

**БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ**

ГЛАВА ПЕРВАЯ

**ТВЕРДЫЕ ТЕЛА. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ**

§ 21. Как мы видели в первой части, для однозначной формулировки законов движения деформируемых тел нам остается только узнать взаимоотношения между тензором деформации и тензором давления. Чтобы установить это взаимоотношение, введем прежде всего гипотезу, которой мы будем все время придерживаться в дальнейшем: что давление всегда и повсюду зависит исключительно только от деформации в данный момент и в данном месте, — и обратно. Это допущение вовсе не всегда выполняется в природе: строго говоря, все твердые тела проявляют в большей или меньшей степени зависимость деформации не только от мгновенных сил, но и от той обработки, которой они подвергались ранее, а также от температуры, которая может вообще изменяться совершенно независимо от давления и деформации. Но если и поскольку тело удовлетворяет введенной нами гипотезе, мы называем его „совершенно упругим“.

Совершенно упругое тело должно, конечно, удовлетворять и такому условию: тело, которое в течение некоторого времени подвергалось каким-либо деформирующим силам, должно после прекращения этих сил перейти в то же самое состояние равновесия, которое оно занимало до приложения этих сил. Ибо нулевому давлению должна однозначно соответствовать нулевая деформация. Поэтому, если тело обнаруживает явление упругого последствия, т. е. после прекращения деформирующих сил лишь постепенно возвращается к первоначальному состоянию равновесия, то такое тело не является совершенно упругим. Зато самая величина деформации, вызванной определенным давлением, не играет никакой роли в вопросе о совершенной упругости. В этом отношении научная терминология несколько расходится с житейским словоупотреблением, так как в обыденной жизни понятие о выдающейся упругости связано с понятием о значительной деформируемости, и, например, резина считается в этом смысле более упругой, чем стекло. Напротив в научном понимании стекло более упруго, чем резина, так как далеко не в такой степени обнаруживает свойство упругого последствия.

Опыт показывает, что всякое тело можно рассматривать как совершенно упругое, если деформация его не превосходит определенной величины, которая называется „пределом совершенной упругости“. Поэтому наши дальнейшие исследования относятся ко всем телам, но только к таким деформациям, которые настолько малы, что лежат в пределах упругости. Чтобы упростить математическую разработку, мы допустим, что деформации бесконечно малы.

§ 22. Тело, в котором все направления физически равнозначны, называется „изотропным“, а тело, в котором какие-либо направления физически отличаются от других, называется „анизотропным“. Для изотропных тел взаимоотношение между деформацией и давлением получается сразу: так как давление полностью определено деформацией, то при всякой деформации главные оси тензора давления должны совпадать с главными осями тензора деформации. Для анизотропных тел этого заключения вывести нельзя, так как здесь играют роль определенные преимущественные направления тела. Но так как мы желаем распространить наши дальнейшие соображения также и на кристаллы, т. е. на тела анизотропные, то мы должны выбрать более общий путь.

Тензор деформации характеризуется шестью компонентами  $x_x, x_y, \dots$  (§ 12), а тензор давления — шестью компонентами  $X_x, X_y, \dots$  (§ 19). Последние величины суть определенные функции первых величин. Так как компоненты деформации бесконечно малы, то можно при разложении в ряд Тейлора остановиться на первых членах. В результате получится, что компоненты давления суть линейные функции компонентов деформации, и притом, можно добавить, однородные функции, так как мы отсчитываем деформации от того состояния, которое соответствует нулевому давлению, т. е. от „естественного“ состояния тела. Тогда компоненты давления обращаются в нуль одновременно с компонентами деформации. Следовательно, общее выражение для зависимости давления от деформации может быть написано в виде шести уравнений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y, \\ Y_y &= a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_z + a_{24}y_z + a_{25}z_x + a_{26}x_y, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

В этих уравнениях 36 постоянных  $a$  определяются материальными свойствами тела. Значки при постоянных составляются по такому правилу: цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 сопоставлены по порядку с компонентами деформации  $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$  и с компонентами давления  $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$ . Если подставить выражения (88) в уравнения движения (83), то получатся общие законы движения.



Остается еще вопрос, являются ли постоянные  $a$  совершенно независимыми друг от друга или же между ними существуют определенные соотношения, введение которых упростило бы уравнения (88). Непосредственно очевидно, что при существовании симметрии какого-либо рода в кристалле число постоянных становится меньше 36 и выражения (88) сводятся к более простым частным случаям. Но пока мы еще оставим общий случай совершенно несимметричного кристалла и подчиним его условию, которого мы до сих пор еще не вводили, но о котором мы знаем, что оно постоянно выполняется в природе. Это условие — закон сохранения энергии. Мы увидим, что введение этого закона имеет следствием общее значительное упрощение системы уравнений (88).

§ 23. Согласно принципу сохранения энергии [1, (393)], изменение полной энергии  $L + U$  материальной системы, происшедшее в течение элемента времени  $dt$ , равно работе, совершенной за это время над системой внешними силами:

$$d(L + U) = A. \quad (89)$$

Это равенство мы применим к рассматриваемому случаю. При этом, как и в § 15, мы выделим произвольную часть всего тела и будем рассматривать ее как материальную систему.

Первая часть энергии, живая сила  $L$ , равна сумме живых сил всех элементов массы  $k d\tau$  рассматриваемой части тела. Следовательно,

$$L = \frac{1}{2} \int \left\{ \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 \right\} k d\tau, \quad (90)$$

где  $u, v, w$  — компоненты смещения материальной точки из ее естественного положения, а интегрирование распространяется на рассматриваемую часть тела.

О второй части энергии, потенциальной энергии  $U$ , мы знаем, что она складывается из потенциальных энергий отдельных элементов массы и поэтому выражается в виде:

$$U = \int F d\tau, \quad (91)$$

где функция  $F$ , потенциальная энергия единицы объема, зависит ввиду совершенной упругости тел, только от состояния деформации соответствующего элемента объема, т. е. от шести компонентов деформации  $x_x, y_y, \dots$ . Так как речь идет всегда только об изменениях потенциальной энергии, а не об ее абсолютном значении, то мы можем, не ограничивая общности задачи, положить для естественного, недеформированного состояния тела  $F=0$ .

Наконец, что касается работы внешних сил, то последняя состоит, по § 14, из работы массовых сил, которые действуют на все элементы рассматриваемой части тела, и, кроме того, из

работы сил давления, которые действуют извне на точки поверхности рассматриваемой части тела. Стало быть:

$$A = \int (X du + Y dv + Z dw) k d\tau + \int (X_r du + Y_r dv + Z_r dw) d\sigma, \quad (92)$$

где первый интеграл берется по объему, а второй интеграл — по поверхности части тела.

Теперь, чтобы осуществить требование (89) принципа сохранения энергии, составим прежде всего выражение для  $dL$ . Так как масса  $k d\tau$  не зависит от времени, то мы можем непосредственно вывести из (90):

$$dL = \int \left( \frac{d^2 u}{dt^2} du + \frac{d^2 v}{dt^2} dv + \frac{d^2 w}{dt^2} dw \right) k d\tau,$$

или, если подставить значения компонентов ускорения из уравнений движения (83):

$$dL = \int (X du + Y dv + Z dw) k d\tau - \int d\tau \cdot \left\{ \begin{array}{l} du \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) + \\ + dv \left( \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) + \\ + dw \left( \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) \end{array} \right\}. \quad (93)$$

Если теперь воспользоваться формулой преобразования (79) применив ее к каждому из девяти объемных интегралов, на которые распадается второй объемный интеграл, то мы получим, принимая во внимание (74):

$$dL = \int (X du + Y dv + Z dw) k d\tau + \int d\tau \cdot \left\{ \begin{array}{l} X_x \frac{\partial du}{\partial x} + X_y \frac{\partial du}{\partial y} + X_z \frac{\partial du}{\partial z} + \\ + Y_x \frac{\partial dv}{\partial x} + Y_y \frac{\partial dv}{\partial y} + Y_z \frac{\partial dv}{\partial z} + \\ + Z_x \frac{\partial dw}{\partial x} + Z_y \frac{\partial dw}{\partial y} + Z_z \frac{\partial dw}{\partial z} + \\ + \int d\sigma (X_r du + Y_r dv + Z_r dw). \end{array} \right\} \quad (94)$$

Если подставить это выражение для  $dL$  в уравнение энергии (89), то последнее значительно упрощается, так как член, зави-



сящий от работы внешних сил  $A$  и выражающийся формулой (92), сокращается с равным ему членом в левой части. Тогда в уравнении энергии останется только потенциальная энергия  $dU$  и второй объемный интеграл из (94). Последний можно еще более упростить. Прежде всего, нужно принять во внимание, что в выражениях  $\frac{\partial du}{\partial x}$  и т. д. знак  $\partial$  относится к дифференцированию по пространственным координатам, а знак  $d$  — к дифференцированию по времени, и поэтому оба действия совершенно независимы друг от друга. Отсюда имеем:

$$\frac{\partial du}{\partial x} = d \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial du}{\partial y} = d \frac{\partial u}{\partial y} \text{ и т. д.}$$

Если, далее, воспользоваться соотношениями (84) и сокращенными обозначениями (60), то уравнение энергии представится окончательно в таком виде:

$$dU + \int (X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + Y_z dy_z + Z_x dz_x + Z_y dx_y) d\tau = 0. \quad (95)$$

Здесь можно, согласно (91), написать для изменения потенциальной энергии:

$$dU = \int dF \cdot d\tau. \quad (96)$$

Строго говоря, следовало бы добавить сюда еще один член, который зависит от временного изменения величины элемента объема  $d\tau$ , а именно член  $\int F d(d\tau)$ , где первое  $d$  соответствует дифференцированию по времени, а второе  $d$  — дифференцированию по объему. Но этим членом можно пренебречь на том основании, что при бесконечно малых деформациях временные изменения элемента объема, даже для конечных промежутков времени, бесконечно малы по сравнению с величиной элемента объема, между тем как временные изменения потенциальной энергии  $F$  того же порядка величины, как и величина этой энергии.

Если воспользоваться (96), то можно написать выражение (95) в виде одного объемного интеграла, взятого по объему рассматриваемой части тела. Если взять часть тела бесконечно малую, в виде одного элемента объема  $d\tau$ , то можно отбросить знак интеграла, и мы получим для каждого отдельного элемента тела:

$$-dF = X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + Y_z dy_z + Z_x dz_x + X_y dx_y.$$

С другой стороны, так как  $F$  зависит от шести компонентов деформации, то мы имеем:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_x} dx_x + \frac{\partial F}{\partial y_y} dy_y + \frac{\partial F}{\partial z_z} dz_z + \frac{\partial F}{\partial y_z} dy_z + \frac{\partial F}{\partial z_x} dz_x + \frac{\partial F}{\partial x_y} dx_y,$$

и так как компоненты деформации и их изменения не зависят друг от друга, то вообще:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{\partial F}{\partial x_x}, & Y_y &= -\frac{\partial F}{\partial y_y}, & Z_z &= -\frac{\partial F}{\partial z_z}, \\ Y_z &= -\frac{\partial F}{\partial y_z}, & Z_x &= -\frac{\partial F}{\partial z_x}, & X_y &= -\frac{\partial F}{\partial x_y}. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Это значит, что компоненты тензора давления равны взятым с обратным знаком производным единственной функции компонентов деформации по этим компонентам, совершенно подобно тому, как при центральных силах компоненты какой-нибудь силы равны, взятым с обратным знаком производным единственной функции координат, — потенциала, — по этим координатам [7, (107)]. Поэтому потенциальную энергию единицы объема  $F$  называют также упругим потенциалом (потенциалом упругих сил).

Согласно (88), упругий потенциал [есть квадратичная функция компонентов деформации и, кроме того, функция однородная, так как, согласно сделанному нами выше допущению, не только линейные члены, но также и абсолютный член обращаются в нуль.

