Уравнение анти-Эйлера

Евгений Шульзингер 28.10.2008

1. В 6-м томе Ландау-Лифшица «Гидродинамика» на 15 странице дан вывод уравнения Эйлера. Из посыла на основе 3-го закона Ньютона по Эйлеру интеграл от давления жидкости берется по поверхности рассматриваемого объема:

$$-\oint p d\vec{f}$$

В ходе преобразований получается уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

Если же учесть новый подход, то начальный посыл будет выглядеть так:

$$-\oint p\vec{v}d\vec{f}$$

Тогда конечное уравнение, выведенное по тому же принципу, будет таким:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}v^2\right) = -\frac{\vec{v}}{\rho}\vec{\nabla}p$$

Можно назвать это уравнением анти-Эйлера, и его то и нужно подставить в систему уравнений гидродинамики вместо уравнения Эйлера.

2. Решим уравнение анти-Эйлера:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}v^2\right) = -\frac{\vec{v}}{\rho}\vec{\nabla}p \qquad (1)$$

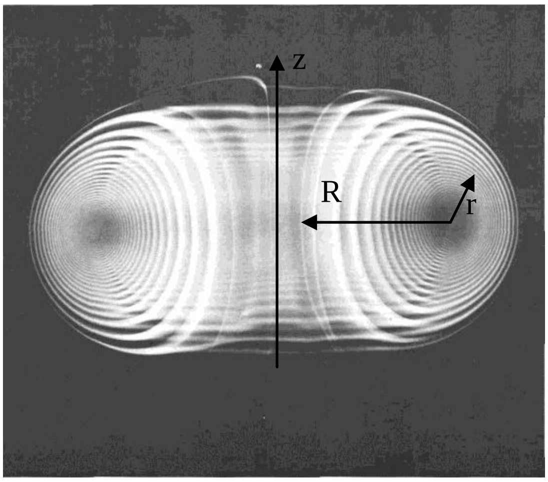
для стационарного случая, преобразуя и пренебрегая градиентом от плотности, получаем:

$$\vec{v}(\vec{\nabla}(v^2 + \frac{2}{\rho}p)) = 0 \qquad (2)$$

это значит, что скорость перпендикулярна градиенту от записанного выражения, то есть, если стационарное движение кольцевое, то градиент направлен по радиусу этого движения.
Если так, то можно записать решение в виде:

$$p(r) = p(0) - \frac{2}{\rho}\omega^2 r^2, 0 \le r < R \qquad (3)$$

Это решение для двумерного случая вращения по малому кольцу тора с угловой скоростью ω, если учесть и вращение вокруг оси z, то получится в точности уравнение для зависимости давления от радиуса, такое как на данной экспериментальной картинке, где изображено сечение тороидального кольца дыма.



Из уравнения (3) видно, что давление минимально у поверхности тора, и возрастает к нейтральному центу, в котором давление равно давлению окружающего газа.