А. ЭЙНШТЕЙН[1]).

ИГРАЮТ ЛИ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ СУЩЕСТВЕННУЮ РОЛЬ В ПОСТРОЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ?

Ни ньютонова, ни релятивистская теории тяготения до сих пор не подвинули вперед вопрос о структуре материи. В противоположность этому ниже будут указаны соображения, позволяющие думать, что элементарные электрические образования, представляющие собой кирпичи атомов, удерживаются вместе благодаря силам тяготения.

§ 1. Недостатки современного воззрения.

Теоретики много потрудились над тем, чтобы придумать теорию, которая объяснила бы равновесие электричества, образующего электрон. В особенности Ми посвятил этому вопросу глубокие исследования. Его теория, находившая не раз одобрение среди специалистов, основывается в существенных чертах на том, что в энергетический тензор наряду с членами энергии максвелл-лоренцовой теории электромагнитного поля вводятся еще добавочные

[1]) Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissenschaften. 1919.

члены, которые зависят от компонент электродинамического потенциала и характеризуются тем, что они не особенно заметны в пустоте, но внутри электрических элементарных частиц обусловливают наличие сил, уравновешивающих электрические силы отталкивания. Как ни прекрасно с формальной точки зрения построение этой теории, проделанное Ми, Гильбертом и Вейлем, все же ее физические результаты до сих пор мало удовлетворительны. С одной стороны, разнообразие возможностей действовало подавляющим образом, а с другой стороны, до сих пор не удалось представить указанные добавочные члены в таком простом виде, чтобы решение могло казаться удовлетворительным.

Общая теория относительности до сих пор ничего не изменила в положении этого вопроса.

Если для начала отказаться от добавочного космологического члена, то уравнения поля имеют следующий вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}, \qquad (1)$$

где (R_{ik}) есть римановский тензор кривизны, над которым один раз произведена композиция, R — скаляр кривизны, образованный вторичной композицией, R_{ik} — энергетический тензор „материи“. При этом историческому развитию предмета соответствует допущение, что T_{ik} *не* зависят от производных от $g_{\mu\nu}$. Ибо эти величины являются, ведь, компонентами энергии в духе специальной теории относительности, в которой не встречаются переменные по величине $g_{\mu\nu}$. Второй член в левой части уравнения выбран так, чтобы расхождение левой части (1) тождественно обращалось в нуль, вследствие чего из (1) посредством образования расхождения получается уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{T}_i^{\sigma}}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2} g_i^{\sigma\tau} \mathbf{T}_{\sigma\tau} = 0, \tag{2}$$

которое в предельном случае специальной теории относительности переходит в формулу сохранения импульса и энергии

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

В этом и заключается физическое обоснование для второго члена левой части (1). Нельзя a priori утверждать, что указанный переход к пределу постоянных $g_{\mu\nu}$ может быть сделан разумным образом. В самом деле, если бы гравитационные поля принимали существенное участие в построении материальных частиц, то для них переход к постоянным $g_{\mu\nu}$ потерял бы всякий смысл; ибо при постоянных $g_{\mu\nu}$ не было бы материальных частиц. Поэтому, если мы желаем принять во внимание возможность участия тяготения в создании полей, из которых образованы корпускулы, мы не можем считать уравнение (1) безусловно правильным.

Подставив в (1) максвелл-лоренцовы энергетические компоненты электромагнитного поля $\varphi_{\mu\nu}$

$$T_{ik} = \frac{1}{4} g_{ik} \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha\beta} - \varphi_{i\alpha} \varphi_{k\beta} g^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

получим для (2) посредством образования расхождения после некоторого вычисления [1])

$$\varphi_{i\alpha} \mathbf{J}^{\alpha} = 0, \tag{4}$$

[1]) Ср. A. Einstein, Sitz.-Ber. Preuss. Akad. d. Wissen. 1916, стр. 187, 188.

где для сокращения положено

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\,\varphi_{\sigma\tau} g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mathbf{J}^{\alpha}. \tag{5}$$

При вычислении использована вторая система уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial \varphi_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{6}$$

Из (4) видно, что плотность тока ($\mathbf{J}^{\alpha}$) повсюду должна равняться нулю. Поэтому, как давно уже известно, нельзя на основании уравнения (1), ограничиваясь электромагнитными энергетическими компонентами теории Максвелла-Лоренца, создать теорию электрона. Следовательно, если придерживаться уравнения (1), то придется стать на путь теории Ми [1]).

Не только проблема материи, но и космологическая проблема заставляет сомневаться в уравнении (1). Как доказано мною в одной из прежних работ, общая теория относительности приводит к выводу, что мир пространственно замкнут. Но это представление привело к обобщению уравнения (1), причем пришлось ввести новую универсальную константу λ, которая находится в определенном отношении к общей массе мира (или к равновесной плотности материи). В этом заключается особенно веский дефект в стройности теории.

§ 2. Уравнения поля, не содержащие скалярных величин.

