порядка $U' = \frac{2w^2}{c^2} U$; это совпадает по порядку с значением, которым пользовался Трутон для оценки эффекта. Интенсивность внезапного толчка или импульса будет, следовательно, $\frac{U'}{w}$. Допустив теперь, что прибор в начале находился в покое, мы можем сравнить отклонение α, произведенное этим импульсом, с отклонением α', которое испытывают крутильные весы под влиянием постоянной пары сил K, действующей в течение половины периода колебания. Мы можем также взять случай, когда колебательное движение уже началось; тогда импульс, приложенный в момент прохождения прибора через положение равновесия, изменит амплитуду на некоторую величину β; аналогичный же эффект β' может быть вызван парой сил K, действующей в течение всего колебания от одного крайнего положения до другого.

Пусть T будет периодом колебания и l расстоянием от конденсатора до нити крутильных весов. Тогда легко найти, что

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\pi U' l}{K T w}. \qquad (39)$$

Согласно Трутону значение U' достигает одного-двух эргов, и наименьшая пара сил, которая могла бы дать заметное отклонение, была оценена в 7,5 CGS единиц. Если мы подставим это значение для K и премем во внимание, что скорость земли равна $3 \cdot 10^6$ *см/сек*, мы увидим, что (39) должно быть весьма малой дробью.

(Заседание Академии Наук 23 апреля 1904 г. Напечатано 27 мая 1904 г.).

А. ПУАНКАРЕ

А. ПУАНКАРЕ.

О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА [1]).

Введение.

С первого взгляда кажется, что аберрация света и связанные с нею оптические и электрические явления дают нам средство для определения абсолютного движения земли или, вернее, ее движения не по отношению к другим небесным телам, а по отношению к эфиру. Уже Френель пытался сделать это, но скоро обнаружил, что движение земли не изменяет законов отражения и преломления. Аналогичные опыты, как, например, с трубой, наполненной водою, и все прочие, где принимаются в расчет только члены первого порядка относительно величины аберрации, дали лишь отрицательный результат, чему вскоре было найдено объяснение; но и Майкельсон, придумавший опыт, в котором становились уже заметными члены, зависящие от квадрата аберрации, в свою очередь, потерпел неудачу.

Эта невозможность показать опытным путем абсолютное движение земли представляет повидимому общий закон природы; мы естественно приходим к тому, чтобы принять этот закон, который мы назовем *постулатом относительности*, и принять без ого-

---

[1]) „Sur la dynamique de l'électron", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXI, 129, 1906.

ворок. Все равно, будет ли позднее этот постулат, до сих пор согласующийся с опытом, подтвержден или опровергнут более точными измерениями, сейчас во всяком случае представляется интересным посмотреть, какие следствия могут быть из него выведены.

Лоренц и Фицджеральд ввели гипотезу о сокращении всех тел в направлении движения земли, зависящем от квадрата аберрации. Это сокращение, которое мы назовем *лоренцовым сокращением*, дало бы объяснение опыту Майкельсона и всем другим, произведенным до сих пор в этом направлении опытам. Однако, если бы мы пожелали принять постулат относительности во всей его общности, подобная гипотеза оказалась бы недостаточной.

Это заставило Лоренца дополнить и видоизменить гипотезу так, чтобы установить полное соответствие между нею и постулатом относительности. Он достиг этого в своей статье „Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света" [Amsterdam Proceedings (Известия Амстердамской Академии), 27 мая 1904] [1]).

Важность вопроса побудила меня снова заняться им; результаты, полученные мною, согласуются во всех наиболее важных пунктах с теми, которые получил Лоренц; я стремился только дополнить и видоизменить их в некоторых деталях; некоторые имеющиеся расхождения, как мы увидим дальше, не играют существенной роли.

Идею Лоренца можно резюмировать так: если возможно сообщить общее поступательное движение всей системе, без того, чтобы имели место какие либо видимые изменения в явлениях, то это значит, что уравнения электромагнитного поля не изменятся в результате некоторых преобразований, которые мы будем называть *преобразованиями Лоренца*; две системы, одна неподвижная, другая перемещающаяся поступательно, представляют таким образом точное изображение одна другой.

[1]) См. стр. 16 этого сборника. *Прим. ред.*

Ланжевен [1]) пытался видоизменить идею Лоренца; у обоих авторов движущийся электрон принимает форму сжатого эллипсоида, но в то время, как у Лоренца постоянными остаются две оси эллипсоида, у Ланжевена, наоборот, объем эллипсоида остается постоянным. Оба ученые впрочем показали, что эти две гипотезы так же хорошо согласуются с опытами Кауфмана, как и первоначальная гипотеза Абрагама (недеформирующийся шаровой электрон).

Преимущество теории Ланжевена в том, что она вводит только электромагнитные силы и силы связи, но она не совместима с постулатом относительности. Последнее было показано Лоренцом; я также нашел этот результат, несколько иным путем, пользуясь основными положениями теории групп.

Следует поэтому вернуться к теории Лоренца; однако, если мы хотим сохранить ее, избегнув явных противоречий, необходимо допустить существование силы, объясняющей одновременно сжатие одной и постоянство двух других осей. Я пытался определить эту силу и нашел, что *она может быть приравнена постоянному внешнему давлению, действующему на деформируемый и сжимаемый электрон, работа которого пропорциональна изменению объема этого электрона.*

Тогда, если инерция материи имеет исключительно электромагнитное происхождение, как это общепризнано после опытов Кауфмана, и, за исключением

[1]) До Ланжевена эту же идею высказал Бухерер в Бонне (См. B u c h e r e r, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie, август, 1904, Teubner, Leipzig).

постоянного давления, о котором я только что говорил, все силы будут электромагнитного происхождения, то постулат относительности может быть установлен со всей строгостью; именно это я и собираюсь показать весьма простыми вычислениями, основанными на принципе наименьшего действия.

Но это не все. Лоренц в цитированной работе считал необходимым дополнить свою гипотезу так, чтобы постулат относительности имел место и при наличии других сил помимо электромагнитных. Согласно его идее, все силы, какого бы они ни были происхождения, ведут себя благодаря преобразованию Лоренца (и следовательно благодаря поступательному перемещению) точно так же, как электромагнитные силы.

Оказалось необходимым более внимательно рассмотреть эту гипотезу и в частности исследовать, какие видоизменения она вносит в законы тяготения.

Прежде всего, очевидно, она вынуждает нас предположить, что распространение сил тяготения происходит не мгновенно, но со скоростью света. Можно было бы подумать, что это является достаточным основанием для того, чтобы отвергнуть подобную гипотезу, так как Лаплас показал, что она не может иметь места. Но на самом деле действие этого распространения уравновешивается в большей части другим обстоятельством, так что не существует противоречия между предложенным законом и астрономическими наблюдениями.

Возможно ли найти такой закон, который удовлетворял бы условию, поставленному Лоренцом, и одновременно сводился к закону Ньютона во всех случаях, когда скорости небесных тел достаточно малы для того, чтобы можно было пренебречь их квадратами (а также произведениями ускорений на расстояния) по сравнению с квадратом скорости света?

На этот вопрос, как мы увидим дальше, следует ответить утвердительно.

Согласуется ли видоизмененный таким образом закон с астрономическими наблюдениями?

Повидимому да, но этот вопрос может быть окончательно разрешен только после более глубокого исследования.

Но, допуская даже, что это обсуждение докажет преимущество новой гипотезы, к какому заключению мы должны будем притти? Если распространение сил притяжения происходит со скоростью света, то это не может быть результатом каких-либо случайных обстоятельств, а должно быть обусловлено одной из функций эфира; тогда возникает задача глубже проникнуть в природу этой функции и связать ее с другими свойствами эфира.

Недостаточно ограничиться простым сопоставлением формул, согласующихся между собою лишь благодаря счастливой случайности; необходимо, чтобы эти формулы, так сказать, проникали друг в друга. Разум наш не будет удовлетворен до тех пор, пока мы не поверим, что усмотрели причину этого согласования, так хорошо, что, как нам кажется, мы могли бы ее предвидеть.

Однако, этот вопрос можно представить себе еще с другой точки зрения; лучше всего можно это понять при помощи сравнения. Представим себе астронома, живущего до Коперника и размышляющего над системой Птоломея; он заметил бы, что для всех планет один из двух кругов, эпицикл или деферент — основной круг, проходится в одно и то же время. Так как это не может быть случайностью, следовательно между всеми планетами существует какая-то таинственная связь.

Однако Коперник, изменив лишь оси координат, рассматриваемые ранее как неподвижные, сразу уничтожил эту видимую связь; каждая планета описывает только один круг, и периоды обращения становятся независимыми друг от друга (до тех пор, пока Кеплер установил между ними связь, которую считали уничтоженной).

Возможно, что и в нашем случае имеется нечто аналогичное; если бы мы приняли принцип относительности, то в законе тяготения и в электромагнитных законах мы нашли бы общую постоянную — скорость света. Точно так же мы встретили бы ее во всех других силах какого угодно происхождения, что можно объяснить только с двух точек зрения: или все, что существует в мире — электромагнитного происхождения, или же это свойство, являющееся, так сказать, общим для всех физических явлений, есть не что иное как внешняя видимость, что-то, связанное с методами наших измерений. Как же мы производим наши измерения? Прежде мы ответили бы: перенося тела, рассматриваемые как твердые и неизменные, одно на место другого; но в современной теории, принимая во внимание сокращение Лоренца, это уже не верно. Согласно этой теории двумя равными отрезками — по определению — будут такие два отрезка, которые свет проходит в одно и то же время.

Может быть достаточно только отказаться от этого определения, чтобы вся теория Лоренца была совершенно уничтожена, как это случилось с системой Птоломея после вмешательства Коперника. Во всяком случае, если последнее и произойдет, это еще не докажет, что усилия Лоренца были бесполезными, ибо и Птоломей, какого мнения о нем ни придерживаться, отнюдь не был бесполезен для Коперника.

Поэтому я также нисколько не колебался опубликовать эти частичные результаты, хотя в настоящий момент вся теория кажется поставленной под угрозу, ввиду открытия магнито-катодных лучей.

§ 1. Преобразование Лоренца.

Лоренц ввел особую систему единиц, в которой множитель 4π исчезает во всех формулах. Я поступлю точно также, и кроме того выберу единицы длины и времени таким образом, чтобы скорость света была равна единице. Обозначая через f, g, h составляющие электрического смещения, через α, β, γ — магнитной силы, F, G, H — компоненты векторного потенциала, через ψ и ρ скалярный потенциал и плотность электричества, наконец через ξ, η, ζ — составляющие скорости электрона и через u, v, w — составляющие плотности тока, мы можем представить основные формулы в виде:

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{df}{dt} + \rho\xi = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\
\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \\
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0, \\
\sum \frac{df}{dx} &= \rho, \quad \frac{d\psi}{dt} + \sum \frac{dF}{dx} = 0, \\
\square &= \Delta - \frac{d^2}{dt^2} = \sum \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dt^2}, \\
\square\psi &= -\rho, \quad \square F = -\rho\xi.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Элемент объема материи $dx\,dy\,dz$ подвергается действию механической силы, составляющие которой $X dx dy dz$, $Y dx dy dz$, $Z dx dy dz$ выводятся из формулы

$$X = \rho f + \rho(\eta\gamma - \zeta\beta). \quad (2)$$

Эти уравнения можно подвергнуть замечательному преобразованию, найденному Лоренцом, интерес которого заключается в объяснении того, почему никакой опыт не в состоянии обнаружить абсолютное движение земли.

Положим

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad t' = kl(t + \varepsilon x),$$
$$y' = ly, \quad z' = lz, \tag{3}$$

где l и ε две произвольные постоянные, и пусть

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Тогда, если мы обозначим через

$$\Box' = \sum \frac{d^2}{dx'^2} - \frac{d^2}{dt'^2},$$

то получим

$$\Box' = \Box\, l^{-2}.$$

Рассмотрим сферу, увлекаемую электроном при его равномерном поступательном движении; тогда

$$(x - \xi t)^2 + (y - \eta t)^2 + (z - \zeta t)^2 = r^2$$

есть уравнение этой движущейся сферы, объем которой равен $\frac{4}{3}\pi r^3$.

В результате преобразования вместо сферы получится эллипсоид, уравнение которого нетрудно найти. В самом деле, из уравнения (3) легко получаем

$$x = \frac{k}{l}(x' - \varepsilon t'), \quad t = \frac{k}{l}(t' - \varepsilon x'),$$
$$y = \frac{y'}{l}, \quad z = \frac{z'}{l}. \tag{3'}$$

Тогда уравнение эллипсоида напишется в виде

$$k^2(x' - \varepsilon t' - \xi t' + \varepsilon\xi x')^2 + (y' - \eta k t' + \eta k\varepsilon x')^2 + \\ + (z' - \zeta k t' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2.$$

Этот эллипсоид перемещается, участвуя в равномерном движении; для $t' = 0$ его уравнение имеет вид

$$k^2 x'^2 (1 + \xi\varepsilon)^2 + (y' + \eta k\varepsilon x')^2 + (z' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2,$$

и объем его будет равен

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{l^3}{k(1+\xi\varepsilon)}.$$

Если мы желаем, чтобы заряд электрона не изменялся от преобразования, то, обозначая через ρ' новую плотность электричества, будем иметь

$$\rho' = \frac{k}{l^3}(\rho + \varepsilon\rho\xi). \tag{4}$$

Новые скорости ξ', η', ζ' выражаются теперь через старые следующим образом:

$$\xi' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x + \varepsilon t)}{d(t + \varepsilon x)} = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\xi},$$

$$\eta' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{kd(t + \varepsilon x)} = \frac{\eta}{k(1 + \varepsilon\xi)}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{k(1 + \varepsilon\xi)},$$

откуда

$$\rho'\xi' = \frac{k}{l^3}(\rho\xi + \varepsilon\rho), \quad \rho'\eta' = \frac{1}{l^3}\rho\eta, \quad \rho'\zeta' = \frac{1}{l^3}\rho\zeta. \tag{4'}$$

Здесь я должен отметить первое расхождение с Лоренцом. Лоренц полагает (с некоторой разницей в обозначениях) [см. цитированную работу, стр. 813, формулы (7) и (8)] [1]):

$$\rho' = \frac{1}{kl^3}\rho, \quad \xi' = k^2(\xi + \varepsilon), \quad \eta' = k\eta, \quad \zeta' = k\zeta.$$

Таким способом также получаются формулы:

$$\rho'\xi' = \frac{k}{l^3}(\rho\xi + \varepsilon\rho), \quad \rho'\eta' = \frac{1}{l^3}\rho\eta, \quad \rho'\zeta' = \frac{1}{l^3}\rho\zeta,$$

где, однако, значение ρ' уже другое.

---

[1]) См. стр. 21 этого сборника. *Прим. ред.*

Важно отметить, что величины (4) и (4′) удовлетворяют условию непрерывности

$$\frac{d\rho'}{dt'}+\sum\frac{d\rho'\xi'}{dx'}=0.$$

В самом деле, пусть λ — некоторый неопределенный коэффициент и D — функциональный определитель выражений

$$t+\lambda\rho,\quad x+\lambda\rho\xi,\quad y+\lambda\rho\eta,\quad z+\lambda\rho\zeta \qquad (5)$$

относительно t, x, y, z.

