $\delta S = 0$.

Из обычных рассуждений (например, Гиббса [9]) мы получим, что

$$(\delta E)_{S,V,\beta,\ldots} > 0, \qquad (\delta S)_{E,V,\beta,\ldots} < 0. \tag{10}$$

Это означает, что исходные условия Гиббса для определения состояния равновесия могут быть перенесены в специальную теорию относительности без каких-либо существенных оговорок *.

Если выбрать максимум энтропии, как это и подразумевается соотношениями (7) или (10), в качестве критерия равновесия, его инвариантный характер становится очевидным даже без ссылок на соотношение Больцмана: равновесие — т. е. состояние, в котором не обнаруживается никаких видимых перемен,— должно представляться одинаково всем эквивалентным наблюдателям.

Теперь перейдем к определению температуры: как было указано Линдхартом (частное сообщение), альтернатива, отраженная равенствами (3) и (4), может быть весьма просто разъяснена путем рассмотрения лоренц-инвариантного соотношения, связывающего массу покоя M и 4-вектор энергии-импульса $\{E, G\}$ замкнутой (в механическом смысле) системы,

$$M^2 = E^2/c^2 - G^2. \tag{11}$$

Это инвариантное соотношение подразумевает, что для произвольного изменения массы покоя при постоянной скорости должно быть:

$$dE = d\,(Mc^2)/\sqrt{1-\beta^2}, \tag{12}$$

* Обратите внимание на то, что мы не рассматриваем ускорение или замедление всего тела как термодинамический процесс. Так как оба эти процесса осуществляются как точно определенная механическая процедура, их можно отнести формально к адиабатическим процессам. Но хотя полная энергия тела зависит от лоренцовской относительной скорости, не существует никакого функционального соотношения между энтропией и лоренцовской скоростью; поэтому мы и не рассматриваем ее в качестве термодинамической переменной.

* Инвариантность их формы вовсе не означает, что все термодинамические соотношения обладают этим свойством, и, действительно, как это будет ясно из дальнейшего, на самом деле это так и есть.

при постоянном же импульсе

$$dE = \sqrt{1-\beta^2}\, d(Mc^2). \tag{13}$$

Для обратимого поглощения тепла получим

$$d(Mc^2) = T^0 dS^0, \tag{14}$$

и, далее, используя инвариантность энтропии:

$$(\partial E/\partial S)_{v,\ldots} = T^0/\sqrt{1-\beta^2} = T_{\text{Отт}}, \tag{15}$$

$$(\partial E/\partial S)_{G,\ldots} = T^0\sqrt{1-\beta^2} = T_{\text{Планк}}. \tag{16}$$

Следовательно, если производные берутся при постоянной скорости, мы получаем определение температуры согласно Отту. Так поступать вполне естественно, если мы рассматриваем лоренцовскую скорость исключительно как параметр, характеризующий наблюдателя.

Как мы уже подчеркивали, мы не допускаем изменения поступательной скорости при рассмотрении термодинамических процессов в нашем понимании. Точно так же мы воздержимся от использования циклов Карно между двумя движущимися тепловыми резервуарами. В этом нет необходимости, если речь идет о расширении термодинамики в том смысле, который понимается здесь.

Когда скорость $\boldsymbol{v}$ постоянна, полный импульс должен, вообще говоря, во время термодинамического процесса изменяться. Мы сделаем также еще одно важное ограничение в нашей термодинамике: будут рассматриваться только такие процессы, при которых тело в собственной системе отсчета не принимает на себя импульс; это значит, что всегда будет считаться справедливым

$$\delta \boldsymbol{G} = (\delta Q^0/c^2)\boldsymbol{v}/\sqrt{1-\beta^2}. \tag{17}$$

Такое ограничение не является существенным (его можно даже включить в определение собственной системы); более того, оно молчаливо предполагается в обычной нерелятивистской термодинамике, обобщение которой и является нашей главной задачей.

Чтобы определить полную энергию замкнутой термодинамической системы, мы должны точно задать $\boldsymbol{G}$ или $\boldsymbol{v}$. Поскольку при термодинамических процессах, как они понимаются здесь, $\boldsymbol{v}$ постоянно, а $\boldsymbol{G}$ нет, термодинамические величины и их производные должны рассматриваться

при постоянной скорости, а именно, при скорости $v = \beta c$, соответствующей скорости рассматриваемой инерциальной системы. Как мы уже видели из соотношения (16), это ведет к определению температуры по Отту.

2.2. Незамкнутые системы

Для простоты мы не рассматриваем никаких других способов механического взаимодействия системы с ее окружением, кроме изотропного давления (P) на поверхности тела. В этом случае можно приписать телу полную энергию (E) и полный импульс ($\boldsymbol{G}$), но хорошо известно, что они не образуют компонент 4-вектора, хотя законы их преобразования достаточно просты. (Для изотропной жидкости $E = \gamma(E^0 + \beta^2 P^0 V^0)$, где $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$).

С другой стороны, энтальпия $H = E + PV$ и импульс $\boldsymbol{G}$, который теперь уже выражается как

$$\boldsymbol{G} = (E + PV)\boldsymbol{v}/c^2, \tag{18}$$

могут быть скомбинированы в 4-вектор (см. Паули [12], стр. 196):

$$H^\mu = u^\mu H^0/c,\ \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{19}$$

где

$$u = \{c, \boldsymbol{v}\}/\sqrt{1-\beta^2}\ \text{(4-скорость)},$$

$$H^0 = Mc^2 + PV^0$$

и $P = P^0$ (инвариант).

