Литература

1. *И. Е. Тамм, И. М. Франк.* ДАН, **14**, 107 (1937), см. также: *I. E. Tamm.* Journ. Phys. USSR, **1**, 439 (1939).
2. *И. М. Франк.* Сборник памяти И. Е. Тамма. М., «Наука» (1972), препринт ОИЯИ Р4—5954 (1971).
3. *В. Л. Гинзбург.* ДАН, **24**, 130 (1939).
4. *В. Л. Гинзбург.* ЖЭТФ, **10**, 589 (1940).
5. *В. Л. Гинзбург.* УФН, 69, 537 (1959).
6. *Б. М. Болотовский.* УФН, **62**, 201 (1957); **75**, 296 (1961).
7. *Дж. Джелли.* Черенковское излучение и его применения. М., ИЛ (1960).
8. *П. В. Зрелов.* Излучение Вавилова — Черенкова и его применение в физике высоких энергий. М., Атомиздат (1968).
9. *И. М. Франк.* Изв. АН СССР, серия физич., 6, 3 (1942).
10. *A. Sommerfeld.* Göttingen Nachrichten, 99, 368 (1904); 201 (1905).
11. *А. Зоммерфельд.* Оптика. М., ИЛ (1958), § 47.
12. *A. Einstein.* Ann. d. Phys., **23**, 371 (1907); см. также: Собр. науч. трудов, т. I. М., «Наука», 53 (1965).
13. *В. Паули.* Теория относительности. М., Гостехиздат, 1947, § 6.
14. *F. A. E. Pirani.* Phys. Rev., D **1**, 3224 (1970).
15. *В. Л. Гинзбург.* ЖЭТФ, **62**, 173 (1972).
16. *Б. М. Болотовский.* Краткие сообщения по физике. ФИАН СССР (1972), № 7, стр. 34.
17. *В. Я. Эйдман.* Изв. ВУЗов (Радиофизика), № 4 (1972).
18. *В. Л. Гинзбург.* УФН, **103**, 393 (1971).
19. *В. Вайскопф.* УФН, **84**, 183 (1964); *C. McGill.* Contemp. Phys., **9**, 33 (1968).
20. *M. Rees.* Mon. Not., **135**, 345 (1967).
21. *V. L. Ginzburg, C. I. Syrovatskii.* Annual Rev. Astron. and Astrophys., **7**, 375 (1969).
22. *A. Cavaliere, P. Morrison, L. Sartori.* Science, **173**, 625 (1971).
23. *В. Л. Гинзбург И. М. Франк.* ЖЭТФ, **16**, 15 (1946). Journ. Phys. USSR, 9, 353 (1945).
24. *H. Motz, L. Schiff.* Amer. Journ. Phys., **21**, 258 (1953). Русский перевод в сб. «Миллиметровые и субмиллиметровые волны». М., ИЛ (1959), стр. 171.
25. *С. В. Афанасьев, Б. М. Болотовский.* Краткие сообщения по физике. ФИАН СССР (1972), № 10, стр. 29.

Я. А. Смородинский, В. А. Угаров

ДВА ПАРАДОКСА СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

This was sometime a paradox
But now the time gives it proof.
Sheakspear

В истории любой науки наряду с фундаментальными вопросами, определяющими существенное продвижение науки, возникают порой задачи или вопросы, отнюдь не первостепенного и не фундаментального характера. Сначала на эти вопросы просто не обращают внимания, но в один прекрасный день они неожиданно вызывают интерес, появляется серия работ, разные авторы дают на них разные ответы, причем иногда ответы оказываются диаметрально противоположными. Это вызывает немалое удивление, поскольку вопросы такого сорта давно уже остались за передним краем науки и лежат в той области, где, по убеждению многих, все ясно. Таким образом, возникают своеобразные парадоксы. Как и во всяком парадоксе, разгадка и решение кроется в обнаружении некорректности постановки вопроса. О двух вопросах такого типа, породивших немало статей в различных физических журналах (число таких статей продолжает расти), будет рассказано в этой статье.

I. Видимая форма быстродвижущихся тел*

В 1892 г. Лоренцом было сформулировано неожиданное утверждение, позволявшее объяснить результат опыта Майкельсона. Лоренц предположил, что все тела, движущиеся относительно мирового эфира, который рассматривался как некая среда, испытывают сокращение в направлении движения. Аналогичное высказывание принадлежит и Фитцджеральду, так что в литературе часто

* Всюду речь идет об относительном движении с релятивистскими скоростями, т. е. со скоростями порядка скорости света в пустоте. Все рассматриваемые системы отсчета — инерциальные.

пишут о лоренц-фитцджеральдовском сокращении (см., однако, [1]).

После того как была сформулирована специальная теория относительности, сокращение длины масштаба в направлении его движения стало прямым следствием постулатов Эйнштейна, в частности, оно является элементарным следствием преобразования Лоренца. Сокращение должно обнаруживаться, когда измеряется длина масштаба, движущегося относительно наблюдателя, производящего измерение длины этого масштаба.

В первой работе Эйнштейна ([2], стр. 18) написано в связи с этим следующее:

«тело, которое в состоянии покоя имеет форму шара, в движущемся состоянии — при наблюдении из покоящейся системы — принимает форму эллипсоида, с полуосями $R\sqrt{1-\beta^2}$, R, R». Очевидно, Эйнштейн имеет в виду лоренцово сокращение в направлении движения и неизменность поперечных размеров. Шесть лет спустя в полемике с Варичаком Эйнштейн отвечает сразу на два вопроса (см. [2], стр. 187).

1. «Вопрос о том, реально лоренцово сокращение или нет, не имеет смысла. Сокращение не является реальным, поскольку оно не существует для наблюдателя, движущегося вместе с телом; однако оно реально, так как оно может быть принципиально доказано физическими средствами для наблюдателя, не движущегося вместе с телом».

2. «Мы получаем в системе отсчета K форму тела, движущегося относительно этой системы, определяя точки в системе K, с которыми в определенное время t совпадают материальные точки движущегося тела. Поскольку используемое при этом понятие одновременности определено так, что на основании этого определения принципиально возможна констатация одновременности экспериментальным путем, то и лоренцово сокращение принципиально наблюдаемо».

Этим принципиальная сторона вопроса исчерпана. Возвращаясь же к вопросу об измерении лоренцова сокращения стержня, следует сказать, что если проводить измерение длины согласно правилам теории, т. е. отмечать координаты обоих концов движущегося стержня *одновременно* в системе, относительно которой измеряется длина (для этого нужны два прибора, находящихся в двух

точках системы отсчета), то ожидаемый результат опыта (сокращение) не вызывает сомнений.