Имеем

$$D=D_0+D_1\lambda+D_2\lambda^2+D_3\lambda^3+D_4\lambda^4,$$

где

$$D_0=1,\quad D_1=\frac{d\rho}{dt}+\sum\frac{d\rho\xi}{dx}=0.$$

Полагая $\lambda'=l^2\lambda$, мы видим, что четыре функции

$$t'+\lambda'\rho',\quad x'+\lambda'\rho'\xi',\quad y'+\lambda'\rho'\eta',$$
$$z'+\lambda'\rho'\zeta' \qquad (5')$$

связаны с функциями (5) линейными соотношениями такого же вида, какие связывают новые переменные с прежними. Если же обозначить через D' функциональный определитель функций (5′) относительно новых переменных, то

$$D'=D,\quad D'=D_0'+D_1'\lambda'+\ldots+D_4'\lambda'^4,$$

откуда

$$D_0'=D_0=1,\quad D'=l^{-2}D=0=\frac{d\rho'}{dt'}+\sum\frac{d\rho'\xi'}{dx}$$

что и требовалось доказать.

Это условие не было бы выполнено при гипотезе Лоренца, так как ρ' имеет здесь другое значение.

Определим новые потенциалы — векторный и скалярный, так, чтобы удовлетворить уравнениям

$$\Box'\psi'=-\rho',\quad \Box'F'=-\rho'\xi'.$$

Мы получим затем отсюда:

$$\psi'=\frac{k}{l}(\psi+\varepsilon F),\quad F'=\frac{k}{l}(F+\varepsilon\psi), \qquad (6)$$

$$G'=\frac{1}{l}G,\quad H'=\frac{1}{l}H. \qquad (7)$$

Эти формулы значительно отличаются от соответствующих формул Лоренца, но расхождение происходит здесь, в конце концов, только от различных определений.

Выберем новые поля — электрическое и магнитное, так, чтобы удовлетворились уравнения

$$f'=-\frac{dF'}{dt'}-\frac{d\psi'}{dx'},\quad \alpha'=\frac{dH'}{dy'}-\frac{dG'}{dz'}. \qquad (8)$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt'}=\frac{k}{l}\left(\frac{d}{dt}-\varepsilon\frac{d}{dx}\right),\quad \frac{d}{dx'}=\frac{k}{l}\left(\frac{d}{dx}-\varepsilon\frac{d}{dt}\right),$$
$$\frac{d}{dy'}=\frac{1}{l}\frac{d}{dy},\quad \frac{d}{dz'}=\frac{1}{l}\frac{d}{dz},$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} f'&=\frac{1}{l^2}f,\quad g'=\frac{k}{l^2}(g+\varepsilon\gamma),\\ h'&=\frac{k}{l^2}(h-\varepsilon\beta),\\ \alpha'&=\frac{1}{l^2}\alpha,\quad \beta'=\frac{k}{l^2}(\beta-\varepsilon h),\\ \gamma'&=\frac{k}{l^2}(\gamma+\varepsilon g).\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Эти формулы тождественны с формулами Лоренца.

Наше преобразование не изменяет уравнений (1). В самом деле, условие непрерывности, а также уравнения (6) и (8) уже дают нам некоторые из уравнений (1) (за исключением штрихов у букв).

Уравнения (6), будучи подставлены в условие непрерывности, дают:

$$\frac{d\psi'}{dt'}+\sum\frac{dF'}{dx'}=0. \tag{10}$$

Остается установить, что

$$\frac{df'}{dt'}+\rho'\xi'=\frac{d\gamma'}{dz'}-\frac{d\beta'}{dy'},\quad \frac{d\alpha'}{dt'}=\frac{dg'}{dz'}-\frac{dh'}{dy'},\quad \sum\frac{df'}{dx'}=\rho';$$

но легко видеть, что это есть не что иное, как следствие уравнений (6), (8) и (10)

Мы должны теперь сравнить силы до и после преобразования. Пусть X, Y, Z будет сила до преобразования, а X', Y', Z' — после него, причем обе отнесены к единице объема. Для того чтобы силы со штрихом удовлетворяли таким же уравнениям, как и до преобразования, необходимо, чтобы

$$\left.\begin{aligned} X' &= \rho' f' + \rho'(\eta'\gamma'-\zeta'\beta'),\\ Y' &= \rho' g' + \rho'(\zeta'\alpha-\xi'\gamma'),\\ Z' &= \rho' h' + \rho'(\xi'\beta'-\eta'\alpha') \end{aligned}\right\}$$

или, заменяя все величины их значениями (4), (4′), (9) и принимая во внимание уравнения (2),

$$\left.\begin{aligned} X' &= \frac{k}{l^5}\left(X+\varepsilon\sum X\xi\right),\\ Y' &= \frac{1}{l^5}Y,\\ Z' &= \frac{1}{l^5}Z. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Если мы обозначим через X_1, Y_1, Z_1 составляющие силы, отнесенной уже не к единице объема, но к единице заряда электрона, а через X_1', Y_1', Z_1' — те же величины после преобразования, то будем иметь:

$$X_1=f+\eta\gamma-\zeta\beta,\quad X_1'=f'+\eta'\gamma'-\zeta'\beta',$$
$$X=\rho X_1,\quad X'=\rho' X_1',$$

и, следовательно, получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= \frac{k}{l^5}\,\frac{\rho}{\rho'}\left(X_1+\varepsilon\sum X_1\xi\right),\\ Y_1' &= \frac{1}{l^5}\,\frac{\rho}{\rho'}\,Y_1,\\ Z_1' &= \frac{1}{l^5}\,\frac{\rho}{\rho'}\,Z_1. \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

Лоренц же нашел, с точностью до обозначений [стр. 813, ф-ла (10)] [1]):

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= l^2X_1'-l^2\varepsilon(\eta'g'+\zeta'h'),\\ Y_1 &= \frac{l^2}{k}Y_1'+\frac{l^2\varepsilon}{k}\xi'g',\\ Z_1 &= \frac{l^2}{k}Z_1'+\frac{l^2\varepsilon}{k}\xi'h'. \end{aligned}\right\} \tag{11''}$$

Прежде чем итти дальше, важно отыскать причину этого существенного расхождения. Оно, очевидно, происходит от того, что формулы для ξ', η', ζ' несколько отличаются от соответствующих формул Лоренца, тогда как формулы для электрического и магнитного поля — одни и те же.

Если инерция электронов исключительно электромагнитного происхождения и, если, кроме того, они

---

[1]) См. стр. 20 этого сборника. *Прим. ред.*

подвержены действию только электромагнитных сил, то условие равновесия требует, чтобы внутри электрона имело место соотношение

$$X = Y = Z = 0.$$

В силу же уравнений (11) это соотношение эквивалентно условию

$$X' = Y' = Z' = 0.$$

Следовательно, условия равновесия электронов от преобразования не меняются.

К сожалению, столь простая гипотеза не приемлема. В самом деле, если мы предположим, что $\xi=\eta=\zeta=0$, то, в силу условий $X=Y=Z=0$, получим, что

$$f = g = h = 0$$

и, следовательно,

$$\sum \frac{df}{dx} = 0, \text{ т. е. } \rho = 0.$$

К аналогичным результатам приходим и в наиболее общем случае.

Таким образом, кроме электромагнитных сил необходимо допустить еще другие силы, например силы связи. Затем следует искать условия, которым должны удовлетворять эти силы или связи для того, чтобы равновесие электронов не нарушилось от преобразования. Это составит предмет одного из следующих параграфов.

§ 2. Принцип наименьшего действия.

Известно, каким образом Лоренц получил свои уравнения, пользуясь принципом наименьшего действия. Однако, я снова возвращаюсь к этому вопросу, хотя и не могу прибавить здесь ничего существенного к исследованию Лоренца; я предпочитаю представить его в несколько ином виде, более удобном для моей цели.

Я полагаю

$$J = \int dt d\tau \left[\frac{\sum f^2}{2} + \frac{\sum \alpha^2}{2} - \sum Fu\right], \qquad (1)$$

где f, α, F, u, и т. д. подчиняются условиям

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho, \quad \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad u = \frac{df}{dt} + \rho\xi, \qquad (2)$$

и другим, получающимся из соображений симметрии.

Что касается интеграла J, то он должен быть распространен:

1) относительно элемента объема $d\tau = dxdydz$ по всему пространству,

2) относительно времени t на интервал между пределами $t = t_0$, $t = t_1$.

Согласно принципу наименьшего действия интеграл J должен быть минимумом, если различные входящие в него величины подчинить:

1) условиям (2),

2) условию, что состояние системы задается для двух предельных моментов $t = t_0$ и $t = t_1$.

Это последнее условие позволяет преобразовать наши интегралы при помощи интегрирования по частям.

В самом деле, если мы имеем интеграл вида

$$\int dt d\tau A \frac{d(B\delta C)}{dt},$$

где C — одна из величин, определяющих состояние системы, и δC ее вариация, то, интегрируя его по частям относительно времени, получим

$$\int d\tau \left| AB\delta C \right|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int dt d\tau \frac{dA}{dt} B\delta C.$$

Так как для двух предельных моментов времени состояние системы задано, то для $t = t_0$, $t = t_1$ $\delta C = 0$; поэтому первый интеграл обращается в нуль и остается только второй.

Точно так же можно интегрировать по частям и относительно x, y или z.

В самом деле, имеем

$$\int A \frac{dB}{dx} dxdydzdt =$$
$$= \int ABdydzdt - \int B \frac{dA}{dx} dxdydzdt.$$

Так как интегрирования распространяются здесь до бесконечности, то в первом интеграле правой части следует положить $x = \pm\infty$; поэтому, в силу того, что все наши функции предполагаются исчезающими в бесконечности, этот интеграл будет равен нулю, и мы получим

$$\int A \frac{dB}{dx} d\tau dt = -\int B \frac{dA}{dx} d\tau dt.$$

Если предположить, что на систему наложены связи, то к условиям, налагаемым на различные величины, входящие в интеграл J, следует присоединить еще условия связи.

Придадим сначала F, G, H приращения δF, δG, δH, откуда

$$\delta\alpha = \frac{d\delta H}{dy} - \frac{d\delta G}{dz}.$$

Имеем

$$\delta J = \int dtd\tau \left[\sum \alpha \left(\frac{d\delta H}{dy} - \frac{d\delta G}{dz}\right) - \sum u\delta F\right] = 0,$$

или, интегрируя по частям,

$$\delta J = \int dtd\tau \left[\sum \left(\delta G \frac{d\alpha}{dz} - \delta H \frac{d\alpha}{dy}\right) - \sum u\delta F\right] =$$
$$= -\int dtd\tau \sum \delta F \left(u - \frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\beta}{dz}\right) = 0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициент при δF, получим

$$u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}. \qquad (3)$$

Интегрируя по частям это соотношение, найдем

$$\int \sum Fudt = \int \sum F \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) d\tau =$$
$$= \int \sum \left(\beta \frac{dF}{dz} - \gamma \frac{dF}{dy}\right) d\tau = \left(\int \sum \alpha \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) d\tau,\right.$$

или

$$\int \sum Fud\tau = \int \sum \alpha^2 d\tau,$$

откуда наконец

$$J = \int dtd\tau \left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum \alpha^2}{2}\right). \qquad (4)$$

Отсюда, а также из соотношения (3) видно, что δJ не зависит от δF, а следовательно и от $\delta\alpha$; будем варьировать теперь другие переменные.

Возвращаясь к выражению (1), получаем для J:

$$\delta J = \int dtd\tau \left(\sum f\delta f - \sum F\delta u\right).$$

Но f, g, h подчинены первому из условий (2), принимающему при этом вид

$$\sum \frac{d\delta f}{dx} = \delta\rho. \qquad (5)$$

Поэтому можно написать

$$\delta J = \int dt d\tau \left[\sum f df - \sum F du - \right.$$
$$\left. - \psi \left(\sum \frac{d\delta f}{dx} - \delta\rho \right) \right]. \tag{6}$$

Согласно методам вариационного исчисления, вычисление следует производить так, как если бы ψ была произвольной функцией, а δJ — представлено выражением (6), и вариации не подчинялись бы более условиям (5).

С другой стороны мы имеем

$$\delta u = \frac{d\delta f}{dt} + \delta\rho\xi,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\delta J = \int dt d\tau \sum \delta f \left(f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} \right) +$$
$$+ \int dt d\tau \left(\psi\delta\rho - \sum F\delta\rho\xi \right). \tag{7}$$

Если предположить сперва, что электроны не подвергаются вариации, то $\delta\rho = \delta\rho\xi = 0$, и второй интеграл равен нулю.

Так как δJ должно обращаться в нуль, то

$$f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = 0. \tag{8}$$

В общем же случае будем иметь:

$$\delta J = \int dt d\tau \left(\psi\delta\rho - \sum F\delta\rho\xi \right). \tag{9}$$

Остается определить силы, действующие на электроны. Для этого предположим, что к каждому элементу электрона приложена дополнительная сила

$-Xd\tau, -Yd\tau, -Zd\tau$. Напишем условие равновесия этой силы с электромагнитными силами. Пусть U, V, W будут составляющими перемещения элемента $d\tau$ электрона, причем перемещение отсчитывается от какого-нибудь начального положения. Пусть далее δU, δV, δW будут вариации этого перемещения; виртуальная работа, соответствующая дополнительной силе, равна

$$-\int \sum X\delta U d\tau,$$

так что условие равновесия напишется в виде:

$$\delta J = -\int \sum X\delta U d\tau dt. \tag{10}$$

Необходимо теперь преобразовать δJ. Для этого попытаемся сначала найти уравнение непрерывности, выражающее неизменяемость заряда при вариации.

Пусть x_0, y_0, z_0 начальное положение электрона. Положение его в данный момент будет:

$$x = x_0 + U, \quad y = y_0 + V, \quad z = z_0 + W.$$

Введем кроме того вспомогательную переменную ε, при помощи которой будем варьировать наши различные функции, так что, например, для какой-нибудь функции A будем иметь:

$$\delta A = \delta\varepsilon \frac{dA}{d\varepsilon}.$$

Действительно, для меня удобно будет иметь возможность переходить от обозначений вариационного исчисления к обозначениям обычного дифференциального исчисления, или обратно.

Наши функции можно рассматривать либо зависящими от пяти переменных x, y, z, t, ε так, что при изменении t и ε наблюдатель всегда остается на одном и том же месте — в этом случае их производные будем обозначать обыкновенным d; либо как зависящими от пяти переменных x_0, y_0, z_0, t, ε так, что при изменении t и ε мы следуем всегда за одним и тем же электроном, — в этом случае их производные будем обозначать круглым ∂.