Совершенно ясно, что H^μ преобразуется как 4-вектор. Это — хорошо известный результат релятивистской механики сплошных сред, *который совершенно не зависит от термодинамических представлений.*

Наша аргументация может быть в точности такой же, как и в случае замкнутых систем: во-первых, мы образуем инвариант

$$H^2 - G^2 = (Mc^2 + P^0V^0)^2 = H^{0^2}. \tag{20}$$

Если дифференцировать при постоянной скорости $v = \beta c$, мы получим

$$dH^0 = dH\sqrt{1-\beta^2}\ \text{или}$$

$$dE^0 + P^0 dV^0 = dH\sqrt{1-\beta^2} - V^0 dP^0. \tag{21}$$

Возвращаясь обратно к собственной системе, мы получим в правой части dQ^0 или — если процесс обратимый, T^0dS^0 ($= T^0dS$), откуда вытекает следующее дифференциальное соотношение между S, H и P ($= P^0$):

$$dS = \frac{dH}{T^0}\sqrt{1-\beta^2} - \frac{V^0}{T^0}dP, \tag{22}$$

в котором еще фигурирует инвариантная температура T^0 в собственной системе отсчета.

Определяя по-прежнему температуру как производную при постоянной скорости v

$$T = (\partial H/\partial S)_{T,\beta,\ldots}, \tag{23}$$

мы снова получим, что $T = T^0/\sqrt{1-\beta^2}$. Однако теперь мы обнаруживаем, что определение температуры согласно (16) или (23) влечет за собой соотношения

$$TdS = dH - \gamma^2 VdP = \gamma\, dE^0 + \gamma^2 PdV,$$
$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \tag{24}$$

форма которых не является инвариантной *, если преобразование всех других переменных производить по обычным правилам релятивистской механики.

Поэтому, как это будет видно из дальнейшего, следует быть очень осторожными, применяя инвариантность формы в качестве эвристического принципа. Многие соотношения обычной термодинамики не сохраняют своего вида при преобразованиях Отта. Однако нет никаких фундаментальных причин, чтобы они должны были ее сохранять.

Необратимые процессы требуют специального обсуждения (см. Мёллер [3, 10]), но мы не станем здесь на них останавливаться, а перейдем к релятивистской статистической механике.

* Здесь использованы только определения (18) и (19): $H = \gamma H^0 = \gamma(E^0 + PV^0) = \gamma E^0 + \gamma^2 PV$ и результат, заимствованный из релятивистской механики сплошной среды [12]: $\gamma H^0 = E + PV$. Из последнего соотношения вытекает равенство, которым мы не пользовались в явном виде: $E = \gamma(E^0 + \beta^2 PV^0) = \gamma E^0 + \beta^2\gamma^2 PV$. Стоит заметить в качестве предупреждения, что отождествлять γE^0 с E нельзя; это верно для тела постоянного объема, но неверно для тела, находящегося под постоянным давлением.

§ 3. Статистическая механика

3.1. Фазовое пространство

Уравнение Больцмана $S = \varkappa \ln \Gamma$ и инвариантность энтропии очевидным образом приводят к требованию, чтобы фазовый объем $\int d\Gamma$ трактовался в определенном смысле инвариантным способом. Как это можно осуществить в системах, состоящих из свободных частиц, было недавно показано Тошеком [11]. Но как это было уже выяснено в старых работах Юттнера, Планка и других авторов (см. Паули [12]), посвященных идеальному газу и черному излучению, именно в этих частных случаях мы не сталкиваемся со сколько-нибудь серьезными проблемами. (Хотя не исключено, что как раз эти системы наиболее удобны для установления связи между релятивистской термодинамикой и экспериментом). Реальные трудности появляются только тогда, когда мы переходим к взаимодействующим частицам.

Глубокий анализ возникающих здесь трудностей был проведен Гавашем [13] на конференции по статистической механике в Аахене в 1963 г. По его словам, «до того, как мы сможем построить релятивистскую статистическую механику, нам придется несколько развить обычную механику». Можно вкратце обрисовать ситуацию следующим образом: если мы попытаемся получить инвариантный фазовый объем, перед нами открываются две возможности.

1) *Либо* мы делаем из Г точный инвариант, расширяя его от $6N$-мерного до $8N$-мерного. Это означает введение многовременного формализма в исходной динамике. По крайней мере для равновесной теории такой подход не представляется подходящим.

2) *Либо* мы сохраняем (в классическом предельном случае) обычное фазовое пространство и рассматриваем лоренцово преобразование как каноническое. Таким образом, будет достигнута желаемая инвариантность, однако это потребует дополнительной реинтерпретации по многим пунктам. Привлекая квантовую механику, часть реинтерпретации может быть упрощена, используя инвариантное свойство стационарных состояний, и мы рассчитываем вернуться к этому вопросу. Здесь же мы останемся в рамках классики.

Было известно — даже до того, как были сформулированы теоремы Нетер, — что группа Лоренца может быть порождена бесконечно малыми каноническими преобразованиями, а ее генераторами служат десять главных интегралов движения [14]. Однако, чтобы реализовать эту программу, следует развить гамильтоновскую релятивистскую механику системы. Известно, что большая часть трактовок релятивистской механики относится лишь к задаче одной частицы. Чрезвычайно трудно (если не невозможно) найти формулировку *одновременного* (т. е. для единого времени) *действия на расстоянии* в динамике многих (и даже для двух!) взаимодействующих частиц.

