А. ЭЙНШТЕЙН[1]).

ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

В последнее время Г. А. Лоренцу и Д. Гильберту[2]) удалось придать общей теории относительности особенно наглядную форму тем, что они вывели ее уравнения из одного единственного вариационного принципа. То же самое будет сделано и в данной статье. При этом моя цель будет заключаться в том, чтобы сделать основные соотношения возможно ясными и настолько общими, насколько это допускает точка зрения общей относительности. В противоположность изложению, главным образом, Гильберта, о свойствах материи будет сделано по возможности мало специальных допущений.

С другой стороны, в противовес моему собственному последнему изложению предмета, выбор координатной системы останется теперь совершенно свободным.

---

[1]) Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1916, стр. 1111.

[2]) Четыре статьи H. A. L o r e n t z'a в Publicatioen d. Königl. Akad. van Wetensch. te Amsterdam за 1915 и 1916 гг.; D. H i l b e r t, Gött. Nachr. 1915. Heft 3.

§ 1. Вариационный принцип и уравнения поля тяготения и материи.

Пусть гравитационное поле, как обычно, описано тензором[1]) $g_{\mu\nu}$ (или соответственно, $g^{\mu\nu}$), а материя (включая электромагнитное поле) — любым числом пространственновременных функций $q_{(\rho)}$, инвариантный характер которых нам безразличен. Пусть далее $\mathbf{H}$ есть функция от

$$g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right), \quad g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}\left(=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}\right),$$

$$q_\rho \text{ и } q_{(\rho)\alpha}\left(\frac{\partial q_{(\rho)}}{\partial x_\alpha}\right).$$

В таком случае вариационный принцип

$$\delta\left\{\int \mathbf{H} d\tau\right\} = 0 \qquad (1$$

дает столько дифференциальных уравнений, сколько имеется определенных функций $g_{\mu\nu}$ и $q_{(\rho)}$, если только мы при этом установим, что $g^{\mu\nu}$ и $q_{(\rho)}$ должны быть варированы независимо друг от друга так, чтобы на границах интегрирования все $\delta q_{(\rho)}$, $\delta g^{\mu\nu}$ и $\frac{\partial \delta g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ обращались в нуль.

Мы допустим теперь, что функция $\mathbf{H}$ по отношению ко всем $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ линейна и притом такова, что коэффициенты при $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ зависят только от $g^{\mu\nu}$. В таком случае вариационный принцип (1) можно заменить дру-

---

[1]) Вначале мы не пользуемся тензорным характером $g_{\mu\nu}$.

гим более удобным для нас вариационным принципом. Интегрируя надлежащим образом по частям, получаем

$$\int \mathbf{H} d\tau = \int \mathbf{H}^* d\tau + F, \tag{2}$$

где F есть интеграл, взятый по границе рассматриваемой области, а величина $\mathbf{H}^*$ зависит только от $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\sigma$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$, но не зависит больше от $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$.

Из (2) для интересующих нас вариаций получаем

$$\delta\left\{\int \mathbf{H} d\tau\right\} = \delta\left\{\int \mathbf{H}^* d\tau\right\}; \tag{3}$$

поэтому мы в праве заменить наш вариационный принцип (1) следующим более удобным

$$\delta\left\{\int \mathbf{H}^* d\tau\right\} = 0. \tag{1a}$$

Выполнив вариации по $g^{\mu\nu}$ и $q_{(\rho)}$, получим следующие формулы [1]) в качестве уравнений поля тяготения и материи:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{5}$$

[1]) Ради краткости в формулах пропущен знак суммы $\sum$. Необходимо всегда иметь ввиду суммирование по тем значкам, которые встречаются дважды в том или ином члене. Следовательно, в (4), например, $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)$ означает

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right).$$

§ 2. Раздельное существование гравитационного поля.