Тогда будем иметь:

$$\xi = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} + \xi \frac{dU}{dx} + \eta \frac{dU}{dy} + \zeta \frac{dU}{dz} = \frac{\partial x}{\partial t}. \qquad (11)$$

Обозначим теперь через Δ функциональный определитель x, y, z относительно x_0, y_0, z_0:

$$\Delta = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x_0, y_0, z_0)}.$$

Сохраняя ε, x_0, y_0, z_0 постоянными, дадим t приращение ∂t, тогда x, y, z получат приращения ∂x, ∂y, ∂z и Δ — приращение $\partial \Delta$.

Таким образом

$$\partial x = \xi \partial t, \quad \partial y = \eta \partial t, \quad \partial z = \zeta \partial t,$$

$$\Delta + \partial \Delta = \frac{\partial (x + \partial x,\ y + \partial y,\ z + \partial z)}{\partial (x_0, y_0, z_0)};$$

откуда

$$1 + \frac{\partial \Delta}{\Delta} = \frac{\partial (x + \partial x,\ y + \partial y,\ z + \partial z)}{\partial (x, y, z)} = \frac{\partial (x + \xi \partial t,\ y + \eta \partial t,\ z + \zeta \partial t)}{\partial (x, y, z)}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}. \qquad (12)$$

Так как заряд каждого электрона остается постоянным, то

$$\frac{\partial \rho \Delta}{\partial t} = 0, \qquad (13)$$

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \rho \frac{d\xi}{dx} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} + \sum \xi \frac{d\rho}{dt},$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0.$$

Таковы различные формы уравнения непрерывности в отношении переменной t. Аналогичные уравнения мы найдем и для переменной ε.

Пусть

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon, \quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon, \quad \delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon;$$

следовательно,

$$\delta U = \frac{dU}{d\varepsilon} \delta \varepsilon + \delta U \frac{dU}{dx} + \delta V \frac{dU}{dy} + \delta W \frac{dU}{dz}, \qquad (11')$$

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon} = \sum \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial \rho \Delta}{\partial \varepsilon} = 0, \qquad (12')$$

$$\delta \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} + \sum \rho \frac{d\delta U}{dx} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} = \frac{d\rho}{d\varepsilon} + \sum \frac{\delta U}{\delta \varepsilon} \frac{d\rho}{dx},$$

$$\delta \rho + \sum \frac{d\rho \delta U}{dx} = 0. \qquad (13')$$

Отметим различие между определением

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial t} \delta \varepsilon$$

и

$$\delta\rho = \frac{d\rho}{d\varepsilon}\,\delta\varepsilon;$$

заметим, что именно первое определение более подходит к формуле (10).

Это первое определение позволит нам преобразовать первый член (9).

В самом деле имеем:

$$\int dt d\tau \psi \delta\rho = -\int dt d\tau \psi \sum \frac{d\rho \delta U}{dx},$$

или, интегрируя по частям,

$$\int dt d\tau \psi \delta\rho = \int dt d\tau \sum \rho \frac{d\psi}{dx}\,\delta U. \tag{14}$$

Попробуем теперь вычислить

$$\delta(\rho\xi) = \frac{d(\rho\xi)}{d\varepsilon}\,\delta\varepsilon.$$

Заметим, что $\rho\Delta$ может зависеть только от x_0, y_0, z_0. Действительно, если рассматривать элемент электрона, начальное положение которого определяется прямоугольным параллелепипедом с ребрами dx_0, dy_0, dz_0, то заряд этого элемента равен

$$\rho\Delta dx_0 dy_0 dz_0,$$

а так как этот заряд должен остаться постоянным, то

$$\frac{\partial\rho\Delta}{\partial t} = \frac{\partial\rho\Delta}{\partial\varepsilon} = 0. \tag{15}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2\rho\Delta U}{\partial t\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\rho\Delta\,\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\Delta\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right). \tag{16}$$

Но в силу уравнения непрерывности имеем для какой угодно функции A:

$$\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial A\Delta}{\partial t} = \frac{dA}{dt} + \sum \frac{dA\xi}{dx},$$

а также

$$\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial A\Delta}{\partial\varepsilon} = \frac{dA}{d\varepsilon} + \sum \frac{dA\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\rho\Delta\,\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{d\rho\frac{\partial U}{\partial t}}{d\varepsilon} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial V}{\partial\varepsilon}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial W}{\partial\varepsilon}\right)}{dz}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\Delta\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{d\rho\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}}{dt} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial V}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial W}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dz} \tag{17'}$$

Вторые члены (17) и (17′) должны быть одинаковы, поэтому, приняв во внимание, что

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \xi, \qquad \frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\,\delta\varepsilon = \delta U, \qquad \frac{d\rho\xi}{d\varepsilon}\,\delta\varepsilon = \delta\rho\xi,$$

получаем:

$$\delta\rho\xi + \frac{d(\rho\xi\delta U)}{dx} + \frac{d(\rho\xi\delta V)}{dy} + \frac{d(\rho\xi\delta W)}{dz} = \frac{d(\rho\delta U)}{dt} + \frac{d(\rho\xi\delta U)}{dx} + \frac{d(\rho\eta\delta U)}{dy} + \frac{d(\rho\zeta\delta U)}{dz}. \tag{18}$$

Преобразуем теперь вторую часть (9); имеем

$$\int dt d\tau \sum F \delta \rho \xi = \int dt d\tau \left[\sum F \frac{d(\rho \delta U)}{dt} + \right.$$
$$+ \sum F \frac{d(\rho \eta \delta U)}{dy} + \sum F \frac{d(\rho \zeta \delta U)}{dz} -$$
$$\left. - \sum F \frac{d(\rho \xi \delta V)}{dy} - \sum F \frac{d(\rho \xi \delta W)}{dz} \right].$$

После интегрирования по частям правая часть имеет вид:

$$\int dt d\tau \left[- \sum \rho \delta U \frac{dF}{dt} - \sum \rho \eta \delta U \frac{dF}{dy} - \sum \rho \zeta \delta U \frac{dF}{dz} + \right.$$
$$\left. + \sum \rho \xi \delta V \frac{dF}{dy} + \sum \rho \xi \delta W \frac{dF}{dz} \right].$$

Заметим теперь, что

$$\sum \rho \xi \delta V \frac{dF}{dy} = \sum \rho \zeta \delta U \frac{dH}{dx},$$
$$\sum \rho \xi \delta W \frac{dF}{dz} = \sum \rho \eta \delta U \frac{dG}{dx}.$$

В самом деле, если в обоих членах этих соотношений развернуть суммы $\sum$, то они сделаются тождествами. Вспоминая же, что

$$\frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} = -\beta, \quad \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = \gamma,$$

получим

$$\int dt d\tau \left[- \sum \rho \delta U \frac{dF}{dt} + \sum \rho \gamma \eta \delta U - \sum \rho \beta \zeta \delta U \right].$$

Таким образом, окончательно:

$$\delta J = \int dt d\tau \sum \rho \delta U \left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{dF}{dt} + \beta \zeta - \gamma \eta \right) =$$
$$= \int dt d\tau \sum \rho \delta U (-f + \beta \zeta - \gamma \eta).$$

Приравнивая коэффициенты при δU в последнем выражении и в (10), получим

$$X = \rho f - \rho (\beta \zeta - \gamma \eta);$$

а это есть не что иное, как уравнение (2) предыдущего параграфа.

§ 3. Преобразование Лоренца и принцип наименьшего действия.

Посмотрим, не указывает ли принцип наименьшего действия на причину успеха преобразований Лоренца. Для этого прежде всего нужно знать, как изменится в результате этого преобразования интеграл (формула (4) § 2):

$$J = \int dt d\tau \left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum \alpha^2}{2} \right)$$

Мы находим сначала, что

$$dt' d\tau' = l^4 dt d\tau,$$

ибо x', y', z', t связаны с x, y, z, t линейными соотношениями, определитель которых равен l^4.

Затем получаем

$$\left.\begin{aligned} l^4 \sum f'^2 &= f^2 + k^2 (g^2 + h^2) + \\ &+ k^2 \varepsilon^2 (\beta^2 + \gamma^2) + 2 k^2 \varepsilon (g\gamma - h\beta), \\ l^4 \sum \alpha'^2 &= \alpha^2 + k^2 (\beta^2 + \gamma^2) + \\ &+ k^2 \varepsilon^2 (g^2 + h^2) + 2 k^2 \varepsilon (g\gamma - h\beta), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

формулы (9) § 1), откуда

$$l^4 \left(\sum f'^2 - \sum \alpha'^2 \right) = \sum f^2 - \sum \alpha^2.$$

Таким образом, полагая

$$J' = \int dt' d\tau' \left(\frac{\Sigma f'^2}{2} - \frac{\Sigma \alpha'^2}{2} \right),$$

получим

$$J' = J.$$

Однако, для того чтобы это равенство имело силу, необходимо, чтобы пределы интегрирования в обоих случаях были одни и те же. До сих пор мы принимали, что t изменяется от t_0 до t_1 и x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$. В результате преобразования Лоренца эти пределы интегрирования будут изменены; однако ничто не мешает нам положить $t_0 = -\infty$ и $t_1 = +\infty$: при этих условиях пределы для J и J' останутся те же.

Сравним теперь два следующие уравнения, аналогичные уравнению (10) § 2:

$$\left.\begin{aligned} \delta J &= -\int \sum X \delta U d\tau dt, \\ \delta J' &= -\int \sum X' \delta U' d\tau' dt'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для этого сравним сначала $\delta U'$ и δU. Будем рассматривать электрон, начальные координаты которого равны x_0, y_0, z_0; тогда в момент t

$$x = x_0 + U, \quad y = y_0 + V, \quad z = z_0 + W.$$

Рассматривая электрон соответственно после преобразования Лоренца, будем иметь

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz,$$

где

$$x' = x_0 + U', \quad y' = y_0 + V', \quad z' = z_0 + W';$$

но эти координаты будут достигнуты только в момент

$$t' = kl(t + \varepsilon x).$$

Если мы подвергнем наши переменные вариациям δU, δV, δW и одновременно дадим t приращение δt, то координаты x, y, z получат полное приращение:

$$\delta x = \delta U + \xi \delta t, \quad \delta y = \delta V + \eta \delta t, \quad \delta z = \delta W + \zeta \delta t.$$

Аналогично будет

$$\delta x' = \delta U' + \xi' \delta t', \quad \delta y' = \delta V' + \eta' \delta t',$$
$$\delta z' = \delta W' + \zeta' \delta t'.$$

В силу преобразования Лоренца

$$\delta x' = kl(\delta x + \varepsilon \delta t), \quad \delta y' = l \delta y, \quad \delta z' = l \delta z,$$
$$\delta t' = kl(\delta t + \varepsilon \delta x),$$

откуда, полагая $\delta t = 0$, получим соотношения

$$\begin{aligned} \delta x' &= \delta U' + \xi' \delta t' = kl \delta U, \\ \delta y' &= \delta V' + \eta' \delta t' = l \delta V, \\ \delta t' &= kl\varepsilon \delta U. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\xi' = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \xi\varepsilon}, \quad \eta' = \frac{\eta}{k(1 + \xi\varepsilon)};$$

поэтому, заменяя $\delta t'$ его значением, будем иметь

$$kl(1 + \xi\varepsilon) \delta U = \delta U' (1 + \xi\varepsilon) + (\xi + \varepsilon) kl\varepsilon \delta U,$$
$$l(1 + \xi\varepsilon) \delta V = \delta V' (1 + \xi\varepsilon) + \eta l \varepsilon \delta U.$$

Вспоминая определение k, получим отсюда

$$\delta U = \frac{k}{l} \delta U' + \frac{k\varepsilon}{l} \xi \delta U',$$

$$\delta V = \frac{1}{l} \delta V' + \frac{k\varepsilon}{l} \eta \delta U',$$

а также

$$\delta W = \frac{1}{l} \delta W' + \frac{k\varepsilon}{l} \zeta \delta U';$$

откуда

$$\sum X\delta U = \frac{1}{l}(kX\delta U' + Y\delta V' + Z\delta W') + \frac{k\varepsilon}{l}\,\delta U' \sum X\xi. \qquad (3)$$

В силу же уравнений (2) будет

$$\int \sum X'\delta U' dt' d\tau' = \int \sum X\delta U dt d\tau = \frac{1}{l^4}\int \sum X\delta U dt' d\tau'.$$

Заменяя $\sum X\delta U$ на его значение (3), получим

$$X' = \frac{k}{l^5}X + \frac{k\varepsilon}{l^5}\sum X\xi, \quad Y' = \frac{1}{l^5}Y, \quad Z' = \frac{1}{l^5}Z,$$

т. е. уравнения (11) § 1.

Таким образом, принцип наименьшего действия привел нас к тому же результату, что и исследование § 1.

Обращаясь к формулам (1), мы видим, что в результате преобразования Лоренца выражение

$$\sum f^2 - \sum \alpha^2,$$

за исключением постоянного множителя, осталось неизменным; этого нельзя сказать о выражении

$$\sum f^2 + \sum \alpha^2,$$

входящем в энергию. Ограничиваясь случаем достаточно малого ε для того, чтобы можно было пренебречь его квадратом, т. е. считая $k = 1$ и полагая также $l = 1$, мы находим

$$\sum f'^2 = \sum f^2 + 2\varepsilon(g\gamma - h\beta),$$

$$\sum \alpha'^2 = \sum \alpha^2 + 2\varepsilon(g\gamma - h\beta)$$

или, складывая,

$$\sum f'^2 + \sum \alpha'^2 = \sum f^2 + \sum \alpha^2 + 4\varepsilon(g\gamma - h\beta).$$

§ 4. Группа Лоренца.

Важно отметить, что преобразования Лоренца образуют группу.

В самом деле, полагая

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t + \varepsilon x),$$

и, с другой стороны,

$$x'' = k'l'(x' + \varepsilon' t'), \quad y'' = l'y', \quad z'' = l'z', \quad t'' = k'l'(t' + \varepsilon' x'),$$

где

$$k^{-2} = 1 - \varepsilon^2, \quad k'^{-2} = 1 - \varepsilon'^2,$$

получаем:

$$x'' = k''l''(x + \varepsilon'' t), \quad y'' = l''y, \quad z'' = l''z, \quad t'' = k''l''(t + \varepsilon'' x),$$

где

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon\varepsilon'}, \quad l'' = ll',$$

$$k'' = kk'(1 + \varepsilon\varepsilon') = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon''^2}}.$$

Если мы придадим l значение 1, считая ε бесконечно малым, т. е. положив

$$x' = x + \delta x, \quad y' = y + \delta y, \quad z' = z + \delta z, \quad t' = t + \delta t,$$

то получим:

$$\delta x = \varepsilon t, \quad \delta y = \delta z = 0, \quad \delta t = \varepsilon x.$$

Это и есть то бесконечно малое преобразование группы, которое я назову преобразованием T, и которое, согласно Ли, можно представить в виде

$$t \frac{d\varphi}{dx} + x \frac{d\varphi}{dt} = T_1.$$

Напротив, полагая $\varepsilon = 0$ и $l = 1 + \delta l$, мы найдем:

$$\delta x = x\delta l, \quad \delta y = y\delta l, \quad \delta z = z\delta l, \quad \delta t = t\delta l$$

и получим другое бесконечно малое преобразование T_0 группы (рассматривая l и ε как независимые переменные), которое в обозначениях Ли можно представить в виде:

$$T_0 = x \frac{d\varphi}{dx} + y \frac{d\varphi}{dy} + z \frac{d\varphi}{dz} + t \frac{d\varphi}{dt}.$$

Придавая особенную роль, которую до сих пор играла ось X, осям Y и Z, получаем таким образом два других бесконечно-малых преобразования:

$$T_2 = t \frac{d\varphi}{dy} + y \frac{d\varphi}{ut},$$

$$T_3 = t \frac{d\varphi}{dz} + z \frac{d\varphi}{dt},$$

которые тоже не изменяют уравнений Лоренца.