Дирак [15] выяснил некоторые необходимые условия для того, чтобы такая теория стала возможной. Бакамян и Томас [16] и Фолди [17] сумели найти такие типы взаимодействий, которые удовлетворяли поставленным условиям, но за счет таких условий, на которые трудно пойти с физической точки зрения. Все следствия этих шагов на пути к построению релятивистской динамики многих частиц в гамильтоновой форме, быть может ярче всего отражены в так называемой «теореме об отсутствии взаимодействия», принадлежащей Кюри (см. Кюри, Иордан и Сударшан [18]). Эта теорема показывает, что такая каноническая реализация преобразования Лоренца согласуется с инвариантностью мировой линии системы только в том случае, если эта линия прямая, но это означает отсутствие взаимодействия. В связи с этим некоторые авторы предлагали отказаться от физической интерпретации канонических координат частиц q_i как положений этих частиц. Есть, конечно, и другая дорога для отступления, несколько менее решительная — заменить систему частиц системой частиц плюс поле с билинейными и локальными взаимодействиями между частицей и полем. Дирак [15] выработал соответствующие генераторы для случая электродинамики, а Балеску [19, 20] отметил, что в этом случае фундаментальное условие Кюри* для лоренцовского преобразования точек мировой линии и алгебры Ли, перекрываемые каноническими генераторами, определенно совместимы. Поэтому Балеску предложил разрубить гордиев узел двумя решительными ударами.

* Условие Кюри обсуждается в Дополнении А; в русском переводе Дополнения, содержащие математические выкладки, опущены.

Во-первых, отказаться от любого действия на расстоянии — запаздывающего, опережающего или симметричного четырехмерного — и рассматривать систему как состоящую из частиц плюс поле с ковариантным точечным взаимодействием. Этот шаг позволяет удовлетворить каноническому условию Кюри. В качестве платы за это система увеличивает число степеней свободы на непрерывную бесконечность степеней свободы, связанную с полем.

Во-вторых, Балеску предлагает осуществление лоренц-инвариантности через каноническую инвариантность, взяв за исходный пункт теорию Дирака [15]. Это означает, что фазовое пространство уже не является фиксированной системой отсчета, в которой движутся точки, но как движущееся многообразие координат и импульсов подчиняется гамильтониану системы. Тогда преобразования Лоренца становятся каноническими преобразованиями, особым образом зависящими от динамики системы, совершенно не похожими на кинематические преобразования, связывающие четырехмерные координаты, используемые различными наблюдателями.

Такой подход представляет совершенно новую основу для релятивистской статистической механики. С одной стороны, замечательно, что фазовое пространство рассматривается в смысле движущегося многообразия (метод Лагранжа), а не в смысле фиксированной координатной системы (метод Эйлера). В нерелятивистской теории допустимы обе точки зрения, хотя большинство из нас привыкло действовать в понятиях фиксированного фазового пространства (например, в связи с эргодической гипотезой).

Далее, бесконечное число степеней свободы приводит к тому, что фазовый объем системы представляет собой произведение обычного интеграла для частиц и интеграла в функциональном пространстве для поля. Это приводит к ряду технических трудностей — по мнению Балеску, не более серьезных, чем известные трудности в электродинамике. Конечно, довольно странно подчинить бесконечное число степеней свободы, которые в нерелятивистском приближении обращаются в функции расстояний между частицами — температурному распределению; такому, например, как черное излучение. Тем не менее это может быть оправдано, поскольку в статистической

механике мы вовсе не обязаны знать точное движение, другими словами, мы вовсе не нуждаемся в решении механических задач. Нам нужно знать только одно из возможных выражений для функции Гамильтона, и нам в принципе не обязательно исключать координаты и импульсы поля посредством запаздывающих или опережающих потенциалов частиц; последняя процедура представляет собой разновидность частичного решения бесконечной системы уравнений движения.

До сих пор Балеску удалось осуществить свою программу только для кинетического уравнения электрически заряженных точечных частиц. Ее разработка для равновесной теории может вызвать интересные технические проблемы. Хотя подход Балеску к вопросам релятивистской статистической механики весьма радикален, он не противоречив, и, возможно, никакого другого выхода вообще нет. Во всяком случае, его подход приводит к главному шагу: он делает фазовый объем лоренц-инвариантным, хотя и для бесконечного числа степеней свободы, которое возникает при наличии взаимодействия между частицами.

В последующем мы будем предполагать, что фазовый объем лоренц-инвариантен, и будем соответственно выбирать функции распределения.

3.2. Замкнутые системы

Точно так же, как статистическая интерпретация термодинамических дифференциальных соотношений:

$$dF = -dL - SdT \rightleftarrows d\psi = \overline{dE} - \overline{\eta} d\Theta, \tag{25}$$

$$TdS = dE + PdV \rightleftarrows \Theta\, d\overline{\eta} = \overline{dE} + \overline{P}\, dV, \tag{26}$$

столь скромно названная Гиббсом «термодинамическими аналогиями», привела его к каноническому распределению, она послужит нам отправной точкой для релятивистских обобщений.

Очень поучительное следствие (25) и (26) было впервые установлено Крамерсом [21]; оно имеет вид

$$\delta \overline{E} - \overline{\delta E} = \delta Q. \tag{27}$$

Оно выражает количество тепла как кажущуюся нехватку в законе сохранения энергии, связанную с механической неопределенностью термодинамического процесса.

Очевидным обобщением (27) для замкнутых систем будет

$$\delta \overline{G}_\mu - \overline{\delta G}_\mu = \delta Q_\mu; \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{28}$$

Здесь Q_μ должны, очевидно, преобразовываться как 4-вектор, поскольку нам следует предположить, что фазовое усреднение (инвариантная операция), производимое в левой части (28), не нарушает характера преобразования механических величин.