§ 24. Согласно полученным нами результатам, общее выражение упругого потенциала имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{a_{11}}{2} x_x^2 + a_{12} x_x y_y + a_{13} x_x z_z + a_{14} x_x y_z + a_{15} x_x z_x + a_{16} x_x x_y + \\ &+ \frac{a_{22}}{2} y_y^2 + a_{23} y_y z_z + a_{24} y_y y_z + a_{25} y_y z_x + a_{26} y_y x_y + \\ &+ \frac{a_{33}}{2} z_z^2 + a_{34} z_z y_z + a_{35} z_z z_x + a_{36} z_z x_y + \\ &+ \frac{a_{44}}{2} y_z^2 + a_{45} y_z z_x + a_{46} y_z x_y + \\ &+ \frac{a_{55}}{2} z_x^2 + a_{56} z_x x_y + \\ &+ \frac{a_{66}}{2} x_y^2. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Отсюда получаются, по (97), шесть компонентов давления в виде линейных однородных функций от компонентов деформации, совершенно так, как в (88), с тем лишь различием, что теперь  $a_{12} = a_{21}$  и т. д. Другими словами: существование упругого потенциала равнозначно условию, чтобы в постоянных упругости  $a_{ij}$  значки  $i$  и  $j$  можно было переставлять один на место другого. Отсюда получается значительное упрощение общей теории, рассмотренной в § 22: упругое состояние тела за-



висит уже не от 36, а от 21 постоянной. Об этих постоянных можно заранее высказать еще одно определенное суждение, не входя в рассмотрение частных свойств тела: постоянные удовлетворяют условию, чтобы потенциал  $F$  был положительным при всех обстоятельствах. Дело в том, что упругий потенциал есть потенциальная энергия деформации, а последняя, при переходе тела из деформированного состояния в естественное, т. е. при переходе потенциала от значения  $F$  к значению нуль, обращается в кинетическую, т. е. положительную, энергию, откуда неизбежно следует, что она сама должна быть положительной. Это рассуждение представляет собою приложение общего закона, что устойчивому состоянию равновесия всегда соответствует минимум потенциальной энергии (1, § 105). Так как естественное, недеформированное состояние тела представляет собою устойчивое состояние равновесия, то потенциальная энергия в каждом деформированном состоянии больше, чем в естественном состоянии, т. е. больше нуля.

Отсюда можно дальше заключить, что все шесть постоянных,  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{66}$ , положительны. Если бы, например,  $a_{11}$  было отрицательно, то достаточно было бы положить, что  $x_x$  не равно нулю, а все остальные компоненты деформации равны нулю, и получился бы отрицательный потенциал. Но и остальные постоянные  $a$  должны удовлетворять некоторым неравенствам, которых мы здесь формулировать не будем.

§ 25. На практике обычно приходится по данным внешним силам давления определять произведенное ими изменение тела. Тогда прежде всего возникает важный вопрос об однозначности решения этой задачи, т. е. вопрос, соответствует ли данным внешним силам давления вполне определенное изменение тела, или же уравнения задачи удовлетворяют несколько различным изменениям. Исследованием этого вопроса мы и займемся. При этом ограничимся случаем равновесия.

Положим, что нам даны давления, действующие извне на поверхность тела,  $X_x, Y_y, Z_z$ , а также массовые силы  $X, Y, Z$ . Допустим, кроме того, что найдены три функции  $u, v, w$ , зависящие от  $x, y, z$ , такие, которые можно рассматривать как смещения точек тела  $x, y, z$  и которые удовлетворяют всем условиям равновесия, т. е. уравнениям (83) внутри тела:

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ Y_k &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ Z_k &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned} \right\} (99)$$

и уравнениям (74) на поверхности. Во всех этих уравнениях нужно подставить вместо компонентов давления  $X_x, \dots$  те значения, которые получаются из выражений для смещений  $u, v, w$ , если сперва составить, по (60), соответствующие им компоненты деформации, а затем, по (97), компоненты давления.

Положим далее, что существуют еще три другие функции  $u', v', w'$  от  $x, y, z$ , отличные от предыдущих и также удовлетворяющие условиям равновесия. В таком случае уравнения (99) и (74) действительны также и для тех компонентов давления  $X'_x, X'_y, \dots$ , которые получаются, если вычислить компоненты деформации  $x'_x, y'_y, \dots$ , по (60), из  $u', v', w'$  вместо  $u, v, w$  и подставить эти значения в (97).

Рассмотрим теперь функции

$$u_0 = u' - u, \quad v_0 = v' - v, \quad w_0 = w' - w, \quad (100)$$

зависящие от  $x, y, z$ , и исследуем то изменение тела, которое они представляют собою, если рассматривать их как компоненты смещения. Прежде всего отсюда получатся, по (60), компоненты деформации:

$$x_{x_0} = x'_x - x_x, \quad x_{y_0} = x'_y - x_y, \dots, \quad (101)$$

затем, по (97), компоненты давления:

$$X_{x_0} = X'_x - X_x, \quad X_{y_0} = X'_y - X_y, \dots \quad (102)$$

С другой стороны, если вычесть уравнения (99) для компонентов давления без штрихов из таких же уравнений (99) для компонентов давления со штрихами и принять во внимание, что данные массовые силы,  $X, Y, Z$ , одинаковы в обеих системах уравнений, то получится:

$$0 = \frac{\partial X_{x_0}}{\partial x} + \frac{\partial X_{y_0}}{\partial y} + \frac{\partial X_{z_0}}{\partial z}, \dots \quad (103)$$

Наконец, для поверхности тела, вычтя уравнения (74) без штрихов из уравнений со штрихами, получим:

$$0 = X_{x_0} \cos(vx) + X_{y_0} \cos(vy) + X_{z_0} \cos(vz), \dots \quad (104)$$

так как заданные поверхностные давления  $X_x, Y_y, Z_z$  всякий раз одинаковы.

Здесь могло бы возникнуть сомнение в том, можно ли при таком вычислении считать одинаковыми косинусы направлений в обеих системах уравнений, так как форма поверхности тела ведь различна при обоих изменениях. Однако легко убедиться, что допущенная таким образом ошибка — меньшего порядка величины. Дело в том, что косинусы направления нормали к элементу поверхности конечны, поэтому их значения отклоняются при каком-нибудь бесконечно малом изменении тела лишь на бесконечно малую величину от тех значений, которые они имели при естественном состоянии тела, между тем как компоненты давления  $X_x, \dots$  отличаются при обоих изменениях на такие величины, которые заметны по сравнению со значениями самих компонентов давления.



Уравнения (103) и (104) имеют очень наглядное физическое истолкование. Они выражают условия для такого изменения  $u_0, v_0, w_0$ , при котором внешние силы не действуют ни на элементы массы, ни на поверхность тела. Таким образом поставленный выше вопрос об однозначности решения для  $u, v, w$ , при заданных внешних силах, сводится к более простому вопросу, возможно ли при отсутствии всякого внешнего воздействия такое изменение тела  $u_0, v_0, w_0$ , которое было бы отлично от нуля.

Ответ на этот вопрос можно найти при помощи следующего рассуждения. Если умножить три уравнения (103) соответственно на  $u_0, v_0, w_0$ , сложить между собой, умножить на элемент объема  $d\tau$  и проинтегрировать по объему всего тела, то получится уравнение с девятью объемными интегралами, каждый из которых можно преобразовать, на основании (79), следующим образом:

$$\int u_0 \frac{\partial X_{x_0}}{\partial x} d\tau = - \int \frac{\partial u_0}{\partial x} X_{x_0} d\tau - \int u_0 X_{x_0} \cos(vx) d\sigma.$$

Поэтому уравнение преобразуется, принимая во внимание (104), в следующее:

$$\int (X_{x_0} x_{x_0} + Y_{y_0} y_{y_0} + Z_{z_0} z_{z_0} + Y_{z_0} y_{z_0} + Z_{x_0} z_{x_0} + X_{y_0} x_{y_0}) d\tau = 0,$$

или же, если подставить значения составляющих давления из (97)

$$\int F_0 d\tau = 0,$$

где  $F_0$  обозначает выражение (98), если подставить значок нуля при всех компонентах деформации. Но  $F_0$  всегда положительно и равно нулю только в предельном случае, когда энергия деформации обращается в нуль. Значит, из последнего уравнения следует, что  $F_0$  обращается в нуль для каждого элемента объема, а отсюда вытекает, что каждая из составляющих деформации  $x_{x_0}, x_{y_0}, \dots$  равна нулю. Другими словами: если на тело не действуют никакие внешние силы, то деформация обязательно равна нулю.

Остается еще вопрос, обращается ли при этом в нуль также изменение  $u_0, v_0, w_0$ . Для ответа нужно исследовать, обязательно ли обращаются в нуль компоненты смещения  $u_0, v_0, w_0$ , если равны нулю шесть компонентов деформации:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0. \end{aligned} \right\} (105)$$

Как легко видеть, это вовсе не так. Можно даже получить  $u_0, v_0, w_0$  как общие решения дифференциальных уравнений (105) следующим образом. Для  $u_0$  существуют три условия:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0,$$

из которых два последние получаются дифференцированием уравнений, содержащих  $\frac{\partial u_0}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u_0}{\partial z}$ .

Поэтому  $u_0$  имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \lambda + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda' yz, \\ v_0 &= \mu + \mu_1 x + \mu_2 z + \mu' xz, \\ w_0 &= \nu + \nu_1 x + \nu_2 y + \nu' xy, \end{aligned} \right\} (106)$$

причем двенадцать коэффициентов  $\lambda, \mu, \nu$  постоянны. Далее, на основании (105):

$$\begin{aligned} \mu_2 + \mu' x + \nu_2 + \nu' x &= 0, \\ \nu_1 + \nu' y + \lambda_3 + \lambda' y &= 0, \\ \lambda_2 + \lambda' z + \mu_1 + \mu' z &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lambda' = 0, \quad \mu' = 0, \quad \nu' = 0,$$

$$\nu_2 + \mu_3 = 0, \quad \lambda_3 + \nu_1 = 0, \quad \mu_1 + \lambda_2 = 0.$$

Ввиду этих шести условий, выражения (106) становятся совершенно одинаковыми с выражениями (39) для самого общего бесконечно малого изменения, которому тело может подвергнуться, не претерпевая деформации, т. е. для поступательного перемещения и вращения. Это очевидно, и этот результат можно было предвидеть заранее. Мы можем поэтому высказать следующее положение: хотя внешние силы, действующие на внутренность и поверхность тела, не определяют однозначно компонентов смещения  $u, v, w$ , однако изменения тела, представляемые различными решениями задачи, отличаются друг от друга только поступательными перемещениями и вращениями всего тела и поэтому все соответствуют одинаковой деформации. В этом смысле можно сказать, что задача равновесия однозначно разрешается выведенными уравнениями. Впоследствии, при рассмотрении подобных задач мы будем произвольно выбирать те шесть постоянных, которые остаются неопределенными, так как они больше не представляют для нас интереса.



§ 26. Тела симметричной структуры. Кристаллические системы. Чтобы удобнее обозреть 21 постоянную, от которых зависят упругие свойства кристалла, расположим их в виде следующей схемы:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{array} \right\} \quad (107)$$

Значения отдельных постоянных  $a$  зависят вообще не только от состояния кристалла, но также и от выбора системы координат, а именно от расположения координатных осей относительно направлений, которые играют особую роль в структуре кристалла. Это следует непосредственно из того соображения, что значение упругого потенциала  $F$ , т. е. упругой энергии, ни в каком случае не может зависеть от выбора координат. Если преобразовать какую-нибудь деформацию  $x_x, x_y, \dots$  к другой координатной системе  $x', y', z'$  и обозначить новые компоненты деформации при помощи штриха сверху, то, по (98):

$$\frac{a_{11}}{2} x_x^2 + a_{12} x_x x_y + \dots = \frac{a'_{11}}{2} x_x'^2 + a'_{12} x_x' y_y' + \dots \quad (108)$$

Далее, если выразить компоненты деформации со штрихами через компоненты без штрихов и приравнять друг другу соответственные члены в обеих частях тождества, то получатся соотношения между постоянными со штрихами и без штрихов, которые соответствуют соотношениям между координатами двух систем. В общем случае постоянные со штрихами  $a'$  все или частью отличаются от постоянных без штрихов  $a$ .

Если кристалл обладает таким частным свойством, что при определенном изменении системы координат все  $a'$  равны соответствующим  $a$ , т. е. если постоянные  $a$  инвариантны относительно преобразования координат, то говорят, что кристаллу свойственен определенный род симметрии. Если существует несколько таких изменений координат, то говорят о высшей симметрии кристалла.