Но вот спустя пятьдесят лет после создания теории относительности возник несколько иной вопрос: можно ли, фотографируя быстродвижущееся тело или визуально наблюдая его, обнаружить лоренцово сокращение. До сих пор речь шла лишь о мысленных опытах. Однако в самое последнее время появились фотографии релятивистски движущихся объектов [3].

Отвлекаясь от физиологии зрения, можно не разделять визуальное наблюдение от фотографирования. Поставленный выше вопрос, конечно, не затрагивает основ теории, но на него полезно иметь ясный и недвусмысленный ответ, потому что фотография, на которой можно было бы качественно и количественно показать лоренцово сокращение, была бы прямым доказательством реальности сокращения (в смысле, о котором говорил Эйнштейн, стр. 238). Однако ответ на поставленный вопрос оказался не столь простым, тогда как прямое доказательство сокращения временны́х интервалов между событиями известно уже давно: возрастание времени жизни нестабильных частиц (например, π- и μ-мезонов) в системе, относительно которой они находятся в движении, установлено опытным путем.

Слово «наблюдение» в цитированной выше статье Эйнштейна могло быть интерпретировано как визуальное наблюдение или, быть может, фотографирование. Такая интерпретация, по-видимому, и привела к единодушному убеждению, что, наблюдая (фотографируя) движущуюся сферу, мы обнаружим на фотографии эллипсоид. Довольно долго упускалось из вида то обстоятельство, что определение формы размеров тела как одновременного положения всех точек его поверхности и полученное на фотографии изображение тела — это, вообще говоря, вовсе не одно и то же. Здесь следует отметить два обстоятельства. Допустим, что мы фотографируем с бесконечно малой выдержкой. Тогда на пластинку попадут лучи, одновременно пришедшие к объективу. Но если различные точки тела будут находиться на разном расстоянии от объектива, лучам, идущим от этих точек, — из-за конечности скорости распространения света, — нужно разное время, чтобы дойти до объектива. Следовательно, если тело непрерывно светится, то на пластинке одновременно окажутся лучи, испущенные разными точками тела в различные моменты времени. Для неподвижного относительно фотоаппарата тела это обстоятельство на полученном изображении не скажется. В случае движущегося тела получаемое изображение будет отличаться от изображения, полученного при фотографировании неподвижного тела. Этот эффект обусловлен просто конечностью скорости распространения света и не имеет отношения к собственно релятивистским эффектам. Это — первое обстоятельство. Второе же состоит в том, что когда говорят о видимой форме объекта, обычно имеют в виду изображение, получаемое на плоскости фотопластинки или (с некоторыми оговорками) на сетчатке глаза. Но такое изображение представляет собой проекцию тела на плоскость. Если вернуться к вопросу о фотографировании тела, лоренцово сокращение которого хотят обнаружить, то требуется уловить это сокращение на двумерной проекции тела. Упомянутые обстоятельства показывают источники неоднозначного истолкования полученного изображения на фотографии. Прежде всего ясно, что по одному снимку без дополнительной информации вообще невозможно что-либо определить. Например, имея одну фотографию движущегося на однородном фоне стержня (одномерного тела), ничего сказать о его длине нельзя, а по одной фотографии трехмерного объемного тела невозможно воспроизвести его форму. Следует подчеркнуть, что и второе обстоятельство не связано с «релятивистскими эффектами», однако на них было обращено внимание в связи с обсуждением вопроса о том, как выглядит быстродвижущееся тело, причем наибольший интерес привлекал вопрос о том, как влияет лоренцово сокращение на видимую форму.

Дискуссия началась с опубликованной в 1959 г. статьи Пенроуза [5] «Видимая форма релятивистски движущегося тела». Работа Пенроуза была отнюдь не тривиальной; в ней впервые рассмотрены конформные свойства преобразования Лоренца. В этой работе, в частности, показано, что движущаяся сфера по своей двумерной проекции на фотографии, а точнее — по форме контура, не будет отличаться от неподвижной. В том же 1959 г. С. М. Рытов, независимо, в докладе, прочитанном в Институте физических проблем, обратил внимание на весь этот круг вопросов [4]. Ясное физическое объяснение этого результата вытекает из известной работы Терелла [6]. Терелл решает вопрос вполне радикально, о чем свидетельствует название его статьи «Невидимость лоренцова сокращения». Именно после этих работ и возник вопрос о том, можно ли вообще каким-либо способом увидеть или сфотографировать изменение размеров тела вследствие лоренцова сокращения *. Во избежание недоразумений, повторим, что физиология зрения делает фотографирование объекта и его визуальное наблюдение существенно различными процедурами. Говоря о визуальном наблюдении, мы будем иметь в виду глаз, наделенный идеальными свойствами, близкими к свойствам фотопластинки.

Поясним результат Терелла. Если наблюдается движущееся тело со светящейся поверхностью, фотопластинка при бесконечно малой выдержке фиксирует одновременно приходящие к ней сигналы (фотоны), испущенные различными точками поверхности тела. Так как разные точки поверхности тела, вообще говоря, отстоят на различном расстоянии от фотопластинки, то пластинка фиксирует их положение в разные моменты времени. То, что пластинка фиксирует или наблюдатель «видит» в данный момент времени разные участки поверхности движущегося тела в тех положениях, которые они занимали в разное время, приводит к любопытному результату, который можно иллюстрировать простым примером.

Допустим, что светящийся куб, движущийся вдоль прямой, параллельной одной из его граней, пролетает мимо фотоаппарата или наблюдателя. Фотографирование или наблюдение производится в тот момент, когда центр куба попадает на нормаль, опущенную из точки, где находится фотоаппарат, на направление движения. Конечно, мы заранее должны знать, что движущееся тело имеет форму куба в собственной системе отсчета.

В определенный момент времени к пластинке придут все фотоны, испущенные одновременно в системе пластинки на линии AD, и фотоны, испущенные точкой B раньше на интервал времени l/c (l — длина ребра куба). Но в этот момент времени точка B находилась в положении B'. Одновременное определение положений точек A и D в системе пластинки ведет, согласно обычному правилу

* Советские читатели знакомы с изложением результатов Терелла по статье В. Вайскопфа [7] «Видимая форма быстродвижущихся тел», перевод которой был опубликован в УФН, 84, 183, сентябрь 1964.