Изложенные трудности устраняются тем, что вместо уравнений (1) вводятся следующие уравнения поля

$$F_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}, \tag{1a}$$

[1]) Ср. O. Hilbert, Göttinger Nachr. 20 ноября 1915.

где T_{ik} означает энергетический тензор электромагнитного поля, выраженный формулой (3).

Формальное обоснование множителя $\left(-\frac{1}{4}\right)$ во втором члене этого равенства заключается в том, что благодаря ему скаляр левой части

$$g^{ik}\left(R_{ik}-\frac{1}{4}g_{ik}R\right)$$

тождественно обращается в нуль, как и скаляр правой части:

$$g^{ik}T_{ik}$$

согласно уравнению (3).

Если бы вместо (1а) считать основным уравнение (1), то мы получили бы условие $R=0$, которое независимо от электрического поля всюду имело бы место для $g_{\mu\nu}$. Ясно, что из системы уравнений [(1), (3)] вытекает система уравнений [(1а), (3)], но не наоборот.

Можно в первый момент усомниться в том, определяют ли уравнения (1а) и (6) все поле в целом в достаточной мере. В общей релятивистской теории для определения n зависимых переменных требуется $n-4$ независимых друг от друга дифференциальных уравнений, так как в решении их должны стоять 4 совершенно произвольные функции всех координат вследствие свободного выбора последних. Следовательно, для определения 16 зависимых переменных $g_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ требуется 12 независимых друг от друга уравнений. Действительно 9 из числа уравнений (1а) и 3 из уравнений (6) не зависят друг от друга.

Если образовать расхождение (1а) и принять

во внимание, что расхождение от $R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R$ равно нулю, то получим

$$\varphi_{\sigma\alpha}\mathbf{J}^{\alpha}+\frac{1}{4\varkappa}\frac{\partial R}{\partial x_{\sigma}}=0. \qquad (4а)$$

Отсюда видно сначала, что в четырехмерных областях, в которых плотность электричества равна нулю, скаляр кривизны R есть величина постоянная. Если допустить, что все эти части пространства связаны друг с другом, что, следовательно, плотность электричества отлична от нуля только в отдельных мировых нитях, то мы придем к выводу, что скаляр кривизны вне этих мировых нитей всюду имеет постоянное значение R_0. Но формула (4а) позволяет кроме того сделать еще одно важное заключение о свойствах R внутри области, в которой электрическая плотность не равна нулю. Если, согласно принятым воззрениям, рассматривать электричество как движущуюся плотность массы и положить

$$J^{\sigma}=\frac{\mathbf{J}^{\sigma}}{\sqrt{-g}}=\rho\frac{dx_{\sigma}}{ds}, \qquad (7)$$

то, произведя внутреннее умножение (4а) на J^{σ}, получим на основании антисимметричности $\varphi_{\mu\nu}$ соотношение

$$\frac{\partial R}{\partial x_{\sigma}}\frac{dx_{\sigma}}{\partial s}=0. \qquad (8)$$

Следовательно, на каждой мировой линии движения электричества скаляр кривизны есть величина постоянная. Уравнение (4а) может быть наглядно интерпретировано следующими словами: скаляр кривизны R играет роль отрицательного давления, которое вне электрических корпускул имеет постоянное значение R_0. Внутри каждой корпускулы существует отрицательное давление (положительное $R-R_0$), падение которого уравновешивает электродинамическую силу. Минимум давления, или, соответственно, максимум скаляра кривизны внутри корпускулы не изменяется с течением времени.

Напишем теперь уравнения поля (1a) в следующем виде:

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\frac{1}{4}g_{ik}R= \\ =-\varkappa\left(T_{ik}+\frac{1}{4\varkappa}g_{ik}\left[R-R_0\right]\right). \qquad (9)$$

С другой стороны, преобразуем прежние уравнения поля, включающие космологический член

$$R_{ik}-\lambda g_{ik}=-\varkappa\left(T_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}T\right).$$

Вычитая скалярное уравнение, помноженное на $\frac{1}{2}$, получим сначала

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+g_{ik}\lambda=-\varkappa T_{ik}.$$

Правая часть этого уравнения обращается в нуль, в тех областях, в которых имеются только электрическое поле и поле тяготения. Путем образования скаляра имеем для таких областей

$$-R+4\lambda=0.$$

В этих областях скаляр кривизны есть постоянная величина, поэтому можно заменить λ через $\frac{R_0}{4}$. Прежнее уравнение поля (1) мы можем написать в следующем виде

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\frac{1}{4}g_{ik}R_0=-\varkappa T_{ik}. \qquad (10)$$

Из сравнения (9) с (10) видно, что новые уравнения поля отличаются от прежних только тем, что в качестве тензора „тяготеющей массы“ стоит

$$T_{ik}+\frac{1}{4\varkappa}g_{ik}\left[R-R_0\right]$$

вместо T_{ik}, причем первое выражение зависит от скаляра кривизны. Новая формулировка имеет то большое преимущество перед прежней, что величина λ по отношению к основным уравнениям теории представляет собою постоянную интегрирования и не является более некоторой универсальной константой, присущей основному закону.