Если не сделать никаких специальных допущений о том, каким образом $\mathbf{H}$ зависит от $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\sigma$, $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$, то нельзя разделить компоненты энергии на две части, из которых одна относится к полю тяготения, а другая — к материи. Для того чтобы теория допускала подобное деление, мы принимаем, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{G} + \mathbf{M}, \tag{6}$$

где $\mathbf{G}$ зависит только от $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\sigma$, $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, а $\mathbf{M}$ зависит только от $g^{\mu\nu}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$. Формулы (4) и (5) принимают тогда следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{8}$$

При этом $\mathbf{G}^*$ относится к $\mathbf{G}$ так, как $\mathbf{H}^*$ к $\mathbf{H}$. Следует, однако, заметить, что уравнения (8) или (5) пришлось бы заменить другими, если бы мы приняли, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ зависят не только от первых, но и от высших производных от $q_{(\rho)}$. Равным образом возможно, что $q_{(\rho)}$ следует рассматривать не независимыми друг от друга, но как величины, связанные друг с другом некоторыми условиями. Все это не имеет значения для дальнейшего изложения, так как последнее основано исключительно на уравнениях (7), которые были получены посредством варьирования интеграла по $g^{\mu\nu}$.

§ 3. **Свойства уравнений поля тяготения, вытекающие из теории инвариантов.**

Введем теперь допущение, что

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{9}$$

представляет собой инвариант. Тем самым установлен характер преобразования $g_{\mu\nu}$. О характере преобразования $q_{(\rho)}$, описывающих материю, мы не делаем никаких допущений. Напротив, пусть функции

$$H = \frac{\mathrm{H}}{\sqrt{-g}}, \quad G = \frac{\mathrm{G}}{\sqrt{-g}} \text{ и } M = \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{-g}}$$

будут инвариантами по отношению к любым подстановкам пространственно-временных координат. Из этих предпосылок вытекает общая ковариантность уравнений (7) и (8), выведенных из (1). Далее следует, что G (с точностью до постоянного множителя) должно равняться скаляру римановского тензора кривизны; ибо нет другого инварианта со свойствами, которыми должен обладать G.[1] Тем самым вполне определены и G^* и вместе с ним левая часть уравнения поля (7).[2]

Из общего постулата относительности вытекают определенные свойства функции G^*, которые мы теперь и выведем. С этой целью произведем бесконечно малое преобразование координат, полагая

$$x'_\nu = x_\nu + \Delta x_\nu; \tag{10}$$

[1]) Этим объясняется, почему требование общей относительности приводит к вполне определенной теории тяготения.

[2]) Интегрируя по частям, получаем

$$\mathrm{G}^* = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left[\begin{Bmatrix} \mu\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \beta \end{Bmatrix} \right].$$

Δx_ν представляют собой любые, бесконечно малые функции координат, x'_ν — координаты мировой точки в новой системе, x_ν — координаты той же точки в старой системе. Как для координат, так и для всякой другой величины ψ справедлив закон преобразования вида

$$\psi' = \psi + \Delta\psi,$$

причем $\Delta\psi$ всегда может быть выражено через Δx_ν. Из ковариантных свойств $g^{\mu\nu}$ легко выводятся законы преобразования для $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_\sigma$.

$$\Delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha} \tag{11}$$

$$\Delta g^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial (\Delta g^{\mu\nu})}{\partial x_\sigma} - g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial \Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma}. \tag{12}$$

Так как G^* зависит только от $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_\sigma$, то, пользуясь (13) и (14), можно вычислить $\Delta\mathrm{G}^*$. Таким образом получается

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}\,\Delta\left(\frac{\mathrm{G}^*}{\sqrt{-g}}\right) = S^\nu_\sigma \frac{\partial \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu} + \\ + 2\frac{\partial \mathrm{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где, ради краткости, положено

$$\left.\begin{aligned} S^\nu_\sigma = 2\frac{\partial \mathrm{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} + 2\frac{\partial \mathrm{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}_\alpha + \\ + \mathrm{G}^*\delta^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathrm{G}^*}{\partial g^{\mu\alpha}_\nu} g^{\mu\alpha}_\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Из этих двух уравнений мы выводим два следствия, важные в дальнейшем. Мы знаем, что $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ инвариантно по отношению к любым подстановкам, но $\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}$ этим свойством не обладает. Однако, легко доказать относительно последней величины, что она инвариантна по отношению к *линейным* подстановкам координат. Отсюда следует, что правая часть (13) всегда обращается в нуль, когда все $\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}$ равны нулю. Отсюда, далее, следует, что $\mathfrak{G}^*$ должно удовлетворять тождеству