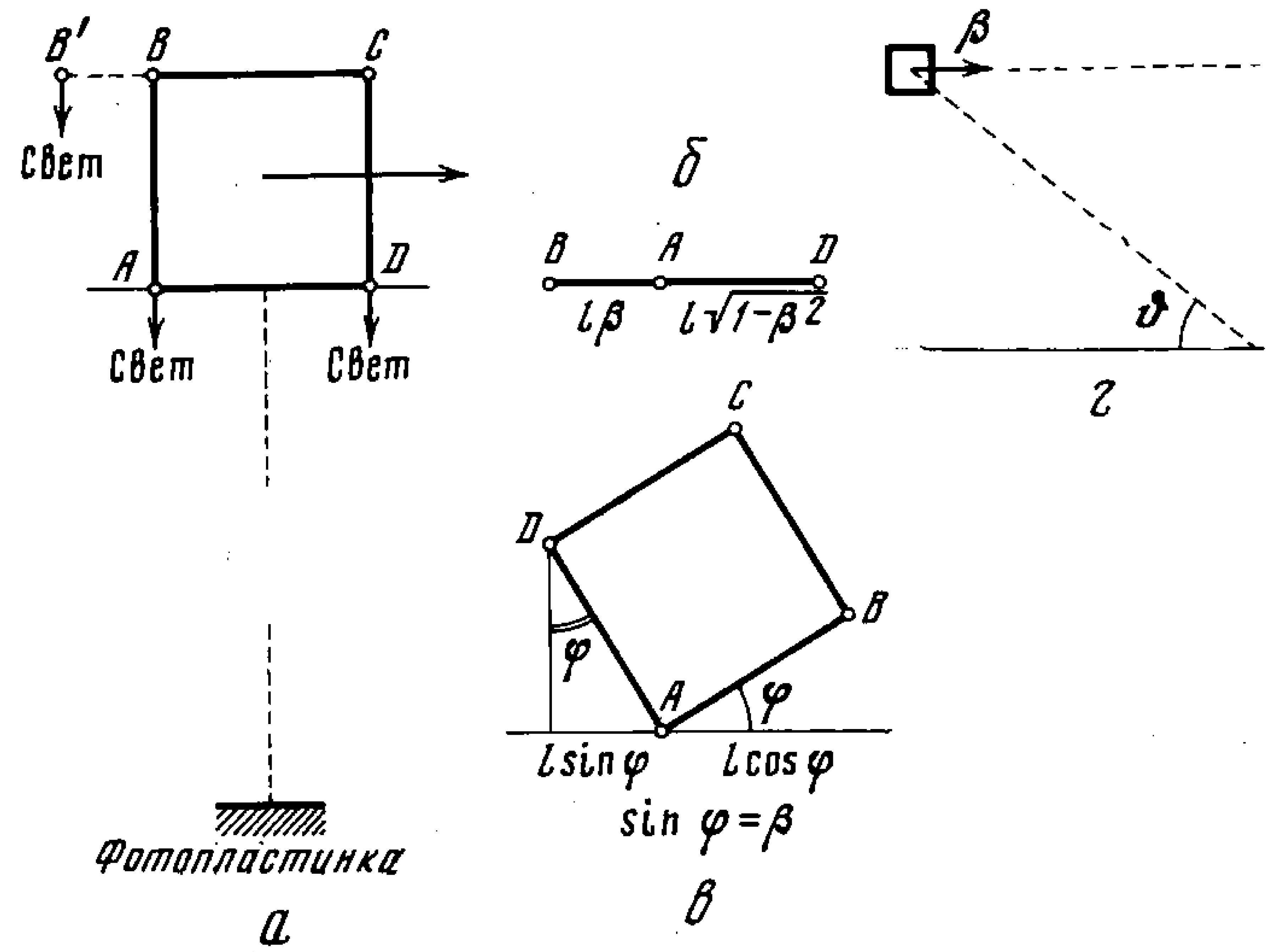

Рис. 1. Визуальное наблюдение куба, пролетающего мимо наблюдателя

а — взаимное расположение наблюдателя и куба при $\vartheta = 0$; *б* — видимая картина летящего куба; *в* — возможная интерпретация видимой картины одним наблюдателем: поворот куба на угол $\varphi = \arcsin \beta$; *г* — наблюдение летящего куба под углом ϑ

измерения длины, к лоренцову сокращению: $l' = l\sqrt{1-\beta^2}$. С другой стороны, $BB' = (l/c)\,v = \beta l$. Из рис. 1,*в* можно понять, что картина, которую увидел бы неподвижный наблюдатель (идеализированный) при наблюдении движущегося куба, совпадает с той, когда рассматривается неподвижный, но повернутый на угол φ куб. Угол определяется соотношением $\sin \varphi = \beta$. Это — частный случай более общего результата Терелла: всякое трехмерное движущееся тело видно в данный момент повернутым. Угол поворота для расположения, приведенного на рис. 1, определяется из равенства $\varphi = \arcsin \beta$. Если же куб находится относительно наблюдателя так, что он в состоянии покоя был бы виден под углом ϑ' относительно оси x', то угол поворота будет другой. Если куб достаточно удален от наблюдателя, то идущий от него свет можно принять за параллельный пучок. Когда этот пучок наблюдается в системе K, то для наблюдателя в K он распространяется под углом ϑ к оси x, причем

углы ϑ и ϑ' связаны соотношением

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' + \beta}{1 + \beta \cos \vartheta'}\,.$$

Изменение направления фронта плоской волны при переходе от одной системы отсчета к другой (находящихся в относительном движении) — это аберрация света. Что касается изображения, получаемого на пластинке (или идеализированного видимого изображения), то оно соответствует кубу, рассматриваемому в K под углом ϑ, повернутому на угол $\vartheta - \vartheta'$. Теперь уже нетрудно понять результат Пенроуза — поворот сферы не меняет формы ее контура. Центральным пунктом в рассмотрении Терелла является то, что фактически он впервые рассмотрел видимую форму трехмерного тела.

Таким образом, сочетание «сокращения» с конечностью скорости света может привести к кажущемуся повороту. Поэтому возник вопрос о том, можно ли вообще отличить сокращение от поворота по видимой картине [8]. Такая постановка вопроса просто некорректна. Реконструкция трехмерного тела по плоской фотографии требует дополнительной информации, и это обстоятельство не имеет никакого отношения к лоренцову сокращению.