Можно образовать различные комбинации, введенные Ли, например:

$$[T_1, T_2] = x \frac{d\varphi}{dy} - y \frac{d\varphi}{dx}.$$

Легко однако видеть, что это последнее преобразование эквивалентно преобразованию осей координат, когда они поворачиваются на весьма малый угол вокруг оси Z. Мы не должны поэтому удивляться, если подобное преобразование не изменяет формы уравнений Лоренца, очевидно независимых от выбора осей.

Итак мы, приходим к необходимости рассмотреть непрерывную группу, которую мы назовем *группой Лоренца* и которая допускает следующие бесконечно малые преобразования:

1) преобразование T_0, которое будет переставимо со всеми остальными;

2) три преобразования T_1, T_2, T_3;

3) три вращения $[T_1, T_2]$, $[T_2, T_3]$, $[T_3, T_1]$.

Любое из преобразований этой группы можно разложить на преобразование вида:

$$x' = lx, \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = lt$$

и линейное преобразование, не изменяющее квадратичной формы

$$x^2 + y^2 + z - t^2.$$

Мы можем также образовать нашу группу несколько иным способом. Каждое преобразование группы можно рассматривать как преобразование вида

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz,$$
$$t' = kl(t + \varepsilon x), \tag{1}$$

которому предшествует и за которым следует соответствующий поворот.

Однако для нашей цели достаточно рассмотреть только часть преобразований этой группы; будем считать что l есть функция от ε, и выберем эту функцию так, чтобы та часть группы, которую я обозначу через P, все еще образовывала группу.

Вращая систему на 180° вокруг оси y, мы получим преобразование, которое опять должно принадлежать к P. Так как это приводит к изменению знака x, x', z и z', то мы находим

$$x' = kl(x - \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz,$$
$$t' = kl(t - \varepsilon x) \tag{2}$$

Следовательно, от перемены знака ε, l не меняется. С другой стороны, если P есть группа, то подстановка обратная (1), которую можно представить в виде

$$x' = \frac{k}{l}(x - \varepsilon t), \quad y' = \frac{y}{l},$$

$$z' = \frac{z}{l}, \quad t' = \frac{k}{l}(t - \varepsilon x), \tag{3}$$

также должна принадлежать к P; она должна быть таким образом тождественной (2), т. е.

$$l = \frac{1}{l}.$$

Следовательно, $l = 1$.

§ 5. Волны Ланжевена.

Формулы, определяющие электромагнитное поле, обусловленное движением одного электрона, были представлены Ланжевеном в особенно изящной форме.

Рассмотрим снова уравнения

$$\square\psi = -\rho, \quad \square F = -\rho\xi. \tag{1}$$

Известно, что решения их можно получить при помощи запаздывающих потенциалов

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho_1 d\tau_1}{r}, \quad F = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho_1\xi_1 d\tau_1}{r}. \tag{2}$$

В этих формулах

$$d\tau_1 = dx_1 dy_1 dz_1,$$

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

тогда как ρ_1 и ξ_1 суть значения ρ и ξ в точке x_1, y_1, z_1 и в момент $t_1 = t - r$.

Пусть x_0, y_0, z_0 координаты элемента электрона в момент t_0; тогда

$$x_1 = x_0 + U, \quad y_1 = y_0 + V, \quad z_1 = z_0 + W$$

будут его координатами в момент t_1.

U, V, W суть функции x_0, y_0, z_0, t_1, поэтому мы можем написать

$$dx_1 = dx_0 + \frac{dU}{dx_0}dx_0 + \frac{dU}{dy_0}dy_0 + \frac{dU}{dz_0}dz_0 + \xi_1 dt$$

и, если считать t, а также x, y и z постоянными, то

$$dt_1 = +\sum\frac{x - x_1}{r}dx_1.$$

Следовательно, получаем

$$dx_1\left(1 + \xi_1\frac{x_1 - x}{r}\right) + dy_1\xi_1\frac{y_1 - y}{r} + dz_1\xi_1\frac{z_1 - z}{r} =$$

$$= dx_0\left(1 + \frac{dU}{dx_0}\right) + dy_0\frac{dU}{dy_0} + dz_0\frac{dU}{dz_0}$$

и еще два другие уравнения, возникающие от круговой перестановки.

Таким образом, полагая $d\tau_0 = dx_0 dy_0 dz_0$, будем иметь

$$d\tau_1\begin{vmatrix} 1 + \xi_1\frac{x_1 - x}{r}, & \xi_1\frac{y_1 - y}{r}, & \xi_1\frac{z_1 - z}{r} \end{vmatrix} =$$

$$= d\tau_0\begin{vmatrix} 1 + \frac{dU}{dx_0}, & \frac{dU}{dy_0}, & \frac{dU}{dz_0} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Исследуем определители, стоящие в обеих частях (3), и прежде всего первый из них; разложив его, мы увидим, что члены 2-й и 3-й степени относительно ξ, η, ζ обращаются в нуль, и определитель равен:

$$1 + \xi_1\frac{x_1 - x}{r} + \eta_1\frac{y_1 - y}{r} + \zeta_1\frac{z - z}{r} = 1 + \omega,$$

где ω радиальная составляющая скорости ξ_1, η_1, ζ_1, т. е. составляющая, направленная по радиусу-вектору, соединяющему точки x, y, z и x_1, y_1, z_1.

Для того чтобы получить второй определитель, найдем координаты различных элементов электрона в момент t', одинаковый для всех элементов[1]), однако такой, что для наблюдаемого элемента $t_1 = t_1'$. Тогда координаты элементов представятся в виде:

$$x_1' = x_0 + U', \quad y_1' = y_0 + V', \quad z_1' = z_0 + W',$$

где U', V', W' получаются из U, V, W заменою t_1 на t_1'.

Так как t_1' одно и то же для всех элементов, то:

$$dx_1' = dx_0\left(1 + \frac{dU'}{dx_0}\right) + dy_0\frac{dU'}{dy_0} + dz_0\frac{dU'}{dz_0}$$

и, следовательно,

$$d\tau_1' = d\tau_0\left|1 + \frac{dU'}{dx_0}, \quad \frac{dU'}{dy_0}, \quad \frac{dU'}{dz_0}\right|,$$

где

$$d\tau_1' = dx_1'dy_1'dz_1'.$$

Но элемент электрического заряда равен

$$d\mu_1 = \rho_1 d\tau_1',$$

и сверх того *для наблюдаемого элемента* электрона $t_1 = t_1'$, а поэтому

$$\frac{dU'}{dx_0} = \frac{dU}{dx_0},$$

и т. д.

Мы можем следовательно написать

$$d\mu_1 = \rho_1 d\tau_0\left|1 + \frac{dU}{dx_0}, \quad \frac{dU}{dy_0}, \quad \frac{dU}{dz_0}\right|,$$

[1]) Пуанкаре пишет здесь: „молекулы электрона".

Прим. ред.

так что уравнения (3) и (2) перепишутся в виде

$$\rho_1 d\tau_1(1 + \omega) = d\mu_1, \qquad (3')$$

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{d\mu_1}{r(1+\omega)}, \qquad F = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\xi_1 d\mu_1}{r(1+\omega)}.$$

Когда мы имеем дело только с одним электроном, то наши интегралы сведутся к одному члену, если рассматривать только точки x, y, z, достаточно удаленные для того, чтобы r и ω имели тогда одно и то же значение для всех точек электрона. Потенциалы ψ, F, G, H зависят от положения этого электрона, а также от его скорости, ибо не только ξ_1, η_1, ζ_1 входят в числители выражений F, G, H, но в их знаменатели входит также и радиальная составляющая ω. Разумеется, речь идет о положении и скорости электрона в момент t_1.

Частные производные от ψ, F, G, H по t, x, y, z (а следовательно электрическое и магнитное поле) будут зависеть кроме того и от его ускорения; притом эта зависимость будет *линейной*, так как ускорение войдет в производные только от одного дифференцирования.

Ланжевен пришел таким образом к необходимости различать в электрическом и магнитном поле члены, не зависящие от ускорения (то, что он называет волной скорости) и члены, пропорциональные ускорению (волна ускорения).

Вычисление этих двух волн сильно упрощается благодаря преобразованию Лоренца. В самом деле, мы можем применить это преобразование к системе таким образом, чтобы скорость рассматриваемого электрона сделалась равной нулю. Выберем для оси x направление этой скорости до преобразования, так что в момент t_1,

$$\eta_1 = \zeta_1 = 0,$$

и положим $\varepsilon = -\xi_1$, так что

$$\xi_1' = \eta_1' = \zeta_1' = 0.$$

Мы можем таким образом свести вычисление двух волн к случаю, когда скорость электрона равна нулю. Начнем с волны скорости. Прежде всего заметим, что эта волна будет такой же, как и при равномерном движении электрона.

Если скорость электрона равна нулю, то

$$\omega = 0, \quad F = G = H = 0, \quad \psi = \frac{\mu_1}{4\pi r},$$

где μ_1 заряд электрона.

Так как скорость электрона сведена к нулю в результате преобразования Лоренца, то

$$F' = G' = H' = 0, \quad \psi' = \frac{\mu_1}{4\pi r'},$$

где r' расстояние между точками x', y', z' и x_1', y_1', z_1' и следовательно

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0,$$
$$f' = \frac{\mu_1 (x' - x_1')}{4\pi r'^3}, \quad g' = \frac{\mu_1 (y' - y_1')}{4\pi r'^3},$$
$$h' = \frac{\mu_1 (z' - z_1)}{4\pi r'^3}.$$

Для нахождения истинного поля, соответствующего скорости $-\varepsilon$, 0,0, применим теперь преобразование, обратное преобразованию Лоренца.

Обращаясь к уравнениям (9) и (3) § 1, находим

$$\alpha = 0, \quad \beta = \varepsilon h, \quad \gamma = -\varepsilon g,$$
$$f = \frac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3} (x + \varepsilon t - x_1 - \varepsilon t_1),$$
$$g = \frac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3} (y - y_1), \quad h = \frac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3} (z - z_1). \tag{4}$$

Легко видеть, что магнитное поле перпендикулярно к оси x (направлению скорости) и к электрическому полю, причем последнее направлено к точке

$$x_1 + \varepsilon (t_1 - t), \quad y_1, \quad z_1. \tag{5}$$

Если бы электрон продолжал двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью, которую он имел в момент t_1, т. е. со скоростью $-\varepsilon$, 0,0, то этой точки (5) он достиг бы в момент t.

Перейдем теперь к волне ускорения; благодаря преобразованию Лоренца мы можем свести ее определение к случаю, когда скорость равна нулю. Этот случай может быть осуществлен, если представить, что электрон совершает очень быстрые колебания весьма малой амплитуды, при этом перемещения и скорости будут бесконечно малыми, а ускорения — конечными. Таким образом мы приходим к случаю, изученному уже Герцем в его знаменитом мемуаре „Die Kräfte elektrischer Schwingungen nach der Maxwellschen Theorie“ („Силы электрических колебаний по теории Максвелла“) для очень удаленной точки. При этих условиях:

1) электрическое и магнитное поля будут равны друг другу,

2) взаимно перпендикулярны и

3) перпендикулярны к нормали волновой сферы, т. е. сферы с центром в точке x_1, y_1, z_1.

Я утверждаю, что эти три свойства будут иметь место также и тогда, когда скорость не будет равна нулю. Для этого мне достаточно показать, что они не изменяются от преобразования Лоренца.

В самом деле, пусть A есть общее напряжение обоих полей и пусть

$$(x - x_1) = r\lambda, \quad (y - y_1) = r\mu, \quad (z - z_1) = r\nu,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Указанные свойства выражаются равенствами

$$A^2=\sum f^2=\sum \alpha^2, \quad \sum f\alpha=0,$$
$$\sum f(x-x_1)=0, \quad \sum \alpha(x-x_1)=0,$$
$$\sum f\lambda=0, \quad \sum \alpha\lambda=0,$$

причем

$$\begin{array}{ccc} \frac{f}{A}, & \frac{g}{A}, & \frac{h}{A}, \\ \frac{\alpha}{A}, & \frac{\beta}{A}, & \frac{\gamma}{A}, \\ \lambda, & \mu, & \nu, \end{array}$$

будут направляющими косинусами трех перпендикулярных направлений.

Отсюда получаем соотношения:

$$f=\beta\nu-\gamma\mu, \quad \alpha=h\mu-g\nu,$$

или

$$\begin{aligned} fr&=\beta(z-z_1)-\gamma(y-y_1),\\ \alpha r&=h(y-y_1)-g(z-z_1), \end{aligned} \tag{6}$$

а также и другие уравнения, выводимые по симметрии

Обращаясь к уравнениям (3) § 1, мы найдем

$$\left.\begin{aligned} x'-x_1'&=kl[(x-x_1)+\varepsilon(t-t_1)]=\\ &=kl[(x-x_1)+\varepsilon r],\\ y'-y_1'&=l(y-y_1),\\ z'-z_1'&=l(z-z_1). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Мы нашли выше в § 3:

$$l^4\left(\sum f'^2-\sum \alpha'^2\right)=\sum f^2-\sum \alpha^2.$$

Следовательно, равенство $\sum f^2=\sum \alpha^2$ влечет за собой $\sum f'^2=\sum \alpha'^2$. С другой стороны, исходя из уравнений (9) § 1, получаем соотношение, которое показывает, что если $\sum f\alpha=0$, то $\sum f'\alpha'=0$.

Я утверждаю теперь, что

$$\sum f'(x'-x_1')=0, \quad \sum \alpha'(x'-x_1')=0. \tag{8}$$

В самом деле, в силу (7), а также (9) § 1, левые члены обоих уравнений (8) перепишутся соответственно в виде:

$$\frac{k}{l}\sum f(x-x_1)+\frac{k\varepsilon}{l}\,[fr+\gamma(y-y_1)-\beta(z-z_1)]$$
$$\frac{k}{l}\sum \alpha(x-x_1)+\frac{k\varepsilon}{l}\,[\alpha r-h(y-y_1)+g(z-z_1)].$$

но, согласно уравнениям

$$\sum f(x-x_1)=\sum \alpha(x-x_1)=0,$$

а также уравнениям (6), — они обращаются в нуль, что как раз и нужно было показать.

Впрочем, к этому же результату можно притти, исходя из простых соображений однородности.

