ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 51. От частного случая движений с бесконечно малыми деформациями перейдем к более общему случаю движений с конечными деформациями. В нашем изложении мы будем непосредственно исходить из того, что было сказано в § 2 о произвольном конечном движении непрерывно протяженного материального тела. Чтобы представить это движение, мы снова воспользуемся уравнениями (1) и (1а), при помощи которых вычисляется место (x, y, z), занимаемое материальной точкой (a, b, c) в момент t.

Обратно, разрешив уравнения (1) относительно a, b, c, получим уравнения вида:

$$\left.\begin{aligned} a &= f'(x, y, z, t), \\ b &= \varphi'(x, y, z, t), \\ c &= \psi'(x, y, z, t), \end{aligned}\right\} \qquad (254)$$

которые дают ответ на вопрос, какая материальная точка (a, b, c) находится в месте $(x, y, z,)$ в момент t.

Противопоставление уравнений (1) и (254) соответствует противопоставлению двух точек зрения, которое проходит через всю гидродинамику и придает ей характер дуализма: „субстанциальной“ (вещественной) и „локальной“ (местной) точки зрения. Согласно первой из них, рассматривают определенную материальную точку (a, b, c) или определенную материальную систему и ставят вопрос об изменениях ее в пространстве. Согласно второй точке зрения, рассматривают определенную точку пространства (x, y, z) или определенную часть пространства и ставят вопрос о тех материальных точках, которые проходят через эту точку или вступают в эту часть пространства. При субстанциальной точке зрения за независимые переменные берут a, b, c, t, при локальной точке зрения — x, y, z, t.

Чтобы подчеркнуть это различие также в обозначениях, мы будем обозначать в дальнейшем диференциалы, относящиеся к независимым переменным a, b, c, t с помощью прямого d, а диференциалы, относящиеся к независимым переменным x, y, z, t,

с помощью круглого ∂. Тогда, например, $\frac{dx}{dt} = u$ обозначает компонент по x скорости материальной точки (a, b, c), между тем как $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$. Далее, $\frac{du}{dt}$ есть компонент по x ускорения, между тем как $\frac{\partial u}{\partial t}$ относится к разнице в скоростях тех двух материальных точек, которые находятся в месте (x, y, z) в момент t и в момент $t + \partial t$. Так, например, при стационарном (§ 62) истечении жидкости из сосуда, повсюду $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, между тем как ускорение $\frac{du}{dt} \neq 0$. Вообще, между этими двумя величинами существует соотношение:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w. \qquad (255)$$

§ 52. Что касается чисто кинематической стороны рассматриваемых движений, то понятно, что здесь сохраняют свою годность все законы, выведенные в первой главе этой книги. Мы воспользуемся в особенности теми из них, которые относятся к произвольному бесконечно малому изменению и были формулированы в § 12, так как каждое движение можно привести к бесконечно малому изменению, если рассматривать его в течение бесконечно малого промежутка времени, от t до $t + \tau$. В этом случае можно пользоваться всеми формулами § 12, с тем лишь различием, что теперь координаты материальной точки до изменения обозначаются не через a, b, c, а x, y, z, и компоненты бесконечно малого смещения суть не u, v, w, а $u\tau$, $v\tau$, $w\tau$, где u, v, w обозначают конечные компоненты скорости. Согласно сказанному, девять бесконечно малых коэфициентов λ, μ, ν (57), которые характеризуют вращение и деформацию материальной частицы, также пропорциональны элементу времени.

Чтобы получить возможность производить вычисления над конечными величинами, разделим все эти бесконечно малые величины на τ, т. е. введем вместо бесконечно малых компонентов поступательного перемещения, вращения и деформации конечные компоненты с к о р о с т и п о с т у п а т е л ь н о г о п е р е м е щ е н и я, с к о р о с т и в р а щ е н и я и с к о р о с т и д е ф о р м а ц и и, а для обозначения их возьмем те же буквы, как и в § 12; Поэтому отныне буквы

$$u, v, w; \quad \xi, \eta, \zeta; \quad x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y \qquad (256)$$

будут обозначать соответствующие компоненты скоростей. Между ними и координатами x, y, z существуют соотношения такого же вида, как и прежние соотношения (59), (60), (61) и т. д.

Скорость расширения объема материальной ч цы

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\operatorname{div}\mathbf{q}$$

определяет также изменение плотности ее, ибо мы имеем так же, как в (213а), для изменения материальной частицы первоначального объема dV, происшедшего в течение времени dt:

$$dV\cdot k=dV\cdot\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dt\right]\cdot\left(k+\frac{dk}{dt}dt\right).$$

Отсюда:

$$k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{dk}{dt}=0, \tag{257}$$

или, в виду того, что

$$\frac{dk}{dt}=\frac{\partial k}{\partial x}u+\frac{\partial k}{\partial y}v+\frac{\partial k}{\partial z}w+\frac{\partial k}{\partial t}, \tag{258}$$

получим:

$$\frac{\partial(ku)}{\partial x}+\frac{\partial(kv)}{\partial y}+\frac{\partial(kw)}{\partial z}+\frac{\partial k}{\partial t}=0. \tag{259}$$

Интересно вывести это равенство, которое часто называют „уравнением непрерывности“, исходя не из субстанциальной, а из локальной точки зрения. Рассмотрим некоторый конечный объем, ограниченный каким-либо образом. Вся масса, заключенная в нем в момент t, равна $\int k d\tau$, а изменение ее в течение времени dt равно:

$$dt\cdot\int\frac{\partial k}{\partial t}\partial\tau.$$

С другой стороны, это изменение равно алгебраической сумме масс всех тех частиц тела, которые входят внутрь объема через его поверхность в течение времени dt. Но через элемент поверхности $d\sigma$ с внутренней нормалью ν проникает в течение dt следующая масса:

$$d\sigma\cdot k\,(u\cos(\nu x)+v\cos(\nu y)+w\cos(\nu z))\cdot dt. \tag{260}$$

Это — масса (косого) цилиндра плотности k, с площадью основания $d\sigma$ и длиной образующей $\mathbf{q}\cdot dt$. Следовательно, имеем уравнение:

$$\int\frac{\partial k}{\partial t}\cdot d\tau=\int d\sigma\cdot k\,(u\cos(\nu x)+v\cos(\nu y)+w\cos(\nu z)),$$

или, согласно (78):

$$\int\left(\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial(ku)}{\partial x}+\frac{\partial(kv)}{\partial y}+\frac{\partial(kw)}{\partial z}\right)d\tau=0.$$

Это уравнение остается годным и в том случае, если мы уменьшим объем до размеров одного элемента объема, откуда получится уравнение (259).

Уравнение непрерывности можно отнести также, вместо бесконечно малого промежутка времени dt, к конечному промежутку t, если положить, что масса элемента тела в момент t равна массе того же элемента тела в момент 0, и воспользоваться выражением (51) функционального определителя для изменения объема. Тогда

$$dV_0\cdot k_0=dV_0\cdot D\cdot k,$$

причем значок 0 показывает, что нужно положить $t=0$. Следовательно:

$$D\cdot k=k_0,\ \text{или}\ \frac{d(Dk)}{dt}=0. \tag{261}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться, смотря по надобности той или иной формой уравнения непрерывности.

§ 53. Теперь перейдем к выводу динамических уравнений движения. Если мы хотим сохранить введенную в § 21 гипотезу „совершенной упругости“, т. е. что давление зависит только от деформации в данный момент, также и для произвольных конечных деформаций, то мы вынуждены будем в дальнейшем рассматривать только жидкости и газы: при непрерывно возрастающей деформации в твердом теле будет раньше или позже перейден предел упругости.

Поэтому настоящая третья часть книги представляет собою область гидродинамики (включая аэродинамику).

Подставим, как в § 44:

$$Y_z=Z_x=X_y=0;\quad X_x=Y_y=Z_z=p=f(k). \tag{261a}$$

Получим из (83) основные уравнения гидродинамики:

$$\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)k-\frac{\partial p}{\partial x}=0,\ldots \tag{262}$$

Последние уравнения можно написать еще в более простом виде, если допустить, что массовая сила имеет потенциал, т. е.

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial V}{\partial y},\quad Z=-\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{263}$$

и, кроме того, ввести функцию давления или плотности

$$P=\int\frac{dp}{k}, \tag{264}$$

в которой остается неопределенной только аддитивная постоянная. Тогда уравнения (262) можно написать в таком виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}=0,\ldots \tag{265}$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{q}+\operatorname{grad}(V+P)=0. \tag{266}$$

Эти уравнения не так просты, как кажется с первого взгляда, так как координаты x, y, z входят в них один раз (в ускорении) в качестве зависимых переменных, а другой раз (в падении потенциала и давления) в качестве независимых переменных. Если же производить вычисления, то обычно необходимо провести единую точку зрения, т. е. пользоваться повсюду либо субстанциальным, либо локальным способом рассмотрения. В зависимости от этого получаются две различных формы уравнений движения, которые построены сложнее, чем (265) или (266).

Чтобы провести субстанциальную точку зрения, умножим три уравнения (265) по очереди на $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da}$.

Тогда получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{da}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{da}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{da}+\frac{dV}{da}+\frac{dP}{da}=0 \tag{267}$$

и аналогичные уравнения для b и c.

Это так называемые уравнения Лагранжа. Дополнением к ним является уравнение непрерывности в субстанциальной форме (261).

С другой стороны, при локальной точке зрения мы получим из (265) с помощью (255):

$$\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}=0 \tag{268}$$

и два соответствующих уравнения для y и v и для z и w.

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера. К ним относится локальная формулировка уравнения непрерывности (259).

Как мы видим, уравнения движения сделались не только длиннее, благодаря этим преобразованиям, но также, что существенно, потеряли свой линейный характер. Это обстоятельство и сообщает гидродинамическим проблемам свойственные им математические трудности.

§ 54. Первым приложением, которое мы дадим уравнениям гидродинамики, будет применение и подтверждение принципа

сохранения энергии. При этом мы будем целиком руководиться методом, примененным в § 23 для бесконечно малых деформаций: будем исходить из уравнения энергии (89) и подставим входящие в него величины — кинетическую энергию L, потенциальную энергию U, внешнюю работу A — по образцу уравнений (90), (91) и (92). Но нужно помнить, что компоненты смещения материальной точки, происходящего в течение времени dt, обозначаются теперь не через du, dv, dw, а через $u\cdot dt, v\cdot dt, w\cdot dt$. Кроме того, теперь, когда плотность k подвергается конечным изменениям, удобнее относить потенциальную энергию не к элементам объема, а к элементам массы. Таким путем мы получим из (90):

$$L=\frac{1}{2}\int(u^2+v^2+w^2)\,k\,d\tau, \tag{269}$$

из (91):

$$U=\int F\cdot k\,d\tau, \tag{270}$$

где F обозначает потенциальную энергию единицы массы, зависящую только от k (или p). Из (92) получим:

$$A=dt\cdot\int(Xu+Yv+Zw)\,k\,d\tau+dt\cdot\int(X_\nu u+Y_\nu v+Z_\nu w)\,d\sigma, \tag{271}$$

причем, согласно (74),

$$X_\nu=p\cos(\nu x),\ Y_\nu=p\cos(\nu y),\ Z_\nu=p\cos(\nu z). \tag{272}$$

Составляя диференциалы dL и dU по времени, будем иметь в виду, что произведение $k\,d\tau$, масса элемента тела, не зависит от времени. В таком случае получим из (269):

$$dL=dt\cdot\int\left(u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt}+w\frac{dw}{dt}\right)k\,d\tau,$$

и из (270):

$$dU=dt\int\frac{dF}{dt}\cdot k\,d\tau;$$

далее, из (271) и (272), при помощи преобразования (78):

$$A=dt\cdot\int(Xu+Yv+Zw)\,k\,d\tau-dt\int\left(\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}+\frac{\partial(pw)}{\partial z}\right)d\tau. \tag{272a}$$

Если подставить эти выражения в уравнение энергии (89), принимая во внимание значение компонентов ускорения из (262), то ряд членов в обеих частях уравнения сократится, и остается соотношение:

$$\int \frac{dF}{dt} k d\tau = -\int p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau,$$

или, так как это уравнение имеет место также для одного элемента объма $d\tau$, то принимая во внимание (257), имеем:

$$dF = \frac{p}{k^2} dk. \tag{273}$$

Таким образом требования принципа сохранения энергии выполняются тогда и только тогда, когда потенциальная энергия единицы массы равна:

$$F = \int \frac{p}{k^2} dk = -\int p d\left(\frac{1}{k}\right), \tag{274}$$

где $\frac{1}{k}$ есть объем единицы массы (удельный объем). Вместо последнего уравнения можно написать, произведя интегрирование по частям и подставив функцию P из (264):

$$F = -\frac{p}{k} + \int \frac{dp}{k} = -\frac{p}{k} + P. \tag{275}$$

Если потенциальная энергия известна как функция плотности или удельного объема, то отсюда можно непосредственно вычислить зависимость давления p от плотности, ибо из (274) следует:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -p, \tag{276}$$

где v временно обозначает удельный объем. Это соотношение находится в очевидной аналогии с выражениями (97). Последние являются более общими, поскольку обнимают также и сдвигающие силы, и в то же время более частными, поскольку относятся лишь к бесконечно малым деформациям.

В частном случае, для несжимаемой жидкости, $k = \text{const}$, поэтому, согласно (264):

$$P = \frac{p}{k}, \tag{277}$$

или, согласно (275):

$$F = 0,$$

т. е. несжимаемая жидкость не обладает потенциальной энергией. Этот результат находится в согласии с такого рода соображением: несжимаемость жидкости можно рассматривать, подобно нерастяжимости нити (*1*, § 107), как наложенную связь между координатами частиц тела (объемное расширение равно нулю), независимо от величины сил давления; обусловленные таким образом силы связи никогда не совершают работы [*1*, (314)].

Отметим еще, для позднейшего применения, частное выражение, получающееся из (271), (272) и (272a) для работы внешнего давления, действующего равномерно во всех точках поверхности, при любом изменении:

$$A = dt \cdot p \int \left(u \cos(\nu x) + v \cos(\nu y) + w \cos(\nu z)\right) d\sigma =$$

$$= -dt \cdot p \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau.$$

Иначе, так как $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt$ есть расширение элемента объема $d\tau$, происшедшее в течение времени dt, то

$$A = -p \cdot dV, \tag{278}$$

где dV обозначает изменение объема всей массы жидкости.

§ 55. Переходя к частным применениям законов гидродинамики, поставим прежде всего вопрос об условиях равновесия. Для этого получим, проинтегрировав уравнение (265):

$$V + \int \frac{dp}{k} = \text{const}. \tag{279}$$

Следовательно, при равновесии поверхности уровня массовых сил (*1*, § 40), $V = \text{const}$, суть в то же время поверхности постоянного давления и постоянной плотности. Если две различные жидкости соприкасаются друг с другом, то на пограничной поверхности плотность k вообще претерпевает скачок; напротив, давление p изменяется непрерывно при всех обстоятельствах, согласно закону равенства действия и противодействия. Если на поверхность жидкости действует равномерное внешнее давление, то давление жидкости постоянно также на границе, и наружная поверхность есть поверхность постоянного потенциала массовых сил. В особенности это верно в том частном случае, когда внешнее давление равно нулю или давлению атмосферного воздуха, и жидкость имеет, как говорят, „свободную" поверхность. От этого закона происходит название поверхностей уровня.

Если постоянная интегрирования в уравнении (279) определена по условиям на поверхности, то тем самым дана величина давления повсюду внутри жидкости, совершенно независимо от того, как ограничена жидкость в остальной части, т. е. независимо от величины и формы сосуда, в котором она находится. Например, если единственная массовая сила есть вес самой жидкости, действующий в направлении отрицательной оси z, то, согласно (67),

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Zkd\tau = -gkd\tau,$$

и согласно (263),

$$V = gz + \text{const.} \tag{280}$$

Поэтому (279) переходит в:

$$\int \frac{dp}{k} + gz = \text{const}, \tag{281}$$

и для несжимаемой жидкости:

$$p = \text{const} - kgz. \tag{282}$$

Таким образом давление одинаково во всех точках, лежащих на одинаковой высоте, и растет с уменьшением высоты пропорционально разности высот.

В уравнении (282) содержатся законы сообщающихся сосудов, действия ливеров, барометров и манометров с жидкостью.

Например, для ртутного барометра пусть обозначает $z = 0$ уровень открытой поверхности, подверженной действию внешнего давления p_0; $z = h$ — высота столба жидкости, граничащего с вакуумом.

$$\text{При } z = 0, \quad p = p_0.$$
$$\text{„} \quad z = h, \quad p = 0.$$

Поэтому, на основании (282):

$$p_0 = kgh. \tag{283}$$

Величину p_0 определяют как „давление в одну атмосферу" при:

$$k = 13{,}596\ [г\ см^{-3}], \quad g = 980{,}6\ [см\ сек^{-2}], \quad h = 76\ [см].$$

Отсюда

$$p_0 = 1\,013\,250\ [г\ см^{-1}\ сек^{-2}]. \tag{284}$$

Вместо атмосфер, давление измеряют часто также по соответствующей величине h („миллиметры ртутного столба") в уравнении (283), разделив p на kg.

§ 56. Перейдем теперь к условиям равновесия для сжимаемой жидкости, например для столба воздуха произвольной высоты. Тогда требуется знать функцию $f(k)$ в уравнении (211). Если можно считать, что температура воздуха всюду одинакова, например 0°C, то можно положить

$$p = ck, \tag{285}$$

где c определяется из того условия, что при давлении p_0, равном одной атмосфере, $k = k_0 = 0{,}001293\ [г\ см^{-3}]$, т. е.

$$c = \frac{p_0}{k_0}. \tag{286}$$

Отсюда получим, по (281), произведя интегрирование и зная, что $z = 0$ при $p = p_0$:

$$z = \frac{p_0}{gk_0} \cdot \ln \frac{p_0}{p}. \tag{287}$$

Это так называемая барометрическая формула высоты для изотермического равновесия, при помощи которой находят высоту z, соответствующую давлению воздуха p. Если подставить числовые данные и ввести десятичные логарифмы, то формула гласит:

$$z = 18\,400 \lg_{10} \frac{p_0}{p}\ м. \tag{288}$$

В отношении $p_0 : p$ удобнее всего измерять давление в миллиметрах ртутного столба.