Каждый род условий симметрии можно выразить не только на основании инвариантности постоянных упругости  $a$ , но и другим способом: система координат остается первоначальная, зато сам кристалл подвергается такому изменению, чтобы он расположился по отношению к системе координат таким же образом, как он был бы расположен по отношению к системе координат со значками при первом способе рассмотрения, когда он предполагался неподвижным. Существование симметрии проявляется

тогда в том, что кристалл и после изменения обладает теми же свойствами по всем направлениям, как и до него, или же, как говорят, что кристалл приведен к совмещению с самим собою. Оба вида определения симметрии, очевидно, вполне эквивалентны и представляют собою лишь разные формулировки одного и того же обстоятельства. Для наших целей удобнее первая формулировка, условие инвариантности  $a$  при преобразовании координат. Им мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Кристаллы разделяются соответственно степени симметрии, проявляемой ими, на различные классы. Согласно сказанному выше, принцип этого подразделения не является заранее установленным, однозначно определенным на основании дедукции, а подобно всякому определению понятия, до известной степени произволен и выводится лишь из соображений целесообразности. Мы воспользуемся здесь простым давно применяемым разделением на шесть кристаллических систем. В качестве преобразования координат, удобнее всего применить вращение координатной системы.

Если все постоянные упругости  $a$  какого-нибудь кристалла инвариантны по отношению к повороту координатной системы вокруг одной из осей координат на угол  $\frac{2\pi}{n}$  (или если кристалл приводится к совпадению с самим собою при повороте на угол  $\frac{2\pi}{n}$ ), то эта ось называется „осью симметрии  $n$ -го порядка“.

Очевидно, что ось симметрии не есть определенная прямая, а лишь определенное направление, так как все параллельные прямые совершенно равнозначны.

Существование оси симметрии первого порядка вовсе не является действительным условием симметрии, так как поворот координатной системы на угол  $2\pi$  не изменяет ее. Кристаллы, обладающие только осями симметрии первого порядка, образуют последнюю, шестую, или асимметричную (триклиническую) систему. К ним принадлежит, например, сернокислая медь. Ее упругие свойства определяются 21 постоянной, представленными в виде схемы (107).

Если кристалл обладает только одной осью симметрии второго порядка, то он принадлежит к пятой или моносимметричной (моноклинической) системе, как, например, слюда или сода. Чтобы установить условия для упругих свойств кристалла этой системы, мы поставим, прежде всего общий вопрос о зависимости между постоянными упругости со штрихами и постоянными упругости без штрихов  $a$ , при повороте системы координат на угол  $\frac{2\pi}{2} = \pi$  вокруг оси  $z$ .



В этом случае получится:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = z.$$

Соответственным образом,

$$u' = -u, \quad v' = -v, \quad w' = w,$$

и, по (60),

$$\begin{aligned} x'_x &= x_x, & y'_y &= y_y, & z'_z &= z_z, \\ y'_z &= -y_z, & z'_x &= -z_x, & x'_y &= x_y. \end{aligned}$$

Если подставить эти значения в тождество (108), то получится, что из 21 постоянной  $a'$  13 постоянных равны соответствующим постоянным  $a$  без штрихов, между тем как

$$\begin{aligned} a_{14}' &= -a_{14}, & a_{15}' &= -a_{15}, & a_{24}' &= -a_{24}, & a_{25}' &= -a_{25}, \\ a_{34}' &= -a_{34}, & a_{35}' &= -a_{35}, & a_{46}' &= -a_{46}, & a_{56}' &= -a_{56}. \end{aligned}$$

Эти соотношения верны вообще для всякого кристалла. Если же ось  $z$  есть ось симметрии второго порядка, то все величины  $a$  инвариантны, и поэтому те из них, которые меняют свой знак при преобразовании, должны равняться нулю. Отсюда следует, по (107), такая схема упругих постоянных кристаллов моносимметрической системы:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\ & & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66} \end{array} \right\} \quad (109)$$

Если, кроме оси  $z$ , имеется еще одна ось симметрии второго порядка, например ось  $x$ , то мы получим четвертую или ромбическую систему, к представителям которой относятся калийная селитра, арагонит, топаз. Подобно вышеприведенному способу, можно получить, что этой системе соответствует такая схема:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} & 0 & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66} \end{array} \right\} \quad (110)$$

Из построения этой схемы видно, что в данном случае и третья координатная ось, т. е. ось  $y$ , есть также ось симметрии второго порядка.

От ромбической системы мы перейдем к третьей или тетрагональной (квадратной) системе (например цирконий), если введем дальнейшее условие, что одна из координатных осей,

например ось  $z$ , есть ось симметрии четвертого порядка. Повороту на угол  $\frac{\pi}{2}$  вокруг оси  $z$  соответствуют формулы преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= y, & y' &= -x, & z' &= z, \\ u' &= v, & v' &= -u, & w' &= w, \\ x'_x &= y_y, & y'_y &= x_x, & z'_z &= z_z, \\ y'_z &= -x_z, & z'_x &= z_y, & x'_y &= -x_y. \end{aligned}$$

Отсюда получим на основании (108) общие соотношения для девяти постоянных тетрагональной системы:

$$\begin{aligned} a_{11}' &= a_{22}, & a_{12}' &= a_{12}, & a_{13}' &= a_{23}, \\ a_{22}' &= a_{11}, & a_{23}' &= a_{13}, & a_{33}' &= a_{33}, \\ a_{44}' &= a_{55}, & a_{55}' &= a_{44}, & a_{66}' &= a_{66}. \end{aligned}$$

Если все постоянные  $a$  со штрихами должны при этом равняться соответственным постоянным без штрихов, то

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{13} = a_{23}, \quad a_{44} = a_{55}.$$

Поэтому, согласно (98), упругий потенциал тетрагонального кристалла равен:

$$\begin{aligned} F &= \frac{a_{11}}{2}(x_x^2 + y_y^2) + a_{12}x_x y_y + a_{13}(x_x + y_y)z_z + \\ &+ \frac{a_{33}}{2}z_z^2 + \frac{a_{44}}{2}(y_z^2 + z_x^2) + \frac{a_{66}}{2}x_y^2. \end{aligned} \quad (111)$$

Существование оси симметрии третьего, а также шестого порядка определяет вторую или гексагональную систему, представителями которой являются многие кристаллы, как например натровая селитра, известковый шпат, графит, турмалин, лед.

Наконец, первая или правильная система получится из тетрагональной системы, если положить, что и вторая ось, а поэтому также и третья ось суть оси симметрии четвертого порядка. Выражение для упругого потенциала правильного кристалла получится, согласно (111), в виде:

$$\begin{aligned} F &= \frac{a_{11}}{2}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + a_{12}(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x) + \\ &+ \frac{a_{44}}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2). \end{aligned} \quad (112)$$

Упругий потенциал зависит в этом случае только от трех постоянных. К правильной системе принадлежат каменная соль, плавиковый шпат, алмаз.

§ 27. Изотропные тела. Для того чтобы тело было изотропно упругим, т. е. чтобы оно вовсе не имело преимущественных направлений, необходимо и достаточно, чтобы все его постоянные упругости были инвариантны по отношению ко всякому изменению координатной системы, или, что сводится к тому же, что бы



при всяком повороте оно приводилось к совпадению с самим собою. Чтобы установить вытекающие отсюда условия для значений постоянных упругости, проще всего отнести деформацию к главным расширениям и к направлениям главных осей расширения. Иначе говоря, мы выразим, при помощи уравнений (64), шесть компонентов деформации  $x_x, y_y, \dots$  в зависимости от трех главных расширений,  $l, m, n$ , и девяти косинусов направлений,  $\alpha_1, \dots, \gamma_3$  и эти величины подставим в выражение упругого потенциала (112). В изотропном теле последний должен полностью определяться величинами  $l, m, n$ , каковы бы ни были значения косинусов направления, причем он, очевидно, представляет однородную симметричную квадратичную функцию от  $l, m, n$ .

Смысл этого требования удобнее всего уяснить, если рассмотреть все однородные симметричные квадратичные функции от  $l, m, n$ . Имеются всего две такие функции, независимые друг от друга, а именно:

$$l^2 + m^2 + n^2, \\ lm + mn + nl.$$

К этим двум функциям приводятся все другие. Так, например:

$$(l + m + n)^2 = (l^2 + m^2 + n^2) + 2(lm + mn + nl). \quad (113)$$

Отсюда следует, что упругий потенциал изотропного тела обладает только двумя независимыми друг от друга постоянными и, значит, имеет вид:

$$F = \frac{\lambda}{2} (l + m + n)^2 + \mu (l^2 + m^2 + n^2), \quad (114)$$

причем  $\lambda$  и  $\mu$  положительны.

Теперь, чтобы выразить  $F$  через составляющие деформации  $x_x, x_y, \dots$ , примем во внимание, что  $l, m, n$  суть корни уравнения третьей степени (62). Поэтому

$$l + m + n = x_x + y_y + z_z, \quad (115)$$

как коэффициент при  $l^3$ , а

$$lm + mn + nl = (y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) - \frac{1}{4} (y_y^2 + z_z^2 + x_x^2), \quad (116)$$

как коэффициент при  $l$  в упомянутом уравнении. Отсюда следует, согласно (113):

$$l^2 + m^2 + n^2 = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2} (y_y^2 + z_z^2 + x_x^2)$$

[в этом можно убедиться и непосредственно при помощи (64)]. Согласно (114)

$$F = \frac{\lambda}{2} (x_x + y_y + z_z)^2 + \mu \left( x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{y_y^2 + z_z^2 + x_x^2}{2} \right). \quad (117)$$

Если подставить еще, для сокращения, объемное расширение

$$x_x + y_y + z_z = \sigma, \quad (118)$$

то, на основании (97), мы получим следующие выражения для компонентов давления изотропного упругого тела в зависимости от компонентов деформации:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\lambda\sigma - 2\mu x_x, & Y_y &= -\mu y_y, \\ Y_y &= -\lambda\sigma - 2\mu y_y, & Z_z &= -\mu z_z, \\ Z_z &= -\lambda\sigma - 2\mu z_z, & X_x &= -\mu x_x. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Эти уравнения представляют собою то необходимое дополнение к общим уравнениям движения, о котором мы говорили в начале первой главы, в § 21.

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 28. Прежде всего займемся приложениями изложенной теории к статическим задачам о твердых телах. При этом мы ограничимся для простоты изотропными телами. Так как массовые силы, вроде тяжести, играют лишь незначительную роль в деформациях твердых тел, то мы положим их равными нулю. Тогда условия равновесия (99), относящиеся к внутренности тела, примут более простой вид:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \dots \quad (120)$$

а условия для поверхности тела (74) останутся неизменными:

$$X_n = X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz), \dots \quad (121)$$

Каждое смещение  $u, v, w$  представляет собою возможное в природе состояние равновесия. Соответствующие компоненты деформации  $x_x, x_y, \dots$  вычисляются по (60) и приводят на основании (119) к выражениям для компонентов давления  $X_x, X_y, \dots$ , которые удовлетворяют уравнениям (120). При этом деформация соответствует тем силам, действующим на поверхность тела, которые представлены компонентами давления  $X_n, Y_n, Z_n$ , в уравнениях (121).

Здесь имеет важное значение доказанное в § 25 положение, что деформация однозначно определяется внешними силами. Поэтому, если мы нашли каким бы то ни было способом решение условий равновесия, то мы можем быть уверены, что это единственное решение, соответствующее данным внешним силам давления. Обычно в природе задача бывает поставлена таким образом, что заданы внешние силы, а по ним требуется найти произведенную ими деформацию. Но так как уравнения имеют очень сложный вид, то задачу невозможно разрешить, отыскивая сперва общее решение дифференциальных уравнений (120), а затем



вычисляя входящие в него произвольные постоянные на основании предельных условий (121). Обычно исходят из предельных условий (121) и пытаются подобрать такое частное решение уравнений (120), которое удовлетворяло бы предельным условиям. Если попытка удастся, то считается, что решение задачи найдено. Этим методом мы будем обычно пользоваться в дальнейшем.