В примере с кубом ясно, что, зная, как движется куб, всегда можно установить «прямым наблюдением» или фотографированием, что происходит именно сокращение, а не поворот. Для этого нужно просто иметь двух наблюдателей или две фотографии, сделанные с двух мест, находящихся на нормалях к двум перпендикулярным граням куба (параллельным движению). Если изменение формы куба на фотографиях интерпретировать как поворот, то обнаружатся две различные оси вращения куба. Но оба наблюдателя без противоречий истолкуют полученную картину как сокращение размеров в направлении движения.

И все же, можно ли сфотографировать тело, испытавшее лоренцово сокращение? Как мы убедились, наблюдение движущихся трехмерных тел ставит определенные трудности при интерпретации полученной фотографии. Но лоренцово сокращение может быть обнаружено при наблюдении одномерного объекта, и этим можно воспользоваться. Сокращение станет наглядным и очевидным при сравнении длины движущегося одномерного стержня с его собственной длиной. В уже упоминавшемся рассуждении Эйнштейна со сферой роль эталона сравнения играл диаметр сферы, перпендикулярный направлению движения. Было бы очень убедительно сфотографировать летящий стержень на фоне его собственной длины, отложенной в системе наблюдателя.

Для этого наблюдатель в K (стержень покоится в K') должен знать заранее, что стержень движется вдоль заданного направления и собственную длину стержня. Тогда у себя в системе K он строит двойник движущегося стержня и фотографирует движущийся стержень на фоне его собственной длины. Прежде чем обсуждать, как это можно — хотя бы мысленно — осуществить, заметим, что мы используем еще одно предположение.

Нельзя взять два одинаковых эталона, выверенных в одной системе, и передать один из них в движущуюся систему отсчета, потому что всегда может возникнуть вопрос об изменении длины эталона при его ускорении. Однако тождественные эталоны в системах, находящихся в относительном движении, можно получать и без переброски эталонов. Следует лишь воспользоваться квантовыми идеями о тождественности микрочастиц. Мы считаем, что длина волны, излучаемая атомами данного сорта, скажем, атомами кадмия, в любой системе, где они покоятся, или точнее, где они движутся с нерелятивистскими скоростями, всегда одна и та же. Это означает, что в любой инерциальной системе могут быть выбраны тождественные длины в качестве эталонов. Это же относится, разумеется, и к эталонам времени. Таким образом, при желании можно обеспечить все инерциальные системы стержнями строго одинаковой собственной длины.

Простейшая схема для фотографирования стержня, испытавшего лоренцово сокращение, могла бы быть такой (рис. 2). Стержень параллелен оси x и движется вдоль этой оси. Наблюдатель находится на нормали к оси x, причем эта нормаль проходит через середину двойника стержня, покоящегося в системе K. Когда середина движущегося самосветящегося стержня оказывается на нормали, срабатывает механизм, открывающий затвор фотоаппарата в момент, совпадающий с приходом к нему света, испущенного стержнем. Сфотографировать неподвижный двойник можно, конечно, когда угодно.

Более подробное рассмотрение этого вопроса проведено в работе [9]. Там показано, в частности, что можно сфотографировать, скажем, метровый стержень, движущийся с релятивистской скоростью, вмещающимся в спичечную коробку, если фотоаппарат покоится в системе коробки K. В этой же работе рассмотрен интересный (если не забывать о равноправии систем) вопрос о том, что обнаружится на фотографии, сделанной в той же самой точке и в тот же самый момент, где находился фотоаппарат из K, фотоаппаратом из системы стержня K'. Оказывается, что на этой фотографии стержень уже не вмещается в коробку. Это связано с искажением длин из-за косой перспективы. Тем не менее во всякой системе отсчета найдется одна точка, фотография из которой в подходящий момент покажет, что стержень целиком умещается в коробке.

Видимой форме движущегося тела с разнообразными возможностями относительного расположения тел и объектива фотоаппарата, характера освещения тела посвящена обширная литература. Последняя обзорная статья «Видимая форма быстро движущихся объектов согласно теории относительности» принадлежит Мак-Гиллу [10] (там же приведен довольно подробный список литературы). В этой статье, кроме подробного рассмотрения вопроса об измерении и фотографировании движущегося стержня, описаны аналитические способы построения видимой поверхности движущихся тел, проанализированы возможности стереоскопического фотографирования и фотографирования при освещении объекта мгновенной вспышкой.