В свободной атмосфере лишь в редких случаях осуществляется допущение о постоянстве температуры, так как выравнивание температур между различными слоями воздуха при помощи теплопроводности происходит довольно медленно и постоянно нарушается воздушными течениями. Тогда формула (285) вместе со следствиями из нее теряет вообще свое значение, так как давление зависит не только от плотности, но и от температуры. Но не следует думать, что постоянство температуры есть необходимое условие для применения изложенной теории, в частности для применения гипотезы о совершенной упругости (§ 21), ибо эта гипотеза не требует, чтобы температура оставалась постоянной, а только, чтобы давление p зависело только от плотности k. Температура может изменяться при этом, но, со своей стороны, должна быть целиком определена плотностью. Важный случай, при котором осуществлено такое условие, имеет место тогда, когда исключена возможность теплопроводности, т. е. когда все изменения объема происходят не „изотермически" при постоянной температуре, а „адиабатически", при отсутствии перехода теплоты от одной частицы вещества к другой. Изотермические процессы соответствуют предельному случаю бесконечно большой теплопроводности вещества, адиабатические процессы соответствуют бесконечно малой теплопроводности. В процессах последнего рода давление также зависит исключительно от плотности, поэтому и для них имеет место уравнение совершенной упругости (211), но функция $f(k)$ уже не изотермическая (285), а адиабатическая:

$$p = c'k^{\gamma}, \tag{289}$$

где постоянная γ равна 1,405 для воздуха, а коэфициент c' получается из уравнения:

$$c' = \frac{p_0}{k_0^{\gamma}}. \tag{290}$$

Таким образом в адиабатических процессах давление быстрее возрастает при сжатии и убывает при расширении, чем в изотермических процессах. Это происходит от того, что воздух нагревается при адиабатическом сжатии и охлаждается при адиабатическом расширении.

Если подставить выражение (289) в (281) и произвести соответствующие действия, то получится барометрическая формула при адиабатическом равновесии:

$$z = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_0}{gk_0}\left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right), \tag{291}$$

или, если воспользоваться численными данными:

$$z = 27\,700 \cdot \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,288}\right) м. \tag{292}$$

Такое убывание давления с высотой соответствует допущению, что каждый слой воздуха имеет ту температуру, которая получается при адиабатическом расширении воздуха от 0° С и атмосферного давления до плотности данного слоя.

Еще более важную роль, чем в состояниях равновесия, адиабатические процессы играют в явлениях колебательных, так как повышения и понижения температуры, вызванные попеременным сжатием и расширением, следуют друг за другом с такой быстротой, что можно совершенно пренебречь теплопроводностью, которая и без того очень незначительна у газов. Поэтому нужно при вычислении скорости звука в газах из формулы (215) применить формулу (289), которая в связи с формулой (290) дает для скорости звука в газе плотности k_0 при давлении p_0 следующее выражение:

$$a^2 = \frac{\gamma p_0}{k_0}. \tag{293}$$

Для воздуха при 0° С и атмосферном давлении получится, если подставить численные данные:

$$a = 332 \left[\frac{м}{сек}\right]$$

в согласии с результатами измерений.

Изотермическая сжимаемость (285) дает по (215):

$$a^2 = \frac{p_0}{k_0}, \tag{294}$$

и для воздуха при тех же температуре и давлении:

$$a = 280 \left[\frac{м}{сек}\right],$$

т. е. значительно меньше.

Для капельных жидкостей разница между адиабатической и изотермической сжимаемостью незначительна.

§ 57. В качестве следующего примера применения уравнений гидродинамики рассмотрим несжимаемую жидкость, вращающуюся вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω. В этом случае движение всех материальных точек задано наперед. Примем за ось вращения ось z. Тогда положение какой-либо точки a, b, c жидкости в момент t получится из уравнений (11), если подставить в них:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_1 = \cos(\omega t), & \alpha_2 = -\sin(\omega t), & \alpha_3 = 0, \\ \beta_1 = \sin(\omega t), & \beta_2 = \cos(\omega t), & \beta_3 = 0, \\ \gamma_1 = 0, & \gamma_2 = 0, & \gamma_3 = 1. \end{array}\right\} \tag{295}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t), \\ y = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t), \\ z = c. \end{array}\right\} \tag{296}$$

Если дважды „субстанциально“ продиференцировать эти уравнения по времени t, то получится:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Подставив в уравнения движения (265), имеем:

$$-\omega^2 x + \frac{\partial(V+P)}{\partial x} = 0, \quad -\omega^2 y + \frac{\partial(V+P)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(V+P)}{\partial z} = 0.$$

Проинтегрировав и приняв во внимание (277), выводим окончательно:

$$p = \frac{1}{2} k\omega^2\varrho^2 - kV + \text{const}, \tag{297}$$

где ϱ — расстояние точки воздействия (x, y, z) от оси вращения. Применим это уравнение к нескольким интересным случаям.

§ 58. Пусть несжимаемая тяжелая жидкость вращается с постоянной скоростью ω в полом открытом сверху круговом цилиндре с горизонтальным дном. Положим, например, что мы сильно размешиваем ложкой воду в стеклянном стакане, а затем сразу вынимаем ложку. Чтобы избежать тормозящего действия трения о стенки сосуда, можно допустить, что сосуд тоже вращается. Тогда при равномерном вращении вовсе не будет трения, так как движение происходит без деформации.

Из уравнений (280) и (297) получится:

$$p = \frac{1}{2} k\omega^2\varrho^2 - kgz + \text{const}. \tag{298}$$

Вид свободной поверхности жидкости получится, согласно § 55, из условия $p = \text{const}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\omega^2\varrho^2 - gz = \text{const}.$$

Это уравнение параболоида вращения, осью которого служит ось z. Если подставить $z = z_0$ при $\varrho = 0$, то получится:

$$z = z_0 + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\varrho^2. \tag{299}$$

Таким образом поверхность жидкости ниже всего в середине сосуда и повышается к краям пропорционально квадрату скорости вращения. Величина z_0 и вместе с тем абсолютное значение понижения посредине вычисляется независимо от размеров внешнего давления, по объему жидкости, который одинаков в состоянии вращения и в состоянии покоя. Если неподвижная жидкость заполняет сосуд до уровня $z = h$, то объем выражается соотношением:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} z \cdot \varrho d\varrho d\varphi = R^2\pi \cdot h,$$

где R обозначает радиус цилиндра.

Отсюда, при помощи формулы (299), получается:

$$z_0 = h - \frac{\omega^2R^2}{4g}. \tag{300}$$

Второй член правой части дает величину понижения уровня на жидкости посредине.

Повышение у края равно значению $z - h$ при $\varrho = R$. Согласно (299),

$$z - h = \frac{\omega^2R^2}{4g}. \qquad 01$$

Таким образом повышение уровня у края равно понижению посредине.

В горизонтальном сечении ($z = \text{const}$) давление переменно согласно (298): в середине наименьшее, у края наибольшее. Это легко наблюдать, если насыпать на дно неподвижного сосуда песок, который настолько тяжел, что не увлекается вращением жидкости. Когда жидкость вращается, песчинки устремляются к середине дна под влиянием падения давления.

§ 59. Положим, что несжимаемая жидкость, частицы которой тяготеют к неподвижному центру по закону Ньютона, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр. Требуется определить форму свободной поверхности. Главный интерес этой задачи заключается в том, что она родственна с проблемой о сжатии земли у полюсов. Поэтому мы возьмем в качестве примера данные, относящиеся к земле.

Если обозначить через r расстояние от точки воздействия до центра O, то гравитационный потенциал равен, согласно [*1*, (111)]

$$V = -\frac{c}{r},$$

а сила притяжения на единицу массы (ускорение силы тяжести) равна, согласно (67) и (263):

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{c}{r^2}.$$

Чтобы определить постоянную c, допустим, что ускорение силы тяжести равно g_0 на расстоянии r_0. Тогда имеем:

$$g_0 = \frac{c}{r_0^2},$$

и вообще

$$V = -\frac{g_0r_0^2}{r}. \tag{302}$$

Это дает, согласно (297), следующее уравнение для формы свободной поверхности:

$$\frac{1}{2}\omega^2\varrho^2 + \frac{g_0r_0^2}{r} = \text{const},$$

или, если положить, что на поверхности $r = r_0$ (полярный радиус) при $\varrho = 0$:

$$\frac{1}{2}\omega^2\varrho^2 = g_0r_0^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right). \tag{303}$$

Введем вместо ϱ угол φ (географическая широта) при помощи соотношения: $\varrho = r\cos\varphi$. Тогда уравнение (303) примет вид:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{i_0} = \frac{\omega^2}{2g_0 r_0^2}\cdot r^2\cos^2\varphi. \qquad (304)$$

В частном случае, когда $\omega = 0$ (неподвижная жидкость), r постоянно, т. е. поверхность есть шар. Поэтому при малых значениях ω поверхность есть сжатый у полюсов сфероид, мало отличающийся по форме от шара. Уравнение сфероида можно написать в первом приближении следующим образом:

$$r = r_0\left(1 + \frac{\omega^2 r_0}{2g_0}\cos^2\varphi\right). \qquad (305)$$

Величина сжатия равна

$$\frac{r_{\max} - r_0}{r_0} = \frac{\omega^2 r_0}{2g_0}. \qquad (306)$$

Это дает для земного шара при

$$\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\,[сек^{-1}],\ r_0 = 6{,}356\cdot 10^8\,[см],\ g_0 = 983\left[\frac{см}{сек^2}\right]$$

величину $\frac{1}{585}$, между тем как действительное сжатие заметно больше, а именно $\frac{1}{298}$.

Разница легко объясняется тем, что частицы земли притягиваются не к центру, а друг к другу, что, конечно, вызывает отклонение от формы шара. Введение взаимного тяготения значительно усложняет задачу, так как выражение потенциала тяготения уже не дано заранее, а само зависит от искомой формы поверхности. Более подробное исследование показало, что задача, формулированная таким образом, не имеет однозначного решения, т. е. возможно несколько различных форм поверхности, в том числе и эллипсоид вращения с определенной величиной сжатия.

Если рассматривать только небольшие значения угловой скорости, а значит, и небольшие отклонения от формы шара, то при взаимном тяготении можно допустить с известным приближением, что сила притяжения, действующая на частицу жидкости, прямо пропорциональна расстоянию r от центра земли. согласно [1, (102)], следовательно, потенциал пропорционален r^2 Если произвести вычисление при этом допущении по тому же способу, что и выше, то получится снова выражение (306) для величины сжатия. Это объясняется, очевидно, тем, что при малых отклонениях от формы шара вид закона, по которому V зависит от r, не оказывает существенного влияния на величину сжатия.

§ 60. Теперь снова возвратимся к обсуждению теории. Прежде всего произведем важное интегрирование уравнений гидродинамики, которое было открыто Гельмгольцем. Оно имеет такое же значение для гидродинамики, как принцип площадей для общей механики.

Будем исходить из трех уравнений Лагранжа (267), которые соответствуют буквам a, b, c. Функции V и P можно исключить из них, если продиференцировать первое уравнение по b, второе уравнение по a и из одного получившегося уравнения вычесть другое. Произведя эту операцию, мы можем снова получить три уравнения, которые соответствуют буквам a, b, c. Произведем сперва вычисление только для уравнения a. Получается:

$$\frac{d}{db}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dc} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dc} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dc}\right) - \frac{d}{dc}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{db} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{db} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{db}\right) = 0.$$

После диференцирования:

$$\sum_{x,y,z}\frac{dx}{dc}\frac{d}{db}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) - \frac{dx}{db}\frac{d}{dc}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

где знак суммы показывает, что к написанному члену с буквой x нужно добавить два аналогичных члена с буквами y и z. Это выражение можно написать в виде производной по времени t, а именно:

$$\sum_{x,y,z}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dc}\frac{du}{db} - \frac{dx}{db}\frac{du}{dc}\right) = 0.$$

В этом можно убедиться, продиференцировав по t, так как из получившихся четырех членов два сократятся.

Проинтегрировав, получим:

$$\sum_{x,y,z}\frac{dx}{dc}\frac{du}{db} - \frac{dx}{db}\frac{du}{dc} = A, \qquad (307a)$$

где величина A зависит только от a, b, c, а не от t. Совершенно таким же образом получим выражение (307b) $= B$ и выражение (307c) $= C$, где B и C обладают таким же свойством, как и A.

Чтобы преобразовать три уравнения, соответствующие буквам a, b, c, в уравнения, соответствующие буквам x, y, z, умножим уравнения (307) последовательно на $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dx}{dc}$ и сложим. Собрав вместе по нескольку членов, часть из которых сократится, а часть может быть написана в виде символа, аналогичного (8), получим:

$$\sum_{a,b,c} \frac{dw}{da}\left[\frac{dy}{da}\right]-\frac{dv}{da}\left[\frac{dz}{da}\right]=A\frac{dx}{da}+B\frac{dx}{db}+C\frac{dx}{dc} \qquad (308x)$$

и соответствующие два уравнения (308y), (308z).

Согласно (53),

$$\sum_{a,b,c} \frac{dw}{da}\left[\frac{dy}{da}\right]=D\cdot\frac{\partial w}{\partial y},$$

где D обозначает функциональный определитель (51). Поэтому (308x) примет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{dv}{dz}=\frac{1}{D}\left(A\frac{dx}{da}+B\frac{dx}{db}+C\frac{dx}{dc}\right),$$

а принимая во внимание, с одной стороны, (59) и (256), с другой стороны, (261), получим:

$$\xi=\frac{k}{2k_0}\left(A\frac{dx}{da}+B\frac{dx}{db}+C\frac{dx}{dc}\right), \qquad (309x)$$

и аналогичные уравнения (309y) и (309z) для η и ζ.

Чтобы определить значения „постоянных интегрирования" A, B, C, не зависящих от t, положим в трех уравнениях (309) $t=0$. Так как, согласно (1a)

$$\left(\frac{dx}{da}\right)_0=1, \quad \left(\frac{dx}{db}\right)_0=1, \quad \left(\frac{dx}{dc}\right)_0=1,$$

то получится:

$$\xi_0=\frac{1}{2}A, \quad \eta_0=\frac{1}{2}B, \quad \zeta_0=\frac{1}{2}C.$$

Следовательно, вообще

$$\begin{aligned}\xi&=\frac{k}{k_0}\left(\xi_0\frac{dx}{da}+\eta_0\frac{dx}{db}+\zeta_0\frac{dx}{dc}\right),\\ \eta&=\frac{k}{k_0}\left(\xi_0\frac{dy}{da}+\eta_0\frac{dy}{db}+\zeta_0\frac{dy}{dc}\right),\\ \zeta&=\frac{k}{k_0}\left(\xi_0\frac{dz}{da}+\eta_0\frac{dz}{db}+\zeta_0\frac{dz}{dc}\right).\end{aligned} \qquad (310)$$

Из этих уравнений вытекает множество следствий, которые основаны на том, что величины k_0, ξ_0, η_0, ζ_0 зависят только от a, b, c, а не от t.

Рассмотрим сперва частицу жидкости a, b, c, скорость вращения которой равна нулю в момент $t=0$. Тогда соответствующие компоненты ξ_0, η_0, ζ_0 обратятся в нуль, и из (310) следует:

$$\xi=0, \ \eta=0, \ \zeta=0.$$

Таким образом частица жидкости, которая не обладает вращением в некоторый момент, сохраняет это свойство во все времена.

Далее, рассмотрим в момент $t=0$, когда a, b, c совпадают с x, y, z, такие частицы жидкости a, b, c, для которых все или часть компонентов скорости и вращения отличны от нуля. Мы можем следующим образом составить себе наглядное представление о пространственном расположении этого вектора (ξ_0, η_0, ζ_0).

Вообразим такое семейство кривых:

$$da:db:dc=\xi_0:\eta_0:\zeta_0. \qquad (311)$$

Каждая из этих кривых обладает тем свойством, что касательная в какой-либо точке ее совпадает с направлением оси вращения в этой точке. Поэтому такая кривая называется **вихревой линией** жидкости. Проследим и в дальнейшие моменты t те из материальных точек a, b, c, которые в момент $t=0$ принадлежат вихревой линии и поэтому связаны между собою уравнением (311). Определим скорости вращения этих точек. Величину и направление скоростей можно получить из уравнений (310). Что касается направления, то, подставив значения ξ_0, η_0, ζ_0 из (311), получим:

$$\xi:\eta:\zeta=dx:dy:dz. \qquad (312)$$

Это значит, что кривая, образованная в пространстве рассматриваемыми точками, также обладает свойством вихревой линии, или же: **вихревые линии всегда состоят из одних и тех же материальных точек.**

Поэтому вихревая линия представляет собою индивидуальное субстанциальное образование, которое может изменять свое положение и форму во время движения, но никогда не изменяет материального состава и основного свойства, характеризующегося уравнением (312). Вихревая линия может быть замкнутой, или же простираться в бесконечность, или же заканчиваться на поверхности жидкости.

Уравнения (310) дают ответ также и на вопрос о скорости вращения (или вихревой скорости) ω.

Рассмотрим элемент длины вихревой линии

$$ds_0=\sqrt{da^2+db^2+dc^2}$$

в момент $t=0$. Согласно (311),

$$\frac{\xi_0}{\omega_0}=\frac{da}{ds_0}, \quad \frac{\eta_0}{\omega_0}=\frac{db}{ds_0}, \quad \frac{\zeta_0}{\omega_0}=\frac{dc}{ds_0}.$$

Подставив в (310), имеем:

$$\xi=\frac{k}{k_0}\omega_0\frac{dx}{ds_0}, \quad \eta=\frac{k}{k_0}\omega_0\frac{dy}{ds_0}, \quad \zeta=\frac{k}{k_0}\omega_0\frac{dz}{ds_0}.$$

Следовательно, скорость вращения в момент t:

$$\omega=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=\frac{k}{k_0}\omega_0\frac{ds}{ds_0}. \qquad (313)$$

Таким образом скорость вращения в какой-нибудь точке вихревой линии пропорциональна плотности жидкости и длине элемента дуги линии, если элемент дуги все время проходит через одни и те же материальные точки. Если же, например, элемент дуги удлиняется с течением времени, так что образующие его материальные точки удаляются друг от друга, а величина k остается неизменной, то вихревая скорость возрастает.