§ 29. Рассмотрим прежде всего всестороннее равномерное, так называемое кубическое сжатие тела произвольной формы. На поверхность тела действует, всюду в направлении нормали, данное равномерное давление  $p$ . Поэтому

$$X_v = p \cos(vx), \quad Y_v = p \cos(vy), \quad Z_v = p \cos(vz). \quad (122)$$

Таким образом даны компоненты внешнего давления. Очевидно, мы удовлетворим предельным условиям (121), если положим, что на поверхности тела повсюду

$$\left. \begin{aligned} X_x = Y_y = Z_z = p, \\ X_y = Y_z = Z_x = 0. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Далее, предположим, что эти шесть уравнений представляют компоненты давления не только на поверхности, но и повсюду внутри тела. Тогда будут удовлетворены также уравнения (120). Затем мы получим из (119):

$$p = -\lambda\sigma - 2\mu x_x \dots y_z = 0, \dots, \quad (124)$$

откуда сложением первых трех уравнений получается:

$$3p = -3\lambda\sigma - 2\mu(x_x + y_y + z_z),$$

и, согласно (118):

$$\sigma = -\frac{3p}{3\lambda + 2\mu}, \quad x_x = y_y = z_z = \frac{\sigma}{3}. \quad (125)$$

Поэтому, если положить

$$u = \frac{\sigma}{3} x, \quad v = \frac{\sigma}{3} y, \quad w = \frac{\sigma}{3} z, \quad (126)$$

то, согласно (60), будут удовлетворены уравнения (124), и мы имеем, таким образом, решение задачи. Обобщение, получающееся вследствие того, что в выражения для  $u$ ,  $v$ ,  $w$  можно ввести еще некоторые постоянные, не изменяет, согласно § 25, найденной деформации.

Таким образом всестороннее равномерное давление  $p$  вызывает всестороннее равномерное сжатие объема, величины (125), не зависящее от формы тела. Поэтому постоянная  $\frac{3}{3\lambda + 2\mu}$  называется также „коэффициентом объемного сжатия“, а обратная величина

$$\frac{p}{-\sigma} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (127)$$

называется „объемным модулем упругости“ вещества.

§ 30. Вслед за объемной упругостью рассмотрим так называемую линейную упругость, т. е. исследуем равновесие тела, растягиваемого односторонне, например по направлению оси  $x$ .

Чтобы не усложнять вычисления, положим, что тело имеет вид цилиндра, параллельного оси  $x$  (проволока, стержень), длины  $l$  и произвольного поперечного сечения. Положим, что начальное сечение лежит в плоскости  $yz$ , т. е.  $x=0$ , и неподвижно удерживается какими-либо силами. На конечное сечение  $x=l$  действует в направлении положительной оси  $x$  внешняя сила, величина которой равна  $F$ , а на боковую поверхность цилиндра никакие внешние силы не действуют. Требуется определить произведенную деформацию.

Для того чтобы удовлетворить пограничным условиям на поверхности (121), рассмотрим прежде всего боковую поверхность цилиндра. На боковой поверхности  $X_v = Y_v = Z_v = 0$ ; далее  $\cos(vx) = 0$ , между тем как  $\cos(vy)$  и  $\cos(vz)$  могут принимать любые значения. Поэтому условия на поверхности будут удовлетворены, если мы положим:

$$X_y = Y_z = Z_x = 0, \quad Y_y = Z_x = 0. \quad (128)$$

Предположим, что эти условия имеют место также повсюду внутри тела, так что из шести компонентов давления только  $X_x$  отлично от нуля. Тогда действительно дифференциальные уравнения (120) будут удовлетворены, если, кроме того, положить, что  $X_x$  постоянно. Значение этой постоянной получится из условия на поверхности для свободного сечения  $x=l$ , так как условие для неподвижного сечения  $x=0$  дает только величину сил, которые удерживают сечение и которые нас здесь не интересуют.

На свободном сечении

$$\cos(vx) = -1, \quad \cos(vy) = \cos(vz) = 0,$$

поэтому, согласно (121) и (128):

$$X_v = -X_x, \quad Y_v = 0, \quad Z_v = 0.$$

Так как  $X_x$  постоянно, то мы имеем для результирующей всех параллельных сил давления, которые действуют на элементы свободного сечения:

$$\int X_v d\sigma = -X_x \cdot q = F, \quad (129)$$

где  $q$  обозначает площадь поперечного сечения. Отсюда

$$X_x = -\frac{F}{q}. \quad (130)$$



По составляющим давления можно найти также составляющие деформации, пользуясь уравнениями (119), следующим образом. Прежде всего,

$$y_z = z_x = x_y = 0.$$

Затем получим из

$$\begin{aligned} \frac{F}{q} &= \lambda\sigma + 2\mu x_x, \\ 0 &= \lambda\sigma + 2\mu y_y, \\ 0 &= \lambda\sigma + 2\mu z_z, \end{aligned}$$

сложив эти равенства:

$$\frac{F}{q} = 3\lambda\sigma + 2\mu\sigma.$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{F}{q}. \quad (131)$$

Отсюда

$$x_x = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{F}{q}, \quad y_y = z_z = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{F}{q}. \quad (132)$$

Эти величины дают смещения:

$$u = x_x \cdot x, \quad v = y_y \cdot y, \quad w = z_z \cdot z, \quad (133)$$

т. е. полное решение задачи.

Как и следует ожидать, найденная деформация связана с объемным расширением. Но величина этого расширения  $\sigma$ , которая получается из сравнения выражений (131) и (125), при линейном растяжении равна лишь одной третьей части расширения при объемном растяжении. Что касается расширения отдельных осей, то оно, очевидно, положительно для оси  $x$ . Ему соответствует, по (133), смещение свободного сечения, т. е. удлинение цилиндра на величину:

$$u = x_x \cdot l = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{lF}{q}. \quad (134)$$

Таким образом удлинение пропорционально растягивающей силе, пропорционально длине и обратно пропорционально поперечному сечению цилиндра и, наконец, пропорционально постоянной материала, обратная величина которой обозначается как „линейный модуль упругости“  $E$  данного вещества:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (135)$$

Но, на основании (132), растяжение по длине цилиндра связано с сжатием по каждому направлению, перпендикулярному к оси цилиндра. Величину сжатия удобнее всего рассмотреть,

если составить отношение поперечного сжатия к продольному удлинению:

$$-\frac{y_y}{x_x} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \epsilon < \frac{1}{2}. \quad (136)$$

Измерив обе постоянные  $E$  и  $\epsilon$ , можно вычислить  $\lambda$  и  $\mu$  и таким образом определить все упругие свойства вещества.

Величина  $\epsilon$  очень мала для пробки, а для каучука очень велика, близка к предельной величине  $1/2$ . Для металлов и стекла можно принять ее в первом приближении равной  $1/3$ , но отдельные материалы заметно отличаются друг от друга.

Модуль линейной упругости  $E$ , размерность которого одинакова, согласно (135) и (119), с размерностью давления, имеет для металлов и стекла величину порядка:

$$E \sim 10^{12} \left[ \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \right] \text{ [ср. 7, (8a)].} \quad (136a)$$

Поэтому такой же порядок величины имеют и коэффициенты упругости  $\lambda$  и  $\mu$ .

§ 31. Теперь рассмотрим случай кручения, также для цилиндра длины  $l$ , начальное сечение которого (основание цилиндра) пусть закреплено неподвижно в плоскости  $xy$  (т. е.  $z = 0$ ), а свободное конечное сечение ( $z = l$ ) поворачивается в своей плоскости внешними силами на некоторый угол. Положим снова, что на боковую поверхность не действуют внешние силы.

На этот раз мы пойдем путем, обратным предыдущему: будем исходить не из внешних сил, а положим, что даны деформации и по ним требуется найти силы, производящие эти деформации. Пусть деформация состоит в том, что каждое сечение цилиндра, параллельное плоскости  $xy$ , поворачивается в своей плоскости без какого-либо искажения на угол, который пропорционален расстоянию  $z$  поперечного сечения от плоскости основания. Если  $\omega$  — угол поворота верхнего конечного сечения, то угол поворота какого-нибудь сечения на высоте  $z$  равен  $\frac{\omega \cdot z}{l}$ .

Отсюда однозначно получаются величины компонентов смещения  $u, v, w$ , причем удобнее всего ввести цилиндрические координаты:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (136b)$$

Действительно: согласно вышесказанному, материальная точка  $x, y, z$  имеет после деформации координаты:

$$\begin{aligned} x + u &= \rho \cos \left( \varphi + \frac{\omega z}{l} \right), \\ y + v &= \rho \sin \left( \varphi + \frac{\omega z}{l} \right), \\ z + w &= z. \end{aligned}$$



Следовательно, принимая во внимание, что  $\omega$  бесконечно мало:

$$u = -\frac{\omega y z}{l}, \quad v = \frac{\omega x z}{l}, \quad w = 0 \quad (137)$$

и, согласно (60):

$$\left. \begin{aligned} x_x = 0, \quad y_y = 0, \quad z_z = 0, \\ y_z = \frac{\omega x}{l}, \quad z_x = -\frac{\omega y}{l}, \quad x_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

По этим компонентам деформации получаются, согласно (119), компоненты давления:

$$\left. \begin{aligned} X_x = 0, \quad Y_y = 0, \quad Z_z = 0, \\ Y_z = -\frac{\mu \omega x}{l}, \quad Z_x = \frac{\mu \omega y}{l}, \quad X_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

Так как эти выражения тождественно удовлетворяют уравнениям (120) также и внутри тела, то отсюда следует, что предположенная нами деформация представляет собою возможный в природе случай равновесия, которое должно наступить всегда, когда на поверхность цилиндра действуют силы, вычисляемые на основании (121).

Рассмотрим сперва силы давления, которые действуют на боковую поверхность цилиндра и которые, согласно сделанному нами допущению, обращаются в нуль. Так как для боковой поверхности  $\cos(\nu z) = 0$ , между тем как  $\cos(\nu x)$  и  $\cos(\nu y)$  могут принимать любые значения, то из (121), воспользовавшись (139), можно получить для всех точек боковой поверхности цилиндра:

$$X_\nu = 0, \quad Y_\nu = 0, \quad Z_\nu = \frac{\mu \omega}{l} [y \cos(\nu x) - x \cos(\nu y)]. \quad (140)$$

Отсюда мы видим, что допущенная нами деформация только в том случае совместима с дальнейшим допущением, что на боковую поверхность цилиндра не действуют внешние силы, когда во всех точках боковой поверхности:

$$y \cos(\nu x) - x \cos(\nu y) = 0.$$

Это чисто геометрическое условие. Оно означает, что направление  $x:y$ , т. е. направление какого-нибудь радиуса-вектора, проведенного из какой-либо точки на оси  $z$  под прямым углом к ней совпадает с направлением  $\cos(\nu x):\cos(\nu y)$ , т. е. с направлением нормали  $\nu$  в конечной точке радиуса-вектора, или, другими словами, что поперечное сечение есть круг; цилиндр круговой.

Поэтому, если мы хотим сохранить наши допущения, то мы вынуждены ограничиться в дальнейших умозаключениях частным

случаем кругового цилиндра. При этом предположении внешнее давление, действующее на элемент конечного сечения цилиндра, равно, на основании (121) и (139), а также того обстоятельства, что здесь  $\cos(\nu x) = 0$ ,  $\cos(\nu y) = 0$ ,  $\cos(\nu z) = -1$ :

$$X_\nu = -\frac{\mu \omega y}{l}, \quad Y_\nu = \frac{\mu \omega x}{l}, \quad Z_\nu = 0, \quad (141)$$

или, согласно (136b):

$$X_\nu = -\frac{\mu \omega \rho}{l} \sin \varphi, \quad Y_\nu = \frac{\mu \omega \rho}{l} \cos \varphi, \quad Z_\nu = 0.$$

Таким образом внешнее давление действует на каждый элемент верхнего свободного сечения цилиндра в плоскости сечения и перпендикулярно к направлению радиуса-ветвора  $\rho$  в сторону отсчета угла кручения  $\omega$ , что нетрудно понять. Все силы давления:

$$X_\nu d\sigma, \quad Y_\nu d\sigma, \quad Z_\nu d\sigma,$$

которые действуют на элементы поверхности, дают на основании [7, (306)] и так как  $d\sigma = \rho d\rho d\varphi$  результирующую силу:

$$F_x = \int X_\nu d\sigma = 0, \quad F_y = \int Y_\nu d\sigma = 0, \quad F_z = \int Z_\nu d\sigma = 0$$

и результирующую пару сил:

$$\left. \begin{aligned} N_x = -\int z Y_\nu d\sigma = 0, \quad N_y = \int z X_\nu d\sigma = 0, \quad N_z = \int (x Y_\nu - y X_\nu) d\sigma, \\ N_z = \frac{\mu \omega}{l} \iint \rho^3 d\rho d\varphi = \frac{\pi \mu \omega}{2} \cdot r^4 = N, \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

где  $r$  обозначает радиус цилиндра.