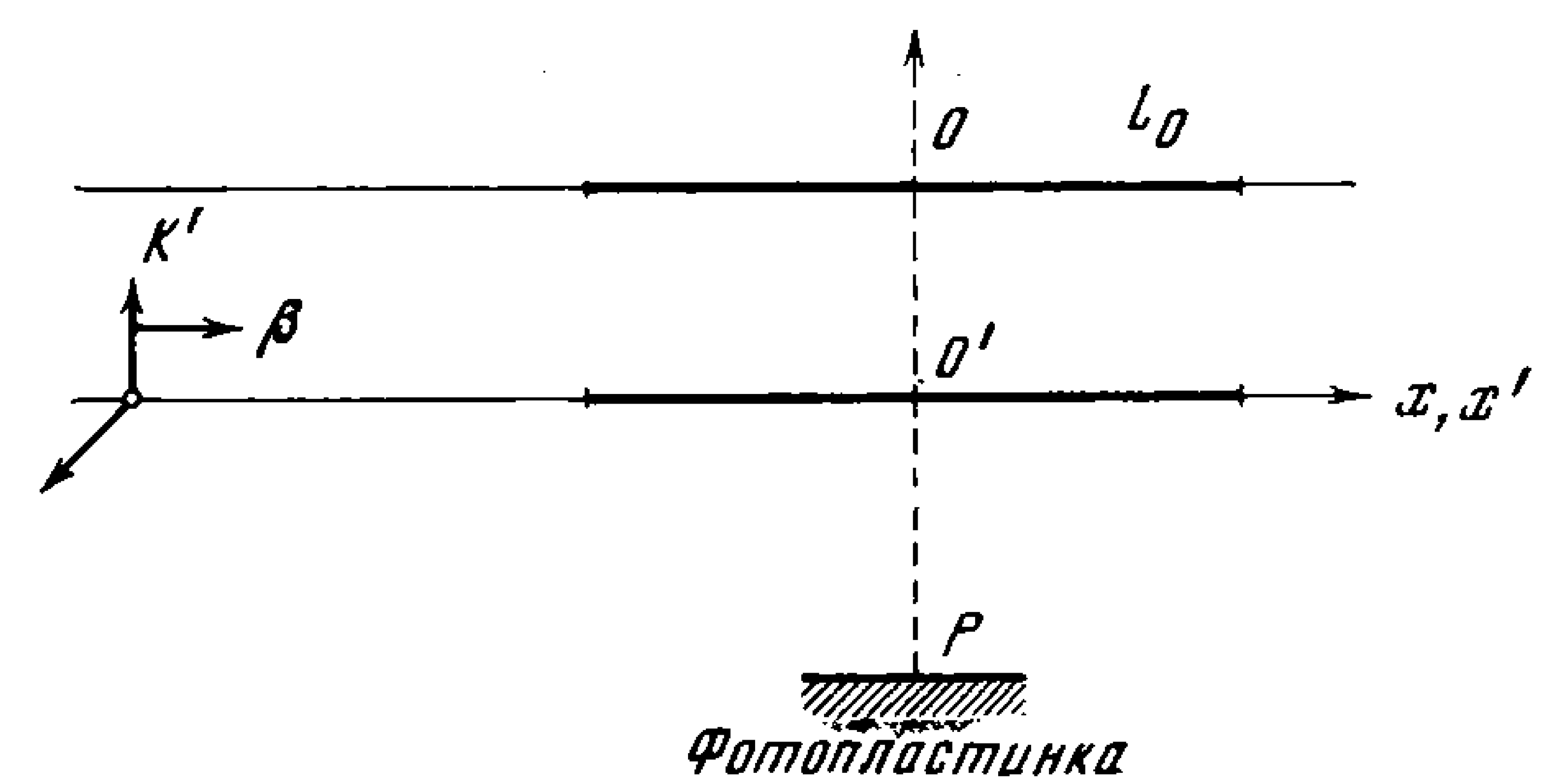

Рис. 2. Принципиальная схема, позволяющая сфотографировать лоренцово сокращение движущегося стержня. Когда середина стержня O' оказывается на линии PO, срабатывает устройство, открывающее (на мгновение) затвор в P, так, чтобы он пропустил лучи, испущенные точками стержня в момент пересечения точкой O' линии PO

Из последних статей, посвященных форме движущихся тел, укажем на работу [11], в которой рассматривается видимая форма движущейся вертикальной прямой, когда наблюдение ведется на нормали к прямой. Видимая картина получается как геометрическое место точек, свет от которых одновременно доходит до точки наблюдения. Эта картина меняется по мере перемещения прямой. В работе [12] тем же самым методом с использованием счетных машин были рассмотрены видимые картины для следующих случаев: а) для небесной сферы с некоторыми созвездиями; б) для сферы, на которой нанесены параллели и меридианы, если ее центр проходит от наблюдателя на расстоянии, равном диаметру сферы; в) движение ряда кубиков.

Конечная скорость распространения света при наблюдении небесных объектов может приводить к тому, что видимая скорость движения космических объектов, например оболочки после взрыва небесного тела, может оказаться больше, чем скорость света [13].

Итак, определение истинной формы движущегося предмета требует, кроме фотоснимка, еще и дополнительной информации для однозначностей интерпретации, безотносительно к релятивистским эффектам. Заметим, однако, что наблюдатель, обладающий способностью рассуждать физически, все равно не может согласиться с тем, что движущийся объект поворачивается *. Из рис. 1, *г* следует, что угловая скорость вращения куба, $d\vartheta/dt$, а следовательно $d\vartheta'/dt'$, меняется со временем, и к тому же неравномерно. Но если объект поворачивается, и к тому же еще с переменной угловой скоростью, на него должен действовать переменный момент сил — рассуждал бы неподвижный наблюдатель. Но откуда могут взяться силы, действующие на свободно движущееся тело, если все рассмотрение проводится в инерциальной системе отсчета **? Поэтому наблюдатель должен был бы признать, что объяснение видимой формы тела поворотом просто порочно. Следовательно, постановка вопроса «сокращение или поворот» является скорее логической ловушкой, чем физическим вопросом.

Существенно, что пример, рассмотренный Пенроузом, свободен от указанной трудности — вращение однородной сферы ненаблюдаемо. Если пометить сферу, нарисовав на ней, например, параллели и меридианы, то наблюдатель сразу же убедится, что никакого вращения нет [9]. Поэтому, выдвигая парадоксы и разбирая их, не следует лишать наблюдателя разума.

Вместе с тем вопрос о вращении движущегося тела и об уравнении, описывающем такое вращение, совсем уж не так прост. Известно уравнение Эйлера в системе, где центр инерции тела покоится. Можно написать уравнения Эйлера, если тело движется с нерелятивистской скоростью. Однако распространение тех же самых рассуждений на релятивистские скорости ведет к новым парадоксам, один из которых будет изложен ниже.

II. Преобразование сил и моментов сил, действующих на тела, находящиеся в равновесии, при переходе от одной системы отсчета к другой

Хотя закон преобразования вектора трехмерной силы непосредственно вытекает из определения четырехмерной силы Минковского, этот закон недавно оказался предметом дискуссии [14—17]. Дискуссия возникла в связи со следующим примером. Пусть в системе K^0 (собственная система задачи) покоится прямоугольная плоская рамка $ABCD$, по диагонали AC которой натянута упругая нить, с двух сторон растягивающая шарик, масса покоя которого равна m (рис. 3, *а*). В системе K^0 направление нити определяется из треугольника ABC; если ввести обозначения $AB = a_0$, а $BC = b_0$, то $\mathrm{tg}\,\alpha_0 = b_0/a_0$. В системе K^0 упругие силы направлены вдоль нити, поэтому можно написать еще, что

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{F^0_{1x}}{F^0_{1y}}, \qquad (1)$$

где через $\boldsymbol{F}_1$ обозначена сила, направленная к вершине C; такие же соотношения имеют место и для $\boldsymbol{F}_2$.

* Довольно странно, что мы не обнаружили никаких упоминаний в литературе по этому поводу.

** Отметим, однако, что само понятие «момент сил» не ковариантно с релятивистской точки зрения. Поэтому появление момента в K при отсутствии его в K', строго говоря, ничему не противоречит.