Это положение станет еще нагляднее, если изложить его в другой форме. Представим себе какую-нибудь часть поверхности внутри жидкости и проведем через каждую точку ее края вихревую линию. Таким образом мы выделим из жидкости объем, который называется „вихревою нитью" или „вихревой трубкой". Боковая поверхность трубки состоит исключительно из вихревых линий, а упомянутая часть поверхности представляет собою сечение трубки. Можно представить себе, что весь объем жидкости состоит целиком из бесконечно тонких вихревых нитей, которые либо замкнуты, либо простираются в бесконечность, либо же оканчиваются на поверхности жидкости. Вихревые нити, подобно вихревым линиям, состоят всегда из одних и тех же материальных точек.

Рассмотрим бесконечно короткий отрезок такой бесконечно тонкой вихревой нити, проведя через две точки одной из линий вихревой нити два произвольных сечения с площадью f на расстоянии ds друг от друга. Проследим за точками, принадлежащими этому отрезку вихревой нити, в разные моменты времени.

Так как масса отрезка вихревой нити неизменна, то:

$$k\cdot f\cdot ds\cdot\cos\vartheta=k_0\cdot f_0\cdot ds_0\cdot\cos\vartheta_0,$$

где ϑ обозначает острый угол между нормалью к поперечному сечению и ds, т. е. осью вихря.

Тогда (313) примет вид:

$$\omega\cdot f\cdot\cos\vartheta=\omega_0\cdot f_0\cdot\cos\vartheta_0=\omega\cdot f_n, \qquad (314)$$

где f_n обозначает площадь сечения, нормального к оси вихря. Таким образом *произведение вихревой скорости на площадь нормального сечения вихревой нити не изменяется с течением времени.*

Но это произведение имеет одинаковую величину также и в различных местах определенной вихревой нити, ибо, если про-

интегрировать по произвольному объему жидкости следующее тождество:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0, \qquad (315)$$

вытекающее из равенств (59), и преобразовать каждый из получившихся при этом объемных интегралов по формуле (78), то мы получим для интеграла, взятого по поверхности, ограничивающей объем:

$$\int\left(\xi\cos(\nu x)+\eta\cos(\nu y)+\zeta\cos(\nu z)\right)d\sigma=\int\omega\cos(\nu,\omega)\cdot d\sigma=0. \qquad (316)$$

Если взятый объем жидкости есть отрезок вихревой нити произвольной длины, то все те члены поверхностного интеграла, которые относятся к боковой поверхности нити, обращаются в нуль, так как в каждой точке боковой поверхности нормаль ν перпендикулярна к направлению вихревой оси, лежащей на боковой поверхности. Если вихревая нить бесконечно тонка, но конечной длины, с произвольно расположенным начальным сечением f и конечным сечением f', то уравнение (316) приводится к двум членам:

$$\omega\cos(\nu,\omega)\cdot f+\omega'\cos(\nu,\omega')\cdot f'=0.$$

Если снова обозначить через ϑ острый угол между нормалью к поперечному сечению и вихревой осью и, кроме того, принять во внимание, что вихревые оси ω,ω' направлены в одну сторону, а внутренние нормали направлены в противоположные стороны, то получится:

$$\omega f\cos\vartheta-\omega' f'\cos\vartheta'=0, \qquad (317)$$

что в сочетании с (314) дает такое привило: *для бесконечно тонкой вихревой нити произведение вихревой скорости на площадь нормального поперечного сечения имеет одну и ту же величину во всех точках нити и во всякий момент.* Это произведение называется также „моментом" вихревой нити.

Существование изложенных законов непосредственно связано, очевидно, с допущениями о совершенно упругой жидкости (§ 53) и о существовании силового потенциала (263). Но в природе всегда встречаются более или менее значительные отступления от этих допущений. В результате таких отступлений вихри могут, в противность выведенным законам, как появляться, так и исчезать. Подобные отступления обусловливаются явлениями трения и теплопроводности. Под влиянием трения внутри жидкости появляются силы давления, которые зависят не от деформации, а от скорости деформации в данный момент (§ 78), а в результате теплопроводности давление становится зависимым не только от плотности, и потому не выполняется равенство (211). Только в предельных случаях бесконечно большой теплопроводности (изотермические процессы) и бесконечно малой теплопроводности (адиабатические процессы) можно, как мы видели в § 56, рассматривать жидкость как абсолютно упругую и принимать законы вихревых движений при действии консервативных массовых сил.

ГЛАВА ВТОРАЯ

БЕЗВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 61. Проинтегрировав общие уравнения гидродинамики, мы познакомились с фундаментальным значением вихревых движений. Поэтому естественно будет в дальнейшем, рассматривая движения жидкости, разделить их на два рода: движения безвихревые (невращательные) и вихревые. Сперва рассмотрим первый род движений. Основное условие безвихревых движений есть

$$\operatorname{rot} \mathbf{q} = 0, \tag{318}$$

или же

$$\mathbf{q} = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{319}$$

т. е. существование такой функции φ „потенциала скорости", частные производные которой по x, y, z равны соответствующим компонентам скорости [ср. выше (217) и (218)]. Мы знаем из предыдущего, что если равенство (318) или (319) имеет место для одного момента времени, то оно имеет место во всякое время. Обычно определяют потенциал скорости φ не с тем знаком, какой мы взяли, и в уравнении (319) пишут знак +. Но, если мы желаем сохранить аналогию с потенциалом сил и упругим потенциалом, а также с электрическим и термодинамическим потенциалами, то приходится и для потенциала скорости считать направление вектора $\mathbf{q}$ обратным направлению соответствующего градиента. Тогда и скорость, подобно силе в отношении силового потенциала, направлена в сторону у б ы в а ю щ е г о потенциала. В выражении потенциала скорости остается, по (319), еще аддитивная функция времени, совершенно неопределенная и поэтому не имеющая физического значения.

Удобнее всего рассматривать состояние жидкости в отношении скоростей ее точек в какой-либо момент t, если построить поверхности постоянного потенциала скорости $\varphi = \text{const}$ и перпендикулярные к ним кривые:

$$dx : dy : dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{320}$$

так называемые „линии тока", которые указывают направление скорости в каждой ее точке, совершенно аналогично поверхностям уровня и силовым линиям (*1*, § 40). Так как линия тока идет всегда от более высокого к более низкому потенциалу скорости, то она не может быть замкнутой, если потенциал скорости однозначен и непрерывен. Позднее (§ 68) мы встретим безвихревое движение жидкости с замкнутыми линиями тока, и тогда вынуждены будем сделать вывод, что определенное безвихревое движение может обладать также многозначным или прерывным потенциалом скорости.

Из понятия о линии тока непосредственно вытекает понятие о „нити тока" или „трубке тока", которая характеризуется тем, что боковая поверхность ее образована линиями тока. Нить тока относится к линии тока совершенно так же, как вихревая нить относится к вихревой линии. Поверхности постоянного потенциала скорости, понятно, ортогональны к нитям тока.

Если движение жидкости нестационарно, то система линий и нитей тока будет неодинаковой в различные моменты, т. е. линии тока будут изменяться с течением времени. Но следует при этом иметь в виду, что говорить о движении какой-либо определенной линии тока не имеет смысла, ибо точки жидкости, которые образуют линию тока в определенный момент, уже не обладают этим свойством в другой момент. Поэтому вообще не является возможным сопоставить с линией тока в один момент определенную линию тока в другой момент. В этом заключается принципиальное отличие линий тока от вихревых линий, которые состоят всегда из одних и тех же точек жидкости и поэтому имеют индивидуальное значение.

Так как условие отсутствия вихрей удобнее всего выражается при помощи пространственных координат x, y, z в качестве независимых переменных, то для изображения безвихревых движений лучше всего подходят уравнения движения в эйлеровой форме (268). Последние можно написать следующим образом, воспользовавшись (319):

$$\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \text{ и т. д.}$$

Проинтенгрировав их по x, y, z, получим:

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t).$$

Как мы уже заметили, в выражении потенциала скорости аддитивная функция времени является произвольной. Поэтому можно написать:

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{321}$$

К этому уравнению нужно присоединить условие непрерывности (259) и соотношение между давлением и плотностью, зависящее от природы жидкости. Тогда мы будем иметь три уравнения, из которых можно определить три величины φ, p, k как функции независимых переменных x, y, z, t, воспользовавшись начальными и пограничными условиями, соответствующими данному особому случаю.

§ 62. Стационарное (установившееся) движение несжимаемой жидкости. Если движение стационарно, то

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0,\ \frac{\partial v}{\partial t}=0,\ \frac{\partial w}{\partial t}=0.$$

Проинтегрировав эти уравнения по x, y, z, получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\text{const}.$$

Если жидкость несжимаемая и тяжелая, то P принимает значение (277), V — значение (280), и уравнение (321) переходит в уравнение:

$$p=-\frac{k}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)-kgz+\text{const}, \tag{322}$$

а уравнение непрерывности приводится к такому:

$$\triangle\varphi=0. \tag{323}$$

Это — известное уравнение Лапласа. Каждое решение этого диференциального уравнения, не зависящее от t, представляет возможное в природе безвихревое стационарное (установившееся) движение несжимаемой жидкости, при котором давление выражается формулой (322). Как мы видим, давление состоит из двух частей, из которых первую часть часто называют гидродинамическим давлением, а вторую, тождественную с (282), — гидростатическим давлением. Гидростатическое давление зависит только от величины скорости и уменьшается с возрастанием ее. Как давление, так и падение давления не имеют ничего общего с направлением движения жидкости. В следующих параграфах мы познакомимся с интересными примерами этого положения.

Возьмем внутри жидкости какой-нибудь определенный ограниченный со всех сторон объем и проинтегрируем уравнение непрерывности (323) по этому объему. Тогда получим, на основании (82):

$$\int\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}d\sigma=0. \tag{324}$$

Это уравнение получит наглядное истолкование, если принять во внимание, что выражение

$$-k\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}d\sigma dt=kq\nu d\sigma dt \tag{325}$$

представляет то количество жидкости, которое втекает внутрь объема через элемент поверхности $d\sigma$ за время dt. Уравнение (324) гласит, что количество жидкости, втекающей в рассматриваемый объем через все элементы поверхности его, равно в целом нулю, т. е. втекает ровно столько же жидкости, сколько вытекает.

Если рассматриваемый объем представляет собою отрезок трубки тока произвольной длины и произвольного сечения, то те части поверхностного интеграла (324), которые относятся к боковой поверхности трубки, отпадают, и уравнение сводится к правилу, что через каждое сечение трубки тока протекает одинаковое количество жидкости. Это количество характерно для рассматриваемой трубки тока. Отнесенное к единице времени, оно называется „интенсивностью тока“или „силой тока“ трубки:

$$J=-k\int\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}d\sigma, \tag{326}$$

где интеграл берется по какому-нибудь произвольному сечению трубки, и направление ν должно быть взято в направлении течения.

Если взять сечение, совпадающее с поверхностью $\varphi=\text{const}$, то направление ν совпадает с направлением скорости q, и мы получим:

$$J=k\int q d\sigma. \tag{327}$$

§ 63. Для каждой трубки тока можно себе представить, что боковая поверхность ее заменена твердой стенкой, без всякого нарушения движения жидкости, так как предельное условие, существующее для твердой стенки, что нормальная составляющая скорости обращается в нуль, всегда осуществлено на боковой поверхности трубки тока. Благодаря этому трубки тока получают непосредственное практическое значение. Если сечение трубки не слишком велико, и скорость течения распределена не слишком неравномерно по величине и направлению в различных точках сечения, как, например, бывает в водопроводных трубах, то можно с известным приближением считать плоскими поверхности постоянного потенциала скорости и вынести q за знак интеграла в формуле (327). Тогда

$$J=k\cdot q\cdot f, \tag{328}$$

где f обозначает площадь нормального сечения трубки. Так как J и k остаются постоянными вдоль всей трубки, то величина скорости обратно пропорциональна сечению f трубки, или

$$q = \frac{f_0 q_0}{f}, \tag{329}$$

если обозначить значком нуль какое-нибудь определенное сечение, например начальное. Отсюда получится, согласно (322) давление в каком-нибудь сечении f трубки:

$$p - p_0 = -\frac{k}{2} q_0^2 \left(\frac{f_0^2}{f^2} - 1\right) + kg(z_0 - z). \tag{330}$$

Как мы видим, давление меньше всего в самых узких местах трубки. Поэтому можно в принципе, при данных q_0 и f_0, сузив должным образом трубку, т. е. уменьшив величину f, получить любое уменьшение давления, соответственно увеличению скорости. Если в таком узком месте проделать в стенке трубки узкое отверстие, установив таким образом сообщение с наружным воздухом, находящимся при нормальном давлении p_0, то под влиянием разности давления $p_0 - p$ воздух вгонится в трубку и будет унесен жидкостью. Это обстоятельство применяется, например, в гидравлических воздушных насосах. Так называемые распылительные аппараты также основаны на уменьшении давления при возрастании скорости.

Член равенства (330), зависящий от тяжести, также может быть использован для уменьшения давлéния p, например, в воздушно-водяном насосе Бунзена, где вода падает в вертикальной цилиндрической трубке ($f = f_0$), так что разность давлений в двух местах прямо пропорциональна разности уровней $z_0 - z$.

Уравнения (329) и (330) можно использовать также и для того, чтобы по заданной разности давления $p_0 - p$ в начале и конце трубки найти стационарные скорости q_0 и q, с которыми жидкость течет в трубке. Вычислим, например, стационарную скорость истечения из трубки, широкой вверху и узкой внизу, полагая, что на верхнем уровне жидкости давление p_0, а у отверстия давление равно p. Если пренебречь f по сравнению с f_0 и обозначить разность высот обоих уравнений через h, то мы получим из (330) и (329) следующее выражение для скорости истечения:

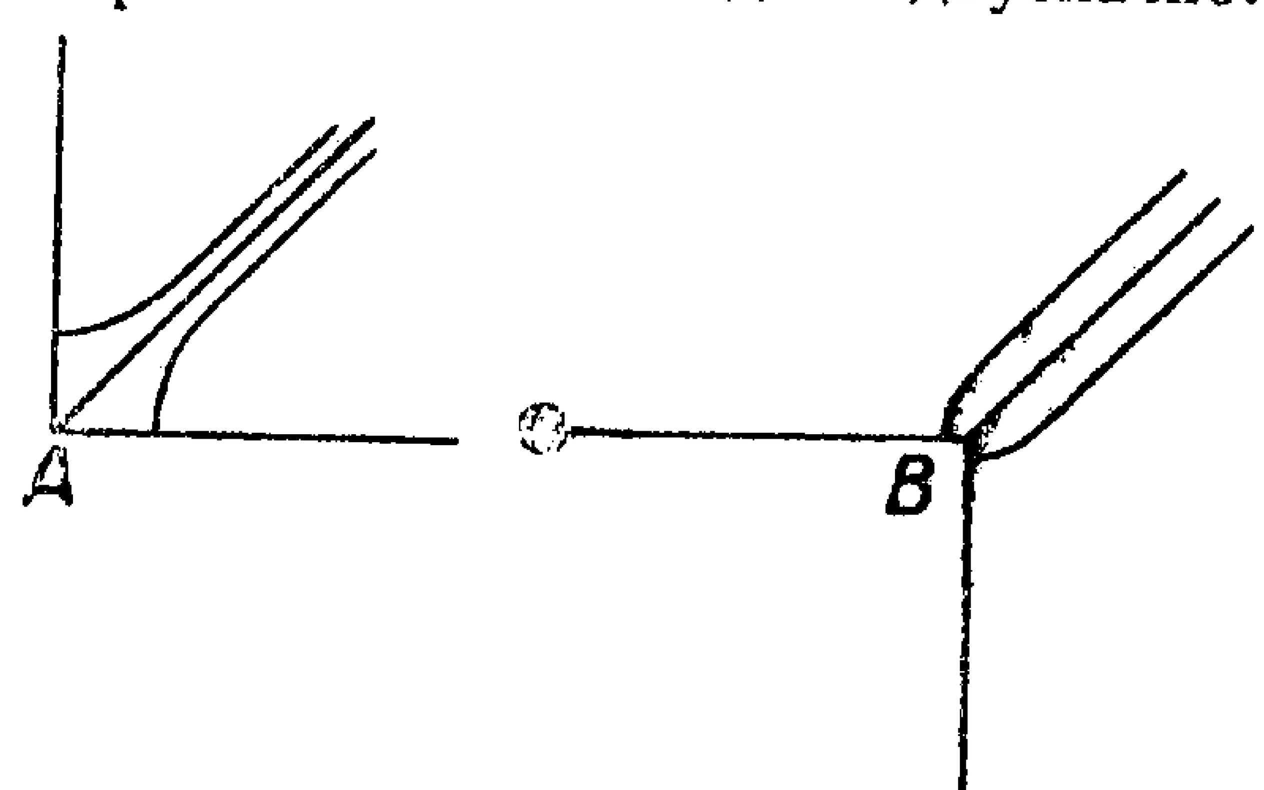
$$q^2 = 2gh + \frac{2}{k}\left(p_0 - p\right). \tag{331}$$

Если давление вверху и внизу одинаково, то $q = \sqrt{2gh}$, т. е. скорость истечения равна скорости тела, свободно падающего с высоты h (теорема Торичелли). Введя разность давлений, можно, в зависимости от знака ее, ускорить или замедлить истечение. Но для того чтобы q оставалось вещественным, разность давлений не должна быть меньше величины $-hkg$. В предельном случае скорость стационарного истечения равна нулю, и мы получим для разности давлений известную барометрическую формулу (283).

В действительности количество вытекающей жидкости значительно (приблизительно на треть) меньше, чем вычисленное по скорости истечения на основании (331) и по площади отверстия f на основании (328). Это обусловлено, главным образом, тем обстоятельством, что поверхность $\varphi = \text{const}$ у отверстия не плоская, а вогнутая, если смотреть снаружи, так как линии тока, проходя изнутри жидкости, сдвигаются около узкого отверстия, подобно образующим конуса у вершины. Поэтому поверхности $\varphi = \text{const}$ расположены подобно шаровым поверхностям, концентрически окружающим вершину конуса. Вследствие этого скорость неодинаково направлена в различных точках отверстия, как мы предполагали, применяя уравнение (328), но линии тока сходятся, и поэтому сечение трубки тока еще несколько сжимается за отверстием там, где жидкость образует свободную струю (§ 67). Лучшее приближение к действительности получится, если подставить в уравнение (328) вместо f не площадь отверстия, а меньшую площадь, которую имеет струя после сжатия, так как там линии тока ближе к параллельному расположению.