$$S_\sigma^\nu \equiv 0. \tag{15}$$

Если мы, далее, будем брать такие Δx_ν, которые отличны от нуля только внутри рассматриваемой области, но обращаются в нуль на бесконечно близком расстоянии от границы области, — то, при выбранном нами преобразовании, значение интеграла, входящего в уравнение (2) и взятого по границе области, не изменится; следовательно,

$$\Delta(F) = 0,$$

и поэтому [1])

$$\Delta\left\{\int \mathfrak{G} d\tau\right\} = \Delta\left\{\int \mathfrak{G}^* d\tau\right\}.$$

Левая часть уравнения должна, однако, обратиться в нуль, так как и $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ и $\sqrt{-g}d\tau$ суть инварианты. Следовательно, правая часть тоже равна нулю.

[1]) Если ввести $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ вместо $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}^*$.

На основании (14), (15) и (16) получаем сначала

$$\int \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} d\tau = 0. \tag{16}$$

Если преобразовать это уравнение двукратным интегрированием по частям и принять во внимание свободный выбор Δx_σ, то получим тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) \equiv 0. \tag{17}$$

Сделаем теперь выводы, следующие из двух тождеств (16) и (17); последние вытекают из инвариантности $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$, и, следовательно, из постулата общей относительности.

Для этого преобразуем сначала уравнения поля тяготения посредством смешанного умножения на $g^{\mu\nu}$. Тогда получим (при перестановке значков σ и ν) уравнения, эквивалентные уравнениям поля (7).

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) = -\left(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu\right), \tag{18}$$

где положено

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}, \tag{19}$$

$$\mathfrak{t}_\sigma^\nu = -\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g_\alpha^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^*\delta_\sigma^\nu - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\nu^{\mu\alpha}} g_\sigma^{\mu\alpha}\right). \tag{20}$$

Последнее выражение для t_σ^ν следует из (14) и (15). Дифференцируя (18) по x_ν и суммируя по ν, имеем на основании (17)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(T_\sigma^\nu + t_\sigma^\nu\right) = 0. \qquad (21)$$

Формула (21) выражает закон сохранения импульса и энергии. Назовем T_σ^ν компонентами энергии материи и t_σ^ν — компонентами энергии поля тяготения.

Умножив уравнения (7) поля тяготения на $g_\sigma^{\mu\nu}$ и просуммировав их по μ и ν, получим в силу (20)

$$\frac{\partial t_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial M}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

или, в силу (19) и (21)

$$\frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0, \qquad (22)$$

где $T_{\mu\nu}$ означает $g_{\nu\sigma} T_\mu^\sigma$. Мы имеем здесь 4 уравнения, которым должны удовлетворять энергетические компоненты материи.

Следует отметить, что (обще-ковариантные законы сохранения импульса и энергии (21) и (22) получены *только* из одних уравнений (7) для поля тяготения в соединении с постулатом общей ковариантности (относительности) без применения уравнений поля (8) для материальных явлений.

А. ЭЙНШТЕЙН[1]).

ВОПРОСЫ КОСМОЛОГИИ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

Хорошо известно, что дифференциальное уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi K\rho \qquad (1)$$

в совокупности с уравнением движения материальной точки не могут вполне заменить теорию дальнодействия Ньютона. Необходимо добавить условие, что потенциал φ в пространственной бесконечности стремится к определенному пределу. Аналогичное положение вещей имеет место в теории тяготения общего принципа относительности; здесь также к дифференциальным уравнениям должны быть прибавлены граничные условия для пространственной бесконечности, если мы на самом деле рассматриваем мир бесконечно протяженным в пространственном отношении.

При рассмотрении планетной проблемы я выбрал эти граничные условия в виде следующего допущения: можно выбрать такую координатную систему, относительно которой все потенциалы тяготения $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности становятся постоянными. Но a priori отнюдь не очевидно, что при рас-

[1]) Sitzungsber. d. Preussischen Akad. Wissenschaften. 1917 стр. 142