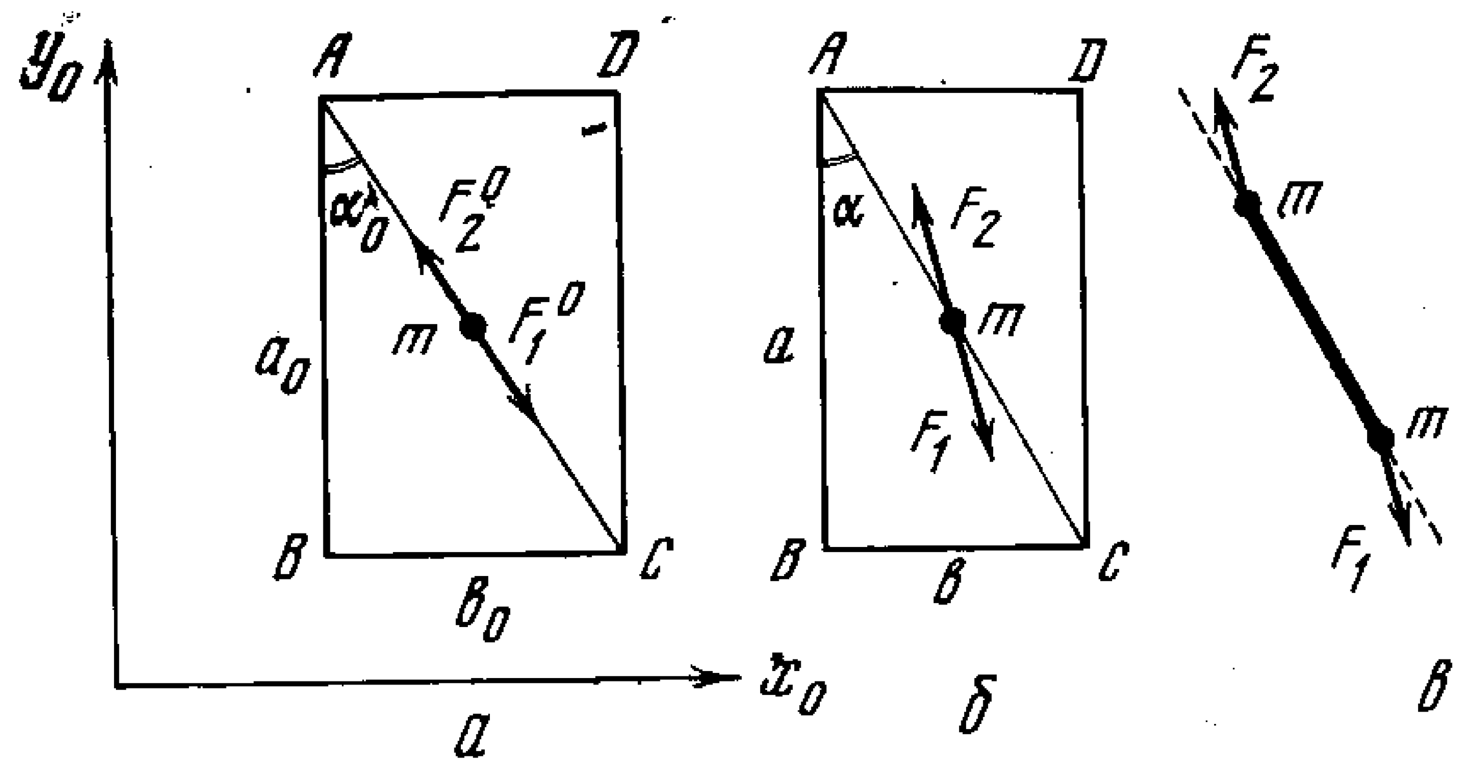

Рис. 3. Прямоугольная рамка, по диагонали которой натянуты упругие нити, растягивающие шарик m

а — картина в «собственной системе отсчета» K^0; *б* — как выглядит та же картина с точки зрения системы K; *в* — если вместо шарика взять гантель, то на нее, с точки зрения K, действует пара сил

Перейдем теперь к системе K, относительно которой система K^0 движется со скоростью V. Мы принимаем, как обычно, что оси x^0 и x совпадают, а оси y^0, y; z^0, z соответственно параллельны. Согласно формулам преобразования длин и сил, получим, если воспользоваться обозначением* $\mathrm{B} = V/c$:

$$a = a_0, \qquad b = b_0\sqrt{1-\mathrm{B}^2}. \tag{2}$$

$$F_{1x} = F_{1x}^0, \qquad F_{1y} = F_{1y}^0\sqrt{1-\mathrm{B}^2}. \tag{3}$$

Отсюда видно, что равенство (1) уже несправедливо; в системе K угол, определяющий направление нити, и угол, определяющий направление сил, вовсе не равны друг другу:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{b}{a} = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{1-\mathrm{B}^2} = \frac{1}{\Gamma}\frac{b_0}{a_0} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\Gamma}, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}\alpha'' = \frac{F_{1x}}{F_{1y}} = \frac{F_{1x}^0}{F_{1y}^0}\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{B}^2}} = \Gamma\,\frac{F_{1x}^0}{E_{1y}^0} = \Gamma\operatorname{tg}\alpha_0. \tag{5}$$

Хотя сумма сил по-прежнему остается равной нулю, однако силы в системе K направлены под углом к нити (см. рис. 3, *б*). Это обстоятельство кажется на первый

* Мы обозначим через V (и соответственно $\mathrm{B} = V/c$) относительную скорость инерциальных систем, а через v (и соответственно $\beta = v/c$) скорость тела.

взгляд удивительным. Действительно, что произойдет, например, если перерезать шнур на участке 2? В системе K^0 ускорение в начальный момент должно быть параллельно направлению силы (это явно нерелятивистский случай, и обычный закон Ньютона вполне применим), т. е. оно направлено вдоль нити. В системе K, казалось бы, ускорение должно быть направлено под углом к нити, так как направление нити и направление силы $\boldsymbol{F}_1$ не совпадают. В связи с этим примером предлагалось даже [14] отказаться от правила преобразования сил (3). Однако парадокс разрешается просто: в релятивистской динамике ускорение, вообще говоря, не совпадает по направлению с действующей силой, и хотя сила направлена под углом к направлению нити, ускорение направлено вдоль нити. Сам парадокс представляет собой полезную иллюстрацию особенностей релятивистского уравнения динамики.

Убедимся, что в обеих системах ускорение шарика направлено вдоль нити. Удобно записать релятивистское уравнение движения в виде [18]

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\left\{\boldsymbol{F} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\right)\right\};$$

здесь m — масса покоя, $\boldsymbol{F}$ — действующая на шарик трехмерная обычная сила, $\boldsymbol{v}$ — скорость тела, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, где $\beta = v/c$.