Количество вытекающей жидкости можно значительно увеличить, присоединив к отверстию цилиндрическую или, еще лучше, конически расширяющуюся наружу трубку. Главная задача этого приспособления состоит в том, чтобы сделать линии тока у отверстия параллельными или расходящимися и этим избегнуть сжатия струи. Подробнее об истечении из конической трубки мы будем говорить в следующем параграфе.

Если стенка трубки не всюду непрерывно изогнута, а образует в каком-либо месте угол, то та линия тока, которая идет вдоль стенки и проходит через вершину угла, имеет в этом месте особенную точку, так как направление линии здесь двузначно. Компоненты скорости течения в таком углу равны нулю или бесконечны. Выясним, при каких условиях имеет место каждый из этих случаев. Положим, что стена образует вогнутый угол ($< \pi$), если смотреть со стороны жидкости, как в точке A на черт. 11. Тогда поверхности $\varphi = \text{const}$, перпендикулярные к стенке и изображенные на чертеже линиями, расположены таким образом, что при приближении к A расходятся от особенной поверхности потенциала



Черт. 11.

проходящей через A. В таком случае градиент φ и вместе с тем величина скорости в точке A обращаются в нуль (ср. *1*, § 40), вследствие чего давление p достигает максимума, согласно (332). Если же стена образует выпуклый, входящий в жидкость угол ($>\pi$), как в точке B того же чертежа, то поверхности постоянного потенциала скорости сходятся по направлению к особенной точке, градиент φ и скорость равны бесконечности, следовательно, давление $p=-\infty$, и жидкость должна была бы обладать бесконечно большим сцеплением, чтобы не разорваться.

§ 64. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых простых частных решений уравнения потенциала (323) и соответствующих движений жидкости. Наиболее простое решение состоит в том, что φ зависит линейно от x, y, z. Ему соответствует равномерное поступательное движение жидкости, которое не представляет для нас интереса.

Более общее решение [согласно *1*, (125) и (129)]:

$$\varphi=\sum\frac{\mu_1}{r_1}, \tag{332}$$

где r_1 — расстояние точки воздействия от неподвижного центра *1*, μ — постоянная, свойственная этому центру, а суммирование распространяется на произвольное число различных центров. Так как потенциал скорости становится бесконечно большим при неограниченном приближении точки воздействия к какому-нибудь неподвижному центру, то нужно представлять себе, что сами неподвижные центры выделены из жидкости. Это может быть сделано посредством небольших замкнутых поверхностей, непосредственно окружающих отдельные центры.

Рассмотрим сперва частный случай одного центра

$$\varphi=\frac{\mu}{r}. \tag{333}$$

В этом случае поверхности постоянного потенциала скорости представляют собою концентрические шаровые поверхности, а линии тока суть образующие прямолинейного ортогонального пучка лучей. Если μ положительно, то жидкость течет от центра по всем направлениям, и мы имеем так называемую „точку истока" („источник"). Если μ отрицательно, то жидкость всасывается отовсюду в центр, и там находится „точка стока". Величина скорости, считая в направлении от центра, равна

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\mu}{r^2}. \tag{334}$$

Она изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, и в самом центре равна $\pm\infty$. Вследствие этого давление p

в центре, согласно (322), всегда равно $-\infty$, независимо от того, находится ли в нем источник или сток. Здесь мы встречаемся с интересной особенностью по сравнению со стационарными гальваническими и термическими течениями, которые исходят из точечного электрода или точечного источника тепла и также изображаются диференциальным уравнением Лапласа. В этих явлениях направление течения зависит от падения (градиента) потенциала или температуры и изменяется вместе со знаком градиента. В течениях жидкости давление всегда возрастает наружу, независимо от того, течет ли жидкость наружу или внутрь. Причина этой особенности заключается в инерции жидкости, так как падение давления дает здесь силу, всегда направленную внутрь. Сила эта необходима для того, чтобы в случае источника постепенно замедлять скорость жидкости, вытекающей наружу, а в случае стока постепенно повышать скорость жидкости, втекающей внутрь.

Любую коническую поверхность с вершиной в центре можно мысленно заменить твердой стенкой. Таким образом мы получим законы истечения из конической трубки, о которой шла речь в предыдущем параграфе. Постоянная μ непосредственно связана с производительностью источника. Представим себе, что в жидкости проведена некоторая поверхность произвольной формы, которая окружает со всех сторон точку истока. Так как движение стационарно, то все количество жидкости, протекающее в единицу времени сквозь поверхность наружу, равно количеству жидкости, которая доставляется за это время источником, и не зависит поэтому от формы поверхности. Эту величину назовем „интенсивностью" или „силой" источника и обозначим буквой J. Ее проще всего вычислить, если предположить, что поверхность — шаровая с источником в центре. Тогда мы получим для интенсивности источника, согласно (325) и (334):

$$J=-k\int\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\sigma=k\frac{\mu}{r^2}\int d\sigma=4\pi k\mu. \tag{335}$$

Это равенство представляет собою вместе с тем обобщение равенства (324), которое верно только в том случае, если объем, ограниченный поверхностью, не заключает в себе особенных точек.

Далее, перейдем к более общему случаю (332) произвольного числа точек истока и стока. Здесь мы будем иметь дело с аналогичными соотношениями. Линии тока начинаются в точках истока и заканчиваются либо в точках стока, либо простираются в бесконечность. Производительность каждой особенной точки определяется постоянной μ, при помощи которой определяется интенсивность J источника или стока, ибо в непосредственной близости от точки можно пренебречь влиянием всех других источников, и поэтому поверхности постоянного потенциала скорости вблизи от источника суть шаровые поверхности, его окружающие.

Представим себе, что внутри жидкости построена замкнутая поверхность, ограничивающая некоторый объем. Ввиду стационарности движения все количество жидкости, протекающей в единицу времени сквоз поверхность наружу равно алгебраической сумме количеств жидкости, доставляемых источниками и стоками, лежащими внутри объема, или, согласно (325) и (335):

$$k\int\frac{\partial\varphi}{d\nu}\,d\sigma=\sum J_i=4\pi k\sum\mu_i.$$

Следовательно,

$$\int\frac{d\varphi}{d\nu}d\sigma=4\pi\sum\mu_i. \tag{336}$$

где значок i обозначает внутренние особенные точки, окруженные поверхностью σ; ν обозначает, как и всегда, внутреннюю нормаль. Это соотношение объединяет в один общий закон два более частных соотношения (324 и 325) и часто называется в честь его автора уравнением Гаусса.

Рассмотрим еще некоторые частные приложения. При двух точечных источниках одинаковой интенсивности потенциал скорости равен:

$$\varphi=\mu\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right). \tag{337}$$

Плоскость, которая делит пополам прямую, соединяющую оба источника, и перпендикулярна к ней, т. е. плоскость симметрии, состоит из линий тока. Поэтому можно мысленно заменить ее твердой стеной. Воспользовавшись рассуждением, изложенным в § 47, получим свойства истечения жидкости из источника по направлению к неподвижной стене.

Если оба источника обладают одинаковой интенсивностью, но разных знаков, то потенциал скорости равен:

$$\varphi=\mu\left(-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right). \tag{338}$$

Тогда жидкость течет из источника *2* в сток *1*, а именно, линии тока начинаются в точке *2* и оканчиваются в точке *1*. Если оба центра очень близки друг к другу, и точка *1* имеет координаты ξ, η, ζ, а точка *2* имеет координаты $\xi+\Delta\xi$, $\eta+\Delta\eta$, $\zeta+\Delta\zeta$, то выражение (338) преобразуется в такое:

$$\varphi=\mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\Delta\xi+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\Delta\eta+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\Delta\zeta\right).$$

При переходе к пределу $\Delta=0$ можно представить себе, что μ возрастает так, что произведения $\mu\cdot\Delta\xi$, $\mu\cdot\Delta\eta$, $\mu\cdot\Delta\zeta$ остаются конечными. Обозначим их через μ_ξ, μ_η, μ_ζ. Тогда получим для потенциала скорости конечное выражение:

$$\varphi=\mu_\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+\mu_\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+\mu_\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}. \tag{339}$$

Такое образование, состоящее из двух бесконечно близких точечных источников с противоположными и равными бесконечно большими интенсивностями, называется „двойным источником“. Постоянный вектор, компоненты которого μ_ξ, μ_η, μ_ζ, называется „моментом“, его направление (от стока к источнику) называется „осью“ двойного источника. Линии тока выходят из источника в направлении оси и возвращаются к стоку, описав большую или меньшую дугу. Замена друг другом источника и стока изменяет только направление течения, но не положение линии тока. Так как расстояние r между точкой воздействия и особенной точкой зависит только от разности координат обеих точек, $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$, то можно написать вместо (339):

$$\varphi=-\mu_\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-\mu_\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\mu_\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}. \tag{340}$$

Из выражения φ в этой форме непосредственно видно, что φ действительно удовлетворяет уравнению Лапласа (323).

§ 65. Рассмотрим, в качестве дальнейшего применения изложенной теории, еще один случай, который можно обосновать на сделанных выше упрощающих допущениях: *равномерное движение твердого шара в несжимаемой жидкости.* Согласно принципу относительности (*1*, § 59), законы этого движения совершенно те же, как в случае *шара покоящегося в равномерном потоке жидкости.* Последний же случай представляет собой стационарное движение жидкости рассмотренного здесь вида. Поэтому мы заменим шар, движущийся с постоянной скоростью a в направлении оси z, неподвижным шаром с центром в начале координат, который омывается со всех сторон потоком жидкости. В тех местах, которые настолько удалены от шара, что последний не оказывает на поток никакого действия, — иначе, на бесконечно большом расстоянии от начала координат, — поток имеет постоянную скорость — a в направлении оси z.

Задача будет решена, если удастся составить такое выражение потенциала скорости φ, которое удовлетворяет уравнению Лапласа и, кроме того, удовлетворяет предельным условиям. Пределы жидкости суть $r=R$ (радиус шара) и $r=\infty$. При $r=\infty$, согласно вышесказанному,

$$\varphi = az. \tag{341}$$

При $r=R$ компонент скорости, нормальный к поверхности шара, равен нулю. Поэтому

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_R = 0. \tag{342}$$

Чтобы выполнить все эти условия, положим

$$\varphi = az + \varphi'. \tag{343}$$

Тогда функция φ' должна удовлетворять уравнению Лапласа и, кроме того, пограничным условиям:

$$\text{при } r=\infty:\quad \varphi' = 0;$$

$$\text{при } r=R:\quad \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial r}\right)_R = -a\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_R = -\frac{az}{R}. \tag{344}$$

Легко показать, что мы получим решение последней задачи, если положим, что φ' равна потенциальной функции двойного источника, т. е.

$$\varphi' = \mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = -\mu\frac{z}{r^3}. \tag{345}$$

Действительно: во-первых, φ' удовлетворяет уравнению Лапласа,— во-вторых, φ' обращается в нуль при $r=\infty$ и, в-третьих, из (344) получается постоянное значение μ:

$$\mu = -\frac{1}{2}R^3a. \tag{346}$$

Если производные $\frac{\partial z}{\partial r}$ и $\frac{\partial r}{\partial z}$ имеют одинаковую величину в уравнениях (344) и (345), а именно, обе равны $\frac{z}{r}$, то в этом еще нельзя видеть противоречия. Оно могло бы возникнуть только в результате неправильного понимания значения этих символов. Но можно и формально избежать противоречия, если написать подробнее:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{\vartheta,\varphi}\quad \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x,y}, \tag{347}$$

т. е. в левой части уравнения нужно рассматривать z как функцию полярных координат r, ϑ, φ, а в первой части — r как функцию прямолинейных координат x, y, z.

Принимая во внимание (345) и (346), получим из (343) искомое выражение потенциала скорости, т. е. решение всей задачи:

$$\varphi = az\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^3\right\}. \tag{348}$$

Так как φ зависит только от z и r, то течение симметрично относительно оси z и линии тока лежат, естественно, в плоскостях, проходящих через ось z.

Составляющие скорости равны, согласно (348):

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{3}{2}R^3a\cdot\frac{xz}{r^5},$$

$$v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{3}{2}R^3a\cdot\frac{yz}{r^5}, \tag{349}$$

$$w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -a\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)\right\}.$$

Чтобы найти линии тока, которые лежат в какой-либо плоскости, проходящей через ось z, введем вместо x и y расстояние ϱ от оси z:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2. \tag{350}$$

Следовательно,

$$r^2 = \varrho^2 + z^2. \tag{351}$$

В таком случае диференциальное уравнение линий тока гласит

$$d\varrho : dz = \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} : \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

и, согласно (349),

$$d\varrho : dz = \frac{3}{2}R^3a\cdot\frac{\varrho z}{r^5} : -a\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)\right\}.$$

Если заменить z через r и ϱ при помощи соотношений

$$z^2 = r^2 - \varrho^2,\quad z\,dz = r\,dr - \varrho\,d\varrho,$$

то получим, после сокращений:

$$\frac{3R^3dr}{r^4\left\{1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\}} + \frac{2d\varrho}{\varrho} = 0.$$

Отсюда, интегрируя, получим уравнение системы линий тока:

$$\lg\left\{1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\}+2\lg\varrho=\mathrm{const},$$

или

$$\varrho^2\left\{1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\}=\mathrm{const}\ (>0). \tag{352}$$

Система линий тока зависит от радиуса шара R, а не от величины скорости a. Если подставить вместо const все значения от 0 до ∞, то получатся все линии тока. При $\mathrm{const}=\infty$, $\varrho=\infty$, а также $r=\infty$ скорость постоянна и равна $-a$. Но при $\mathrm{const}=0$ либо $\varrho=0$, либо $r=R$, т. е. линия тока распадается на две различные части, одна из которых совпадает с осью z (вне шара), а другая проходит по поверхности шара. В точках перехода при $\varrho=0$, $z=\pm R$, в „полюсах" шара, линия тока претерпевает прямоугольный излом. Здесь скорость становится равной нулю, и линия тока расщепляется на бесконечное множество ветвей, которые непосредственно окружают шар.

Интересно исследовать, сколько времени требуется для того, чтобы частица жидкости, находящаяся на оси z, достигла полюса шара $z=+R$. Так как при движении этой точки $x=0$, $y=0$, $r=z$, то мы получим из (349) искомое время:

$$t=\int_z^R\frac{dz}{w}=\frac{1}{a}\int_R^z\frac{z^3dz}{z^3-R^3}=\infty. \tag{353}$$

Это значит, что время которое требуется частице жидкости, чтобы достичь шара, неограниченно возрастает по мере приближения траектории ее к поверхности шара.

Скорость, с которой жидкость протекает непосредственно у самой поверхности шара, получится из (349), если подставить $r=R$. Она равна

$$\frac{3}{2}\frac{\varrho}{R}a. \tag{354}$$

Наибольшей величины $\frac{3}{2}a$ она достигает в экваториальной плоскости шара. Вообще же скорость распределена совершенно симметрично на двух полушариях по обе стороны от этой плоскости.

Наконец, определим д а в л е н и е, которое жидкость оказывает на шар. По давлению мы вычислим равнодействующую силу, с которой поток жидкости действует на неподвижный шар, т. е. сопротивление, которое движущийся шар испытывает в неподвижной жидкости.

Давление на шар p получится из (322), если пренебречь тяжестью и подставить величину скорости из (354):

$$p=\mathrm{const}-\frac{9}{8}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2a^2k,$$

или же, если обозначить через p_0 давление в ненарушаемом потоке жидкости, т. е. при скорости a:

$$p=p_0+\frac{a^2}{2}k\left\{1-\left(\frac{3}{2}\frac{\varrho}{R}\right)^2\right\}. \tag{355}$$

Давление не зависит от направления течения, оно больше всего у полюсов шара, меньше всего в экваториальной плоскости и симметрично по обе стороны ее. Если соединить в одну равнодейств.ющую все силы давления $pd\sigma$, действующие на элементы поверхности шара, то я но без особого вычисления, на основании симметрии этих сил для положительных и отрицательных z, что равнодействующая обращается в нуль. Другими словами: поток жидкости не оказывает вовсе никакого действия на покоящийся в нем твердый шар, или же равномерно движущийся шар не испытывает сопротивления в неподвижной жидкости.

Этот результат находится в резком противоречии со всеми опытами и представляет собою знаменитый парадокс гидродинамики. Объяснение его можно найти в том обстоятельстве, что в уравнениях, которыми мы пользовались, не принят во внимание член, играющий существенную роль в рассматриваемом вопросе, а именно влияние трения, того трения, которое возникает на поверхности соприкосновения обоих веществ. В действительности под влиянием трения на поверхности шара равен нулю не только нормальный компонент, но и тангенциальный компонент скорости, т. е. жидкость держится совершенно неподвижно на поверхности шара. Мы еще рассмотрим этот вопрос подробнее (§ 80).

§ 66. Теперь перейдем к изучению следующего класса частных решений диференциального уравнения Лапласа для потенциала скорости φ. Рассмотрим решения, в которых функция φ зависит только от двух координат x и y и не зависит от третьей z, так что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{356}$$

Тогда задача сводится к двум измерениям, что гораздо проще. Поверхности равного потенциала (эквипотенциальные поверхности) суть цилиндрические поверхности, параллельные оси z, и могут быть представлены при помощи линий в плоскости xy — линий равного потенциала. Тогда система линий тока представится в виде линий, ортогональных к линиям равного потенциала и лежащих в той же плоскости.

Имеется очень общий метод интегрирования дифференциального уравнения (356), основанный на введении комплексных величин. Легко показать, что всякая аналитическая функция комплексной величины $x+iy=z$ приводит к решению уравнения (356) и поэтому может быть физически истолкована как стационарное безвихревое движение несжимаемой жидкости. Пусть w обозначает такую функцию, т. е.

$$w=f(x+iy)=f(z), \tag{357}$$

причем в выражение функции f могут входить любые вещественные или комплексные постоянные.