Для того чтобы соблюсти соответствие с обычной термодинамикой в собственной системе отсчета, где

$$\delta G^0_\mu = \{\delta E^0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \delta Q^0_\mu = \{\delta Q^0,\ 0,\ 0,\ 0\}, \tag{29}$$

мы должны поставить условие (см. замечания в конце 2.1), что для всех процессов, которые мы намерены описывать нашей теорией, должно быть

$$\delta G_\mu = u_\mu\, \delta E^0/c^2 \text{ и } \delta Q_\mu = u_\mu \delta Q^0/c^2, \tag{30}$$

где u — соответствующая 4-скорость системы относительно наблюдателя: $u^\mu = \gamma\,\{c,\ v\}$, $u^\mu u_\mu = c^2$. Чтобы упростить наши обозначения, впредь мы используем систему единиц, где $c = 1$.

Выпишем теперь функцию распределения. Ее вид следует, конечно, подобрать; мы начнем с некоторого предположения и будем по ходу дела вносить новые. Дискуссионной является, конечно, интерпретация параметров распределения.

В силу инвариантности энтропии и элемента фазового объема плотность в фазовом пространстве должна быть лоренц-инвариантной функцией полного 4-импульса G^μ:

$$\rho = \exp\,(\Phi - \theta_\mu G^\mu), \tag{31}$$

где множители Лагранжа θ_μ обеспечивают выполнение условия, что энтропия $-\varkappa\, \overline{\ln \rho}$ — принимает максимальное значение при дополнительных условиях $\overline{G}^\mu = \text{const}$. Функция Φ, которая определена подходящей нормализацией, например, $\int \rho d\,[\text{Фазы}] = 1$, должна быть, очевидно, также инвариантом.

Из сохранения вероятности и непрерывности канонического распределения при бесконечно малых обратимых

вариациях параметров можно снова подметить «аналогии», в точности так же, как это сделал Гибсс [22]. В релятивистской форме они выглядят даже еще проще:

$$d\Phi = \theta_\mu \overline{dG}^\mu + \overline{G}^\mu \, d\theta_\mu. \tag{32}$$

Связывая энтропию, как это делал Гиббс, с индексом вероятности $\eta = -\ln \rho$

$$\overline{\eta} = \theta_\mu \, \overline{G}^\mu - \Phi \tag{33}$$

и исключая $d\Phi$ из (32), мы получим

$$\theta_\mu (d\overline{G}^\mu - \overline{dG}^\mu) = d\overline{\eta} = dQ^0_{\text{рел}} \, / \, \varkappa T^0 = \text{Inv}, \tag{34}$$

и в точности так же, поскольку Φ — инвариант:

$$\Phi = \theta_\mu \overline{G}^\mu - \overline{\eta} = (\overline{E}^0 - T^0 S^0)/\varkappa T^0 = F^0/\varkappa T^0. \tag{35}$$

Далее мы используем единицы, в которых постоянная Больцмана $\varkappa = 1$.

Как это видно из соотношения (35), функция Φ тождественно равна (с точностью до постоянного множителя $\varkappa$) потенциалу Массье:

$$\Phi = F^0/T^0, \tag{36}$$

который имеет поэтому инвариантное значение.

Инвариантность потенциала Массье — это полезный побочный продукт релятивистской статистической механики, вывод которого средствами обычной термодинамики потребовал бы куда больших усилий. Используем этот потенциал, чтобы сделать некоторые замечания, касающиеся форм-инвариантности термодинамических уравнений. Возьмем, например, для проверки соотношение

$$dF^0 = -S^0 dT^0 - P^0 dV^0 \tag{37}$$

и посмотрим, не сводится ли оно в собственной системе к соотношению

$$dF = -SdT - PdV$$

и не является ли, следовательно, подходящей формой с точки зрения движущегося наблюдателя. Конечно, никаких очевидных оснований для этого предположения нет, без экспериментального определения «свободной» энергии для наблюдателя, не сопутствующего термодинамической системе. Поскольку определение F должно зависеть от

преобразования работы, мы должны — согласно нашей программе — на время обойти этот момент. В собственной системе $P^0 dV^0$ будет правильным выражением для работы в первом начале. Соответствующий член PdV, однако, не имеет такого же физического смысла для движущейся системы.

Но чтобы сказать нечто большее, мы можем взглянуть на интерпретацию множителей Лагранжа θ_μ. Длина 4-вектора θ (названная Тоушеком «вектором Синга» и Мёллером, вслед за Трусделлом, «вектором холодности») определяется соотношением

$$u^\mu \theta_\mu = 1/T^0. \tag{38}$$

Это можно понять, если применить (34) в собственной системе механически изолированного тела ($\overline{\delta G}^\mu = 0$), где $\theta^0_0 \delta E^0 - 0 = \delta\overline{\eta}^0 = \delta Q^0/T^0$ (инвариант), причем $\theta^0_0 = 1/T^0$, т. е. $\theta_\mu = u_\mu \theta^0_0$.

Используем те же аргументы, что и в § 3, а именно

а) $\delta Q^0/T^0 = \delta S^0 = \delta S$ — инвариант,

б) $\delta E = \delta E^0/\sqrt{1-\beta^2}$ при постоянной скорости и внешних параметрах. Определив затем температуру как

$$(\partial E/\partial S)_{\beta V, \ldots} = T, \tag{39}$$

увидим, что обобщение статистики Гиббса, следующее из представлений Балеску об инвариантном фазовом объеме, также приводит к формуле Отта для температуры движущейся системы. Теперь мы уже можем дать другой (по-видимому) независимый аргумент в пользу определения температуры по Отту.

Инвариантность Φ и ее равенство F^0/T^0 может быть удовлетворено предположением, что преобразованные по Лоренцу величины F и T, соответствующие величинам F^0 и T^0 соответственно, получаются умножением каждой из них на один и тот же множитель.

Предполагая далее, что свободная энергия Гельмгольца F преобразуется как полная энергия E замкнутой системы, можно принять этот постоянный множитель равным

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \tag{40}$$

что подразумевает использование температуры Отта.