В системе K^0 в момент $t = 0$, когда обрезают нить 2, имеем:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}_x^0}{dt} = \boldsymbol{F}_1^0$$

или в проекциях

$$m\frac{dv_x^0}{dt} = F_{1x}^0, \qquad m\frac{dv_y^0}{dt} = F_{1y}^0.$$

Направление движения в начальный момент (делим почленно первое соотношение на второе) определяется соотношением

$$\frac{dv_x^0}{dv_y^0} = \frac{F_{1x}^0}{F_{1y}^0} = \operatorname{tg}\alpha_0.$$

Согласно (1), это направление — направление ускорения — совпадает с направлением нити, как это и должно быть. Итак, в K^0 силы и ускорение параллельны, и движение в начальный момент направлено вдоль нити.

Теперь перейдем к системе K. В этой системе тело уже движется со скоростью, совпадающей со скоростью системы отсчета K^0, т. е. V. Поэтому $\gamma = \Gamma$, и проекции ускорения здесь запишутся уже так:

$$m\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\Gamma}\left\{F_{1x} - \frac{V}{c^2}(F_{1x}V)\right\} = F_{1x}\frac{1}{\Gamma^3}, \qquad (6)$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{\Gamma}F_{1y}. \qquad (7)$$

Здесь учтено, что скорость шарика совпадает со скоростью системы K, т. е. равна V и имеет компоненты $(V, 0, 0)$. F_{1x} и F_{1y} — это компоненты силы в системе K*. Чтобы найти направление ускорения в K, разделим почленно (6) на (7):

$$\frac{dv_x}{dv_y} = \frac{F_{1x}}{F_{1y}}\frac{1}{\Gamma^2} = \Gamma \operatorname{tg}\alpha_0 \frac{1}{\Gamma^2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\Gamma} = \operatorname{tg}\alpha', \qquad (8)$$

где мы воспользовались в третьем звене цепи равенств соотношением (5), а в последнем — соотношением (4). Но из (8) видно, что ускорение в K в начальный момент тоже направлено вдоль нитей, и никакого парадокса не возникает.

Однако представим себе, что вместо шарика, который подразумевается точечным, нити растягивали бы твердое тело, например, гантель. Тогда в системе K на шарики гантели действовала бы пара сил (см. рис. 3, *в*), и гантель повернулась бы относительно диагонали рамки **.

Но в собственной системе очевидно, что ось гантели совпадает с диагональю рамки. Здесь мы, конечно, сталкиваемся с парадоксом. И мы знаем, что парадокс возникает потому, что мы пытались описать с точки зрения системы K явление, о котором точно известно, как оно происходит в собственной системе K^0. Ясно, что ошибка скрыта в наших рассуждениях относительно системы K. Этот парадокс представляет собой вариант хорошо известного парадокса рычага [19]. Напомним вкратце этот парадокс. Пусть в K^0 покоится коленчатый рычаг, изготовленный из двух жестких стержней, скрепленных в точке O, которая служит осью вращения рычага. Стержни перпендикулярны друг другу (рис. 4).

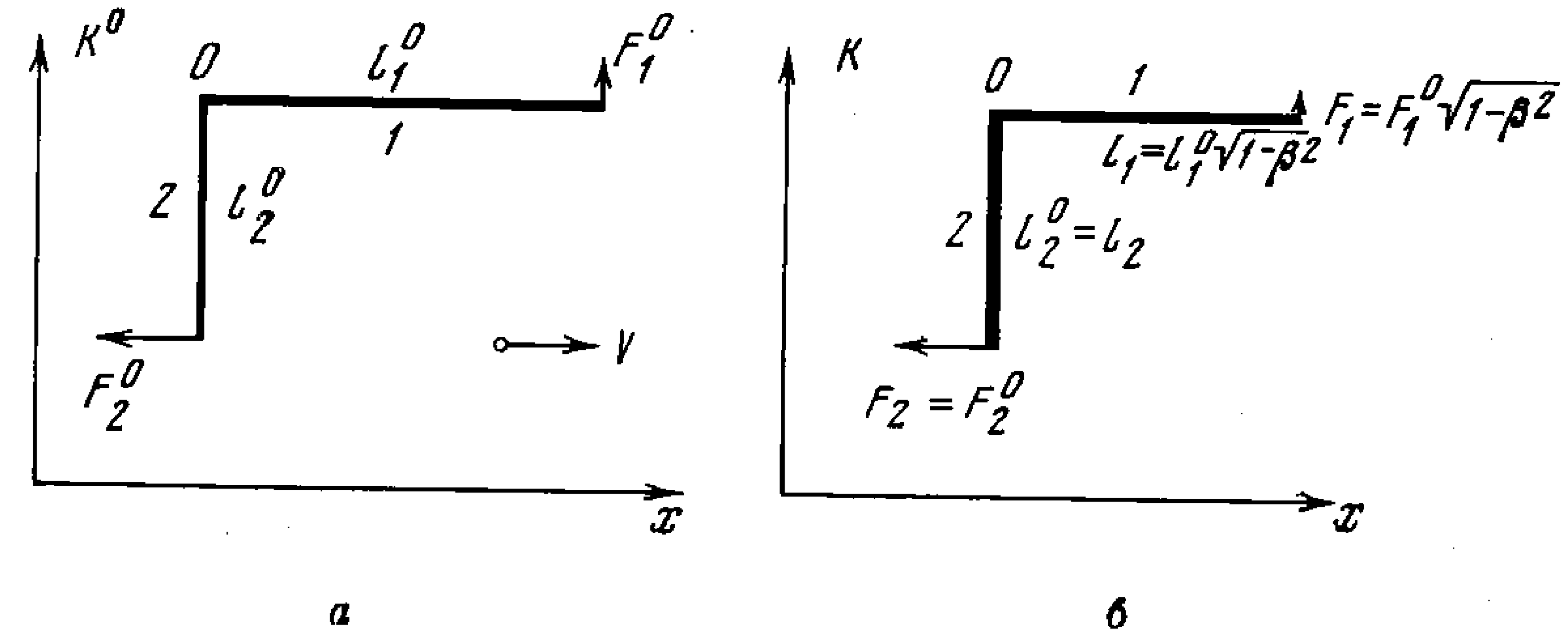

Рис. 4. Парадокс рычага

а — в системе K^0, где $F_2^0 l_2^0 = F_1^0 l_1^0$, рычаг находится в равновесии; *б* — этот же рычаг, если рассматривать его с точки зрения системы K^0: моменты сил, действующих на плечи рычага 1 и 2, явно не равны