Если разложить w на вещественную и мнимую часть

$$w=\varphi+i\psi, \tag{358}$$

то φ и ψ суть вещественные функции вещественных переменных x и y. Из (358) следует:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{359}$$

С другой стороны, из (357) следует:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{dw}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dw}{dz},\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{dw}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dw}{dz}i.\end{aligned}\right\} \tag{359a}$$

Поэтому

$$\frac{\partial w}{\partial y}=i\frac{\partial w}{\partial x},$$

и, согласно (359), после отделения вещественной части от мнимой:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{360}$$

Исключение ψ дает уравнение (356), а исключив φ, получим уравнение:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0. \tag{361}$$

Кроме того, имеет место соотношение:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}=0. \tag{362}$$

Таким образом можно рассматривать φ как потенциал скорости. Тогда кривые $\varphi=\text{const}$ суть линии равного потенциала, а соответствующие линии тока выражаются уравнениями $\psi=\text{const}$, так

как, согласно (362) кривые обоих семейств перпендикулярны друг к другу. Но функции φ и ψ могут поменяться ролями, и последнюю можно рассматривать как потенциал скорости, а первую как функцию тока.

Характер зависимости комплексной функции w от z можно представить всего нагляднее, если рассматривать w и z как, такие точки двух плоскостей — плоскости w и плоскости z, — из которых одна точка определяется координатами φ и ψ, а другая точка определяется координатами x и y. Тогда функция $f(z)=w$ представляет определенное сопоставление обеих точек, т. е. отображение плоскости w в плоскости z, или наоборот. Это отображение можно также представить себе как деформацию некоторого вещества, непрерывно покрывающего плоскость, причем φ и ψ обозначают координаты вещественной точки до деформации, а x и y — координаты той же точки после деформации, или наоборот. Тогда можно высказать такие же соображения об особенностях этой деформации, какие были представлены в первой главе для более общего случая вещества, занимающего некоторый объем. Рассмотрим важнейшие результаты.

Прежде всего нетрудно видеть, что бесконечно малые участки поверхности отображаются л и н е й н о и поэтому могут быть преобразованы друг в друга посредством прямолинейного перемещения, вращения и дилатации (§ 11). Из (357) следует:

$$dz=\frac{dz}{dw}\cdot dw. \tag{363}$$

Положим, что

$$\frac{dz}{dw}=\zeta=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta), \tag{364}$$

причем

$$r>0,\quad \pi>\vartheta>-\pi.$$

Тогда получим из (363), отделив вещественную часть от мнимой

$$dx=r\cos\vartheta\,d\varphi-r\sin\vartheta\,d\psi,$$
$$dy=y\sin\vartheta\,d\varphi+r\cos\vartheta\,d\psi.$$

Положим, что соответствующие друг другу точки w и z неподвижны, и значит, r и ϑ постоянны, и будем рассматривать дифференциалы $d\varphi$, $d\psi$, dx, dy как переменные координаты. Тогда последние два уравнения дадут законы отображения для областей, бесконечно близких к точкам w и z. Геометрическое значение их получим непосредственно, если напишем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{r}&=\cos\vartheta d\varphi-\sin\vartheta d\psi=dx',\\ \frac{dy}{r}&=\sin\vartheta d\varphi+\cos\vartheta d\psi=dy'.\end{aligned}\right\} \tag{365}$$

Это значит: для того чтобы перевести бесконечно близкую точку из положения $(d\varphi, d\psi)$ в положение (dx, dy), нужно, во-первых, произвести простой поворот на угол ϑ, в результате чего точка придет в положение (dx', dy'), и, во-вторых, произвести равномерное расширение по всем направлениям (конец §. 7) в отношении $r:1$, отчего все отрезки увеличатся в том же отношении, между тем как все направления, а значит, и все углы, останутся без изменения. Тем самым измененная область останется подобной первоначальной области и только будет повернута относительно нее. Поэтому отображение при помощи комплексной функции называется также „конформным" в бесконечно малых частях.

Таким образом каждому конформному отображению плоскости w на плоскости z соответствует стационарное движение жидкости в плоскости z. При этом каждая нить тока образует в плоскости w полоску, параллельную оси φ, так как она ограничена двумя линиями $\psi = \text{const}$. Поэтому задача найти стационарное течение жидкости между двумя неподвижными предельными линиями (стенками) приводится к конформному отображению полоски, ограниченной двумя параллельными прямыми в плоскости w, на область, лежащую между этими двумя предельными линиями в плоскости z.

Величины r и ϑ, характеризующие это отображение, наглядным образом определяют движение жидкости. Так как, ввиду 359а) и (360)

$$\zeta = 1 : \frac{dw}{dz} = 1 : \frac{\partial w}{\partial x} = 1 : \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

то из (364) получится после разделения вещественной и мнимой части:

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2, \tag{366}$$

$$\cos\vartheta = r\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \sin\vartheta = r\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{367}$$

Таким образом r есть величина, обратная скорости, а ϑ (между π и $-\pi$) есть угол, который образует градиент потенциала скорости (противоположный линии тока) с положительным направлением оси x.

В качестве простого примера рассмотрим **течение жидкости в пространстве** между двумя неподвижными прямыми, которые пересекаются в точке стока O под углом α (истечение из бесконечно малого отверстия в O). Для этого необходимо конформно отобразить полоску, параллельную оси φ и шириною β,

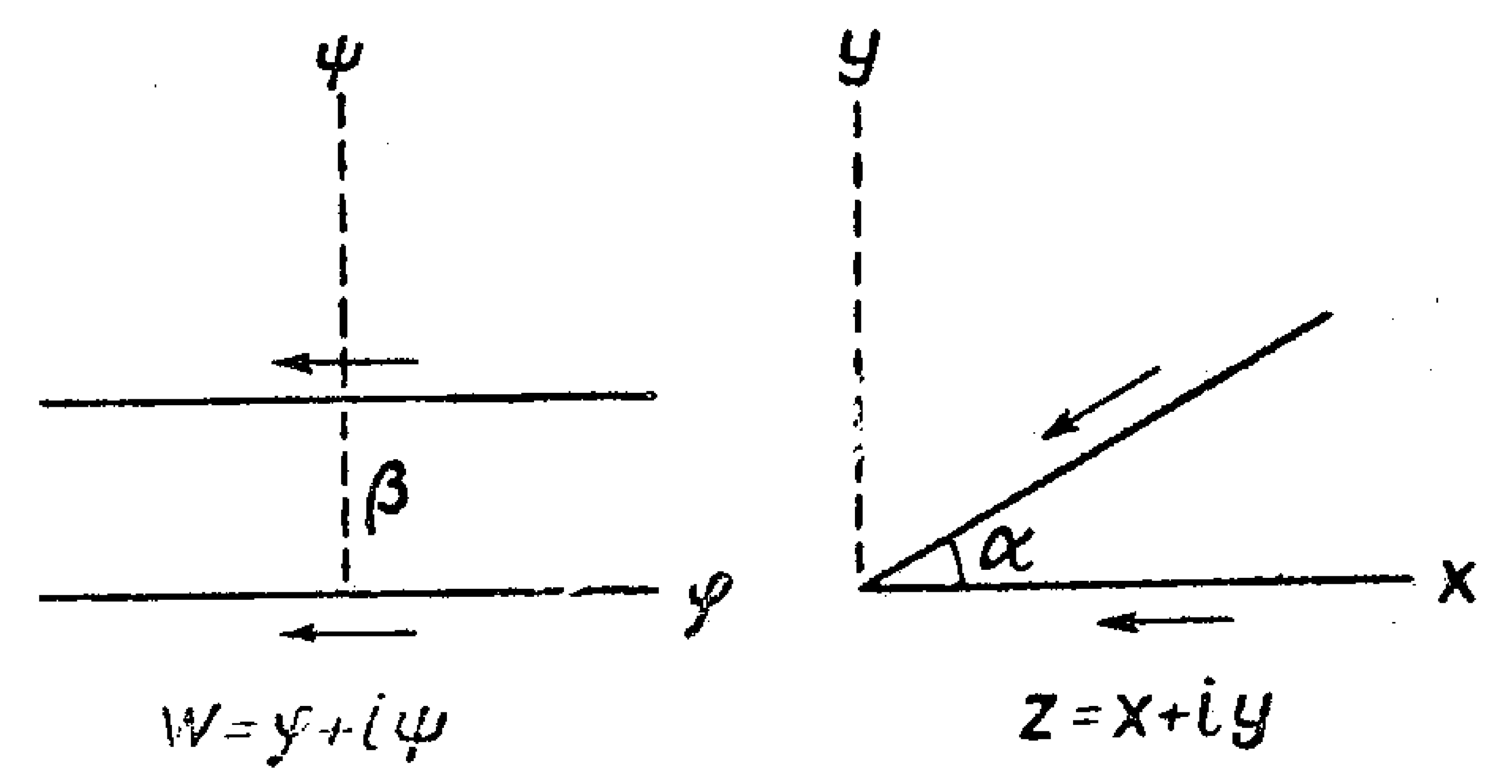
лежащую в плоскости w, на секторный вырез с углом α в плоскости z (черт. 12). Это отображение можно представить при помощи функции.

$$z = e^{\frac{\alpha}{\beta}\cdot w}, \tag{368}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\varphi}\cos\left(\frac{\alpha}{\beta}\psi\right),\\ y &= e^{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\varphi}\sin\left(\frac{\alpha}{\beta}\psi\right). \end{aligned}\right\} \tag{369}$$

Действительно, если φ убывает от $+\infty$ до $-\infty$, соответственно направлению линий тока (обозначенных стрелками на черт. 12), то точка z движется при $\psi = 0$ по неподвижной прямой, по оси x, от $x = \infty$ до $x = 0$, а при $\psi = \beta$ точка движется по другой неподвижной прямой от бесконечного удаления до точки O, и при промежуточном постоянном значении ψ точка движется по прямой, лежащей между этими прямыми, от бесконечного удаления до точки O. Следовательно, линии тока в плоскости z суть прямые, которые проходят через точку O внутри угла α. Если выразить φ и ψ через x и y, то из (369) получится:



Черт. 12.

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha}{\beta}\lg\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\beta}{\alpha}\lg\varrho_0\\ \psi &= \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{370}$$

Таким образом мы имеем здесь логарифмический потенциал в качестве частного решения диференциального уравнения (356) (ср. *1*, § 46). Постоянная β соответствует, очевидно, силе течения.

Для величин r и ϑ получаются следущие значения из (366) и (367):

$$r = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \tag{371}$$

в согласии с тем, что r обозначает величину, обратную скорости, и ϑ обозначает направление, противоположное линии тока.

§ 67. Метод конформных отображений позволяет также разрешить задачу, которая неразрешима при более общих условиях, а именно задачу представить движения жидкости, которые соответствуют „свободным струям": это — токи жидкости, которые протекают не между твердыми стенками, а в свободном воздухе. Задача здесь значительно труднее по той причине, что границы жидкости не даны заранее, а должны быть вычислены при помощи поверхностных условий, характерных для свободной струи. Предельное условие, которое существует на поверхности свободной струи, не только ограничивается требованием, чтобы эта поверхность состояла из линий тока, но и требует также, ввиду принципа равенства действия и противодействия, чтобы давление p жидкости на поверхности свободной струи равнялось давлению свободного воздуха p_0, т. е. было постоянным.

Если пренебречь влиянием тяжести, то из (322) следует, что на поверхности свободной струи величина скорости течения постоянна. Обратно, каждая линия тока, на которой скорость постоянна, может представлять границу свободной струи. Если в одной части линии тока скорость изменяется, а в другой части остается постоянной, то первая часть представляет течение вдоль твердой стенки, а вторая часть продолжение этого течения в виде свободной струи, что имеет место, например, при истечении жидкости из трубы произвольной формы в воздух.

Следовательно, для изображения свободной струи в рассмотренном здесь частном случае двухмерных течений необходимо найти такие линии тока, на которых постоянно не только ψ, но и скорость $\frac{1}{r}$. Эту задачу можно решить, если принять во внимание, что линии $\psi = \text{const}$ обозначают, как уже было указано, прямые, параллельные оси в плоскости w, а линии $r = \text{const}$ представляют, согласно (364), концентрические круги с центром в начале координат в плоскости ζ. Поэтому, если удастся конформно отразить полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми в плоскости w, на область, ограниченную с одной стороны дугой круга $r = \text{const}$ в плоскости ζ, то из функциональной зависимости между w и $\xi = \frac{dz}{dw}$ получится функциональная зависимость между z и w, т. е. отображение полоски в плоскости w на плоскость z. Это отображение имеет то свойство, что на определенных пограничных линиях области плоскости z как $\psi = \text{const}$, так и $r = \text{const}$. Эти линии представляют поверхности свободных струй движений жидкости. При помощи описанного метода Гельмгольцу впервые удалось найти точные решения задачи об образовании свободных струй [1].

§ 68. Возвратимся теперь к рассмотрению более общего случая безвихревого течения жидкости, с тем чтобы подробнее осветить вопрос, которого мы кратко коснулись в § 61, вопрос о том, могут ли линии тока быть замкнутыми. Там мы нашли, что это невозможно в том случае, если потенциал скорости есть однозначная и непрерывная функция пространственных координат. Однако легко показать, что в действительности существует течение с такими линиями тока, которые замкнуты сами на себя. Например, рассмотрим простое движение жидкости, изображенное уравнениями (370), и примем во внимание, что функции φ и ψ могут поменяться друг с другом местами как уже было указано выше. Тогда мы получим для движения жидкости:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \\ \psi &= \frac{\beta}{\alpha} \lg \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\beta}{\alpha} \lg \varrho_0. \end{aligned}\right\} \tag{372}$$

Здесь мы имеем безвихревое стационарное течение жидкости, заполняющей всю плоскость xy за исключением произвольно малой области, заключающей особенную точку O. В этом движении линии тока $\psi = \text{const}$ суть концентрические круги с центром в особенной точке O, а линии равного потенциала суть прямые, выходящие из точки O. Если рассматривать какие-нибудь два концентрических круга как твердые стенки, то мы имеем течение в круговом кольце. Компоненты скорости в этом случае равны:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{y}{\varrho_0^2}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x}{\varrho_0^2}, \end{aligned}\right\} \tag{373}$$

а величина скорости

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\varrho_0}. \tag{374}$$

Таким образом жидкость непрерывно циркулирует по кругу, между тем как скорость вращения повсюду постоянно равна нулю. Эта теорема перестанет казаться столь парадоксальной, если принять во внимание, что жидкость не вращается подобно твердому телу, а претерпевает деформации во время движения, так

[1] *H. v. Helmholtz*, Wissenschaftliche Abhandlungen, Leipzig (J. A. Barth), S. 146, 1882

как угловая скорость циркуляции становится все меньшей с увеличением расстояния от оси вращения. Поэтому нужно отличать угловую скорость циркуляции от угловой скорости вращения, так как первая обусловливается радиусом кривизны траектории частицы жидкости, а вторая — вращением самой частицы, совершенно не зависящим от радиуса кривизны. Впрочем, не следует думать, что если скорость вращения равна нулю, то частица жидкости остается всегда параллельной самой себе, ибо компоненты скорости вращения частицы не равны производным по времени от углов, которые определяют положение частицы. Если бы это было так, то пришлось бы заключить, что углы постоянны, если скорость вращения обращается в нуль. Но на самом деле из последнего обстоятельства следует лишь, что именно те прямые, которые представляют собою главные оси расширения частицы, не изменяют направления, между тем как все остальные прямые в частице могут поворачиваться (§ 7). И так как в каждый момент главные оси расширения изменяются, то получается такой результат, что после конечного промежутка времени частица может совершить конечный поворот, в то время как скорость вращения в каждый момент равна нулю (*1*, § 137).

Наряду с простым примером, выражаемым уравнением (372), можно указать еще другие, более общие случаи безвихревых движений с замкнутыми линиями тока на плоскости и в пространстве, например течение в какой-нибудь замкнутой трубе.

Во всех подобных случаях приходится притти к заключению, что потенциал не может быть однозначным и непрерывным. Действительно, это можно подтвердить при помощи выражения для φ в уравнении (372). Либо можно предположить, что arc tg однозначен; но тогда он не непрерывен, а претерпевает внезапный скачок в каком-либо произвольно выбранном месте. Либо его можно считать непрерывным, но тогда он бесконечно многозначен. Если приходится производить вычисления с подобного рода функцией, то в большинстве случаев удобнее выбрать первую возможность и установить определенное место прерывности, для того чтобы результат вычисления был вполне определенным. Многозначность или прерывность потенциала скорости не оказывает, конечно, никакого влияния на величину и направление скорости.

§ 69. Так как характер безвихревого движения жидкости существенно зависит от того, является ли потенциал скорости однозначным и непрерывным, то возникает вопрос, можно ли установить такой общий критерий, который позволил бы заранее определить, необходимо ли для данного движения жидкости, чтобы потенциал скорости был однозначным и непрерывным. Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны прежде всего подробнее рассмотреть математическое значение уравнений (318), которые выражают отсутствие вихрей. Положим, что $\mathbf{q}$ есть

вектор, компоненты которого u, v, w даны в виде однозначных и непрерывных функций пространственных координат x, y, z внутри некоторого пространства R, так что выполняются три уравнения (318). Тогда имеет место следующее правило. Если взять интеграл

$$J=\int_1^2 \mathbf{q}_s\cdot ds \tag{375}$$

от какой-либо определенной точки *1* пространства R до какой-либо другой определенной точки *2* того же пространства, вдоль произвольной кривой s, которая вся проходит внутри R, то значение интеграла остается неизменным при любом бесконечно малом изменении пути интегрирования s. Доказательство этого положения производится следующим образом. Из равенства

$$\mathbf{q}_s=u\frac{dx}{ds}+v\frac{dy}{ds}+w\frac{dz}{ds}$$

следует:

$$J=\int_1^2(u\,dx+v\,dy+w\,dz). \tag{376}$$

Следовательно, для бесконечной малой вариации кривой s.

$$\delta J=\int_1^2(u\cdot\delta dx+\delta u\cdot dx+\ldots). \tag{377}$$

Так как $\delta dx=d\delta x$, то, интегрируя по частям и принимая во внимание, что пределы интеграла не подвергаются вариации, получим:

$$\int_1^2 u\cdot\delta dx=-\int_1^2 du\cdot\delta x=-\int_1^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\cdot\delta x.$$

Далее,

$$\delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\delta z.$$

Следовательно, подставив это преобразование и аналогичные ему в равенство (377), имеем:

$$\delta J=\int_1^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot(\delta y\,dz-\delta z\,dy)+\ldots \tag{378}$$

и, согласно (318):

$$\delta J=0. \tag{379}$$

Но если величина J остается инвариантной при бесконечно малом изменении пути интегрирования, то отсюда еще не следует, что J имеет одинаковую величину для всех возможных путей интегрирования, ибо это заключение допустимо только в том случае, если можно из одного пути интегрирования вывести все остальные посредством последовательных бесконечно малых, т. е. непрерывных изменений. Но осуществим ли такой переход, это зависит от свойств пространства R, внутри которого определен вектор $\mathbf{q}$. Если, например, R имеет форму параллелепипеда или эллипсоида, то все кривые, которые проходят между двумя определенными точками внутри R, могут быть преобразованы одна в другую посредством непрерывных изменений. Такое пространство называется односвязным. Поэтому в нем интеграл J совершенно не зависит от пути интегрирования и целиком определен обеими предельными точками, а вместе с тем, и потенциал скорости, который выражается через J, однозначен вплоть до аддитивной постоянной, которая зависит от нижнего предела.