Эта схема рассуждении отнюдь не обязательна. Прежде всего, до сих пор мы не установили физический смысл F, который представляет собой один из центральных пунктов расхождения во всей проблеме. Этот вопрос можно, однако, обойти, используя тот факт, что у нас уже имеются два надежных инварианта: энтропия $\overline{\eta}$ и потенциал Массье Ф. Их сумма

$$\theta_\mu \overline{G}_\mu = E^0/T^0 \tag{41}$$

также представляет собой инвариант. Поскольку

$$\theta_\mu = (\gamma/T^0)\{1, -\beta\}, \qquad G^\mu = \{E, \boldsymbol{G}\},$$

мы получим

$$\theta_\mu G^\mu = (\gamma/T^0)\{E - \boldsymbol{v}\boldsymbol{G}\},$$

и поскольку $\boldsymbol{G} = \gamma E^0 \boldsymbol{v}$, где $E = \gamma E^0$, мы получим также

$$(\gamma^2/T^0)\, E^0\, (1 - \beta^2) = E/T^0\gamma.$$

Если затем *потребовать*, чтобы из преобразования Лоренца следовало преобразование

$$E^0/T^0 \to E/T \tag{42}$$

полной энергии и температуры, определение температуры по Отту окажется единственно возможным.

Запишем еще несколько формальных соотношений: в соответствии с обычным соотношением между энтропией, энергией и температурой $(\partial S^0/\partial E^0)_V = 1/T^0$ мы имеем теперь инвариантное дифференциальное соотношение $(\partial S/\partial G^\mu)_V = \theta_\mu$ для вектора холодности. И в соответствии с уравнениями Гиббса — Гельмгольца

$$E^0 = \frac{\partial(F^0/T^0)}{\partial(1/T^0)}, \qquad H^0 = \frac{\partial(G^0/T^0)}{\partial(1/T^0)}, \tag{43}$$

мы можем записать ковариантные соотношения

$$G^\mu = \partial\Phi/\partial\theta_\mu, \qquad H = \partial\Psi/\partial\theta_\mu, \tag{44}$$

где планковский потенциал Ψ играет ту же самую роль при постоянном давлении, что и потенциал Массье при постоянном объеме:

$$\overline{\Psi} = H^0/T^0 = \gamma\,(E^0 + P^0V^0)/T^0\gamma = (E + PV)/T_{\text{Отт}}. \tag{45}$$

(В статье «Термодинамические потенциалы в теории относительности и их статистическая интерпретация» Мёллер [10] приходит к таким же выводам.)

3.3. Незамкнутые системы

Ансамбли под постоянным давлением, представляющие подходящую статистическую основу для рассмотрения открытых систем, рассмотренных в 2.2, приписывают Льюису и Зигерту [23] или Ван-Хову [24]. Мёллер, однако, выдвигал эту идею лет на двадцать раньше в своих лекциях в Копенгагенском университете. Мёллеровское построение ансамблей под постоянным давлением имеет то преимущество, что оно опирается на точную механическую модель; это построение было изложено лишь в конспекте его лекций, изданном в Дании, поэтому мы воспроизведем его здесь: система, к примеру газ, заключена в вертикальный цилиндр поперечного сечения A и прикрыта сверху поршнем с массой M (весом Mg) (рис. 1).

Когда поршень закреплен, а система помещена в тепловую баню, статистика системы — это статистика обычного канонического ансамбля системы N-частиц; объем системы — это механический внешний параметр:

$$\exp(-\Phi) = \frac{1}{N!}\int\left(\frac{dp\,dq}{h}\right)^{3N}\exp(-E^0\ (q,p;V^0,\ldots)/\Theta^0). \tag{46}$$

Если же, например, поршень свободно движется под постоянным давлением P (которое и является заданным внешним параметром), то объем (или, иначе, положение поршня q_M) будет новой механической степенью свободы, которую следует включить в фазу вместе с ее сопряженным импульсом p_M. Ее вклад в энергию системы состоит из: 1) кинетической энергии, связанной со скоростью поршня, и 2) потенциальной энергии, обусловленной положением массы поршня в поле тяжести, т. е.

$$p_M^2/2M + Mgq_M$$

в ньютоновском приближении. Как это было подчеркнуто Мёллером, можно принять это выражение с пренебрежимой ошибкой также и для релятивистской механики, поскольку масса M бесконечно велика по молекулярным масштабам.

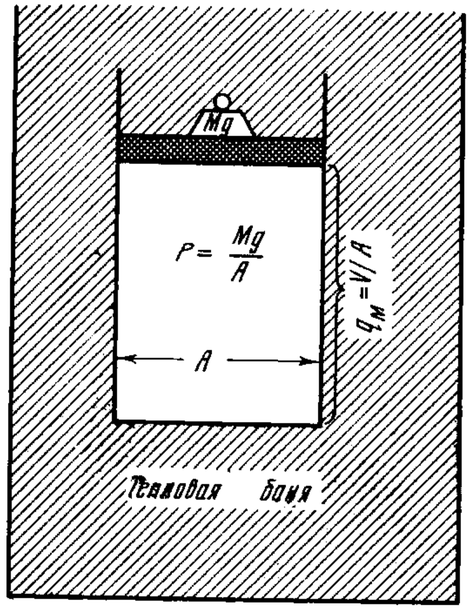

Рис. 1

Следовательно, энергию в том виде, который удобен для ансамбля, находящегося под постоянным давлением, можно записать в собственной системе так:

$$H^0(q, p, V, p_M, \ldots) = E^0(q, p) + (p_M^0)^2/2M + PV^0 , \qquad (47)$$

поскольку $P = Mg/A$, а $q_M = V/A$. Каноническое среднее от этого выражения — это как раз энтальпия, а потенциал Планка записывается в виде

$$\exp(-\Psi) = \frac{1}{N!}\int\left(\frac{dpdq}{h}\right)^{3N} \exp\{-E^0(q, p)/\Theta^0\}\, dV \times$$
$$\times \exp(-PV^0/\Theta^0) , \qquad (48)$$

где опущен несущественный множитель * $(1/A)\,(2\pi m\Theta^0/h^2)^{1/2}$.