В самом деле, ψ, F, G, H суть однородные функции от

$$x-x_1, \quad y-y_1, \quad z-z_1, \quad \xi_1=\frac{dx_1}{dt_1},$$
$$\eta_1=\frac{dy_1}{dt_1}, \quad \zeta_1=\frac{dt}{dt_1},$$

степени -1 относительно x, y, z, t, x_1, y_1, z_1, t_1 и их дифференциалов.

Таким образом, производные ψ, F, G, H по x, y, z, t (а следовательно оба поля f, g, h и α, β, γ) будут однородными функциями степени -2 относительно

тельно тех же величин, если мы вспомним при этом что соотношение

$$t - t_1 = r = \sqrt{\sum (x - x_1)^2}$$

однородно первой степени относительно этих величин.

Но эти производные или поля зависят от $x - x_1$, скоростей $\frac{dx_1}{dt_1}$ и ускорений $\frac{d^2x_1}{dt_1^2}$; они составлены из члена, независящего от ускорений (волна скорости) и члена, линейного относительно ускорений (волна ускорений). Производная $\frac{dx_1}{dt_1}$ есть однородная функция степени 0, а $\frac{d^2x_1}{dt_1^2}$ степени — 1; откуда следует, что волна скорости есть однородная функция степени — 2 относительно $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, а волна ускорения — однородная функция степени — 1. Таким образом, в весьма удаленной точке, преобладает волна ускорения, которую можно рассматривать, следовательно, как полную волну.

Кроме того, закон однородности показывает нам, что волна ускорения в произвольной точке подобна самой себе в удаленной точке и, следовательно, подобна полной волне в удаленной точке. Но так как в удаленной точке возмущение может распространяться только в виде плоских волн, то оба поля должны быть равны друг другу, взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к направлению распространения.

Я ограничусь этими соображениями, отсылая интересующихся деталями к мемуару Ланжевена (Journal de Physique, 1905).

§ 6. Сокращение электронов.

Представим себе электрон, находящийся в равномерном и прямолинейном поступательном движении.

Согласно указанному выше можно — при помощи преобразования Лоренца — свести изучение поля, обусловленного этим электроном, к случаю неподвижного электрона; таким образом, преобразование Лоренца заменяет реальный движущийся электрон некоторым воображаемым неподвижным электроном.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma; f, g, h$ реальное поле, и $\alpha', \beta', \gamma'; f', g', h'$ поле, получающееся после преобразования Лоренца, т. е. соответствующее неподвижному электрону.

Тогда имеем

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0,$$
$$f' = -\frac{d\psi'}{dx'},$$
$$g' = -\frac{d\psi'}{dy'}, \quad h' = -\frac{d\psi'}{dz'};$$

и для реального поля (согласно ф-лам 9 § 1):

$$\left.\begin{aligned} \alpha = 0, \quad & \beta = \varepsilon h, \quad \gamma = -\varepsilon g, \\ f = l^2 f', \quad & g = kl^2 g', \quad h = kl^2 h'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Определим сейчас полную энергию движения электрона, а также соответствующее действие и электромагнитное количество движения, чтобы затем перейти к вычислению электромагнитных масс электрона. Для удаленной точки достаточно рассматривать электрон в виде одной точки; таким образом можно свести все вычисление к формулам (4) предыдущего параграфа, которые, вообще говоря, окажутся пригодными. Однако, здесь они будут недостаточны, так как энергия локализуется главным образом в наиболее близких к электрону частях эфира.

Относительно этого пункта можно высказать несколько гипотез.

Согласно Абрагаму электроны представляются сферическими и недеформируемыми.

Тогда, применяя преобразование Лоренца, мы видим, что если реальный электрон был сферическим, то воображаемый становится эллипсоидом. Уравнение этого эллипсоида, согласно § 1, имеет вид

$$k^2(x'-\varepsilon t'-\xi t'+\varepsilon\xi x')^2+(y'-\eta kt'+\eta k\varepsilon x')^2+$$
$$+(z'-\zeta kt'+\zeta k\varepsilon x')^2=l^2r^2.$$

Но в данном случае

$$\xi+\varepsilon=\eta=\zeta=0,\qquad 1+\varepsilon\xi=1-\varepsilon^2=\frac{1}{k^2},$$

так что уравнение эллипсоида принимает следующий вид:

$$\frac{x'^2}{k^2}+y'^2+z'^2=l^2r^2.$$

Если радиус реального электрона есть r, то полуоси воображаемого электрона равны klr, lr, lr.

Напротив, по гипотезе Лоренца электроны при движении деформируются таким образом, что реальный электрон становится эллипсоидом, в то время как воображаемый покоящийся электрон всегда представляется шаром радиуса r; тогда полуоси реального электрона равны:

$$\frac{r}{lk},\quad \frac{r}{l},\quad \frac{r}{l}.$$

Назовем выражения:

$$A=\frac{1}{2}\int f^2 d\tau$$

продольной электрической энергией,

$$B=\frac{1}{2}\int(g^2+h^2)\,d\tau$$

поперечной электрической энергией и

$$C=\frac{1}{2}\int(\beta+\gamma^2)\,d\tau$$

поперечной магнитной энергией.

Продольной магнитной энергии не существует, так как $\alpha=\alpha'=0$.

Обозначим через A', B', C' соответствующие величины в преобразованной системе.

Прежде всего находим

$$C'=0,\quad C=\varepsilon^2B.$$

С другой стороны, замечая, что реальное поле зависит только от $x+\varepsilon t$, y, z, мы можем написать

$$d\tau=d(x+\varepsilon t)\,dxdz,$$
$$d\tau'=dx'dy'dz'=kl^3d\tau,$$

откуда

$$A'=kl^{-1}A,\quad B'=k^{-1}l^{-1}B,$$
$$A=lk^{-1}A',\quad B=klB'.$$

В гипотезе Лоренца $B'=2A'$, где A' постоянная, обратно пропорциональная радиусу электрона и не зависящая от скорости реального электрона.

Таким образом для полной энергии получаем:

$$A+B+C=A'lk(3+\varepsilon^2),$$

и для действия (в единицу времени):

$$A+B-C=3\frac{A'l}{k}.$$

Далее, для электромагнитного количества движения находим

$$D=\int(g\gamma-h\beta)\,d\tau=-\varepsilon\int(g^2+h^2)\,d\tau=$$
$$=-2\varepsilon B=-4\varepsilon klA'.$$

Но между энергией $E=A+B+C$, действием $H=A+B-C$ и количеством движения D должны существовать некоторые соотношения.

Первое из них имеет вид:

$$E = H - \varepsilon \frac{dH}{d\varepsilon},$$

а второе

$$\frac{dD}{d\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{dE}{d\varepsilon};$$

откуда

$$D = \frac{dH}{d\varepsilon}, \quad E = H - \varepsilon D. \tag{2}$$

Второе из уравнений (2) удовлетворяется всегда, первое же только в том случае, если

$$l = (1 - \varepsilon^2)^{1/6} = k^{-1/3},$$

т. е. если объем воображаемого электрона равен объему действительного электрона или иначе, если объем электрона постоянен. В этом состоит гипотеза Ланжевена.

Это находится в противоречии с результатом § 4 и с результатом, полученным иным путем Лоренцом. Займемся выяснением этого противоречия.

Но прежде чем приступить к этому выяснению заметим, что какую бы гипотезу мы ни приняли, мы всегда будем иметь

$$H = A + B - C = \frac{l}{k}(A' + B'),$$

или, так как $C' = 0$,

$$H = \frac{l}{k} H'. \tag{3}$$

Этот результат можно сопоставить с уравнением $J = J'$, полученным в § 3.

В самом деле, мы имеем:

$$J = \int H dt, \; J' = \int H' dt'.$$

Замечая, что состояние системы зависит только от $x + \varepsilon t$, y, z, т. е. от x', y', z', получим

$$t' = \frac{l}{k} t + \varepsilon x',$$

$$dt' = \frac{l}{k} dt. \tag{4}$$

Сопоставляя уравнения (3) и (4) находим, что

$$J = J'.$$

Примем какую-нибудь гипотезу, будь это гипотеза Лоренца, Абрагама, Ланжевена, или какая-нибудь промежуточная гипотеза.

Пусть r, θr, θr будут три полуоси реального электрона; для воображаемого электрона они превратятся в

$$klr, \quad \theta lr, \quad \theta lr.$$

Тогда $A' + B'$ будет электростатической энергией эллипсоида с осями klr, θlr, θlr.

Если предположить, что электричество распределено на поверхности электрона, как на проводнике, или равномерно распределено внутри этого электрона, то энергия примет вид

$$A' + B' = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{klr},$$

где φ считается известной функцией.

Гипотеза Абрагама состоит в предположении

$$r = \text{const}, \quad \theta = 1.$$

Согласно же Лоренцу

$$l = 1, \quad kr = \text{const}, \quad \theta = k.$$

Наконец, согласно Ланжевену

$$l = k^{-\frac{1}{3}}, \quad k = \theta, \quad klr = \text{const}.$$

Далее находим

$$H = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{k^2 r}.$$

Абрагам, в иных обозначениях, получает (Göttinger Nachrichten, 1902, стр. 37):

$$H = \frac{a}{r} \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \lg \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

где a постоянная. Но по гипотезе Абрагама $\theta = 1$; поэтому получаем следующее уравнение, определяющее функцию φ:

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = ak^2 \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \lg \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{a}{\varepsilon} \lg \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}. \tag{5}$$

Установив это, представим себе, что электрон подвержен такой связи, что между r и θ существует некоторое соотношение; по гипотезе Лоренца, это соотношение имело бы вид $\theta r = \text{const}$, а по Ланжевену $\theta^2 r^3 = \text{const}$.

Мы предположим более общий вид:

$$r = b\theta^m,$$

где b — постоянная.

Откуда

$$H = \frac{1}{bk^2} \theta^{-m} \varphi\left(\frac{\theta}{k}\right).$$

Какую форму примет электрон при скорости, равной — ε, *если предположить, что кроме сил связи на него не действуют никакие силы?*

Эта форма определяется равенством:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \tag{6}$$

или

$$-m\theta^{-m-1}\varphi + \theta^{-m} k^{-1} \varphi' = 0,$$

или

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{mk}{\theta}.$$

Если мы желаем, чтобы имело место такое равновесие, при котором $\theta = k$, необходимо, чтобы при $\frac{\theta}{k} = 1$ логарифмическая производная φ была равна m.

Разлагая $\frac{1}{k}$ и правую часть (5) в ряд по степеням ε и пренебрегая высшими степенями ε, получим

$$\varphi\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = a\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3}\right).$$

Дифференцируя, будем иметь:

$$-\varepsilon\varphi'\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon a.$$

Для $\varepsilon = 0$, т. е. когда аргумент φ равен 1, эти уравнения принимают вид:

$$\varphi = a, \quad \varphi' = -\frac{2}{3}a, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{2}{3}. \tag{7}$$

Итак, в согласии с гипотезой Ланжевена должно иметь место $m = -\frac{2}{3}$.

Этот результат должен быть согласован с соответствующим выводом первого уравнения (2), от которого он в сущности не отличается. В самом деле, предположим, что на каждый элемент dt электрона действует сила $Xd\tau$, параллельная оси X, причем X одно и то же для всех элементов.

Тогда, по определению количества движения, будем иметь

$$\frac{dD}{dt}=\int Xd\tau.$$

С другой стороны, принцип наименьшего действия дает нам:

$$\delta J=\int X\delta U d\tau dt,\quad J=\int Hdt,\quad \delta J=\int D\delta U dt,$$

где δU перемещение центра тяжести электрона; H зависит от θ и ε, если r и θ связаны друг с другом уравнением связи.

Поэтому имеем:

$$\delta J=\int\left(\frac{\partial H}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon+\frac{\partial H}{\partial\theta}\delta\theta\right)dt.$$

С другой стороны,

$$\delta\varepsilon=-\frac{d\delta U}{dt};$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\int D\delta\varepsilon dt=\int D\delta U dt,$$

$$\int\left(\frac{\partial H}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon+\frac{\partial H}{\partial\theta}\delta\theta\right)dt=\int D\delta\varepsilon dt;$$

отсюда

$$D=\frac{\partial H}{\partial\varepsilon},\quad \frac{\partial H}{\partial\theta}=0.$$

Но производная $\frac{dH}{d\varepsilon}$, входящая в правую часть уравнения (2), взята в предположении, что θ есть функция от ε, поэтому

$$\frac{dH}{d\varepsilon}=\frac{\partial H}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial H}{\partial\theta}\frac{d\theta}{d\varepsilon}.$$

Таким образом уравнение (2) эквивалентно уравнению (6).

Мы заключаем, что, если на три оси электрона наложена некоторая связь, и *если кроме сил связи нет никакой другой силы*, то форма, которую примет электрон при равномерном движении, только тогда будет сфероид для соответствующего воображаемого электрона, когда связь приведет к постоянству объема, в согласии с гипотезой Ланжевена.

Мы пришли таким образом к постановке следующей задачи: какими будут те дополнительные силы кроме сил связи, которые необходимо ввести для того, чтобы прийти к закону Лоренца или, в более общем случае, любому закону, отличному от закона Ланжевена?

Самая простая гипотеза и первая из тех, которые мы должны рассмотреть, состоит в том, что эти дополнительные силы происходят от некоторого потенциала, зависящего от трех осей эллипсоида и, следовательно, от θ и r. Пусть $F(\theta, r)$ будет этим потенциалом.

В этом случае действие

$$J=\int[H+(\theta,\ r)]\ dt,$$

и условия равновесия напишутся в виде:

$$\frac{dH}{d\theta}+\frac{dF}{d\theta}=0,\quad \frac{dH}{dr}+\frac{dF}{dr}=0. \tag{8}$$

Предполагая, что r и θ связаны друг с другом соотношением $r=b\theta^m$, мы можем рассматривать r как функцию от θ, считая таким образом, что F зависит только от θ, и сохранить только первое из уравнений (8), где

$$H=\frac{\varphi}{bk^2\theta^m},\quad \frac{dH}{d\theta}=\frac{-m\varphi}{bk^2\theta^{m+1}}+\frac{\varphi'}{bk^3\theta^m}.$$

Необходимо, чтобы уравнение (8) удовлетворялось при $k=\theta$; принимая во внимание уравнения (7), это дает:

$$\frac{dF}{d\theta}=\frac{ma}{b\theta^{m+3}}+\frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}},$$

откуда

$$F=\frac{-a}{b\theta^{m+2}}\frac{m+\frac{2}{3}}{m+2},$$

и по гипотезе Лоренца, где $m=-1$:

$$F=\frac{a}{3b\theta}.$$

Допустим, теперь, что не имеется никакой связи, т. е. будем рассматривать r и θ как независимые переменные; в таком случае сохраняются оба уравнения (8), причем

$$H=\frac{\varphi}{k^2 r},\quad \frac{dH}{d\theta}=\frac{\varphi'}{k^2 r},\quad \frac{dH}{dr}=\frac{-\varphi}{k^2 r^2}.$$

Уравнения (8) должны удовлетворяться при $k=\theta$ и $r=b\theta^m$; это дает

$$\frac{dF}{dr}=\frac{a}{b^2\theta^{2m+2}},\quad \frac{dF}{d\theta}=\frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}}. \tag{9}$$

Один из способов удовлетворить этим условиям состоит в том, что мы полагаем

$$F=Ar^{\alpha}\theta^{\beta}, \tag{10}$$

где A, α и β — постоянные.