Отсюда мы делаем обратное заключение: если на верхнее основание кругового цилиндра, нижнее основание которого подвижно, действует пара сил с вращающим моментом  $N$ , лежащая в плоскости верхнего основания, то цилиндр испытывает кручение рассмотренного вида, причем верхнее основание поворачивается на угол:

$$w = \frac{2}{\pi} \frac{IN}{\mu r^4}. \quad (142a)$$

Следовательно, угол кручения пропорционален длине цилиндра и вращающему моменту пары сил и обратно пропорционален четвертой степени радиуса и постоянной материала, которую поэтому называют также „модулем кручения“ вещества.

§ 32. Как же закручивается цилиндр не кругового, например, эллиптического сечения, если на верхнее основание его действует та же пара сил  $N$ , причем на боковую поверхность не действуют внешние силы? Этим вопросом мы займемся теперь подробнее.



Прежде всего ясно, что в данном более общем случае придется несколько изменить простые допущения относительно деформации, сделанные в начале предыдущего параграфа, согласно которым каждое сечение поворачивается в своей плоскости без какого-либо искажения, ибо эти допущения годятся, как мы видели, только для кругового цилиндра. Какого рода должно быть это изменение, легко найти следующим образом. Хотя простая деформация, изображаемая уравнениями (137), и непригодна для цилиндра с произвольным поперечным сечением, однако, она представляет собою возможный в природе случай равновесия, как мы заключили из того, что уравнения (120) удовлетворяются внутри цилиндра. Значит, она необходимо наступает тогда, когда соответствующие внешние силы действуют на поверхность цилиндра. Каковы эти внешние силы, которые должны действовать на боковую поверхность цилиндра, можно найти непосредственно из уравнений (140), подставив в последнее уравнение значения косинусов направления внутренней нормали, обусловленные видом сечения цилиндра. Следовательно, внешняя сила давления на боковую поверхность всегда параллельна оси  $z$ , т. е. она действует вверх или вниз, смотря по тому, положительна или отрицательна величина  $Z_v$ .

Вообще, можно написать:

$$Z_v = \frac{\mu\omega}{l} \cdot r \sin \delta, \quad (143)$$

где  $\delta$  обозначает угол между внешней нормалью в какой-нибудь точке боковой поверхности цилиндра и радиусом-вектором  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , лежащим в соответствующем сечении; угол этот положителен, если внешняя нормаль представляется повернутой вокруг оси  $z$  в положительном направлении относительно радиуса-вектора. Понятно, что для кругового сечения  $\delta = 0$ , но для эллиптического сечения, большая и малая оси которого совпадают с осями  $x$  и  $y$ ,  $\delta$  и вместе с ним  $Z_v$  (при положительном  $w$ ) положительны в первом и третьем квадрантах и отрицательны во втором и четвертом квадрантах. Поэтому, если закручивается эллиптический цилиндр, расположенный согласно допущению, то для того, чтобы поперечные сечения только поворачивались в своей плоскости, необходимо, чтобы на боковую поверхность действовали внешние сдвигающие силы, направленные в первом и третьем квадрантах вверх, а во втором и четвертом квадрантах вниз. Отсюда непосредственно следует, что в том случае, когда таких внешних сил не имеется, соответствующие точки боковой поверхности претерпевают смещение в обратном направлении, вследствие чего первоначально плоские сечения загибаются в первом и третьем квадрантах вниз ( $w < 0$ ), а в двух других квадрантах вверх ( $w > 0$ ). Остаются на прежней высоте ( $w = 0$ ) только те точки боковой поверхности, в которых длина радиуса-вектора

получает максимальное или минимальное значение при обходе периметра сечения ( $\delta = 0$ ), т. е. для эллипса вершины, а остальные поднимаются или опускаются.

Чтобы получить общие правила о направлении закручивания, независимо от выбора системы координат, положения неподвижного основания, знака  $\omega$  и направления внешнего вращающего момента, действующего на свободное основание цилиндра, полезно остановиться на различии между видами винтовых линий.

Если точка движется по винтовой линии, то она совершает одновременно вращение и поступательное движение, поперек к плоскости вращения. Если винтовая линия такова, что при движении по винту или, что одинаково по существу, при вращении винта в неподвижной гайке положительная ось вращения (1, § 83) совпадает с направлением поступательного движения, как, например, в обыкновенном штопоре, то винтовая линия называется правым винтом, в противоположном случае — левым винтом. При этом условии безразлично, в каком направлении точка пробегает винтовую линию или вращается винт: вместе с направлением вращения изменяется как направление поступательного движения, так и направление положительной оси вращения.

Вернемся теперь к нашему случаю и рассмотрим какое-нибудь волокно цилиндра, которое первоначально было параллельно оси кручения. После деформации оно примет форму винтовой линии. С другой стороны, точки на периметре первоначально плоского сечения цилиндра образуют после деформации волновую линию. В таком случае существует следующее общее правило: те части этой волновой линии, которые примыкают к минимальным значениям радиуса-вектора  $r$ , образуют отрезки того же рода, как и ранее рассмотренные волокна цилиндра; если последние — правые винты, то и эти части такие же. Для частей волновой линии, соседних с максимальными значениями  $r$ , действительно обратное.

Так, например, в рассмотренном выше примере эллиптического сечения волокна цилиндра образуют, при принятых обозначениях правые винтовые линии. Поэтому крайняя волновая линия проходит у концов малой оси как правый винт, т. е. поднимается при переходе от первого квадранта ко второму и от третьего к четвертому, совершенно так, как было установлено выше.

Для количественного решения задачи требуется рассмотреть аналитические условия. В согласии с результатами приведенных выше рассуждений, можно следующим образом обобщить выражения (137) компонентов смещения для эллиптического цилиндра с полуосями  $a$  и  $b$ :

$$u = -\frac{\omega yz}{l}, \quad v = \frac{\omega xz}{l}, \quad w = -Cxy, \quad (144)$$



где  $C$  обозначает положительную постоянную. Это значение  $w$  выражает найденное выше свойство, что  $u$  отрицательно в первом и третьем квадрантах и положительно во втором и четвертом. Таким образом действительно удовлетворяются как условия (120) для внутренней части цилиндра, так и (121) для боковой поверхности, — первые тождественно, а вторые если положить:

$$C = \frac{\omega}{l} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (145)$$

Итак, мы имеем также полное решение задачи о кручении эллиптического цилиндра. Выражение (142) для внешнего вращающего момента при круговом цилиндре обобщается, согласно (121), следующим образом:

$$N = \frac{\pi \mu \omega}{l} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (146)$$

### ГЛАВА ТРЕТЬЯ

## КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

§ 33. В основу излагаемой нами сейчас второй части этой книги мы положили общее допущение, что движение постоянно связано с бесконечно малыми деформациями. Такое движение не может, очевидно, быть односторонним, а должно попеременно совершаться в различных направлениях, т. е. должно происходить „колебание“ тела, при котором смещения и вместе с ними деформации постоянно изменяют свой знак. Таким образом мы имеем здесь дело с колебательными явлениями в упругих твердых телах, которые мы будем считать для простоты изотропными. Основные законы такого движения установлены уже в первой главе. Они формулированы в уравнениях движения (83), которые мы можем написать следующим образом, опустив силы тяготения:

$$\left. \begin{array}{l} k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{array} \right\} \quad (147)$$

далее, в поверхностных условиях (74) и, наконец, в соотношениях (119) между тензором давления и тензором деформации в изотропном веществе.

Наиболее интересные случаи колебательных явлений подобного рода относятся к таким телам, которые имеют размеры не одинакового порядка величины по всем трем измерениям пространства, а простираются преимущественно по двум или по одному измерению пространства. Это дает, понятно, значительное упрощение законов движения, так как уменьшается число независимых пространственных координат. Зато, с другой стороны, следует, имея в виду наиболее важные в практике колебательные движения, ввести некоторое обобщение в уравнения, выведенные выше. Прежде, в § 22, мы отсчитывали компоненты смещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и вместе с ними компоненты деформации от того состояния тела, в котором все внешние силы давления равны нулю. Тогда компоненты давления представляют собою однородные функции от компонентов деформации, и в недеформированном состоянии все компоненты давления равны нулю. Но в природе особый интерес имеют часто именно такие колебания, в которых это ограничение не имеет места. Если мы возьмем, например, колебания скрипичной струны, то вполне естественно отсчитывать составляющие деформации от того положения струны, в котором она находится в состоянии устойчивого равновесия. Это — недеформированное состояние. Однако в нем составляющие давления вовсе не равны нулю, а в струне существует определенное и даже довольно сильное натяжение. Это натяжение представляет собою настолько существенную причину, определяющую характер колебаний, что даже влияние постоянных упругости  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , собственных материалу струны, практически отступает перед ним на задний план.

Так, например, струна из кишки вовсе не колебалась бы, если бы не была натянута. Поэтому здесь можно в известном смысле говорить об искусственной вынужденной упругости, которая зависит не от материала, а от внешних сил. Чтобы должным образом принять в расчет эти обстоятельства, мы введем следующее обобщение в соотношения (119) между компонентами давления и компонентами деформации: мы будем, как и ранее, считать компоненты давления за линейные функции от компонентов деформации, но теперь это будут уже неоднородные функции, и абсолютные члены в этих функциях будут соответствовать временному состоянию устойчивого равновесия тела.

Таким путем мы введем в уравнения движения, как уже было указано в приведенном примере, наряду с постоянными материала еще одну постоянную. В зависимости от того, имеют ли преобладающее влияние постоянные первого рода или последняя постоянная, мы получим совершенно различные колебательные движения: движения с естественной упругостью и движения с искусственной упругостью. Эти различия практически настолько важны, что резко выражаются также и в словоупотреблении. Так, из тел одного измерения „стержни“ колеблются с естественной, а „струны“ — с искусственной упругостью, из тел двух измерений „пла-



стины" и "колокола" колеблются с естественной, а "мембраны" и "барабаны" — с искусственной упругостью. В акустике, поскольку речь идет о твердых телах, наиболее важны колебания с искусственной упругостью. Поэтому мы займемся здесь преимущественно последними. В качестве простейшего примера рассмотрим колебания струны, которая натянута настолько сильно, что влияние упругости материала, так называемая жесткость струны, отступает на задний план по сравнению с влиянием натяжения.

§ 34. Сильно натянутая струна. Пусть струна, которая должна иметь форму цилиндра с бесконечно малым сечением, совпадает в состоянии равновесия с осью  $x$ . Тогда каждая точка струны характеризуется определенным значением  $x$ , и движение струны вполне известно, если компоненты смещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  определены как функции от  $x$  и  $t$ . Для решения этой задачи мы прежде всего введем необходимое, согласно предыдущему параграфу, обобщение соотношений (119). Состояние равновесия струны одинаково с рассмотренным в § 30 равновесием односторонне натянутого цилиндра, поэтому для него действительны уравнения (128) и (130), где  $F$  обозначает натягивающую силу,  $q$  — площадь поперечного сечения. Следовательно, эти уравнения дают значения компонентов давления для недеформированного состояния струны. Отсюда однозначно следует искомое обобщение уравнений (119) для нашего случая:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{F}{q} - \lambda\sigma - 2\mu x_x, & Y_x &= -\mu y_x, \\ Y_y &= -\lambda\sigma - 2\mu y_y, & Z_x &= -\mu z_x, \\ Z_z &= -\lambda\sigma - 2\mu z_z, & X_y &= -\mu x_y. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Предположение, что струна "сильно" натянута, выражает собою условие, что первый член в выражении для  $X_x$ , зависящий от  $F$ , велик по сравнению с остальными членами. С другой стороны, нельзя принимать  $F$  бесконечно большим: так как  $\sigma$  и  $x_x$  бесконечно малы, то  $X_x$ , и вместе с тем также  $\frac{F}{q}$ , малы по сравне-

нию с величинами  $\lambda$  и  $\mu$ . Таким образом порядок величины натяжения  $F$  заключен в определенных пределах. Но если вспомнить, что для металлов, например, коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$ , согласно (136а), имеют порядок величины  $10^{12} \left[ \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \right]$ , что соответствует давлению в 10 000 кг на 1 мм<sup>2</sup>, то мы увидим все же, что для величины натяжения остаются еще практически довольно широкие границы.