Используя следующее обозначение для фазового интеграла:

$$e^{-\Psi} = Z(P, \Theta^0) \quad \text{и} \quad e^{-\Phi} = (V^0, \Theta^0) , \qquad (49)$$

* Множитель $1/A$ появляется из-за того, что канонической координатой поршня является не объем V, а координата $q_M = V/A$. В выражении (51), полученном ниже, множитель $(2\pi M\Theta/h^2A^2)^{1/2}$, сочетаясь с дополнительным множителем Θ/P, дает $\Theta/PAl = \Theta/Mgl$, где $l = (h^2/2\,\pi M\Theta)^{1/2}$ — тепловая волна де Бройля для поршня.

мы получим окончательно

$$Z(P, \Theta^0) = \int_0^\infty dV^0 Z(V^0, \Theta^0) \exp(-PV^0/\Theta^0) . \qquad (50)$$

Для идеального газа можно получить, оценивая эти выражения в собственной системе:

$$Z(V^0, \Theta^0) = \left[\frac{4\pi\Theta^0 m^2}{h^3} V^0 K_2\left(\frac{m}{\Theta^0}\right)\right]^N / N\,! , \qquad (51)$$
$$Z(P, \Theta^0) = \left[4\pi\Theta^0 m^2 h^{-3} V^0 K_2\left(\frac{m}{\Theta^0}\right)\right]^N \left(\frac{\Theta^0}{PV^0}\right)^N ,$$

где K_2 — функция Ганкеля, а множитель Θ/Mgl в $Z(P, \Theta^0)$ опущен [см. примечание к соотношению (48)].

Предполагая, что энергия в собственной системе

$$H_0^0 = \sum\sqrt{(p^0)^2 + m^2} + PV^0 \qquad (52)$$

является нулевой компонентой 4-вектора, который в движущейся системе имеет компоненты

$$H^\mu = H_0^0 u^\mu ,$$

мы можем написать также

$$\theta_\mu \overline{H^\mu} = \theta_0^0 \overline{H^{00}} = \frac{\theta_0^0}{\gamma}\,\gamma\overline{H^{00}} . \qquad (53)$$

Здесь $H^{00} = E^0 + PV^0$, а $\gamma H^{00} = E + PV$, другими словами, это энтальпия в собственной системе и в произвольной инерциальной системе соответственно; что касается величины $\gamma/\theta_0^0 = T^0\sqrt{1-\beta^2}$, то это (оттовская) температура. Казалось бы, что отсюда следует форм-инвариантность $Z(V, \Theta)$ и $Z(P, \Theta)$. Однако если предполагаемые свойства для преобразования энергии (47) могут быть доказаны [см. 2.2] для фазовых средних, то это не справедливо для макроскопической динамики. Для полноты следует в этом пункте разобраться, и простая модель Мёллера (см. рис. 1) допускает точный анализ, очень сходный с его же преобразованиями «выражения для работы», приведенными в его первой статье по релятивистской термодинамике.

Пытаясь дать физическую интерпретацию ансамблю под постоянным давлением, Мёллер обратил внимание на

замечание Бора, сделанное в Фарадеевской лекции 1930 года, о дополнительности пар термодинамических переменных. Ансамбли под постоянным давлением и обычные канонические ансамбли при постоянном объеме представляют собой дополнительное описание в том смысле, что если *давление* точно определено (вес, деленный на площадь поршня в модели Мёллера), *объем* (высота, умноженная на площадь поршня) должен быть статистической переменной и, следовательно, определенным только с точностью до тепловых флуктуаций (положения поршня). Наоборот, точно определенный объем влечет за собой флуктуацию давления. Розенфельд [25] написал соответствующие соотношения неопределенности, а именно для объема и давления

$$\Delta V^0 \Delta P \approx \varkappa T^0, \tag{54}$$

из которых следует, что если одна из флуктуаций «нормальная» (т. е. относительного порядка $1/\sqrt{N}$), то и другая также является нормальной. Без сомнения, все это верно, хотя здесь еще остается место для обсуждения определения и порядка величины флуктуации давления. Мы не станем на этом останавливаться. Соотношения неопределенностей Розенфельда являются типичным примером соотношений, которые не являются форм-инвариантными при преобразованиях Отта, однако — по крайней мере для (54)—не возникает вопроса о физическом смысле лоренцовых преобразований.

Следует также иметь в виду, что в статистической термодинамике «сопряженные» пары $(V, P), (E, T), (N, \mu)$... всегда состоят из одной *экстенсивной* $V, E, N, \ldots$ и одной *интенсивной* переменной P, T, μ... и что статистика для интенсивных переменных отличается от статистики экстенсивных переменных. Это можно понять, например, из следующего.