Уравнения (9) должны удовлетворяться при $k=\theta$ и $r=b\theta^m$, что дает:

$$A\alpha b^{\alpha-1}\theta^{m\alpha-m+\beta}=\frac{a}{b^2\theta^{2m+2}},\quad A\beta b^{\alpha}\theta^{m\alpha+\beta-1}=\frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}}.$$

Отождествляя, находим

$$\alpha=3\gamma,\quad \beta=2\gamma,\quad \gamma=-\frac{m+2}{3m+2},\quad A=\frac{a}{\alpha b^{\alpha+1}}.$$

Но объем эллипсоида пропорционален $r^3\theta^2$, поэтому добавочный потенциал пропорционален степени γ объема электрона.

Гипотезе Лоренца соответствует $m=-1$, $\gamma=1$.

Таким образом мы приходим к *гипотезе Лоренца, при условии присоединения добавочного потенциала, пропорционального объему электрона.*

Гипотеза Ланжевена соответствует случаю $\gamma=\infty$.

§ 7. Квазистационарное движение.

Остается рассмотреть, учитывает ли эта гипотеза о сокращении электронов невозможность наблюдать абсолютное движение; для этого мы начнем со случая квазистационарного движения электрона, свободного или подверженного только действию других удаленных электронов.

Известно, что квазистационарным движением называется такое движение, при котором изменения скорости настолько медленны, что энергии — электрическая и магнитная — мало отличаются от соответствующих значений для равномерного движения. Известно также, что исходя из этого определения квазистационарного движения, Абрагам пришел к установлению понятий электромагнитных масс — продольной и поперечной.

Уточним эти понятия. Пусть действие за единицу времени равно

$$H=\frac{1}{2}\int\left(\sum f^2-\sum\alpha^2\right)d\tau,$$

где для данного момента мы рассматриваем электрическое и магнитное поля, обусловленные только движением свободного электрона. В предыдущем параграфе, рассматривая движение как равномерное, мы считали, что H зависит от скорости ξ, η, ζ центра тяжести (эти три составляющие имели в предыдущем параграфе значения — ε, 0, 0) и от параметров r и θ, определяющих форму электрона.

Но если движение неравномерно, то H будет зависеть от значений $\xi, \eta, \zeta, r, \theta$ не только в данный момент, но и от значений этих величин в другие моменты; последние могут отличаться от данного момента на величину, порядок которой равен времени, необходимому для прохождения света от одной точки электрона к другой. Иными словами, H будет зависеть не только от $\xi, \eta, \zeta, r, \theta$, но и от их производных всех порядков по времени.

Движение будет квазистационарным тогда, когда последовательными частными производными H по производным $\xi, \eta, \zeta, r, \theta$ можно пренебречь по сравнению с частными производными H по самим величинам $\xi, \eta, \zeta, r, \theta$.

Уравнения такого движения можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dH}{d\theta}+\frac{dF}{d\theta}=\frac{dH}{d\tau}+\frac{dF}{dr}=0,\\ &\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi}=-\int X d\tau, \qquad \frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta}=-\int Y d\tau,\\ &\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\zeta}=-\int Z d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

В этих уравнениях F имеет то же значение, что и в предыдущем параграфе. X, Y, Z суть составляющие силы, действующей на электрон; эта сила происходит только от электрического и магнитного полей, обусловленных *другими* электронами.

Заметим, что H зависит от ξ, η, ζ только через промежуточную функцию

$$V=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

т. е. через скорость.

Следовательно, обозначая через D количество движения, имеем:

$$\frac{dH}{d\xi}=\frac{dH}{dV}\frac{\xi}{V}=-D\frac{\xi}{V},$$

откуда

$$-\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi}=\frac{D}{V}\frac{d\xi}{dt}-D\frac{\xi}{V^2}\frac{dV}{dt}+\frac{dD}{dV}\frac{\xi}{V}\frac{dV}{dt}, \tag{2}$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta}=\frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt}-D\frac{\eta}{V^2}\frac{dV}{dt}+\frac{dD}{dV}\frac{\eta}{V}\frac{dV}{dt}, \tag{3}$$

где

$$V\frac{dV}{dt}=\sum\xi\frac{d\xi}{dt}. \tag{4}$$

Полагая, что истинное направление скорости совпадает с осью x, получим:

$$\xi=V, \qquad \eta=\zeta=0, \qquad \frac{d\xi}{dt}=\frac{dV}{dt};$$

в соответствии с этим уравнения (2) и (2′) примут вид:

$$-\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi}=\frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt}, \qquad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta}=\frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt},$$

а три последние уравнения (1):

$$\frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt}=\int X d\tau, \qquad \frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt}=\int Y d\tau, \qquad \frac{D}{V}\frac{d\zeta}{dt}=\int Z d\tau.$$

Вот почему Абрагам дал величине $\frac{dD}{dV}$ название *продольной массы*, а $\frac{D}{V}$ — *поперечной массы*; напомним, что $D=\frac{dH}{dV}$.

По гипотезе Лоренца имеем:

$$D=-\frac{dH}{dV}=-\frac{\partial H}{\partial V},$$

где $\frac{\partial H}{\partial V}$ представляет производную по V, после того, как r и θ заменены в функции V их значениями, полученными из первых двух уравнений (1).

После этой подстановки имеем

$$H=+A\sqrt{1-V^2}.$$

Выберем единицы таким образом, чтобы постоянный множитель A был равен 1; я полагаю также

$$\sqrt{1-V^2}=h,$$

откуда

$$H=+h,\quad D=\frac{V}{h},\quad \frac{dD}{dV}=h^{-3},\quad \frac{dD}{dV}\frac{1}{V^3}-\frac{D}{V^3}=h^{-3}.$$

Положим далее

$$M=V\frac{dV}{dt}=\sum\xi\frac{d\xi}{dt},\qquad X_1=\int X d\tau.$$

Следовательно, для уравнения квазистационарного движения получаем

$$h^{-1}\frac{d\xi}{dt}+h^{-3}\xi M=X_1. \tag{5}$$

Посмотрим, как изменятся эти уравнения от преобразования Лоренца.

Полагая $1+\xi\varepsilon=\mu$, будем иметь прежде всего

$$\mu\xi'=\xi+\varepsilon,\qquad \mu\eta'=\frac{\eta}{k},\qquad \mu\zeta'=\frac{\zeta}{k},$$

откуда легко получаем

$$\mu h'=\frac{h}{k}.$$

Мы имеем также

$$dt'=k\mu dt,$$

откуда

$$\frac{d\xi'}{dt'}=\frac{d\xi}{dt}\frac{1}{k^3\mu^3},\qquad \frac{d\eta'}{dt'}=\frac{d\eta}{dt}\frac{1}{k^2\mu^2}-\frac{d\xi}{dt}\frac{\eta\varepsilon}{k^2\mu^3},$$

$$\frac{d\zeta'}{dt'}=\frac{d\zeta}{dt}\frac{1}{k^2\mu^2}-\frac{d\xi}{dt}\frac{\zeta\varepsilon}{k^2\mu^3},$$

и

$$M'=\frac{d\xi}{dt}\frac{\varepsilon h^2}{k^3\mu^4}+\frac{M}{k^3\mu^3};$$

$$h'^{-1}\frac{d\xi'}{dt'}+h'^{-3}\xi'M'=\left[h^{-1}\frac{d\xi}{dt}+h^{-3}(\xi+\varepsilon)M\right]\mu^{-1}, \tag{6}$$

$$h'^{-1}\frac{d\eta'}{dt'}+h'^{-3}\eta'M'=\left(h^{-1}\frac{d\eta}{dt}+h^{-3}\eta M\right)\mu^{-1}h^{-1}. \tag{7}$$

Обратимся к уравнениям (11) § 1; можно считать, что X, Y, Z имеют в них то же значение, что и в уравнениях (5). С другой стороны, мы имеем $l=1$ и $\frac{\rho'}{\rho}=k\mu$; поэтому эти уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} X_1'&=\mu^{-1}\left(X_1+\varepsilon\sum X_1\xi\right),\\ Y_1'&=k^{-1}\mu^{-1}Y_1.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Вычисляя $\sum X_1\xi$ при помощи уравнения (5), находим:

$$\sum X_1\xi=h^{-3}M,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} X_1'&=\mu^{-1}(X_1+\varepsilon h^{-3}M),\\ Y'&=k^{-1}\mu^{-1}Y_1.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Сравнивая уравнения (5), (6), (7) и (9), находим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} h'^{-1}\frac{d\xi'}{dt'}+h'^{-3}\xi' M' &= X_1', \\ h'^{-1}\frac{d\eta'}{dt'}+h'^{-3}\,\eta' M' &= Y_1', \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

а это показывает, что уравнения квазистационарного движения не изменяются от преобразования Лоренца; однако это еще не значит, что только гипотеза Лоренца приводит к этому результату.

Для того, чтобы обосновать это положение, мы ограничимся, как это сделал Лоренц, некоторыми частными случаями, рассмотрение которых будет очевидно достаточным для доказательства обратной теоремы.

Прежде всего посмотрим, каким образом мы обобщим гипотезы, на которых основано предыдущее вычисление.

1. Вместо того, чтобы полагать в преобразовании Лоренца $l=1$, мы будем считать l произвольным.

2. Вместо того, чтобы предполагать, что F пропорционально объему и, следовательно, H пропорционально h, мы положим, что F есть произвольная функция от θ и r [после замены θ и r их значениями в функции V, полученными из первых двух ур-ний (1)], так что H будет произвольной функцией от V.

Замечу прежде всего, что если положить $H=h$, то $l=1$ и уравнения (6) и (7) действительно удовлетворяются, если только правые части помножить на $\frac{1}{l}$; так же точно, как и уравнения (9), если их правые части помножить на $\frac{1}{l^2}$, и наконец уравнения (10), если правые части будут умножены на $\frac{1}{l}$.

Таким образом, если мы желаем, чтобы уравнения движения не изменялись от преобразования Лоренца, т. е. чтобы уравнения (10) отличались от уравнений (5) только штрихами у букв, необходимо положить

$$l=1.$$

Предположим теперь, что

$$\eta=\zeta=0,$$

откуда

$$\xi=V, \qquad \frac{d\xi}{dt}=\frac{dV}{dt};$$

уравнения (5) примут вид

$$-\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi}=\frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt}=X_1, \qquad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta}=\frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt}=Y_1. \qquad (5')$$

Мы можем кроме того положить

$$\frac{dD}{dV}=f(V)=f(\xi), \qquad \frac{D}{V}=\varphi(V)=\varphi(\xi).$$

Если уравнения движения не изменяются от преобразования Лоренца, то должно иметь место

$$f(\xi)\frac{d\xi}{dt}=X_1,$$

$$\varphi(\xi)\frac{d\eta}{dt}=Y_1,$$

$$f(\xi')\frac{d\xi'}{dt'}=X_1'=l^{-2}\mu^{-1}\left(X_1+\varepsilon\sum X_1\xi\right)=$$

$$=l^{-2}\mu^{-1}X_1(1+\varepsilon\xi)=l^{-2}X_1,$$

$$\varphi(\xi')\frac{d\eta'}{dt'}=Y_1'=l^{-2}k^{-1}\mu^{-1}Y_1,$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} f(\xi)\frac{d\xi}{dt} &= l^2 f(\xi')\frac{d\xi'}{dt'}, \\ \varphi(\xi)\frac{d\eta}{dt} &= l^2 k\mu\varphi(\xi')\frac{d\eta'}{dt'}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Но мы имеем

$$\frac{d\xi'}{dt'} = \frac{d\xi}{dt}\,\frac{1}{k^3\mu^3}, \qquad \frac{d\eta'}{dt'} = \frac{d\eta}{dt}\,\frac{1}{k^2\mu^2},$$

откуда

$$f(\xi') = f\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = f(\xi)\,\frac{k^3\mu^3}{l^2},$$

$$\varphi(\xi') = \varphi\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = \varphi(\xi)\,\frac{k\mu}{l^2};$$

отсюда, исключая l^2, получаем следующее функциональное уравнение:

$$k^2\mu^2\,\frac{\varphi\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right)}{\varphi(\xi)} = \frac{f\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right)}{f(\xi)},$$

или, полагая

$$\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \Omega(\xi) = \frac{D}{V\frac{dD}{dV}},$$

получаем уравнение

$$\Omega\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = \Omega(\xi)\,\frac{1+\varepsilon^2}{(1+\xi\varepsilon)^2},$$

которое должно удовлетворяться при всех значениях ξ и ε. Для $\xi = 0$ будет

$$\Omega(\varepsilon) = \Omega(0)(1-\varepsilon^2),$$

откуда

$$D = A\left(\frac{V}{\sqrt{1-V^2}}\right)^m,$$

где A постоянная и $\Omega(0)$ положено равным $\frac{1}{m}$.

Теперь находим

$$\varphi(\xi) = \frac{A}{\xi}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^m,$$

$$\varphi(\xi') = \frac{A\mu}{\xi+\varepsilon}\left(\frac{\xi+\varepsilon}{\sqrt{1-\xi^2}\,\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^m.$$

Но $\varphi(\xi') = \varphi(\xi)\frac{k\mu}{l^2}$; следовательно

$$(\xi+\varepsilon)^{m-1}(1-\varepsilon^2)^{-\frac{m}{2}} = -\xi^{m-1}(1-\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}\,l^{-2}.$$

Ввиду того, что l должно зависеть только от ε (так как при наличии нескольких электронов l должно иметь одно и то же значение для всех электронов, скорости ξ которых могут быть различными), то это тождество может иметь место только при

$$m = 1, \qquad l = 1.$$

Итак, гипотеза Лоренца будет единственной, которая согласуется с невозможностью доказательства абсолютного движения; допуская эту невозможность, необходимо принять, что электроны при своем движении сокращаются и превращаются в эллипсоиды вращения, у которых две оси остаются постоянными; следовательно, как мы показали в предыдущем параграфе, необходимо допустить существование добавочного потенциала, пропорционального объему электрона.

Таким образом, результаты Лоренца полностью подтверждаются; однако мы можем еще убедиться в действительной причине исследуемого нами обстоятельства; эту причину следует искать в рассуждениях § 4.

Преобразования, не изменяющие уравнения движения, должны составлять группу, а это может иметь место только при $l=1$.

Так как мы не можем узнать, находится ли электрон в состоянии покоя или в состоянии абсолютного движения, то необходимо, чтобы при своем движении он подвергался деформации, которая должна быть точно такой, какая предписывается ему соответствующим преобразованием группы.

§ 8. Произвольное движение.

Предыдущие результаты применимы только к квазистационарному движению, однако их можно легко распространить на общий случай; для этого достаточно применить сказанное в § 3, т. е. исходить из принципа наименьшего действия.