Теперь установим пограничные условия для боковой поверхности цилиндра струны. Так как вся струна, кроме двух концов, которые мы считаем прочно зажатými, должна свободно коле-

баться, то на боковую поверхность не действуют внешние силы, и мы имеем поэтому, согласно (74):

$$X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z) = 0, \dots \quad (149)$$

Нормаль  $\nu$  к боковой поверхности может принимать любое направление, но связана с условием, что должна всегда и повсюду составлять прямой угол с той пространственной кривой, которую образует собою струна в какой-либо момент. Эта пространственная кривая образуется точками с координатами  $x + u$ ,  $v$ ,  $w$ , поэтому отношения косинусов направления ее (угловые коэффициенты) суть:

$$d(x + u) : dv : dw = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) : \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial x},$$

и поэтому имеет место условие:

$$\left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos(\nu x) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\nu y) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(\nu z) = 0.$$

Так как деформации бесконечно малы, то, как легко видеть,  $\cos(\nu x)$  бесконечно мал по сравнению с двумя другими косинусами, и можно написать проще:

$$\cos(\nu x) = -\frac{\partial v}{\partial x} \cos(\nu y) - \frac{\partial w}{\partial x} \cos(\nu z).$$

Подставим эти значения в три уравнения (149) и примем во внимание, что отношение  $\cos(\nu y) : \cos(\nu z)$  может принимать любое значение. Пренебрегая малыми членами второго порядка, получим соотношения:

$$\left. \begin{aligned} X_y &= X_x \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{F}{q} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ X_z &= X_x \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{F}{q} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ Y_y &= 0, \quad Z_z = 0, \quad Z_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

Остается еще точно выразить шестой компонент давления с точностью до членов второго порядка. Это можно сделать при помощи уравнений (148), которые дают сперва в связи с (151):

$$y_y = z_z = -\frac{\lambda}{2\mu} \sigma;$$

отсюда, на основании (118):

$$\sigma = -\frac{\mu}{\lambda + \mu} x_x,$$

и, наконец, согласно первому из уравнений (148) и (135):

$$X_x = -\frac{F}{q} - E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (152)$$



Теперь мы получим искомые уравнения движения из уравнений (147), подставив значения компонентов давления (150), (151), (152):

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (153a)$$

$$k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{F}{q} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (153b)$$

$$k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{F}{q} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (153c)$$

Таким образом каждый из компонентов смещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  следует своему особому закону, независимо от двух других, причем вид этих законов одинаков для всех трех компонентов. Однако величина характеристической постоянной, входящей в уравнения, не всюду одинакова: для  $u$  имеется другая величина, чем для  $v$  и  $w$ . Это зависит, конечно, от того, что направление  $u$  совпадает с направлением струны, а направления  $v$  и  $w$  перпендикулярны к ней. Поэтому колебания  $u$  называются „продольными колебаниями“ струны, а колебания  $v$  и  $w$ , — наоборот, поперечными колебаниями. Как мы видим, продольные колебания зависят только от упругости вещества струны, и в частности от линейного модуля упругости и не зависят от натяжения, а для поперечных колебаний действительно обратное.

Для дальнейшего исследования законов колебания достаточно рассмотреть один только компонент. Так как в акустике поперечные колебания играют значительно большую роль, то мы ограничимся в дальнейших рассуждениях уравнением (153b), которое представляет плоские поперечные колебания в плоскости  $xu$ . Введя постоянную

$$a^2 = \frac{F}{kq}, \quad (154)$$

можно написать это уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (155)$$

Интегрирование последнего уравнения дает  $v$  в виде функции двух независимых переменных  $x$  и  $t$ . Если положить, что  $x$  постоянно, а  $t$  изменяется, то мы получим движение определенной точки струны. Если же положить, что  $t$  постоянно, а  $x$  изменяется, то мы получим форму кривой, которую образует струна

в определенный момент. Соответственным образом  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$  представляет ускорение какой-нибудь точки струны,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  — кривизну кривой струны, а уравнение (155) выражает такое правило: ускорение какой-либо точки струны, а следовательно, и сила, действующая на нее, пропорциональны кривизне кривой, которую образует струна, в данной точке.

§ 35. Интегрирование уравнения движения. Чтобы найти общий интеграл дифференциального уравнения с частными производными (155), введем вместо независимых переменных  $x$  и  $t$  новые независимые переменные:

$$\xi = x + at; \quad \eta = x - at. \quad (156)$$

Тогда преобразование производных выражается следующими соотношениями:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)_\eta \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_\xi \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_x = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot a - \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot a.$$

Отсюда, повторив то же действие, получим:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_x = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2},$$

и совершенно аналогичным образом:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_t = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Если в уравнении (155) заменить производные по независимым переменным  $x$  и  $t$  производными по независимым переменным  $\xi$  и  $\eta$ , то получится:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Это уравнение выражает, что  $\frac{\partial v}{\partial \xi}$  зависит только от  $\xi$ , и  $\frac{\partial v}{\partial \eta}$  зависит только от  $\eta$ . Поэтому

$$v = f(\xi) + g(\eta),$$

где  $f$  и  $g$  суть какие-то две функции, каждая из которых зависит только от одной переменной.

На основании (156), имеем:

$$v = f(x + at) + g(x - at). \quad (157)$$

Это и есть общий интеграл дифференциального уравнения (155). Действительно, непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что уравнение удовлетворяется выражением (157), каковы бы ни были функции  $f$  и  $g$ .



При этом нужно иметь в виду следующее обстоятельство.

Ограничение, которое налагается равенством (157) на значения  $v$  и благодаря которому  $v$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (155), основано на том, что независимые переменные  $x$  и  $t$  входят в функцию  $f$  только в соединении  $x + at$ , а в функцию  $g$  только в соединении  $x - at$ . Эти выражения называются „аргументами“ функций  $f$  и  $g$ . Каждая из этих двух функций зависит только от своего особого аргумента. Поэтому, если дифференцировать функцию по  $x$  или по  $t$ , то можно сперва дифференцировать по аргументу, а потом дифференцировать аргумент по соответствующей переменной. Таким образом из (157) получается:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f' + g', \quad \frac{\partial v}{\partial t} = f'a - g'a, \quad (157a)$$

где  $f'$  и  $g'$  обозначают производные  $f$  и  $g$  по их аргументам. Продолжение операции дает:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f'' + g'', \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f'' \cdot a^2 + g'' \cdot a^2.$$

Эти значения действительно удовлетворяют уравнению (155) в самом общем виде.

Частный вид функции  $f$  или  $g$  никак нельзя получить из дифференциального уравнения. Его можно найти только по начальным и пограничным условиям колеблющейся струны. Однако прежде чем перейти к рассмотрению этих условий, исследуем в общем виде тот особенный физический характер, который накладывается на движение струны выражением (157) для смещения  $v$ .

Возьмем сначала частный случай, когда одна из двух функций, например  $g$ , обращается в нуль, так, что

$$v = f(x + at). \quad (158)$$

Тогда мы имеем движение струны, для которого характерно то обстоятельство, что смещение  $v$  не изменяется при таком изменении  $x$  и  $t$ , когда  $x + at$  остается постоянным, т. е. когда

$$dx + at = 0,$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -a.$$

Но последнее уравнение обозначает движение со скоростью  $a$  в направлении отрицательной оси. Отсюда следует, что если передвигаться глазом или указателем вдоль струны в направлении отрицательной оси  $x$  со скоростью  $a$ , то та точка струны, на которую попадают при этом, всегда имеет в данный момент

совершенно определенное смещение  $v$ . Это можно выразить еще таким образом: каждое смещение  $v$  распространяется неизменным со скоростью  $a$  в направлении отрицательной оси  $x$ . Поэтому форма кривой, которую образует струна в каждый момент, остается одинаковой, кривая только постоянно смещается, как целое, указанным образом. Такое движение называется „волновым движением“, скорость смещения называется „скоростью распространения“ волны. Скорость распространения нужно отличать по существу от корпускулярной скорости точек струны, которая не имеет с ней ничего общего (ср. 7, § 1). Вид волны определяется функцией  $f$ , он может быть произвольным, и в частности не обязательно должен быть периодическим. Можно получить простой и очень наглядный образ движения, если начертить на полоске бумаги функцию  $f$  в виде кривой с абсциссой  $\xi$  и ординатой  $f$ , а затем передвигать эту полоску вдоль струны со скоростью  $-a$ . Тогда чертеж дает непосредственное изображение струны в каждый момент. При  $t = 0$  аргумент  $\xi = x + at$  непосредственно совпадает с абсциссой  $x$  точки струны.

Соответственным образом частное решение

$$v = g(x - at) \quad (159)$$

обозначает также волновое движение с той же скоростью  $a$ , но распространяющееся в сторону положительной оси  $x$ . Поэтому общий случай колебания (157) представляет собою наложение друг на друга двух волн, распространяющихся с одинаковой скоростью  $a$  в противоположных направлениях. Если начертить каждую из двух волн в виде кривой на полоске бумаги и передвигать эти полоски вдоль струны со скоростями  $\pm a$ , то алгебраическая сумма двух ординат дает смещение  $v$  соответствующей точки струны в данный момент.

Теперь исследуем, как определяется вид обеих волн  $f$  и  $g$  на основании начальных и конечных условий колебательного процесса. Для этого рассмотрим сперва идеальный случай бесконечно длинной струны.

**§ 36.** Струна, неограниченная с обеих сторон. Если струна простирается от  $x = -\infty$  до  $x = +\infty$ , то для полного определения движения достаточно рассмотреть только начальное состояние и можно обойтись без пограничных условий.

Положим, что даны смещения и скорости всех точек струны в момент  $t = 0$ , т. е.

$$v_0 = F(x) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = \Phi(x), \quad (160)$$

где  $F$  и  $\Phi$  обозначают две функции, известные при всех поло-



жительных и отрицательных значениях  $x$ . Подставив в (157) и (157а) получим:

$$f(x) + g(x) = F(x),$$

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{a} \Phi(x).$$

Проинтегрировав последнее уравнение, имеем:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_c^x \Phi(x) dx.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} F(x) + \frac{1}{2a} \int_c^x \Phi(x) dx, \\ g(x) &= \frac{1}{2} F(x) - \frac{1}{2a} \int_c^x \Phi(x) dx. \end{aligned} \right\} (161)$$

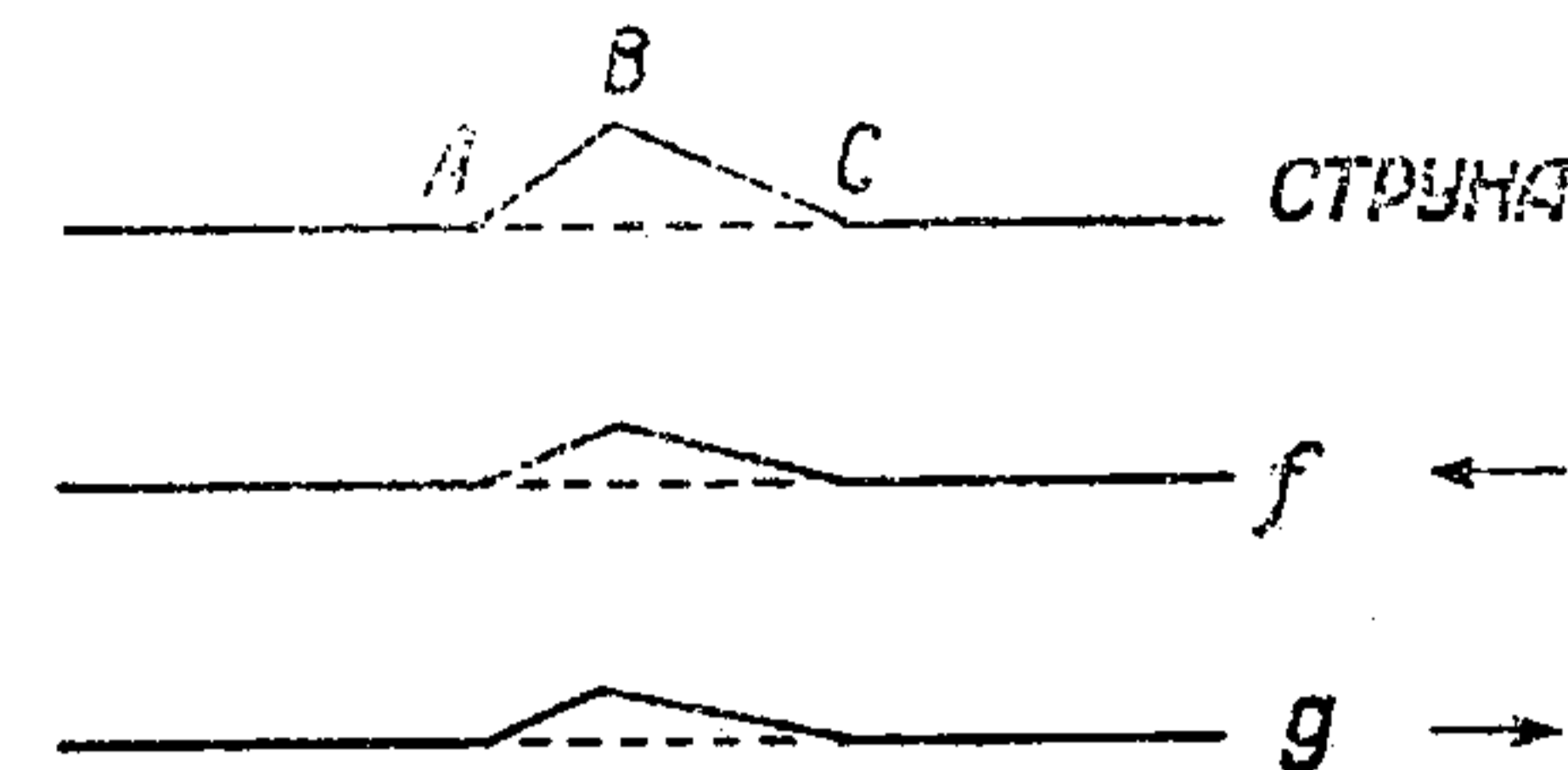
Эти выражения для  $f$  и  $g$  полностью определяют вид обеих волн и значит все движение. Нужно только подставить в функцию  $f$  вместо  $x$  аргумент  $x + at$  и в функцию  $g$  аргумент  $x - at$ . Неопределенность, заключающаяся в произвольном выборе постоянной интегрирования  $c$ , только кажущаяся, так как в выражение (157) для  $v$  функции  $f$  и  $g$  входят только в виде суммы, при изменении  $c$  обе функции изменяются на одинаковую величину в противоположных направлениях. Поэтому можно, не нарушая общности, положить  $c = 0$ .