Согласно выражениям (48) и (50), плотность вероятности обнаружить объем термодинамической системы в интервале вблизи V^0 при заданных температуре и давлении, равна

$$w(V^0 \mid P) = \frac{Z(V^0, \Theta^0)}{Z(P, \Theta^0)} \exp\left\{-\left(\frac{PV^0}{\Theta^0}\right)\right\}. \tag{55}$$

Функция $Z(V, \Theta)$ всегда положительна и, грубо говоря, пропорциональна V^N, поэтому соотношение (55) определяет острый пик обычной функции распределения возможных значений объема. Согласно (50), она соответствующим образом нормирована

$$\int_0^\infty w(V^0 \mid P)\, dV^0 = 1\,. \tag{56}$$

Среднее значение и флуктуации около V^0 определяются поэтому через

$$\overline{V^0} = -\frac{d \ln Z(P)}{d(P/\Theta^0)}, \qquad \overline{(V - \overline{V^0})} = \frac{d^2 \ln Z(P)}{d(P/\Theta^0)^2}\,. \tag{57}$$

Для идеального газа мы получим

$$\overline{V^0} = N\Theta^0/P, \quad \overline{(V - \overline{V^0})^2} = \overline{(V^0)^2}/N. \tag{58}$$

Флуктуации давления при заданном объеме, конечно, не могут быть определены столь прямым путем из соответствующего (постоянный объем!) ансамбля. Вместо того чтобы приводить полный вывод, который, скорее всего, хорошо известен, мы привлечем формальную аналогию с соотношением (55), аналогию несколько искусственную, но ведущую тем не менее к правильному ответу.

Инверсией лапласовского преобразования (50) мы можем построить следующую функцию:

$$w(PV^0) = \frac{1}{2\pi} \frac{Z(P, -i\Theta^0)}{Z(V, \Theta^0)} \exp(iPV^0/\Theta^0)\,, \tag{59}$$

удовлетворяющую условию «нормировки»:

$$\int_{-\infty - i\varepsilon}^{\infty - i\varepsilon} w(P \mid V^0)\, d\left(\frac{P}{\Theta^2}\right) = 1\,.$$

Нет сомнений, что $w(P \mid V^0)$ не является настоящей функцией распределения, поскольку она комплексная и распространяется в область отрицательных значений P/Θ^0. Однако выражения, которые вытекают из формальных преобразований, а именно:

$$\frac{\overline{P}}{\Theta^0} = \frac{d \ln Z(V^0, \Theta^0)}{dV^0} \quad \text{и} \quad \Delta\left(\frac{\overline{P}}{\Theta}\right)^2 = \frac{d^2 \ln Z(V^0, \Theta^0)}{dV^2} \tag{60}$$

остаются всегда или почти всегда справедливыми. Более точно, первое из выражений (60) хорошо известно и абсолютно верно. Второе соотношение (60) всегда верно опре-

деляет порядок величины $O(N)$, однако в некоторых случаях, зависящих от экспериментальной ситуации, отличается от точного на некоторый множитель порядка единицы. Это обстоятельство может быть оправдано только внимательным обсуждением физического смысла флуктуации интенсивных переменных.

Как можно усмотреть из выражений (55) и (59), дополнительные соотношения между сопряженными величинами не могут быть выражены в столь идеально симметричной математической форме, как это возможно в квантовой механике. Причина этого, конечно, состоит в том, что в теории тепла дополнительные описания связаны между собой преобразованиями Лапласа, а не преобразованиями Фурье.

Посмотрим теперь на соответствующие соотношения в произвольной лоренцовской системе $G \neq 0$. Можно написать в фазовом интеграле (46)

$$E^0/\Theta^0 = \theta_\mu G^\mu,$$

где

$$\theta_\mu = \gamma\{1, -v\}/\Theta^0, \quad G^\mu = \{E, G\}, \quad E = \gamma[E^0 + (vG)].$$

Появляется искушение сделать вывод, что $E^0(q^0, p^0)/\Theta^0$ следует положить равной $E(q, p)/\gamma\Theta^0 = E/\Theta_{\text{Отт}}$; поступив так, мы добьемся того, что фазовый интеграл $Z(V^0, \Theta^0)$ станет инвариантом — и не только по своей величине, но даже и по форме, как функция $V = V^0/\gamma$ и $\Theta = \gamma\Theta^0$. Но это будет ошибкой: ни планковское, ни оттовское и никакое другое определение температуры не могут придать Z инвариантной формы.

Чтобы оценить выражение (46) в произвольной системе, мы должны ввести в экспоненту $E^0 = \gamma[E - vG]$, фактически подставить и проинтегрировать по фазам $q \subset V$ и *всем* p. Но здесь нельзя упрощать выражения, используя соотношения

$$G = Ev \quad \text{или} \quad G^0 = 0, \tag{61}$$

которые, будучи правильными в механическом понимании, тем не менее не могут быть применены к фазовому объему, доступному для рассматриваемой термодинамической системы. Другими словами: для правильного соответствия с обычной теорией тепла — центр тяжести должен иметь возможность участвовать в тепловом движении. Таким

образом, соотношения (61), подразумевающие равенства $E^0(g^0, p^0)/\Theta^0$ и $E(q, p)/\Theta_{\text{Отт}}$, могут быть использованы только для канонических средних. В результате вычислений фазовый интеграл инвариантен в следующем смысле:

$$Z(V^0, \Theta^0) = Z(\gamma V, \Theta^0), \quad Z(P^0, \Theta^0) = Z(P, \Theta^0),$$

где механические параметры системы подчиняются очевидным релятивистским преобразованиям $V^0 \to \gamma V, P^0 \to P$. В этом контексте вопрос о том, какой температурой нужно пользоваться (оттовской $\Theta = \gamma\Theta^0$ или какой-либо иной), становится просто делом вкуса. И быть может, только выражение для флуктуации энергии

$$\overline{(\Delta E)^2} = \Theta^2 \partial\bar{E}/\partial\Theta,$$

остающееся форм-инвариантным относительно преобразований $E = \gamma E^0$, $\Theta = \gamma\Theta^0$, на самом деле указывает некоторую предпочтительность определения температуры по Отту.