Прибавим к выражению для действия

$$J=\int dt d\tau\left(\frac{\sum f^2}{2}-\frac{\sum \alpha^2}{2}\right)$$

член, представляющий добавочный потенциал F (§ 6); этот член очевидно принимает вид:

$$J=\int \sum (F)\, dt,$$

где $\sum (F)$ представляет сумму добавочных потенциалов, происходящих от различных электронов, каждый из которых пропорционален объему соответствующего электрона.

Мы пишем (F) в скобках для того, чтобы не смешивать его с вектором F, G, H.

Тогда полное действие равно $J+J_1$. В § 3 мы видели, что J не изменяется от преобразования Лоренца; покажем теперь, что то же относится и к J_1.

Для каждого из электронов имеем

$$(F)=\omega_0\tau,$$

где ω_0 коэффициент, характеризующий данный электрон, а τ его объем; поэтому мы можем написать:

$$\sum (F)=\int \omega_0 d\tau.$$

Интеграл здесь должен быть распространен по всему пространству и при том так, чтобы коэффициент ω_0 вне электронов был равен нулю, а внутри каждого электрона — коэффициенту, характеризующему этот электрон.

В таком случае имеем

$$J_1=\int \omega_0 d\tau dt,$$

и после преобразования Лоренца

$$J_1'=\int \omega_0' d\tau' dt'.$$

Но $\omega_0=\omega_0'$, ибо если точка принадлежит электрону, то соответствующая точка после преобразования Лоренца также принадлежит *тому же самому* электрону. С другой стороны, в § 3 мы нашли:

$$d\tau' dt' = l^4 d\tau dt$$

и, так как мы полагаем здесь $l=1$,

$$d\tau' dt' = d\tau dt.$$

Таким образом имеем

$$J_1=J_1'.$$

Следовательно, наша теорема является общей; одновременно она дает нам решение поставленного в конце § 1 вопроса: найти добавочные силы, не изменяющиеся от преобразования Лоренца. Добавочный потенциал (F) удовлетворяет этому условию.

Таким образом, мы можем обобщить результат, полученный в конце § 1, и сказать:

Если инерция электронов имеет исключительно электромагнитное происхождение и если электроны подвержены действию только электромагнитных сил или сил, вызываемых добавочным потенциалом (F), то никакой опыт не в состоянии показать наличие абсолютного движения.

Каковы же те силы, которые вызываются потенциалом (F)? Они, очевидно, могут быть уподоблены давлению, господствующему внутри электрона; все происходит так, как если бы каждый электрон был полым пространством, находящимся под постоянным внутренним давлением (независимым от объема); работа такого давления была бы очевидно пропорциональна изменениям объема.

Я должен заметить однако, что это давление отрицательно. Обратимся к уравнению (10) § 6. По гипотезе Лоренца, оно перепишется в виде

$$F = Ar^3\theta^2.$$

Уравнения (11) § 6 дадут нам

$$A = \frac{a}{3b^4}.$$

Наше давление равно A с точностью до постоянного коэффициента, который отрицателен.

Вычислим теперь массу электрона, я имею в виду

„экспериментальную массу", т. е. массу при малых скоростях.

Согласно § 6 имеем:

$$H = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{k^2 r}, \quad \theta = k, \quad \varphi = a, \quad \theta r = b,$$

откуда

$$H = \frac{a}{bk} = \frac{a}{b}\sqrt{1 - V^2}.$$

Для очень малого V можно написать

$$H = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{V^2}{2}\right).$$

Таким образом масса, как продольная, так и поперечная, равна $\frac{a}{b}$. Но a есть численная постоянная, и это показывает, что: *давление, обусловленное нашим добавочным потенциалом, пропорционально четвертой степени экспериментальной массы электрона.*

Так как ньютоновское притяжение также пропорционально этой экспериментальной массе, то является искушение заключить, что между причиной, вызывающей тяготение, и причиной, порождающей этот добавочный потенциал, существует некоторое соотношение.

§ 9. Гипотезы о тяготении.

Итак, теория Лоренца полностью объясняет невозможность показать опытным путем наличие абсолютного движения в случае, если все силы будут электромагнитного происхождения.

Однако, существуют силы, которым нельзя приписать электромагнитное происхождение, как, например, силы тяготения. В самом деле, может случиться, что две системы тел порождают эквивалентные электромагнитные поля, т. е. оказывают одинаковое действие на наэлектризованные тела и токи, но что однако эти две системы оказывают различное гравитационное действие на ньютоновские массы.

Следовательно, поле тяготения отличается от электромагнитного поля. Поэтому Лоренц вынужден был дополнить свою гипотезу предположением, *что силы любого происхождения и в частности силы тяготения ведут себя при поступательном движении* (или, если угодно, при преобразовании Лоренца), *совершенно так же, как электромагнитные силы.*

Нам необходимо теперь заняться более детальным рассмотрением этой гипотезы. Если мы желаем, чтобы ньютоновская сила вела себя указанным образом при преобразовании Лоренца, то мы уже не можем предполагать, что эта сила зависит только от относительного положения двух притягивающихся тел в рассматриваемый момент. Она должна зависеть кроме того от скоростей обоих тел. Но это не все: естественно предположить, что если сила, действующая в момент t на притягиваемое тело, зависит от положения и скорости этого тела в этот же момент, то она зависит кроме того от положения и скорости *притягивающего* тела, но уже не в момент t, а *в предшествующий момент*, как если бы силы тяготения требовали некоторого времени для своего распространения.

Будем рассматривать, таким образом, положение притягиваемого тела в момент t_0 и пусть x_0, y_0, z_0 будут его координаты в этот момент, а ξ, η, ζ — составляющие его скорости. Рассмотрим, с другой стороны, притягивающее тело в момент $t_0 + t$ и пусть в этот момент его координатами будут x_0+x, y_0+y, $z_0 + z$, а составляющими скорости ξ_1, η_1, ζ_1.

Прежде всего мы должны получить соотношение для определения времени t:

$$\varphi(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0. \qquad (1)$$

Это соотношение определит закон распространения сил тяготения (при этом мы вовсе не предполагаем, что распространение происходит с одинаковой скоростью по всем направлениям).

Пусть теперь X_1, Y_1, Z_1 будут тремя составляющими силы, действующей в момент t на притягиваемое тело. Задача заключается в том, чтобы выразить X_1, Y_1, Z_1 как функции от

$$t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1. \qquad (2)$$

Какие условия должны быть при этом выполнены?

1. Соотношение (1) не должно меняться от преобразований группы Лоренца.

2. Составляющие X_1, Y_1, Z_1 должны вести себя при преобразовании Лоренца так же, как электромагнитные силы, обозначаемые теми же буквами, т. е. согласно уравнениям (11) § 1.

3. Когда оба тела находятся в покое, мы должны вернуться к обыкновенному закону притяжения.

Важно отметить, что в этом последнем случае соотношение (1) не имеет места, ибо, когда оба тела находятся в покое, время t уже не играет никакой роли.

Задача, поставленная таким образом, является очевидно неопределенной. Поэтому мы попытаемся удовлетворить насколько возможно другим дополнительным условиям:

4. Так как астрономические наблюдения не обнаруживают повидимому заметных уклонений от закона Ньютона, то мы выберем решение, наименее расходящееся с этим законом для малых скоростей обоих тел.

5. Попытаемся распорядиться так, чтобы время t всегда было отрицательным; в самом деле, если понятно, что гравитационный эффект требует некоторого времени для своего распространения, то очень трудно усмотреть, каким образом этот эффект может зависеть от *недостигнутого еще* положения притягивающего тела.

Существует случай, когда неопределенность задачи исчезает; это происходит тогда, когда два тела находятся в *относительном* покое одно по отношению к другому, т. е. когда

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1;$$

поэтому рассмотрим сначала этот случай, полагая, что скорости постоянны, т. е. что оба тела участвуют в общем движении переноса, равномерном и прямолинейном.

Положим, что ось x параллельна направлению этого переноса, так что $\eta = \zeta = 0$, и возьмем $\varepsilon = -\xi$.

Применяя при этих условиях преобразование Лоренца, получим, что после преобразования оба тела будут находиться в состоянии покоя, и, следовательно,

$$\xi' = \eta' = \zeta' = 0.$$

Так как составляющие X_1', Y_1', Z_1' должны удовлетворять закону Ньютона, то мы будем иметь с точностью до постоянного множителя

$$\left.\begin{aligned} X_1' = -\frac{x'}{r'^3}, \quad Y_1' = -\frac{y'}{r'^3}, \quad Z_1' = -\frac{z'}{r'^3} \\ r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Но, согласно § 1,

$$x' = k(x + \varepsilon t), \; y' = y, \; z' = z, \; t' = k(t + \varepsilon x),$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = k(1 + \xi\varepsilon) = k(1 - \varepsilon^2) = \frac{1}{k}, \quad \sum X_1 \xi = -X_1 \varepsilon,$$

$$X_1' = k\frac{\rho}{\rho'}(X_1 + \varepsilon \sum X_1 \xi) = k^2 X_1 (1 - \varepsilon^2) = X_1,$$

$$Y_1' = \frac{\rho}{\rho'} Y_1 = k Y_1,$$

$$Z_1' = k Z_1.$$

Кроме того имеем

$$x + \varepsilon t = x - \xi t, \quad r'^2 = k^2 (x - \xi t)^2 + y^2 + z^2,$$

и

$$X_1 = \frac{-k(x - \xi t)}{r'^3}, \quad Y_1 = \frac{-y}{kr'^3}, \quad Z_1 = \frac{-z}{kr'^3}, \qquad (4)$$

что можно написать в виде:

$$X_1 = \frac{dV}{dx}, \quad Y_1 = \frac{dV}{dy}, \quad Z_1 = \frac{dV}{dz}, \quad V = \frac{1}{kr'}. \qquad (4')$$

С первого взгляда кажется, что здесь имеется неопределенность, так как мы не сделали никакого предположения о значении t, т. е. о скорости распространения; к тому же x есть функция от t; однако, легко видеть, что в наши формулы входят только выражения $x - \xi t$, y, z, которые не зависят от t.

Очевидно, что если два тела участвуют в общем переносе, то сила, действующая на притягиваемое тело, нормальна к эллипсоиду, имеющему в качестве центра притягивающее тело.

Для того чтобы итти дальше, необходимо найти *инварианты группы Лоренца.*

Мы знаем, что подстановки этой группы (при $l = 1$) являются линейными подстановками, не изменяющими квадратичной формы

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Положим, с другой стороны,

$$\xi = \frac{\delta x}{\delta t}, \quad \eta = \frac{\delta y}{\delta t}, \quad \zeta = \frac{\delta z}{\delta t}$$

$$\xi_1 = \frac{\delta_1 x}{\delta_1 t}, \quad \eta_1 = \frac{\delta_1 y}{\delta_1 t}, \quad \zeta_1 = \frac{\delta_1 z}{\delta_1 t}.$$

Мы видим, что в результате преобразования Лоренца величины δx, δy, δz, δt и $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$ подвергаются таким же линейным подстановкам как x, y, z, t.

Будем рассматривать

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & t\sqrt{-1}, \\ \delta x, & \delta y, & \delta z, & \delta t\sqrt{-1}, \\ \delta_1 x, & \delta_1 y, & \delta_1 z, & \delta_1 t\sqrt{-1}, \end{array}$$

как координаты трех точек P, P', P'' в пространстве четырех измерений.

Легко видеть, что преобразование Лоренца представляет не что иное, как поворот в этом пространстве вокруг начала координат, рассматриваемого неподвижным. Таким образом, отличными друг от друга инвариантами будут только 6 расстояний между тремя точками P, P', P'' и началом координат, или, если угодно, два выражения

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2, \quad x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z - t\,\delta t,$$

или четыре выражения такой же формы, получающиеся в результате любой перестановки трех точек P, P', P''.

Но инварианты, которые мы пытаемся найти, являются функциями 10 переменных (2); поэтому мы должны отыскать между комбинациями из наших шести инвариантов те из них, которые зависят только лишь от этих 10 переменных, т. е. те, которые являются однородными

функциями степени 0 как по отношению к δx, δy, δz, δt, так и по отношению к $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$.

Таким образом, нам остаются следующие четыре различных инварианта:

$$\sum x^2 - t^2, \quad \frac{t - \sum x\xi}{\sqrt{1 - \sum \xi^2}}, \quad \frac{t - \sum x\xi_1}{\sqrt{1 - \sum \xi_1^2}},$$
$$\frac{1 - \sum \xi\xi_1}{\sqrt{(1 - \sum \xi^2)(1 - \sum \xi_1^2)}} \tag{5}$$

Займемся теперь преобразованиями, которым подвергаются составляющие силы; обратимся к уравнениям (11) § 1, которые относятся не к силе X_1, Y_1, Z_1, рассматриваемой нами сейчас, а к силе, отнесенной к единице объема.

Полагая кроме того

$$T = \sum X\xi,$$

мы видим, что эти уравнения (11) можно (при $l = 1$) переписать в виде:

$$\left.\begin{array}{ll} X' = k(X + \varepsilon T), & T' = k(T + \varepsilon X), \\ Y' = Y, & Z' = Z. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Таким образом, X, Y, Z, T преобразуются так же, как и x, y, z, t.

Следовательно, инвариантами группы будут следующие выражения:

$$\sum X^2 - T^2, \quad \sum Xx - Tt, \quad \sum X\,\delta x - T\,\delta t,$$
$$\sum X\,\delta_1 x - T\,\delta_1 t.$$

Однако, нам нужны не X, Y, Z, а X_1, Y_1, Z_1, причем

$$T_1 = \sum X_1 \xi.$$

Мы видим, что

$$\frac{X_1}{X}=\frac{Y_1}{Y}=\frac{Z_1}{Z}=\frac{T_1}{T}=\frac{1}{\rho}.$$

Таким образом, преобразование Лоренца действует на X_1, Y_1, Z_1, T_1 точно так же, как и на X, Y, Z, T, с той разницей, что эти выражения будут умножены кроме того на

$$\frac{\rho}{\rho'}=\frac{1}{k(1+\xi\varepsilon)}=\frac{\delta t}{\delta t'};$$

аналогично, на величины ξ, η, ζ, 1 оно будет действовать таким же образом, как и на δx, δy, δz, δt, с той однако разницей, что эти последние выражения будут умножены кроме того на *один и тот же* множитель

$$\frac{\delta t}{\delta t'}=\frac{1}{k(1+\xi\varepsilon)}.$$

Будем рассматривать затем X, Y, Z, $T\sqrt{-1}$ как координаты некоторой четвертой точки Q; тогда инвариантами будут служить функции взаимных расстояний пяти точек O, P, P', P'', Q; среди этих функций мы должны оставить только те, которые являются однородными степени 0 с одной стороны по отношению к X, Y, Z, T, δx, δy, δz, δt (переменные, которые можно заменить потом на X_1, Y_1, Z_1, T_1, ξ, η, ζ, 1) и, с другой стороны, по отношению к δx_1, δy_1, δz_1, 1 (переменные, которые также можно заменить затем на ξ_1, η_1, ζ_1, 1).