Но если R имеет, например, кольцеобразную форму, вроде замкнутой трубки, то уже невозможно преобразовать при помощи непрерывных изменений одну кривую, которая соединяет две точки в трубке, в другую кривую, которая соединяет эти точки таким образом, что проходит через трубку в обратном направлении. Такое пространство, в котором не все линии, соединяющие две точки, могут быть непрерывно преобразованы одна в другую, называется многосвязным. В таком пространстве соединительные линии между двумя точками распадаются на некоторое число групп, в каждой из которых интеграл J имеет различную величину.

Изложенное противоположение одно- и многосвязных пространств можно формулировать также другим способом, который имеет некоторые преимущества. Очевидно, что две соединительные линии между двумя точками можно всегда соединить в замкнутый контур, причем одну из линий можно принять за путь в одном направлении, а другую — за обратный путь. Если можно эти линии перевести одну в другую при помощи непрерывных изменений, то возможно, посредством непрерывного сужения замкнутого контура, стянуть его в одну точку. Если невозможно первое, то невозможно и второе. Отсюда вытекает правило: пространство односвязно или многосвязно, в зависимости от того, можно ли посредством непрерывного сужения стянуть в одну точку все проходящие в нем замкнутые линии, или нельзя. В параллелепипеде или эллипсоиде это возможно, а в кольцеобразной трубке невозможно, так как замкнутая линия, которая проходит в трубке в определенном направлении, наталкивается при непрерывном сужении на стенку, которая является препятствием для дальнейшего сужения.

Чтобы приложит этот метод к интересующему нас случаю, примем во внимание, что вопрос о том, имеет ли интеграл J в (375) одинаковую величину для двух различных путей интегрирования, совпадает с вопросом о том, равен ли этот интеграл нулю для замкнутого контура, составленного из этих двух путей; ибо замкнутый интеграл равен алгебраической сумме обоих отдельных интегралов, один из которых взят в обратном направлении. Согласно положению, выраженному равенством (379), замкнутый интеграл не изменяет своей величины при всяком непрерывном сужении пути интегрирования, причем точки *1* и *2* также могут быть смещены. Поэтому, если можно довести сужение до единственной точки, — что всегда возможно в односвязном пространстве, — то длина пути интегрирования и, вместе с тем, величина интеграла обращается в нуль. Стало быть, интеграл равен нулю при всяком расширении пути интегрирования, и все значения J между двумя определенными точками равны между собой: потенциал скорости однозначен.

Но если в многосвязном пространстве сужение замкнутого пути интегрирования наталкивается на границу, то интеграл по такой замкнутой кривой может иметь величину, отличную от нуля. Эта величина одинакова для всех других замкнутых кривых, которые получаются из данной посредством непрерывного изменения. Потенциал скорости многозначен, он имеет дискретное множество значений.

§ 70. Чтобы избегнуть неудобства, которое приносит с собой многозначность какой-либо величины, можно превратить многосвязное пространство в односвязное при помощи целесообразно подобранного произвольного ограничения: в определенных местах пространства проводятся разделяющие сечения, причем устанавливается положение, что линия, соединяющая две точки пространства, не должна проходить через какое-либо сечение. Тогда, очевидно, уменьшается число возможных видов соединительных линий между двумя точками, непрерывно преобразуемых друг в друга. Проводя достаточно большое число разделяющих сечений, можно добиться того, чтобы остался возможным только один вид кривых, и пространство становится односвязным. Если достаточно одного разделяющего сечения, чтобы достичь этого результата, то пространство называется двусвязным. Если необходимо n разделяющих сечений, то пространство $(n+1)$-связно.

Примером более чем двусвязного пространства может послужить колесо с несколькими спицами. Если колесо с четырьмя спицами, то необходимо четыре разделяющих сечения, которые можно мысленно провести на ободе колеса между каждыми двумя спицами. Поэтому такое пространство пятисвязное.

Если представить себе, что вышеописанным способом проведено необходимое число разделяющих сечений, то пространство будет односвязным. Всякая проведенная в нем замкнутая кривая может быть стянута в одну точку посредством непрерывного сужения, и потенциал скорости однозначен. Но выигрыш однозначности искупается потерей непрерывности. Действительно, определим разность значений потенциала скорости в двух точках 1 и 2, которые бесконечно близки друг к другу, но лежат по разные стороны от разделяющего сечения. Интегрирование (375), служащее для вычисления этой разности, нужно произвести не по бесконечно короткому, а по единственному дозволенному конечному соединительному пути. Так как этот интеграл даст конечную величину, то искомая разность также конечна: потенциал скорости претерпевает скачок на разделяющей поверхности. Но так как путь интегрирования, при помощи которого производилось это вычисление, представляет замкнутую кривую, и так как величина этого интеграла не изменяется, согласно (379), при любом непрерывном изменении этой кривой, то мы получаем такое правило: скачок потенциала скорости на поверхности разрыва одинаков во всех точках этой поверхности и равен величине интеграла (375) по любой замкнутой линии, пересекающей поверхность разрыва.

Все эти правила могут быть наглядно иллюстрированы при помощи простого рассмотренного в § 68 случая циркуляции жидкости в плоском круговом кольце. Здесь линии тока замкнуты, потенциал скорости многозначен, пространство двусвязно. Действительно, замкнутую линию тока невозможно сжать в одну точку, так как небольшая область, содержащая особенную точку и не принадлежащая к пространству жидкости, представляет препятствие неограниченному сужению. Но если представить себе, что через жидкость проходит разделяющее сечение, от особенной точки в бесконечность, — или, в случае если имеются две концентрические круговые неподвижные стенки, от одной стенки к другой, — то пространство жидкости — односвязное, и потенциал скорости однозначен, но прерывен. Скачок на поверхности разрыва одинаков во всех точках этой поверхности и легко получается вычислением интеграла (375) для замкнутой линии тока, т. е. согласно (374):

$$\int q \cdot ds = \frac{\beta}{\alpha} \cdot 2\pi,$$

в согласии со скачком 2π функции arc tg в выражении (372) для потенциала скорости φ.

§ 71. Так как линия тока не может быть замкнутой в односвязном пространстве и так как она не может заканчиваться у твердой стенки, то отсюда следует, что в односвязном пространстве, которое ограничено со всех сторон неподвижными стенками, безвихревое движение несжимаемой жидкости вообще невозможно. Это легко доказать, рассмотрев тождества (81). Так как стенки неподвижны, то поверхностный интеграл равен нулю, а так как жидкость несжимаема, то объемный интеграл в правой части равен нулю, и поэтому φ постоянно, т. е. жидкость неподвижна. Но для правильности тождества (81) необходимо, чтобы потенциал скорости был однозначным и непрерывным, так как иначе интеграл

$$\int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$$

не равнялся бы $\varphi_2 - \varphi_1$, как было принято в выражении (76).

§ 72. В заключение этой главы рассмотрим еще простой пример нестационарного безвихревого движения несжимаемой жидкости. Для этого воспользуемся рассмотренным в § 63 случаем истечения тяжелой жидкости из трубки, широкой вверху и узкой внизу, и положим, как и раньше, что верхний уровень жидкости находится под постоянным давлением p_0, а давление у отверстия тоже постоянно и равно p. Но теперь мы рассмотрим нестационарное истечение и постараемся определить, какое возникает движение, если в момент $t = 0$ жидкость повсюду неподвижна.

Прежде всего, что касается диференциальных уравнений движения, то уравнение Лапласа (323) и вытекающие из него соотношения от (324) до (329) имеют место также для нестационарных движений, ибо уравнение Лапласа вытекает из общего условия непрерывности (259) в связи с условием несжимаемости. Зато уравнение (322) обобщается, согласно (321), следующим образом

$$p = -\frac{k}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - kgz + k\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{380}$$

Кроме того, нужно добавить пограничные условия у стенок и у обоих отверстий, а также начальное условие, при $t = 0$.

Всем этим условиям можно удовлетворить, полагая

$$\psi = T \cdot \varphi', \tag{381}$$

где T — функция только времени t, а функцию φ' можно принять за известное уже выражение потенциала скорости в рассмотренном выше частном случае стационарного истечения. Тогда выполняются как уравнение Лапласа, так и пограничные условия у неподвижных стенок.

В диференциальном уравнении линий тока (320) множитель T сокращается, поэтому линии тока проходят все время так же, как и при стационарном истечении. С течением времени изменяется только скорость течения. Диференцированием (381) непосредственно получается:

$$q = T \cdot q', \tag{382}$$

т. е. скорость в каком-нибудь месте пропорциональна стационарной скорости в этом месте и множителю T.

Обозначим, как и раньше, величины, относящиеся к верхнему уровню жидкости, значком 0, а величины, относящиеся к отверстию для истечения, будем писать без значка. Если пренебречь величиной f по сравнению с f_0, то из (329), (380), (381) и (382) получится:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q'^2}{2(\varphi_0' - \varphi')}(1 - T^2). \tag{383}$$

Проинтегрируем это диференциальное уравнение. Обозначив для сокращения положительную постоянную:

$$\frac{q'^2}{\varphi_0' - \varphi'} = a$$

и принимая во внимание, что $T = 0$ при $t = 0$, получим:

$$T = \frac{e^{at} - 1}{e^{at} + 1}. \tag{384}$$

Уравнения (382) и (384) определяют скорость истечения жидкости в в любой момент t. Скорость растет от нуля до своего стационарного значения в (331), которому она точно равняется лишь после бесконечно большого промежутка времени, но к которому подходит тем ближе, чем больше этот промежуток.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 73. Рассмотрим несжимаемую жидкость, которая заполняет односвязное пространство произвольного объема, ограниченное со всех сторон твердыми стенками. Из § 71 известно, что в том случае, если в жидкости нет вихрей, скорость ее всюду и всегда равна нулю. Но допустим, что где-либо и когда-либо имеются вихри, т. е. что в некоторый момент в некоторых местах жидкости скорость вращения имеет данное значение, отличное от нуля. Тогда можно доказать, что скорость всей жидкости однозначно определена внутри и вне вихрей как в данный момент, так и во всякое время.

Проведем доказательство сначала для данного момента t и покажем, что компоненты скорости u, v, w повсюду однозначно

определены одновременными значениями компонентов вращения ξ, η, ζ в уравнениях (59) и условием несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{385}$$

Действительно, если бы этого не было, то существовали бы еще другие значения компонентов скорости, например u', v', w', которые удовлетворяли бы этим условиям. Тогда разности $u' - u = u_0$, $v' - v = v_0$, $w' - w = w_0$, рассматриваемые как составляющие скорости, изображали бы движение жидкости в односвязном пространстве, ограниченном со всех сторон твердыми стенками. Это движение, во-первых, удовлетворяло бы условию несжимаемости и, во-вторых, происходило бы совершенно без вихрей, так как для него компоненты ξ_0, η_0, ζ_0 повсюду равнялись бы нулю. Но такое движение невозможно. Следовательно, u_0, v_0, w_0 повсюду равны нулю.

Так как компоненты скорости u, v, w определены повсюду, то они определены, конечно, и внутри вихревых нитей, а вместе с ними и пространственные производные их по x, y, z, т. е. компоненты скорости деформации. Ввиду этого вполне определенным является изменение, которому подвергается вихревая нить в течение элемента времени, включая ее вращение и деформацию. Так как, согласно (317), произведение вихревой скорости ω на площадь поперечного сечения нити не изменяется с течением времени, то определенным становится изменение вихревой скорости ω в течение промежутка времени dt. Вместе с тем, становятся известными величина и направление, т. е. компоненты ξ, η, ζ скорости вращения в момент $t + dt$. Но этого достаточно, чтобы применить к моменту $t + dt$ такие же соображения, как раньше к моменту t. Таким образом процесс продолжается вполне однозначно, так как от каждого момента, можно перейти к бесконечно близкому позднейшему моменту, и движение всей жидкости является определенным во всякое время.

§ 74. Установив основные положения предыдущего параграфа, перейдем теперь к действительному вычислению компонентов скорости u, v, w, которые соответствуют заданному вихрю, определенному величинами ξ, η, ζ. Допустим, что жидкость простирается в бесконечность по всем направлениям. Тогда задача сводится к определению трех непрерывных функций u, v, w, которые удовлетворяют, во-первых, условию несжимаемости (385) и, во-вторых, трем уравнениям (59) при заданных ξ, η, ζ.

Чтобы удовлетворить условию (385), положим:

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{386}$$

где U, V, W обозначают три новые непрерывные функции с непрерывными первыми производными. Тогда, очевидно, тождественно удовлетворяется равенство (385). Не нарушая общности задачи, можно наложить еще некоторое ограничение на функции U, V, W: если вместо U написать $U+\frac{\partial\psi}{\partial x}$, вместо $V: V+\frac{\partial\psi}{\partial y}$, вместо $W: W+\frac{\partial\psi}{\partial z}$, где ψ — совершенно произвольная функция, то, очевидно, уравнения (386) дадут такие же значения u, v, w, как и раньше. Таким образом можно совершенно произвольно задать функцию ψ, не предвосхищая этим вычисления u, v, w. Выберем ψ таким образом, чтобы было:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0. \tag{387}$$

Это всегда можно осуществить, подобрав должным образом величину $\triangle\psi$.

Сделав такое допущение, подставим выражения (386) в уравнения (59). Получим:

$$2\xi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)-\triangle U, \tag{388}$$

или, согласно (387):

$$\triangle U=-2\xi, \quad \triangle V=-2\eta, \quad \triangle W=-2\zeta. \tag{389}$$

Это три диференциальные уравнения Пуассона [*1*, (132)], интегралы которых равны, согласно *1*, § 45:

$$U=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\xi'd\tau'}{r}, \quad V=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\eta'd\tau'}{r}, \quad W=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\zeta'd\tau'}{r}. \tag{390}$$

Здесь r обозначает расстояние точки воздействия x, y, z от какой-нибудь другой точки жидкости x', y', z', в которой компоненты вихревой скорости суть ξ', η', ζ'. Интегрирование производится по всем элементам объема жидкости $d\tau'$, причем, конечно, нужно опустить все те элементы объема, в которых вихревая скорость равна нулю. Для жидкости, в которой совершенно нет вихрей, мы снова получим вывод § 71.

Можно непосредственно убедиться в том, что определенные таким образом функции U, V, W действительно обладают свойством (387), если подставить выражения (390), продиференцировав

их по x, y, z и преобразовав получившиеся интегралы интегрированием по частям согласно (79). При этом нужно воспользоваться тождествами:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{\partial r}{\partial x'}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{\partial r}{\partial y'}, \quad \frac{\partial r}{\partial z}=-\frac{\partial r}{\partial z'} \tag{391}$$

и соотношением (315).

Если подставить найденные выражения U, V, W в уравнения (386), то отсюда получатся искомые значения составляющих скорости в произвольной точке жидкости x, y, z, внутри или вне вихрей:

$$u=\frac{1}{2\pi}\int\left(\zeta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\eta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{dz}\right)d\tau' \text{ и т. д.,} \tag{392}$$

или

$$u=\frac{1}{2\pi}\int\left(\eta'\frac{z-z'}{r^3}-\zeta'\frac{y-y'}{r^3}\right)d\tau' \text{ и т. д.,} \tag{393}$$

или, в векторном обозначении (*1*, § 87):

$$\mathfrak{q}=\frac{1}{2\pi}\int\left[\mathfrak{o}'\ \frac{\mathfrak{r}}{r}\right]\frac{d\tau'}{r^2}. \tag{394}$$

Здесь $\mathfrak{q}$ обозначает вектор скорости в точке воздействия, r — расстояние точки воздействия от элемента жидкости $d\tau'$, в котором вихревая скорость равна $\mathfrak{o}'$, наконец, $\frac{\mathfrak{r}}{r}$ — вектор длиной 1, который направлен от элемента жидкости $d\tau'$ к точке воздействия.

Значение уравнения (394) можно наглядно истолковать следующим образом: каждый элемент вихря, объемом $d\tau'$, вносит определенную долю в общую величину скорости жидкости $\mathfrak{q}$ в точке воздействия. Эта доля определяется по величине и направлению при помощи выражения:

$$\frac{1}{2\pi}\left[\mathfrak{o}'\ \frac{\mathfrak{r}}{r}\right]\frac{d\tau'}{r^2}=\delta\mathfrak{q}, \tag{395}$$

т. е. она пропорциональна вихревой скорости, обратно пропорциональна квадрату расстояния, далее она пропорциональна синусу угла между осью вихря и соединительной прямой r и перпендикулярна к плоскости, проходящей через эти два направления. Направления $\mathfrak{o}'$, $\mathfrak{r}$, $\delta\mathfrak{q}$ образуют в последовательном порядке правую координатную систему. Другими словами: движение $\delta\mathfrak{q}$ совершается в направлении той скорости, которую имели бы частицы элемента вихря, ближайшие к точке воздействия, совершая вращение вокруг оси вихря, если бы она была неподвижна.

Зная составляющие скорости u, v, w как функции x, y, z, получим диференциальные уравнения линий тока:

$$u:v:w=dx:dy:dz, \tag{396}$$

которые существенно отличаются от прежних уравнений (320) тем, что в данном случае вообще не существует потенциала скорости.