Рассмотрим в виде примеров несколько частных случаев. Сначала рассмотрим такой случай, когда все начальные скорости равны нулю, как бывает, если дернуть струну, т. е. вывести ее из состояния равновесия и затем отпустить. В этом случае  $\Phi(x) = 0$ , поэтому, согласно (161),

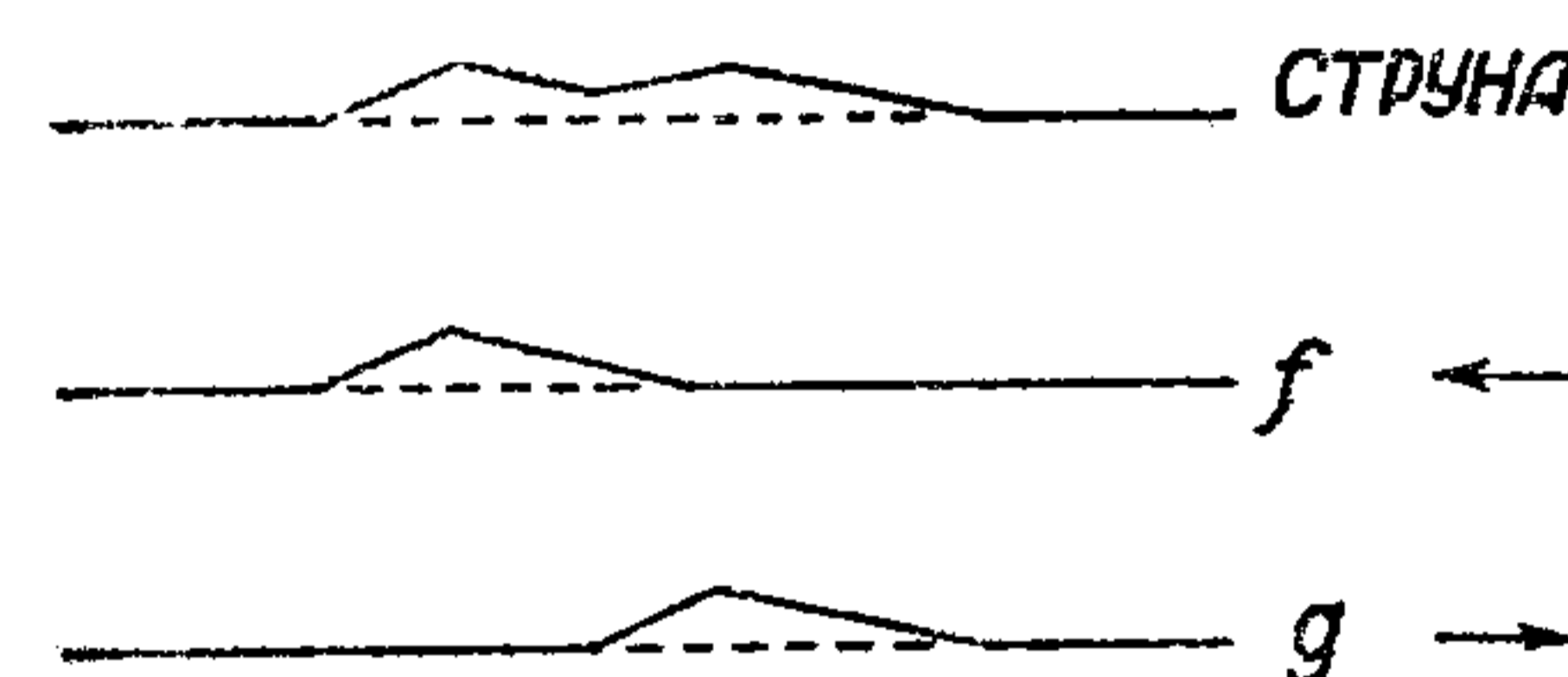
$$f(x) = g(x) = \frac{1}{2} F(x). \quad (162)$$

Следовательно, в этом случае обе волны равны между собой, и каждая из волновых функций равна половине величины начального смещения. Отсюда непосредственно получается весь процесс движения. На черт. 5 верхняя линия изображает вид струны в начальном состоянии. Нарушение равновесия ограничено здесь определенным участком струны. Оно может быть вызвано тем, что

струна отдернута стерженьком в точке  $B$  и в то же время удерживается в точках  $A$  и  $C$  по обе стороны  $B$ . Если теперь отпустить струну без начальной скорости, то колебание ее совершается описанным выше образом: начерченные внизу изображения равных друг другу волновых функций  $f$  и  $g$  движутся в направлении стрелок вдоль струны со скоростью  $a$ , причем ординаты, лежащие друг над другом, в каждый момент складываются. Таким образом первоначальное выпучивание струны разбивается на два одинаковых вдвое меньших выпучивания, которые раздвигаются в обе стороны со скоростями  $\pm a$ , между тем как посредине снова наступает покой. Это изображено на чертежах 5а и 5б: верхняя линия дает изображение струны по истечении некоторого времени, а две нижние линии показывают способ построения изображения. Периодичности в этом явлении не имеется вовсе. Так, например, точка  $B$ , которая больше всего выведена из состояния равновесия, непосредственно возвращается к нему с постоянной скоростью и затем остается неподвижной навсегда.



Черт. 5.



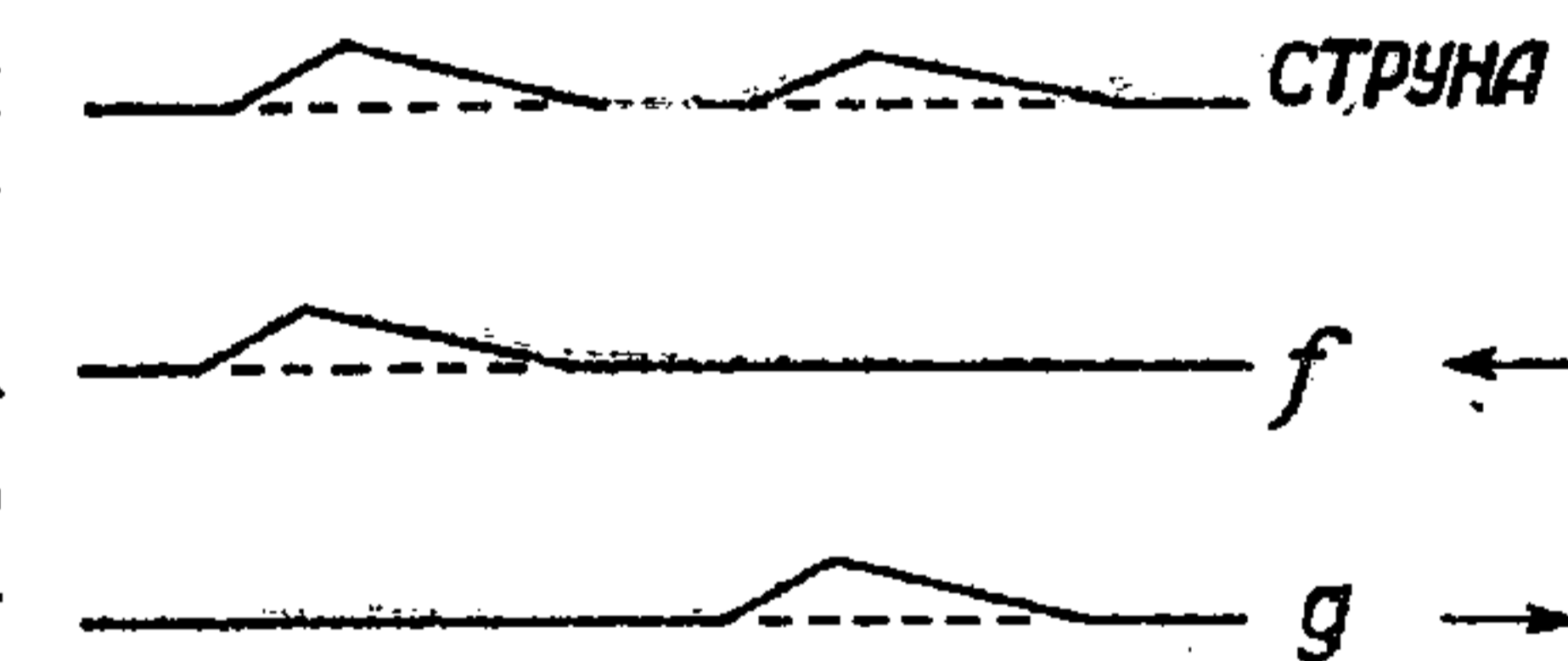
Черт. 5а

Аналогичным образом исследуется противоположный случай, когда все начальные смещения равны нулю, как бывает, если ударить молотком длинную фортепианную струну настолько быстро, чтобы удар был закончен раньше, чем подвергнувшиеся удару точки струны успели бы заметно оставить положение равновесия. Тогда, согласно (160),

$$F(x) = 0$$

согласно (161),

$$f(x) = -g(x) = \frac{1}{2a} \int_c^x \Phi(x) dx. \quad (163)$$



Черт. 5б.



Таким образом и в этом случае обе волновые функции равны друг другу, но противоположного знака. Дальнейшее исследование, производимое совершенно так же, как и в предыдущем случае, показывает, что от места удара удаляются в обе стороны две противоположные равные волны, между тем как посредине струна снова возвращается в неподвижное состояние.

Но не следует думать, что при всяком нарушении равновесия струны идут две волны в обе стороны. Чтобы убедиться в этом, поставим такой вопрос: какое условие должно быть выполнено в начальном состоянии, чтобы от места нарушения распространялась одна волна, например волна  $f$ . Ответ на этот вопрос дают уравнения (161), если положить в них  $g = 0$ , именно:

$$F(x) = \frac{1}{a} \int_c^x \Phi(x) dx,$$

или

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{a} \Phi(x),$$

или, на основании (160):

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_0, \quad (164)$$

т. е. в начальном состоянии скорость какой-нибудь точки струны равна тангенсу угла наклона струны к оси  $x$ , умноженному на  $a$ .

Если выполнено это соотношение между скоростью и смещением каждой точки струны, то все возмущение передвигается в виде одной неизменяемой волны в отрицательном направлении  $x$ .