§ 3. К космологическому вопросу.

Последний результат заставляет уже предполагать, что на основе нашей новой формулировки можно будет рассматривать мир как пространственно замкнутый, не прибегая к дополнительной гипотезе. Как в предшествующей работе, так и теперь мы снова покажем, что при равномерном распределении материи сферический мир совместим с уравнениями.

Положим сначала

$$ds^2=-\sum\gamma_{ik}dx_i dx_k+dx_4^2\ (i,k=1,2,3). \qquad (11)$$

Если P_{ik} и соответственно P представляют собой тензор кривизны второго ранга и скаляр кривизны трехмерного пространства, то

$$R_{ik}=P_{ik}\ (i,k=1,2,3)$$
$$R_{i4}=R_{4i}=R_{44}=0$$
$$R=-P$$
$$-g=\gamma.$$

Таким образом для нашего случая получается

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = P_{ik} - \frac{1}{2} \gamma_{ik} P \; (i, k = 1, 2, 3)$$

$$R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R = \frac{1}{2} P.$$

Остальную часть рассуждения мы проведем двумя разными способами. Сначала мы будем основываться на уравнении (1a). В нем T_{ik} означает энергетический тензор электромагнитного поля, которое вызывается электрическими частицами, образующими материю. Для этого поля справедливо уравнение

$$\mathbf{T}_1^1 + \mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^3 + \mathbf{T}_4^4 = 0.$$

Отдельные $\mathbf{T}_i^k$ с изменением места быстро изменяются; но для нашей задачи мы вполне можем их заменить средними значениями. Поэтому мы должны выбрать

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{T}_1^1 = \mathbf{T}_2^2 = \mathbf{T}_3^3 = -\frac{1}{3} \mathbf{T}_4^4 = \text{const} \\ \mathbf{T}_i^k = 0 \text{ (при } i \neq k), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

следовательно,

$$T_{ik} = \frac{1}{3} \frac{\mathbf{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{ik}; \qquad T_{44} = \frac{\mathbf{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}.$$

Принимая во внимание сказанное выше, мы вместо (1a) получаем:

$$P_{ik} - \frac{1}{4} \gamma_{ik} P = -\frac{1}{3} \gamma_{ik} \frac{\varkappa \mathbf{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}. \qquad (13)$$

$$\frac{1}{4} P = -\frac{\varkappa \mathbf{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}. \qquad (14)$$

Скалярное уравнение к (13) совпадает с (14). Тот факт, что наши основные уравнения допускают сферический

мир, основывается на этом результате. В самом деле из (13) и (14) следует

$$P_{ik} + \frac{4}{3} \frac{\varkappa \mathbf{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{ik} = 0, \qquad (15)$$

а эта система, как известно [1]), имеет своим решением (трехмерный) сферический мир.

Но мы можем также построить наше рассуждение и на уравнениях (9). В правой части (9) стоят те члены, которые при феноменологическом способе рассуждения должны быть заменены энергетическим тензором материи; следовательно, они должны быть заменены через

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho, \end{matrix}$$

где ρ есть средняя плотность материи, находящейся, согласно допущению, в покое. Таким путем получаются уравнения:

$$P_{ik} - \frac{1}{2} \gamma_{ik} P - \frac{1}{4} \gamma_{ik} R_0 = 0, \qquad (16)$$

$$\frac{1}{2} P + \frac{1}{4} R_0 = -\varkappa\rho. \qquad (17)$$

Из скалярного уравнения (16) и из (17) получается

$$R_0 = -\frac{2}{3} P = 2\varkappa\rho, \qquad (18)$$

поэтому (16) можно переписать так:

$$P_{ik} - \varkappa\rho\gamma_{ik} = 0. \qquad (19)$$

---

[1]) Ср. H. W e y l, Raum, Zeit, Materie, § 33.

Это уравнение совпадает с (15), отличаясь от последнего только видом коэффициента. Приравнивая их друг другу, получаем

$$T_4{}^4 = \frac{3}{4}\,\rho\sqrt{\gamma}. \tag{20}$$

Это равенство утверждает, что три четверти энергии, образующей материю, приходится на электромагнитное поле и одна четверть — на поле тяготения.

§ 4. Заключительные замечания.

Изложенные выше рассуждения показывают, что можно теоретически построить материю исключительно из гравитационного и электромагнитного полей без введения гипотетических дополнительных членов в духе теории Ми. Эта возможность представляется особенно содержательной потому, что она освобождает нас от необходимости введения особой постоянной λ для решения космологической проблемы. Но с другой стороны имеется своеобразная трудность. Применив (1) специально к статическому случаю шаровой симметрии, мы получаем одним уравнением меньше чем нужно для определения $g_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, вследствие чего оказывается, что *всякое распределение* электричества, согласное с шаровой симметрией, может оставаться в равновесии. Таким образом, проблему построения элементарных частиц нельзя в настоящий момент решить на основании указанных уравнений поля.

БИОГРАФИИ И ПРИМЕЧАНИЯ