§ 75. Рассмотрим для примера вихревую нить, имеющую вид тонкого кругового кольца. Скорость вращения можно считать настолько большой, что произведение ее на сечение кольца, или момент вихревой нити, имеет конечную величину. Вне кольца движение жидкости происходит, конечно, без вихрей. Все те частицы жидкости, которые лежат в плоскости кольца, текут перпендикулярно к этой плоскости. Частицы, лежащие внутри кольца, движутся в направлении вращательного движения внутренних частиц вихревого кольца, а частицы, лежащие вне кольца, движутся в направлении вращения наружных частиц кольца. Линии тока свободной от вихрей жидкости проходят сквозь середину кольца в соответствующем направлении, огибают его наружу, симметрично расширяясь во все стороны бесконечного пространства совершенно так, как в „двойном источнике" (§ 64), затем, обойдя плоскость кольца снаружи его в противоположном направлении, возвращаются, снова сближаясь, с другой стороны к середине кольца. Таким образом все линии тока окружают вихревую нить в направлении ее вращения. При этом скорость течения непрерывна повсюду: внутри и снаружи вихря, а также при переходе от жидкости в вихре к жидкости вне вихря. Величина скорости течения больше внутри вихря, где нити тока суживаются, чем снаружи, где они расширяются. Замкнутым линиям тока соответствует многозначный или прерывный потенциал скорости и бесконечное двусвязное пространство жидкости. Действительно, такую линию невозможно стянуть в одну точку путем непрерывного сужения внутри пространства, свободного от вихрей.

Однако само вихревое кольцо не находится в покое, а сообщает само себе определенную скорость. Как показывает небольшое рассуждение на основании закона (395), оно движется перпендикулярно своей плоскости в направлении линий тока, проходящих через его середину.

Положим теперь, что в жидкости имеются два таких вихревых кольца одинаковой длины, одинакового момента и параллельные друг другу, причем линия, соединяющая оба центра, перпендикулярна к плоскости колец, образуя ось симметрии всего процесса. Нетрудно видеть, каким образом будет совершаться этот процесс. Сперва оба вихревых кольца будут двигаться со свойственной им скоростью поступательного движения вдоль оси симметрии в направлении проходящих через нее линий тока. Но, кроме того, возникнут силы взаимодействия между ними. Так как уравнение (394) не зависит от того, совершает ли жидкость вихревое

движение в точке воздействия, то вихревые элементы одного кольца будут, так сказать, увеличены линиями тока, произведенными другим кольцом. Вследствие этого первое кольцо, движущееся впереди, расширяется наружу, а скорость его постепенно уменьшается, между тем как второе кольцо, следующее позади, суживается и движется все быстрее вперед, пока не догонит первое кольцо и не пройдет сквозь него. Как только это произойдет, процесс обращается. Теперь уже второе кольцо будет расширяться и скорость его уменьшаться, а первое кольцо будет суживаться, пока оба кольца не сделаются одинаковой величины, а расстояние между ними станет таким же, как было вначале. Затем повторится то же явление, причем кольца поменяются ролями, и так будет продолжаться до бесконечности.

§ 76. Произведем более подробные вычисления для случая двух измерений (как в § 66), когда движение жидкости происходит параллельно плоскости xy и зависит только от координат x и y. Тогда условие несжимаемости (385) примет более простой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Из трех компонентов вращения в уравнениях (59) ξ и η обращаются в нуль, и остается только

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{397}$$

так что, согласно (389):

$$U=0,\quad V=0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=-2\zeta, \tag{398}$$

и, согласно (386):

$$u=\frac{\partial W}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial W}{\partial x}. \tag{399}$$

Таким образом все вихревые линии и вихревые нити параллельны оси z. Так как они движутся параллельно плоскости xy, то длина каждой вихревой нити постоянна все время. Но так как масса вихревой нити и, вследствие несжимаемости жидкости, также объем нити не изменяются с течением времени, то отсюда следует, что постоянным во времени остается и сечение каждой нити, а вместе с тем, согласно (314), также и скорость вращения ее.

Уравнение системы линий тока, согласно (396) и (399):

$$W=\text{const} \tag{400}$$

имеет место как внутри, так и вне вихрей. Так как линии тока проходят параллельно плоскости xy, то для движения, изображаемого предыдущими уравнениями, безразлично, простирается ли жидкость в бесконечность по обоим направлениям вдоль оси, или же она заключена между любыми двумя твердыми стенками, параллельными плоскости.

Двухмерное уравнение Пуассона (398) можно проинтегрировать [согласно *I*, (139) и (140)] посредством логарифмического потенциала:

$$W_{xy} = -\frac{1}{\pi}\int \zeta' \lg \varrho d\sigma', \tag{401}$$

где $d\sigma'$ обозначает площадь сечения бесконечно тонкой вихревой нити, ζ' — вихревую скорость нити, ϱ — расстояние от точки воздействия. Интеграл берется по всем вихревым нитям. Отсюда получаются на основании (399) следующие выражения для компонентов скорости в какой-нибудь точке x, y, лежащей вне вихрей:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\pi}\int \zeta' \cdot \frac{y-y'}{\varrho^2} d\sigma', \\ v &= \frac{1}{\pi}\int \zeta' \cdot \frac{x-x'}{\varrho^2} d\sigma'. \end{aligned}\right\} \tag{401a}$$

Эти выражения гласят, что каждый элемент вихря $d\sigma'$ вызывает в точке воздействия скорость, которая обратно пропорциональна расстоянию и имеет одинаковое направление с вращением.

Возьмем одну какую-нибудь бесконечно тонкую нить, например в начале координат. При этом можно положить скорость вращения настолько большой, чтобы момент $\zeta' \cdot d\sigma' = \mu$ имел конечную величину. Тогда интеграл в (401) сведется к одному члену, и мы получим:

$$W = -\frac{\mu}{\pi} \cdot \lg \varrho. \tag{402}$$

Следовательно, на основании (400), линии тока суть концентрические круги. Составляющие скорости в какой-нибудь точке вне вихря равны, согласно (399):

$$u = -\frac{\mu}{\pi}\frac{y}{\varrho^2}, \quad v = \frac{\mu}{\pi}\frac{x}{\varrho^2}. \tag{403}$$

Эти уравнения совершенно одинаковы с уравнениями (373), если не считать постоянного множителя. Различие только в том, что жидкость, циркулирующая без вихрей по концентрическим кругам, ограничена индиферентной твердой цилиндрической стенкой, а в рассматриваемом здесь случае имеется причинное соотношение между моментом вихревой нити, неподвижной в центре, и внешним течением.

Для двух таких вихревых нитей в точках x_1, y_1, и x_2, y_2 имеем, согласно (401):

$$W = -\frac{\mu_1}{\pi}\lg \varrho_1 - \frac{\mu_2}{\pi}\lg \varrho_2. \tag{404}$$

Скорости равны, согласно (399):

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\mu_1}{\pi}\frac{y-y_1}{\varrho_1^2} - \frac{\mu_2}{\pi}\frac{y-y_2}{\varrho_2^2}, \\ v &= \frac{\mu_1}{\pi}\frac{x-x_1}{\varrho_1^2} + \frac{\mu_2}{\pi}\frac{x-x_2}{\varrho_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{405}$$

При помощи этих уравнений скорости всех точек жидкости, свободной от вихрей, выражаются в зависимости от положения обеих вихревых нитей в данный момент. Линии тока суть: $W = \text{const}$. Потенциал скорости:

$$\varphi = -\frac{\mu_1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y-y_1}{x-x_1} - \frac{\mu_2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y-y_2}{x-x_2}. \tag{405a}$$

Пространство без вихрей, ввиду многозначности, трехсвязно.

Что касается движения самих вихревых нитей, т. е. изменения координат x_1, y_1, x_2, y_2 с течением времени, то его также можно вывести из уравнений (405). Но при этом нужно иметь в виду, что вихревая нить не сообщает себе поступательной скорости. В этом можно убедиться также путем вычисления, если принять во внимание соотношения внутри нити. В таком случае в уравнениях (405) выпадает член, соответствующий воздействию нити самой на себя, и мы получим:

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\mu_2}{\pi}\frac{y_1-y_2}{\varrho_{12}^2}, \quad v_1 = \frac{dy_1}{dt} = \frac{\mu_2}{\pi}\frac{x_1-x_2}{\varrho_{12}^2}. \tag{406}$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\mu_1}{\pi}\frac{y_2-y_1}{\varrho_{12}^2}, \quad v_2 = \frac{dy_2}{dt} = \frac{\mu_1}{\pi}\frac{x_2-x_1}{\varrho_{12}^2}. \tag{407}$$

Отсюда получится следующая картина движения обеих вихревых нитей.

Так как

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0, \quad \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0,$$

то точка с координатами

$$\frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1 + \mu_2} = x_0, \quad \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1 + \mu_2} = y_0, \tag{408}$$

которую можно назвать „центром тяжести" обеих вихревых нитей, остается все время неподвижной:

$$u_1(x_1-x_2)+v_1(y_1-y_2)=0,$$
$$u_2(x_1-x_2)+v_2(y_1-y_2)=0,$$

т. е. движение каждой из нитей перпендикулярно к прямой, соединяющей их. Поэтому расстояние между ними, а также расстояния от центра тяжести остаются постоянными. Следовательно, нити вращаются с общей угловой скоростью вокруг центра тяжести, оставаясь на постоянном расстоянии ϱ_{12}. Если оба вращения имеют одинаковое направление, то центр тяжести обеих нитей лежит между ними. Если же вращения противоположны, то центр тяжести лежит вне нитей со стороны большего момента. Угловая скорость вращения равна $\frac{\mu_1+\mu_2}{\pi\varrho_{12}^2}$ и имеет направление большего из обоих моментов.

Если моменты равны и противоположны, то „центр тяжести" отодвигается в бесконечность, угловая скорость вращения становится равной нулю, и обе вихревые нити совершают, согласно (406) и (407), общее поступательное движение со скоростью $\frac{\mu}{\pi\varrho_{12}}$ в направлении линий тока, проходящих между ними, подобно одному вихревому кольцу (§ 75). Действительно, такие две „антипараллельные" вихревые нити можно рассматривать как части одного вихревого кольца, имеющего вид бесконечно длинного прямоугольника. Положение линий тока выразится в этом частном случае, на основании (400) и (404), в виде уравнения:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2}=\text{const}. \tag{409}$$

Таким образом линии тока суть круги, симметрично расположенные относительно соединительной линии обеих вихревых нитей и делящие расстояние между ними в гармоническом отношении.

§ 77. В заключение рассмотрим еще простой пример одной вихревой нити конечного сечения. Положим, что сечение нити — круг радиуса R, а скорость вращения повсюду равна ζ. Как мы знаем, она постоянна и во времени. Интегралы с элементами вихря $d\sigma'$ нужно взять по всей площади круга. Выражения для компонентов скорости в какой-нибудь точке жидкости можно получить, произведя интегрирование в (401a) или же, что удобнее для нас, вычислив при помощи формулы (400) логарифмический потенциал W массы, покрывающей круг с равномерной

поверхностной плотностью $\frac{\zeta}{\pi}$ (401). Обозначим расстояние точки воздействия от центра круга через

$$\varrho_0=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Тогда для внутренней точки ($\varrho_0<R$) имеем, согласно *1*, (145):

$$W=\frac{\zeta}{2}\left(R^2-\varrho_0^2\right)-\zeta R^2\lg R. \tag{410}$$

Для внешней точки ($\varrho_0>R$), согласно *1*, (146):

$$W=-\zeta R^2\lg\varrho_0. \tag{411}$$

Следовательно, линии тока представляют собою, согласно (400), концентрические круги, $\varrho_0=\text{const}$, как внутри, так и вне вихревого цилиндра. Вне цилиндра, в пространстве без вихрей, скорость выражается следующим образом, на основании (399) и (411),

$$u=-\zeta R^2\frac{y}{\varrho_0^2},\quad v=\zeta R^2\frac{x}{\varrho_0^2}, \tag{412}$$

т. е. снова в согласии с (403). Зато внутри вихря скорость имеет такое значение на основании (410):

$$u=-\zeta y,\quad v=\zeta x. \tag{413}$$

Значит, вся жидкость вращается здесь с угловой скоростью без деформации, подобно твердому телу (ср. 39, стр. 23). Интересно, что на поверхности вихревой нити, там, где жидкость вихря граничит с жидкостью, свободной от вихрей, скорость изменяется всюду непрерывно, так как формулы (412) и (413) переходят одна в другую при $\varrho_0=R$. Здесь величина скорости достигает максимального значения, ζR, и уменьшается в обе стороны до нуля.

Давление p во внешнем пространстве жидкости, свободном от вихрей, следует, на основании (322), закону:

$$p=-\frac{k}{2}\zeta^2\frac{R^4}{\varrho_0^2}+\text{const}, \tag{414}$$

а внутри вихревой нити давление выражается иначе, на основании (297):

$$p=\frac{k}{2}\zeta^2\varrho_0^2+\text{const}. \tag{415}$$

На основании принципа равенства действия и противодействия, давление на ограничивающей поверхности должно быть непрерывно. Поэтому величина его определена повсюду, если она известна на каком-нибудь расстоянии, например в бесконечности. С приближением точки воздействия из бесконечности к вихрю и далее до его середины давление убывает. В середине вихря давление имеет наименьшее значение.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ТРЕНИЕ

§ 78. Изложенные выше приложения основных уравнений гидродинамики показали, что эти уравнения в форме, выведенной в § 53, дают возможность представить значительное число различных движений жидкости в хорошем согласии с действительностью. Но в природе существуют и такие виды гидродинамических явлений, законы которых не удовлетворяют требованиям этих диференциальных уравнений. Это мы видели всего отчетливее на примере парадоксальной теоремы § 65, согласно которой шар, движущийся в покоящейся жидкости, не должен испытывать никакого сопротивления. Если мы хотим отдать себе лучший отчет в действительном положении вещей для этого важного случая, то нам необходимо расширить теорию должным образом. Спрашивается, как это сделать.

Уравнения движения (83) и (84) в первой части этой книги выведены из принципов общей механики, которых мы не можем здесь изменить. Этих уравнений мы будем придерживаться неизменно. Однако представляется возможность видоизменить теорию, если принять во внимание, что мы получили наши диференциальные уравнения гидродинамики (262), введя гипотезу „совершенной упругости“, т. е. гипотезу, что давление зависит только от состояния деформации (§ 21). Тогда получаются для жидкости простые значения (261a) шести компонентов давления. Теперь же мы можем обобщить эту гипотезу таким образом, что давление в каком-нибудь элементе тела должно зависеть не только от состояния деформации, но и от состояния скорости элемента, т. е. от компонентов скорости u, v, w и их производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots$ Соответственно этому мы напишем равенства (261a) в обобщенном виде:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= p + X_x', & Y_y &= p + Y_y', & Z_z &= p + Z_z', \\ Y_z &= Y_z', & Z_x &= Z_x', & X_y &= X_y', \end{aligned}\right\} \tag{416}$$

$$p = f(k), \tag{417}$$

и допустим, что добавочные компоненты давления $X_x', Y_y', \ldots$ зависят некоторым образом от упомянутых величин скорости. Понятно, что непосредственное влияние на давление в элементе

тела не может оказать ни равномерная скорость поступательного перемещения, ни равномерная скорость вращения, а только такое состояние скорости, которое связано с деформацией. Отсюда следует, что в выражения X_x', X_y', ... могут войти из двенадцати величин скорости (256) только шесть компонентов скорости деформации x_x, x_y, ... Мы допустим, что они входят линейно, — что, наверное, имеет место при достаточно малых скоростях деформации, — и однородно, так как при скорости деформации, обращающейся в нуль, давление, вызываемое ею, также обращается в нуль. Давление, изображаемое вновь введенным тензором, мы назовем „трением“ жидкости, в частности „внутренним“ трением или „вязкостью“, в отличие от „внешнего“ трения, которое возникает при скольжении жидкости по поверхности соприкосновения ее с другим веществом и которое нужно принять в расчет при установлении пограничных условий.

Если тензор трения известен в виде однородной линейной функции тензора скорости деформации, то из общих уравнений (83) и (84), в связи с уравнениями (416) и (417), вытекают законы движения, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)k &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial X_x'}{\partial x} + \frac{\partial X_y'}{\partial y} + \frac{\partial X_z'}{\partial z}, \\ \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)k &= \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial Y_x'}{\partial x} + \frac{\partial Y_y'}{\partial y} + \frac{\partial Y_z'}{\partial z}, \\ \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)k &= \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial Z_x'}{\partial x} + \frac{\partial Z_y'}{\partial y} + \frac{\partial Z_z'}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{418}$$

$$Y_z' = Z_y', \quad Z_x' = X_z', \quad X_y' = Y_x'. \tag{419}$$

Теперь нужно определить характер зависимости величин X_x', X_y', ... от x_x, x_y, ... Наиболее простой и верный способ — это тот, который мы применили в § 23 для вывода компонентов упругого давления в твердом теле: это применение принципа сохранения энергии, — в данном случае уже не как механического закона, а как всеобщего физического принципа, ибо трение не относится к числу консервативных сил (*I*, § 49), а во всяком процессе, в котором участвует трение, известная часть механической энергии обращается в теплоту. Теплота, произведенная трением в каком-нибудь бесконечно малом элементе тела, объемом $d\tau$, в течение бесконечно малого времени dt, пропорциональна величинам dt и $d\tau$. Поэтому полагаем, что она равна

$$W \cdot dt \cdot d\tau. \tag{420}$$

Величину W мы должны считать конечной и всегда положительной.

Будем рассуждать таким же образом, как раньше в § 23, но с тем различием, что вместо уравнения энергии (89) напишем:

$$d(L+U)+\int W\cdot dt\cdot d\tau=A, \tag{421}$$

и вместо уравнений движения упругого твердого тела (83) и (84) воспользуемся уравнениями движения жидкости с трением (418) и (419). В результате рассуждения мы получим вместо (95) такое соотношение:

$$\int W\cdot d\tau\cdot dt+\int(X_x'x_x+X_y'x_y+\ldots)\,d\tau\cdot dt=0. \tag{422}$$

Со стороны формальных обозначений нужно при этом помнить, что в § 23 обозначения u, v, w, x_x, $y_y,\ldots$ относятся к положениям, а здесь, согласно (256), они относятся к скоростям. Поэтому нужно умножить эти обозначения на множитель dt, чтобы выразить те величины, которые изображались раньше диференциалами du, dv, dw, dx_x, $dx_y,\ldots$

Так как уравнение (422) верно для произвольно малого объема, то мы получим для любой точки пространства:

$$X_x'x_x+Y_y'y_y+Z_z'z_z+Y_z'y_z+Z_x'z_x+X_y'x_y=-W. \tag{423}$$

Как мы видели, компоненты давления суть однородные линейные функции переменных x_x, $x_y,\ldots$ Следовательно, W есть однородная квадратичная и всегда положительная функция этих величин. Ввиду физического значения W и вследствие изотропии жидкости, постоянные, входящие в эту функцию, не могут зависеть от выбора системы координат. Поэтому, согласно (117), наиболее общий вид W:

$$W=\varrho(x_x+y_z+z_z)^2+2\varkappa\left(x_x^2+y_y^2+z_z^2+\frac{y_z^2+z_x^2+x_y^2}{2}\right), \tag{424}$$

где ϱ и $\varkappa$ обозначают две постоянные, характеризующие внутреннее трение жидкости.