Но такой вид форм-инвариантности представляет мало интереса, поскольку уравнение состояния и т. д., вытекающие из Z, уже не форм-инвариантны (при определении температуры по Отту). Например, уравнение (60) $P/\Theta^0 = (d/dV^0)\ln Z(V^0, \Theta^0)$ приобретает вид

$$\frac{\bar{P}}{\Theta} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{d\ln Z(V^0, \Theta^0)}{dV}. \tag{62}$$

Точно так же уравнение состояния (57) запишется уже в виде

$$\bar{V} = -\frac{\Theta}{\gamma^2}\frac{d\ln Z(P, \Theta^0)}{dP}. \tag{63}$$

Чтобы выяснить смысл последнего уравнения, рассмотрим снова систему идеального газа, на этот раз считая давление заданным, а объем—статистической переменной.

Предполагая, как и раньше, для фазовой плотности ансамбля при заданном давлении выражение $\rho = \exp(-\theta_\mu H^\mu)$, можно показать, что среднее значение экспоненты (которое всегда берется с оттовской температурой) может быть представлено в виде

$$\theta_\mu \bar{H}^\mu = (\bar{E} + P\bar{V})/\Theta, \tag{64}$$

куда входит лоренцовский сжатый объем $V = V^0\sqrt{1-\beta^2}$. Это не означает, однако, что распределение вероятности для объема при заданных давлении и температуре $w(V \mid P)$ должно быть пропорционально $\exp(-PV/\Theta)$. Правильное распределение вероятностей должно, очевидно, получаться из его выражения в собственной системе простой заменой переменных

$$w(V^0(V))\, dV^0/dV = w(V), \tag{65}$$

соответствующей преобразованию Лоренца, т. е.

$$V^0 = \gamma V, \quad \gamma\Theta^0 = \Theta \text{ (Отт)}. \tag{66}$$

Тогда мы приходим к следующему распределению вероятностей:

$$w(V \mid P) = \gamma \frac{Z(V^0, \Theta^0)}{Z(P, \Theta^0)} \exp(-\gamma^2 PV/\Theta), \tag{67}$$

согласующемуся с выражением (63).

Ковариантные соотношения, подобные (31) и (32), могут быть обобщены в векторную и тензорную термодинамику, пригодную для всех инерциальных систем. Однако, судя по всему, мы не очень-то нуждаемся в подобных конструкциях, поскольку все эти векторы и тензоры получаются довольно тривиальным образом как произведения их значений в собственной системе на некоторые одночлены, содержащие компоненты 4-вектора.

Литература

1. *N. G. van Kampen.* Phys. Rev., **173** (1968), 295.
2. *P. T. Landsberg.* Essays in Physics, 2 (1970).
3. *C. Møller.* Dan. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd., **36**, N 1 (1967). Русск. перев.: «Эйнштейновский сборник, 1970—1971». М., «Наука», 1971.
4. *A. Einstein.* Hand u. Jahrb. Elektronik (1908), 451, eq. (23).
5. *F. Jüttner.* Ann. Phys., **34** (1911), 856; **35** (1911), 145.
6. *H. Ott.* Z. Phys., **175** (1963), 70.
7. *I. Brevik.* Dan Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd., **36**, N 3 (1967).
8. *L. Söderholm.* Nuovo Cimento, **57B** (1968), 173.
9. *J. W. Gibbs.* Collected Works. Longmans Green, London (1928), vol. 1, p. 56.
10. *C. Møller.* Dan. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd., **37**, N 1 (1969). Русск. перев.: «Эйнштейновский сборник, 1970—1971». М., «Наука», 1971.
11. *B. Touschek.* Nuovo Cimento, **58** (1968), 295.
12. *W. Pauli.* Relativitätstheorie, reprint. Torino (1963).
13. *P. Havas.* In: «Statistical mechanics of equilibrium and non-equilibrium». Ed. J. Meixner. North-Holland. Amsterdam (1965), p. 1.
14. *G. Herglotz.* Ann. Phys., **36**, (1911), 493.
15. *P. A. Dirac.* Revs. Mod. Phys., **21** (1949), 392.
16. *B. Bakamjian* a. *L. H. Thomas.* Phys. Rev., **92** (1952), 1300.
17. *L. Foldy.* Phys. Rev., **122** (1961), 275.
18. *D. G. Currie, T. F. Jordan* a. *E. C. Sudarshan.* Revs. Mod. Phys., **35** (1965), 350.
19. *R. Balescu, T. Kotera.* Physica, **33** (1967), 558.
20. *R. Balescu, T. Kotera* a. *E. Pina.* Physica, **33** (1967), 581.
21. *H. A. Kramers.* Verslagen Kon Akad. Wetensch. Amsterdam, **41** (1938), 1.
22. *J. W. Gibbs.* Collected Works. Longmans Green. London (1928), vol. II, p. 164.
23. *M. B. Lewis* a. *A. J. F. Siegert.* Phys. Rev., **101** (1956), 1227.
24. *L. Van Hove.* Physics, **16** (1950), 137.
25. *L. Rosenfeld.* Lectures on the foundations of statistical mechanics. Les Houches (1952).
26. *C. Møller.* Comm. Dublin Inst. of Adv. Studies Ses. A, N 5 (1949).
27. *A. Schild.* Phys. Rev., **95** (1954), 1057.
28. *D. ter Haar* a. *H. Wergeland.* Elements of thermodynamics. Addison Wesley, Reading Mass. (1966), p. 65. Русск. перев.: *Д. Тер Хаар, Г. Вергеланд.* Элементы термодинамики. М., «Мир», 1968
29. *P. Havas.* Phys. Rev., **185** (1969), 185.
30. *J. Linhard.* Physica, **38** (1968), 635.