К концу первого стержня приложена сила F_1^0 (длина стержня l_1^0), к концу второго — с длиной l_2^0 — сила F_2^0. По условию рычаг находится в равновесии, что означает равенство моментов сил в K^0:

$$F_1^0 l_1^0 = F_2^0 l_2^0.$$

Если эту же систему рассматривать в системе K и определять момент сил как произведение силы на плечо, мы приходим к парадоксальному результату. Длины сокращаются только в направлении движения, так что $l_1 = l_1^0\sqrt{1-\mathrm{B}^2}$, а силы преобразуются только в направлении, перпендикулярном движению: $F_1 = F_1^0\sqrt{1-\mathrm{B}^2}$, но $l_2 = l_2^0$, а $F_2 = F_2^0$. По отдельности эти формулы преобразования длин и сил сомнений не вызывают. Но суммарный момент сил в системе K уже не равен нулю:

$$F_1 l_1 - F_2 l_2 = F_1^0 l_1^0(1-\mathrm{B}^2) - F_2^0 l_2^0 = -\mathrm{B}^2 F_1^0 l_1^0 = -\mathrm{B}^2 F_2^0 l_2^0.$$

* Нетрудно заметить, что соотношения (6) и (7) соответствуют двум исключительным случаям релятивистского уравнения, когда сила и ускорение параллельны, а соответствующие массы в этом случае называли раньше «поперечной» и «продольной». От этих, в общем неудачных, терминов сейчас практически отказались, хотя они неплохо передают тензорный характер связи между силой и ускорением в релятивистской механике.

** Конечно, нельзя говорить о том, что гантель повернулась в одной системе и осталась в покое в другой. Действительно, поставим около гантели стакан с водой. Если при повороте гантели стакан с водой разобьется, то этот факт не может быть относительным.

Парадокс состоит в том, что хотя заведомо известно, что рычаг неподвижен, с точки зрения системы K на рычаг действует момент сил и, следовательно, рычаг должен поворачиваться.

Лауэ [19,20] разрешал этот парадокс весьма остроумным способом. Рычаг движется в системе K со скоростью V, поэтому сила F_2 совершает в единицу времени работу F_2V. Таким образом, в конец рычага 2 «втекает» энергия — F_2V, увеличивающая в единицу времени массу на конце рычага Δm, так что $\Delta m = F_2V/c^2$. Приращение импульса на конце рычага в единицу времени $\Delta p = \Delta mV = F_2B^2$, а следовательно, изменение момента импульса в единицу времени равно $F_2B^2l_2^0 = F_2^0B^2l_2^0$. Приращение момента импульса в K точно компенсируется моментом силы, и вращение не возникает.

Возникновение парадокса в действительности связано с тем, что момент сил нельзя преобразовывать путем независимого преобразования плеч и сил. Момент сил представляет собой трехмерное векторное произведение, а его четырехмерное обобщение не может быть проведено однозначно. Особенностью задачи о рычаге является то, что суммарный момент определяется двумя силами, приложенными в разных пространственных точках. Релятивистская механика всегда сталкивается с трудностями, когда переходит к описанию системы, состоящей из многих тел.

В таких системах вычисления следует всегда проводить в случае статических задач в системе покоя среды (для нашего примера — в системе, где рычаг покоится). Переход же в систему отсчета, относительно которой среда движется, требует уже преобразования величин, используемых в теории упругости, и мы фактически оказываемся в области неопределенности и произвола. Впрочем, попытка произвести такие преобразования для элементарного случая содержится в [17].

Обратим внимание еще на один результат. Допустим, что рычаг до момента $t = 0$ силы просто не действуют, а в момент $t = 0$ одновременно в K_0 «включаются» силы $\boldsymbol{F}_1^0$ и $\boldsymbol{F}_2^0$. В каждый момент времени в K_0 равновесие будет соблюдено. Но в K силы будут включены уже не одновременно, и будет промежуток времени, когда сила $\boldsymbol{F}_1$ уже действует, а сила $\boldsymbol{F}_2$ еще нет. Снова возникает момент силы. То, что здесь существенны именно силы, приложенные в разных точках тела (парадоксы возникают, разумеется, при рассмотрении твердых тел), видно из совсем простого примера. Пусть в K^0 на оси x^0 лежит твердое тело длиною l_0. До момента $t = 0$ на него силы не действуют, а в момент $t = 0$ с обеих сторон включаются равные, но противоположно направленные силы. В K^0 равновесие всегда есть, а в K есть промежуток времени, в котором силы не уравновешиваются, и, следовательно, тело «должно прийти в движение».

Литература

1. *А. Борк.* Физика перед возникновением СТО. УФН, **94**, 167 (1968), стр. 178.
2. *А. Эйнштейн.* К электродинамике движущихся тел. Собр. науч. трудов, т. I. М., «Наука» (1965).
3. *Дюге.* Свет, сфотографированный на лету. УФН, **108**, вып. 1 (1973). *В. А. Угаров.* «Наука и жизнь», № 6, 49 (1973).
4. *С. М. Рытов.* «Природа», № 4 (1960).
5. *R. Penrose.* Proc. Cambr. Phil. Society, **55**, 137 (1959).
6. *J. Terrell.* Phys. Rev., **116**, 1041 (1959).
7. *V. Weisskopf.* Phys. to Day, **13**, (9), 24 (1960).
8. *Э. Тейлор, Дж. Уилер.* Физика пространства —времени. «Мир», (1969), (1971), стр. 131.
9. *D. Long.* Am. J. Phys., **38**, 1181.
10. *Mc Gill.* Contemp. Phys., 9, 33 (1968).
11. *R. Bhandai.* Am. J. Phys., 38, 1200.
12. *G. Scott, H. van Driel.* Am. J. Phys., 38, 971; см. также предыдущую работу — там же, **33**, 534 (1965).
13. *В. Л. Гинзбург С. И. Сыроватский.* Развитие теории синхротронного излучения и его реабсорбции. Препринт № 94. ФИАН, 1969.
14. *L. Karlov.* Lettere al Nuovo Cimento, III, N 2, Serie prima, 8 Gennaio 1970.
15. *W. Rindler.* Lettere al Nuovo Cimento, III, N 24, Serie prima, 13 Giugno 1970.
16. *J. Ray.* Lettere al Nuovo Cimento, III, N 24, Serie prima, 13 Giugno 1970.
17. *K. Johns.* Lettere al Nuovo Cimento, IV, N 8, Serie prima, 22 Agosto, 1970.
18. *В. А. Угаров.* Специальная теория относительности. Физматгиз (1969), стр. 107.
19. *М. Лауэ.* Статьи и речи. «Наука» (1969), стр. 59.
20. *В. Пановский, М. Филиппс.* Классическая электродинамика. Физматгиз (1963), § 16, 5.