Таким образом, кроме прежних четырех инвариантов (5) мы находим следующие четыре новых различных инварианта:

$$\frac{\sum X_1^2-T_1^2}{1-\sum\xi^2},\quad \frac{\sum X_1x-T_1t}{\sqrt{1-\sum\xi^2}},$$

$$\frac{\sum X_1\xi_1-T_1}{\sqrt{1-\sum\xi^2}\sqrt{1-\sum\xi_1^2}},\quad \frac{\sum X_1\xi-T_1}{1-\sum\xi^2}. \qquad (7)$$

Согласно определению 7, последний инвариант всегда равен нулю.

Установив все это, посмотрим, какие условия должны быть выполнены.

1. Первая часть соотношения (1), определяющая скорость распространения, должна быть функцией от четырех инвариантов (5).

Здесь очевидно возможно множество гипотез, из которых мы рассмотрим только две.

A) Можно положить

$$\sum x^2-t^2=r^2-t^2=0,$$

откуда $t=\pm r$, а так как t должно быть отрицательным, то

$$t=-r.$$

Это говорит о том, что скорость распространения равна скорости света.

На первый взгляд может показаться, что эта гипотеза должна быть сразу же отброшена без дальнейшего обсуждения. В самом деле, Лаплас показал, что распространение сил тяготения происходит или мгновенно или со скоростью, во много раз превосходящей скорость света. Однако, Лаплас рассматривал гипотезу конечной скорости распространения, ceteris non mutatis (при прочих неизмененных условиях); здесь же, напротив, эта гипотеза осложнена многими другими, и может случиться, что между ними будет иметь место более или менее полная компенсация, вроде той, что мы неоднократно видели на многочисленных примерах в результате преобразования Лоренца.

B) Можно положить

$$\frac{t-\sum x\xi_1}{\sqrt{1-\sum\xi_1^2}}=0,\quad t=\sum x\xi_1.$$

При этом скорость распространения гораздо больше скорости света; однако, в некоторых случаях t может быть положительным, что, как уже было сказано, представляется мало приемлемым. *Поэтому мы будем придерживаться гипотезы* (А).

2. Четыре инварианта (7) должны быть функциями инвариантов (5).

3. Если два тела находятся в абсолютном покое, то X_1, Y_1, Z_1 должны иметь значения, соответствующие закону Ньютона; если же они находятся в относительном покое, эти значения получаются из уравнений (4).

По гипотезе абсолютного покоя, первые два инварианта (7) должны приводиться к

$$\sum X_1^2, \quad \sum X_1 x,$$

или по закону Ньютона к

$$\frac{1}{r^4}, \quad -\frac{1}{r};$$

С другой стороны, по гипотезе (А) второй и третий инварианты (5) приводятся к

$$\frac{-r-\sum x\xi}{\sqrt{1-\sum \xi^2}}, \quad \frac{-r-\sum}{\sqrt{1-\sum \xi_1^2}},$$

т. е. при абсолютном покое к

$$-r, \quad -r.$$

Мы можем допустить *в качестве примера*, что два первых инварианта (7) сводятся к

$$\frac{(1-\sum \xi_1^2)^2}{(r+\sum x\xi_1)^4}, \quad -\frac{\sqrt{1-\sum \xi_1^2}}{r+\sum x\xi_1};$$

хотя возможны и другие комбинации.

Необходимо сделать выбор среди этих комбинаций и кроме того нам нужно еще третье уравнение для

определения X_1, Y_1, Z_1. Для подобного выбора мы должны стремиться, насколько возможно, не отдаляться от закона Ньютона. Посмотрим теперь, что получается, если пренебречь квадратами скоростей ξ, η. и т. д. (полагая попрежнему $t=-r$).

Четыре инварианта (5) приводятся тогда к виду:

$$0, \quad -r-\sum x\xi, \quad -r-\sum x\xi_1, \quad 1,$$

а четыре инварианта (7) к виду:

$$\sum X^2, \quad \sum X_1(x+\xi r), \quad \sum X_1(\xi_1-\xi), \quad 0.$$

Однако, для того, чтобы иметь возможность сравнить это с законом Ньютона, необходимо другое преобразование; здесь x_0+x, y_0+y, z_0+z представляют координаты притягивающего тела в момент t_0+t и $r=\sqrt{\sum x^2}$; в законе же Ньютона нужно рассматривать координаты x_0+x_1, y_0+y_1, z_0+z_1 притягивающего тела в момент t_0 и расстояние

$$r_1=\sqrt{\sum x_1^2}.$$

Мы можем пренебречь квадратом времени t, необходимого для распространения, и, следовательно, поступать так, как если бы движение было равномерным.

В таком случае получим

$$x=x_1+\xi_1 t, \quad y=y_1+\eta_1 t, \quad z=z_1+\zeta_1 t,$$

$$r(r-r_1)=\sum x\xi_1 t,$$

или, так как

$$t=-r,$$

$$x=x_1-\xi_1 r, \quad y=y_1-\eta_1 r, \quad z=z_1-\zeta_1 r,$$

$$r=r_1-\sum x\xi_1,$$

так что наши четыре инварианта (5) станут равными

$$0, \quad -r_1+\sum x(\xi_1-\xi), \quad -r, \quad 1,$$

а четыре инварианта (7):

$$\sum X_1^2, \quad \sum X_1[x_1+(\xi-\xi_1)r_1], \quad \sum X_1(\xi_1-\xi, \quad 0.$$

Во втором из этих выражений мы написали r_1 вместо r, потому что r умножено здесь на $\xi-\xi_1$, а квадратом ξ мы пренебрегаем.

С другой стороны, по закону Ньютона мы получили бы для этих четырех инвариантов (7):

$$\frac{1}{r_1^4}, \quad -\frac{1}{r_1}-\frac{\sum x_1(\xi-\xi_1)}{r_1^2}, \quad \frac{\sum x_1(\xi-\xi_1)}{r_1^3}, \quad 0.$$

Следовательно, если мы обозначим второй и третий инварианты (5) через A и B, а первые три инварианта (7) — через M, N, P, то мы удовлетворим закону Ньютона с точностью до членов второго порядка малости, положив

$$M=\frac{1}{B^4}, \quad N=\frac{+A}{B^2}, \quad P=\frac{A-B}{B^3}. \tag{8}$$

Это решение не единственно.

В самом деле, пусть C есть четвертый инвариант (5) и пусть $C-1$ имеет порядок квадрата ξ, так же как и $(A-B)^2$.

Таким образом, мы можем прибавить к правым частям каждого из уравнений (8) член, составленный из $C-1$, умноженного на произвольную функцию от A, B, C, и член $(A-B)^2$, также умноженный на функцию от A, B, C.

Уравнение (8) кажется на первый взгляд наиболее простым, но тем не менее оно не может быть принято. В самом деле, так как M, N, P являются функциями от X_1, Y_1, Z_1 и от $T_1=\sum X\xi$, то из этих трех уравнений (8) можно получить значения X_1, Y_1, Z_1; однако, в некоторых случаях эти значения становятся мнимыми.

Для того чтобы избавиться от этого неудобства, поступим следующим образом.

Положим

$$k_0=\frac{1}{\sqrt{1-\sum\xi^2}}, \quad k_1=\frac{1}{\sqrt{1-\sum\xi_1^2}},$$

что оправдывается аналогией с обозначением

$$k=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

фигурирующим в подстановке Лоренца.

В этом случае, а также в силу условия $-r=t$, инварианты (5) приводятся к

$$0, \quad A=-k_0(r+\sum x\xi), \quad B=-k_1(r+\sum x\xi_1),$$
$$C=k_0k_1(1-\sum\xi\xi_1).$$

С другой стороны мы видим, что следующие системы величин

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & -r=t \\ k_0X_1, & k_0Y_1, & k_0Z_1, & k_0T_1 \\ k_0\xi, & k_0\eta, & k_0\zeta, & k_0 \\ k_1\xi_1, & k_1\eta_1, & k_1\zeta_1, & k_1 \end{array}$$

подвергаются *таким же самым* линейным подстановкам, как и при преобразовании группы Лоренца.

Таким образом, мы приходим к следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} X_1&=x\frac{\alpha}{k_0}+\xi\beta+\xi_1\frac{k_1}{k_0}\gamma, \\ Y_1&=y\frac{\alpha}{k_0}+\eta\beta+\eta_1\frac{k_1}{k_0}\gamma, \\ Z_1&=z\frac{\alpha}{k_0}+\zeta\beta+\zeta_1\frac{k_1}{k_0}\gamma, \\ T_1&=-r\frac{\alpha}{k_0}+\beta+\frac{k_1}{k_0}\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ясно, что если α, β, γ инварианты, то X_1, Y_1, Z_1, T_1 удовлетворяют основному условию, т. е. подвергаются вследствие преобразования Лоренца, соответствующей линейной подстановке.

Но для того чтобы уравнения (9) были совместны, необходимо, чтобы

$$\sum X_1 \xi - T_1 = 0$$

или, заменяя X_1, Y_1, Z_1, T_1 их значениями из (9) и умножая на k_0^2,

$$-A\alpha - \beta - C\gamma = 0. \tag{10}$$

Мы хотим, чтобы при отбрасывании квадратов скоростей ξ, и т. д., а также произведений ускорений на расстояния, по сравнению с квадратом скоростей света, как мы это делали выше, значения X_1, Y_1, Z_1 оставались соответствующими закону Ньютона.

Мы можем положить

$$\beta = 0, \quad \gamma = -\frac{A\alpha}{C}.$$

С точностью до приближения принятого нами порядка будем иметь:

$$k_0 = k_1 = 1, \quad C = 1, \quad A = -r_1 + \sum x(\xi_1 - \xi),$$
$$B = -r_1,$$
$$x = x_1 + \xi t = x_1 - \xi_1 r.$$

Первое уравнение (9) примет тогда вид:

$$X_1 = \alpha(x - A\xi_1).$$

Но, если мы пренебрегаем квадратом ξ, то $A\xi_1$ можно заменить на $-r_1\xi_1$ или на $r\xi_1$, что дает:

$$X_1 = \alpha(x + \xi_1 r) = \alpha x_1.$$

По закону же Ньютона мы получили бы:

$$X = -\frac{x_1}{r_1^3}.$$

Таким образом, для инварианта α мы должны выбрать тот, который приводится к $-\frac{1}{r^3}$ при точности порядка допущенного приближения, т. е. $\frac{1}{B^3}$.

Уравнения (9) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{x}{k_0 B^3} - \xi_1 \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C}, \\ Y_1 &= \frac{y}{k_0 B^3} - \eta_1 \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C}, \\ Z_1 &= \frac{z}{k_0 B^3} - \zeta_1 \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C}, \\ T_1 &= -\frac{r}{k_0 B^3} - \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Отсюда мы видим прежде всего, что исправленное притяжение состоит из двух составляющих: одна параллельна вектору, соединяющему местоположения обоих тел, а другая параллельна скорости притягивающего тела.

Напомним, что когда мы говорим о положении или скорости притягивающего тела, то при этом речь идет о положении или скорости в момент, когда гравитационная волна покидает его; наоборот, для притягиваемого тела речь идет при этом о его положении или скорости в момент, когда гравитационная волна достигает его; предполагается, что эта волна распространяется со скоростью света.

Я полагаю, что было бы преждевременно более подробно обсуждать эти формулы. Поэтому ограничимся несколькими замечаниями.

1. Решения (11) не единственны; в самом деле величину $\frac{1}{B^3}$, входящую всюду как множитель, можно заменить на

$$\frac{1}{B^3}+(C-1)f_1(A,B,C)+(A-B)^2 f_2(A,B,C),$$

где f_1 и f_2 произвольные функции от A, B, C, или же не брать больше β равным нулю, а прибавить к α, β, γ какие-нибудь добавочные члены, лишь бы только они удовлетворяли условию (10) и были второго порядка относительно ξ в части, относящейся к α и первого порядка относительно β и γ.

2. Первое уравнение (11) можно переписать в виде

$$X_1=-\frac{k_1}{B^3 C}\left[x\left(1-\sum \xi\xi_1\right)+\xi_1\left(r+\sum x\xi\right)\right], \quad (11')$$

причем выражение в квадратных скобках также можно переписать как

$$(x+r\xi_1)+\eta(\xi_1 y-x\eta_1)+\zeta(\xi_1 z-x\zeta_1). \quad (12)$$

Таким образом, полную силу можно разложить на три составляющих, соответствующих трем скобкам в выражении (12); первая составляющая имеет некоторую аналогию с механической силой, обусловленной электрическим полем, а две другие — с механической силой, обусловленной магнитным полем. Для того, чтобы дополнить аналогию, мы можем, согласно замечанию 1, заменить в уравнении (11) $\frac{1}{B^3}$ на $\frac{C}{B^3}$ так, чтобы X_1, Y_1, Z_1 зависели только линейно от скорости ξ, η, ζ притягиваемого тела, так как C при этом исчезает из знаменателя (11′). Положим далее:

$$\left.\begin{array}{c} k_1(x+r\xi_1)=\lambda_1, \quad k_1(y+r\eta_1)=\mu_1, \\ k_1(z+r\zeta_1)=\nu, \\ k_1(\eta_1 z-\zeta_1 y)=\lambda', \quad k_1(\zeta_1 x-\xi_1 z)=\mu', \\ k_1(\xi_1 y-x\eta_1)=\nu' \end{array}\right\} \quad (13)$$

а так как C исчезло из знаменателя (11′), то

$$\left.\begin{array}{l} X_1=\frac{\lambda}{B^3}+\frac{\eta\nu'-\zeta\mu'}{B^3}, \\ Y_1=\frac{\mu}{B^3}+\frac{\zeta\lambda'-\xi\nu'}{B^3}, \\ Z_1=\frac{\nu}{B^3}+\frac{\xi\mu'-\eta\lambda'}{B^3}; \end{array}\right\} \quad (14)$$

к тому же будем иметь

$$B^2=\sum\lambda^2-\sum\lambda'^2. \quad (15)$$

При этом λ, μ, ν или $\frac{\lambda}{B^3}$, $\frac{\mu}{B^3}$, $\frac{\nu}{B^3}$ играют роль электрического поля, в то время как λ', μ', ν', или вернее $\frac{\lambda'}{B^3}$, $\frac{\mu'}{B^3}$, $\frac{\nu'}{B^3}$ — роль магнитного поля.

3. Постулат относительности обязывает нас принять решение (11) или решение (14), или какое-нибудь из решений, получаемых при помощи замечания 1. Однако, прежде всего следует задать себе вопрос, совместимы ли эти решения с астрономическими наблюдениями. Расхождение с законом Ньютона будет порядка ξ^2, т. е. в 10 000 раз меньше, чем если бы оно было порядка ξ, т. е. если бы силы тяготения распространялись со скоростью света, ceteris non mutatis; поэтому можно надеяться, что это расхождение не слишком велико. Однако, только обстоятельное исследование может полностью осветить этот вопрос.

Париж, июль 1905.
(Поступило в печать 23 июля 1905 г.).