Отсюда однозначно получаются выражения для компонентов трения: так как компоненты скорости деформации не зависят друг от друга, то из обоих последних уравнений вытекают компоненты трения:

$$\left.\begin{aligned}X_x'&=-\varrho(x_x+y_y+z_z)-2\varkappa x_x+\ldots,\\ Y_z'&=-\varkappa y_z,\ldots\end{aligned}\right\} \tag{425}$$

Подставив их в уравнения (416) и (418), получим соответствующий результат для величины полного давления и для уравнений движения.

В этих формулах заключена теория Стокса для трения в жидкостях.

Для несжимаемой жидкости, которую мы только и будем рассматривать в дальнейшем, уравнения значительно упрощаются, ввиду того, что скорость объемного расширения $x_x+y_y+z_z=0$, и поэтому, согласно (416) и (425):

$$\begin{aligned}X_x&=p-2\varkappa x_x, & Y_y&=p-2\varkappa y_y, & Z_z&=p-2\varkappa z_z,\\ Y_z&=-\varkappa y_z, & Z_x&=-\varkappa z_x, & X_y&=-\varkappa x_y.\end{aligned} \tag{426}$$

Таким образом внутреннее трение несжимаемой жидкости зависит только от одной постоянной $\varkappa$.

Для полной формулировки законов движения жидкости, связанного с трением, нужно установить еще пограничные условия.

Если жидкость течет вдоль неподвижной твердой стенки, то для нормального давления, действующего на поверхности, не нужно особого условия, так как сопротивление стены может выдержать всякое давление. Но для давления, действующего на поверхность жидкости тангенциально, посредством трения, будет существовать определенное соотношение. В последнем играет роль скорость, с которой жидкость скользит вдоль стены. Обозначим снова через ν внутреннюю нормаль к поверхности жидкости, через X_ν, Y_ν, Z_ν — компоненты действующего на нее снаружи давления. Тангенциальный компонент давления, который равен нулю при совершенно упругой жидкости, направлен в случае жидкости с трением в сторону, противоположную скорости течения. Величину его проще всего принять пропорциональной этой скорости q, т. е.

$$X_\nu\operatorname{soc}(\tau x)+Y_\nu\operatorname{soc}(\tau y)+Z_\nu\operatorname{soc}(\tau z)=-\lambda q, \tag{427}$$

где τ обозначает направление течения, λ — некоторая положительная постоянная, зависящая как от вещества жидкости, так и от вещества стенки, — „коэфициент внешнего трения“.

В этой формулировке заключаются также крайние случаи $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$. В первом случае вместе с внешним трением обращается в нуль и тангенциальное давление. Во втором же случае, так как тангенциальное давление остается постоянным, то скорость скольжения $q=0$, т. е. жидкость „прилипает“ к твердой стене. Численная величина коэфициентов внутреннего и внешнего трения может быть определена только из измерений.

§ 79. Рассмотрим сперва простое приложение выведенных уравнений: стационарное течение несжимаемой жидкости в узкой трубке, имеющей вид кругового цилиндра. Положим, что дано давление у обоих концов трубки, а весом жидкости можно пренебречь.

Примем ось трубки за ось z, а сечение трубки у начала — за плоскость xy. Давление в этом месте пусть равно p_0. Если l — длина трубки, для конечного сечения $z=l$, и давление $p_l<p_0$,

то жидкость течет в направлении положительной оси z. Линии тока параллельны оси z, следовательно,

$$u=0, \quad v=0. \tag{428}$$

Из условия стационарного состояния и условия несжимаемости (385) следует:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=0, \frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{429}$$

а из уравнений (426) получаются следующие значения компонентов давления:

$$\left.\begin{array}{lll} X_x=p, & Y_y=p, & Z_z=p, \\ Y_z=-\varkappa\dfrac{\partial w}{\partial y}, & Z_x=-\varkappa\dfrac{\partial w}{\partial x}, & X_y=0 \end{array}\right\} \tag{430}$$

Поэтому уравнения движения (83), в которых все три компонента ускорения обращаются в нуль, принимают вид:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial x}=0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial y}=0, \\ \varkappa\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\dfrac{\partial p}{\partial z}=0. \end{array}\right\} \tag{431}$$

Так как p зависит только от z, а w зависит только от x и y согласно (429), то последнее из уравнений (431) возможно лишь в том случае, если

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-c, \tag{432}$$

где падение давления есть положительная постоянная, величина которой получается из условия, что давление дано при $z=0$ и $z=l$, а именно:

$$c=\frac{p_0-p_l}{l}=\frac{\Delta p}{l}. \tag{433}$$

Чтобы вывести из (432) величину w как функцию x и y, введем плоские полярные координаты ϱ и φ [*1*, (159)] и примем во внимание, что, ввиду симметрии, w зависит только от ϱ. Тогда получится:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}= \quad w+\frac{1}{\varrho}\frac{dw}{d\varrho}=-\frac{c}{\varkappa}. \tag{434}$$

Чтобы получить общий интеграл этого диференциального уравнения, положим:

$$\varrho\frac{dw}{d\varrho}=w', \tag{435}$$

тогда

$$\frac{dw'}{d\varrho}=\varrho\frac{d^2w}{d\varrho^2}+\frac{dw}{d\varrho},$$

и, согласно (434):

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dw'}{d\varrho}=-\frac{c}{\varkappa}.$$

Интегрируя, получим:

$$w'=-\frac{c}{\varkappa}\frac{\varrho^2}{2}+A$$

и, интегрируя второй раз, получим, согласно (435):

$$w=-\frac{c}{\varkappa}\cdot\frac{\varrho^2}{4}+A\lg\varrho+B. \tag{436}$$

Для определения обеих постоянных интегрирования служат пограничные условия. При $\varrho=0$, w конечно; следовательно,

$$A=0. \tag{437}$$

Пусть на поверхности жидкости $\varrho=R$ (радиус трубки). Тогда в уравнении (427) $\cos(\tau x)=0$, $\cos(\tau y)=0$, $\cos(\tau z)=1$, и, так как ν совпадает с $-\varrho$, то, согласно (70) и (430),

$$Z_\nu=\varkappa\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{x}{\varrho}+\varkappa\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{y}{\varrho}.$$

Следовательно, на основании (427), при $\varrho=R$,

$$\frac{\varkappa}{R}\left(x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-\lambda\cdot w. \tag{438}$$

Здесь нужно положить, согласно (436) и (437),

$$w_R=-\frac{c}{\varkappa}\cdot\frac{R^2}{4}+B$$

$$\left(x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}\right)_R=\left(\varrho\frac{dw}{d\varrho}\right)_R=-\frac{c}{\varkappa}\cdot\frac{R^2}{2}.$$

Вместе с тем пограничное условие (438) гласит:

$$B = \frac{c}{\varkappa} \cdot \frac{R^2}{4} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{R}{2},$$

и мы получим из (436) решение задачи, подставив найденные значения постоянных c и B; скорость течения равна:

$$w = \frac{\Delta p}{4\varkappa l}\left(R^2 - \varrho^2 + \frac{2\varkappa}{\lambda} R\right). \tag{439}$$

Таким образом скорость течения убывает от середины трубки к стенкам, что вполне естественно. Нетрудно видеть, что обе постоянные $\varkappa$ и λ должны отличаться от нуля, если скорость имеет повсюду конечную величину.

Для проверки выведенной выше формулы (439) лучше всего измерить объем жидкости, вытекшей за некоторое время t. Этот объем получится, если взять интеграл по сечению трубки:

$$V = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} w \cdot t \cdot \varrho d\varrho d\varphi.$$

Следовательно:

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\Delta p}{\varkappa} \cdot \frac{R^4}{\varkappa}\left(1 + \frac{4\varkappa}{\lambda R}\right) \cdot t. \tag{440}$$

Отсюда мы видим, что закон истечения существенно зависит от отношения постоянной внутреннего трения λ к постоянной внешнего трения λ. Если это отношение мало по сравнению с радиусом трубки R, то количество вытекающей жидкости пропорционально четвертой степени радиуса и зависит только от внутреннего трения. Если же отношение велико по сравнению с R, то количество вытекающей жидкости пропорционально третьей степени радиуса и зависит только от внешнего трения. В промежуточных случаях закон сложнее, так как влияния обоих коэфициентов трения накладываются друг на друга.

Опыты Пуазеля, которые были подтверждены впоследствии, показали, что обычно осуществляется первый случай, т. е. в последней формуле можно положить $\lambda = \infty$, или

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{R^4}{\varkappa} \cdot t. \tag{441}$$

Отсюда следует на основании (439), что $w = 0$ при $\varrho = R$, т. е. что жидкость „прилипает“ к стенке трубки.

Однако опыты показывают, что закон Пуазеля (441) верен только для сравнительно узких трубок. Если же радиус трубки превосходит некоторую критическую величину, то все изложенное выше решение задачи лишается физического значения. Уже первое допущение (428) не соответствует действительности, так

как линии тока уже не проходят параллельно оси трубки, а изменяются под влиянием вихревых образований. Это явление называется „турбулентностью“. Согласно новейшим исследованиям возникновение турбулентных движений не находится в противоречии с уравнениями гидродинамики. Оно объясняется тем, что уравнения течения имеют несколько различных решений, простейшее из которых, рассмотренное нами, изображает движение устойчивое и осуществляемое в природе только в том случае, если трубка довольно узкая. Однако точная теория турбулентных движений представляет значительные трудности для математической разработки.

§ 80. Изложенная теория трения позволяет нам также снова приняться, и с большим успехом, за решение задачи, которую мы раньше признали неразрешимой: задачи о вычислении сопротивления, которое испытывает шар, движущийся в покоящейся жидкости. Определим полную величину давления, которое оказывает несжимаемая неподвижная жидкость на шар радиуса R, движущийся в ней с постоянной скоростью a в определенном направлении — направлении оси z. Предполагаем, что жидкость тяжелая, плотности k. На основании принципа относительности мы можем взять, вместо движущегося шара в неподвижной жидкости, неподвижный шар с центром в начале координат в равномерном токе жидкости, т. е. в стационарном течении, скорость которого на бесконечном расстоянии от шара ($r = \infty$) равна:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = -a. \tag{442}$$

В качестве второго пограничного условия воспользуемся обстоятельством, найденным в предыдущем параграфе, что на поверхности шара, при $r = R$, жидкость прилипает к шару, т. е.

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \tag{443}$$

Диференциальными уравнениями для определения u, v, w и p в качестве функций x, y, z нам послужат уравнения движения (83) с величинами компонентов давления (426), а также условие несжимаемости (385). Уравнения движения вообще нелинейны, так как для ускорения мы имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w, \ldots \tag{444}$$

Поэтому мы еще упростим задачу, введя ограничивающее допущение: скорости u, v, w настолько малы, что можно пренебречь членами второй степени в правой части (444). Поэтому уравнения (83) преобразуются следующим образом:

$$\left(X - \frac{\partial u}{\partial t}\right) k - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \ldots$$

Подставив выражение составляющих давления (426) и приняв во внимание условие несжимаемости (385), получим:

$$\left(X - \frac{\partial u}{\partial t}\right) k - \frac{\partial p}{\partial x} + \varkappa \cdot \triangle u = 0, \ldots \tag{445}$$

Далее, так как течение стационарно, и $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, то

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \varkappa \cdot \triangle u, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \varkappa \cdot \triangle v, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -kg + \varkappa \cdot \triangle w. \end{aligned}\right\} \tag{446}$$

Исключив p из этих трех уравнений, получим:

$$\triangle \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0, \; \triangle \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \; \triangle \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{447}$$

Теперь задача распадается на две отдельные части: во-первых, определение компонентов скорости $u, v; w$ из (385) и (447) с пограничными условиями (442) и (443), во-вторых, определение давления p из (446), а также общего действия на шар результирующей компонентов давления.

Что касается скорости, то ясно, ввиду пограничных условий, что она не может иметь потенциала. Поэтому мы, исходя из уравнений § 65, но несколько обобщив их, сделаем следующее допущение:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u', \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + v', \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + w', \end{aligned}\right\} \tag{448}$$

$$\varphi = a \cdot z + b \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + c \cdot \frac{\partial r}{\partial z}, \tag{449}$$

где u', v', w' обозначают три новые функции более простого вида, a, b, c — три постоянные. Тогда пограничные условия (442) выполняются, если u', v', w' обращаются в нуль в бесконечности. Условие несжимаемости (385) требует, чтобы

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \triangle \varphi. \tag{450}$$

Если принять во внимание, что, согласно (449),

$$\triangle \varphi = c \cdot \triangle \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) = c \cdot \frac{\partial (\triangle r)}{\partial z}$$

и что

$$\triangle r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}, \tag{451}$$

то (450) примет вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 2c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, положим:

$$u' = 0, \; v' = 0, \; w' = \frac{2c}{r}.$$

Тогда получим из (448):

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{2c}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{452}$$

Эти выражения удовлетворяют также всем остальным условиям. Прежде всего легко видеть, что уравнения (447) обращаются в тождества. Остаются еще пограничные условия (443), которые дают при $r = R$:

$$0 = b \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + c \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} = \frac{3bxz}{R^5} - \frac{cxz}{R^3},$$

$$0 = b \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + c \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z} = \frac{3byz}{R^5} - \frac{cyz}{R^3},$$

$$0 = -a - b \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} - c \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \frac{2c}{R} = -a - b\left(\frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}\right) + c\left(\frac{z^2}{R^3} + \frac{1}{R}\right).$$

Отсюда следует:

$$b = \frac{aR^3}{4}, \quad c = \frac{3}{4} Ra, \tag{453}$$

и величины u, v, w определены полностью.

Вторая часть задачи представляет собою вычисление давления. Для этого подставим найденные значения u, v, w в уравнения (446) и проинтегрируем. Получим:

$$p = -kgz - \varkappa \cdot \triangle\varphi + p_0,$$

где p_0 обозначает давление тока жидкости в плоскости $z=0$, если бы там не было шара. Подставив выражение (449) для φ, получим:

$$p = -kgz + 2\varkappa c \cdot \frac{z}{r^3} + p_0. \tag{454}$$

Вся сила давления, которое оказывает текущая жидкость на неподвижный шар, есть результирующая всех сил давления, действующих на элементы поверхности шара $d\sigma$ с внутренними нормалями $\nu = -r$. Так как эта результирующая должна быть направлена по оси z, то она равна на основании (74):

$$\int Z_\nu d\sigma = \int \left[Z_x \cos(\nu x) + Z_y \cos(\nu y) + Z_z \cos(\nu z) \right] d\sigma, \tag{455}$$

куда нужно подставить величины компонентов давления из (426). Затем нужно проинтегрировать по всей поверхности шара, введя для удобства полярные координаты: $d\sigma = R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$. Непосредственное вычисление довольно сложно, но его можно значительно упростить при помощи следующих соображений.

На основании (83) внутри жидкости для данного случая:

$$kg + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0,$$

так как ускорение $\frac{d^2z}{dt^2}$ обращается в нуль, как мы видели выше на основании (444).

Проинтегрируем последнее уравнение по пространству между поверхностью твердого шара и какой-нибудь концентрической поверхностью с радиусом $r > R$, а затем преобразуем интеграл при помощи (78). Тогда получится следующий результат: искомый интеграл (445), взятый по поверхности шара с радиусом R, равен тому же интегралу, взятому по поверхности шара с радиусом r, плюс такой член:

$$-kg(V_r - V_R), \tag{456}$$

где V_r и V_R — объемы обоих шаров. Так как выбор r совершенно произволен, то мы допустим, что r бесконечно велико, и этим значительно упростим наши выражения.

Прежде всего при $r = \infty$ имеем на основании (452) и (449):

$$z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{6cxz^2}{r^5},$$

$$z_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{6cyz^2}{r^5},$$

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{cz}{r^3}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right).$$

Следовательно, на основании (426) и принимая во внимание (454):

$$Z_x = \frac{6\varkappa cxz^2}{r^5}, \quad Z_y = \frac{6\varkappa cyz^2}{r^5},$$

$$Z_z = p_0 - kgz + \frac{6\varkappa cz^3}{r^5}.$$

Если подставить эти значения в (455) и проинтегрировать по всем элементам $d\sigma = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ поверхности шара r с внутренней нормалью $\nu = -r$, то мы получим выражение:

$$-8\pi\varkappa c + kg \cdot V_r.$$

Прибавив член (456), получим величину искомой силы давления на шар:

$$kgV_R - 8\pi\varkappa c,$$

или, согласно (453):

$$kgV_R - 6\pi\varkappa Ra. \tag{457}$$

Первый член соответствует подъемной силе, обусловленной весом вытесненной жидкости (*I*, § 114), а второй член — сопротивлению трения. Последнее действует, конечно, в направлении потока жидкости (442).

Положим, что шар свободно подвижен и тяжел, веса G_0, и определим силу F, с которой нужно действовать на него, чтобы удержать его на месте. Считая силу положительной, если она направлена вверх, получим:

$$F = G_0 - G + 6\pi\varkappa Ra. \tag{458}$$

Это и есть та сила, которую нужно приложить к шару снизу вверх, для того чтобы заставить его двигаться в неподвижной жидкости со скоростью $+a$. С другой стороны, эта формула Стокса дает величину стационарной скорости a, с которой шар движется в жидкости, когда на него действует постоянная сила F. Если, например, шар падает под влиянием силы тяжести, то скорость равна:

$$a = -\frac{G_0 - G}{6\pi\varkappa R}. \tag{459}$$

УКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ВАЖНЕЙШИХ ТЕОРЕМ

Указатель определений и важнейших теорем.