В этом можно убедиться также при помощи простого кинематического рассуждения, так как скорость каждой точки кривой непосредственно определяется видом кривой  $f$  и скоростью распространения  $a$ .

§ 37. Струна, ограниченная с обеих сторон. Рассмотрим теперь колебания струны конечной длины  $l$ . Пусть струна закреплена в точках  $x = 0$  и  $x = l$ . Для нее, конечно, также действительны уравнения (161), но эти уравнения имеют смысл только для тех значений  $x$ , которые находятся между 0 и  $l$ , так как функции  $F(x)$  и  $\Phi(x)$ , которые представляют начальные значения смещений и скоростей для точек струны, определены только для  $0 < x < l$ . Однако для того чтобы представить движение для всех значений времени, нужно, на основании (157), знать значение  $f$  и  $g$  также и для других значений их аргументов; например, при больших положительных значениях  $t$  нужны значения  $f$  при больших положительных значениях аргумента, а значения  $g$  — при больших отрицательных значениях аргумента. Поэтому мы должны еще

дополнить то определение  $f$  и  $g$ , которое дается уравнениями (161). Для этого служит условие  $v = 0$  в пограничных точках  $x = 0$  и  $x = l$ , или, согласно (157):

$$0 = f(at) + g(-at)$$

и

$$0 = f(l + at) + g(l - at).$$

Эти условия действительны при любых значениях  $t$ . Если написать в них  $x$  вместо  $at$ , то получится:

$$f(x) + g(-x) = 0, \quad (165)$$

$$f(l + x) + g(l - x) = 0. \quad (166)$$

Эти два уравнения, имеющие место при всех значениях  $x$ , дают дополнительные условия, необходимые для вычисления волновых функций  $f$  и  $g$ . Действительно, если подставить в (166)  $(l + x)$  вместо  $x$ , то получится:

$$f(2l + x) + g(-x) = 0.$$

Из сравнения с (165) имеем:

$$\begin{aligned} f(2l + x) = f(x). \\ \text{Подобным образом} \quad g(2l + x) = g(x). \end{aligned} \quad (167)$$

Это значит, что волновые функции  $f$  и  $g$  обе периодичны относительно  $x$  с периодом  $2l$ . Отсюда непосредственно следует, на основании (157), что движение струны также периодически относительно времени  $t$  с периодом  $\frac{2l}{a}$ .

Теперь установим, как на самом деле определить значения волновых функций  $f$  и  $g$  при всех положительных и отрицательных значениях аргументов, на основании начальных условий (161) и предельных условий (165) и (167).

Прежде всего,  $f$  и  $g$  определены для  $0 < x < l$  на основании (161). Далее, уравнение (165) в виде

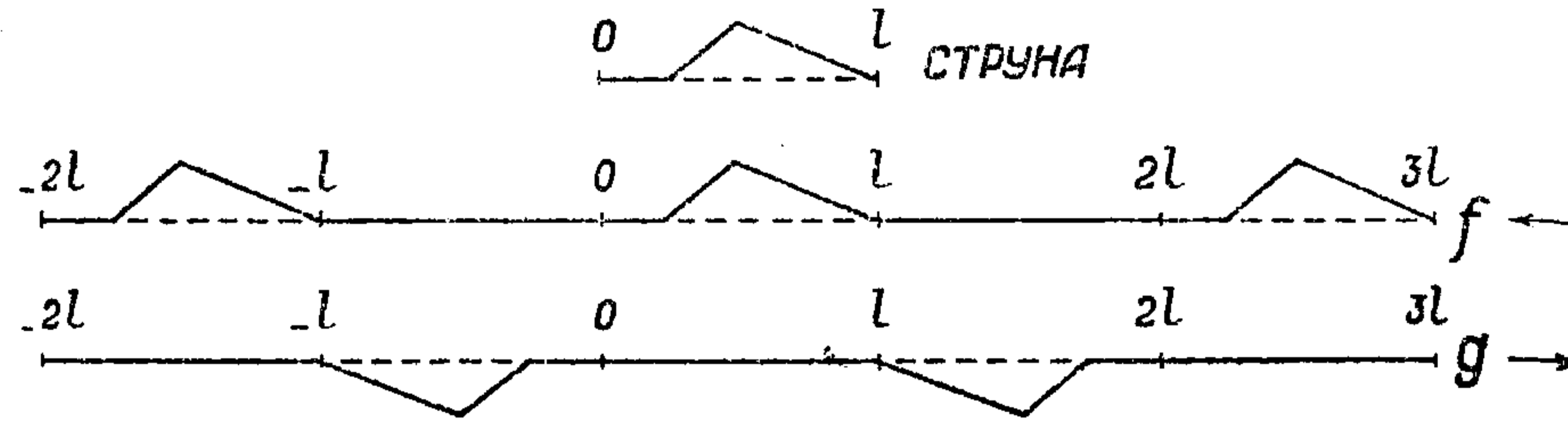
$$\begin{aligned} f(x) = -g(-x), \\ g(x) = -f(-x) \end{aligned} \quad (168)$$

дает также значения  $f(x)$  и  $g(x)$  при  $-l < x < 0$ , так как правые части двух уравнений известны для данной области значений  $x$ . Но тогда  $f(x)$  и  $g(x)$  даны в пределах целого периода, от  $x = -l$  до  $x = +l$ , и таким образом полностью определены по (167).

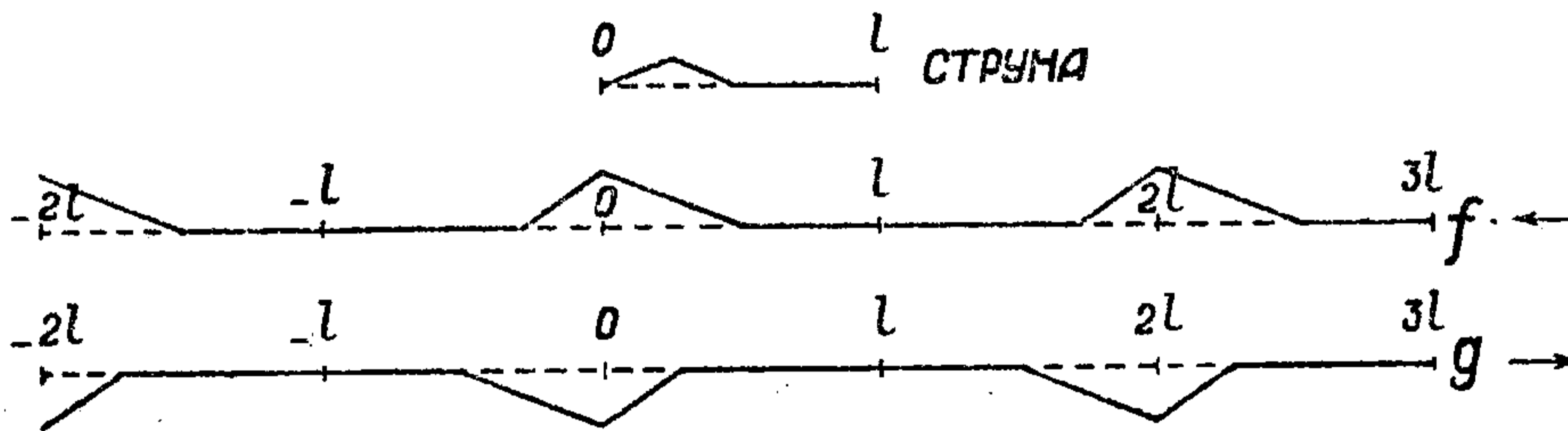
Этот метод вычисления проведем на одном частном примере. Для этого выберем, ради простоты, колебания струны, на которой в начале есть только одна волна, например волна  $f$ . Значит, в начальном состоянии действительно соотношение (164). Пусть первоначальное состояние струны изображено на черт. 5. Тогда волновая функция  $f(x)$  при  $0 < x < l$  будет представлена тем же



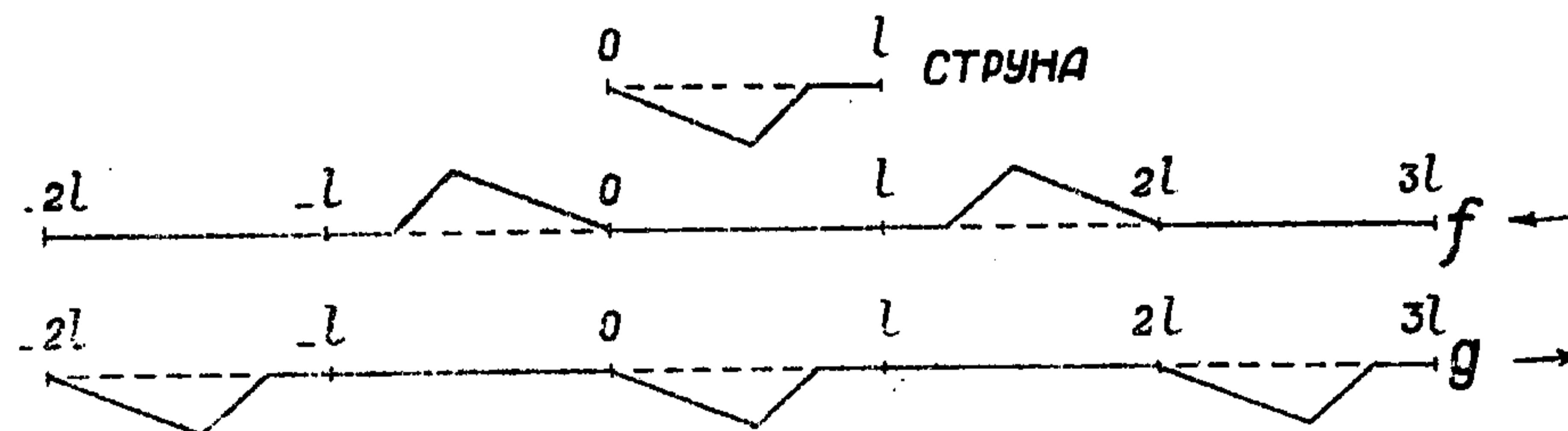
изображением, причем  $g(x)$  равно нулю в этом промежутке. Напротив, при  $-l < x < 0$ , согласно (168),  $f(x)$  повсюду 0, между тем как  $g(x)$  имеет нарисованную на чертеже форму, которую можно назвать „противоположным зеркальным изображением“  $f(x)$  относительно точки  $x = 0$ . Эти формы повторяются периодически, как показано на черт. 6.



Черт. 6.



Черт. 6 а.



Черт. 6б.

Начертив волновые функции  $f$  и  $g$ , мы можем уже определить известным способом весь процесс движения. На черт. 6а и 6б в верхней линии представлено результирующее изображение струны по истечении некоторого времени, а на двух нижних линиях представлен способ, по которому это изображение составлено из  $f$  и  $g$ .

Отсюда вытекает, что волна  $f$ , попадая на закрепленную точку струны  $x = 0$ , превращается в волну  $g$ , движущуюся в противо-

положном направлении, т. е. „отражается“ и при этом меняет знак. Затем волна  $g$  пробегает всю длину струны и отражается на другом конце,  $x = l$ , в виде волны  $f$ .

По истечении периода времени  $\frac{2l}{a}$  снова достигается первоначальное состояние, и все начинается снова.

Таким же образом решается общий случай, когда вначале обе волны,  $f$  и  $g$ , отличны от нуля.

§ 38. Аналитическое изображение периодических функций. До сих пор мы изображали периодические волновые функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в различных интервалах  $x$  при помощи различных уравнений. Но часто бывает важно обозначить волновую функцию  $f(x)$  на всем ее протяжении, от  $x = -\infty$  до  $x = +\infty$  при помощи одного только аналитического выражения.

Чтобы достигнуть этого, отыщем сперва наиболее общее аналитическое выражение функции  $f(x)$  с периодом  $x = 2l$ , или, другими словами, общее решение функционального уравнения (167). Возьмем частное решение

$$f(x) = a^{ax}, \quad (169)$$

которое, очевидно, удовлетворяет уравнению, если постоянная  $a$  удовлетворяет условию:

$$e^{2la} = 1.$$

Отсюда следует:

$$2la = 2\pi i,$$

где  $n$  обозначает произвольное положительное или отрицательное целое число. Если подставить получающееся отсюда значение  $a$  в (169) и отделить вещественную от мнимой часть  $f(x)$ , то мы получим два частных решения:

$$\cos \frac{n\pi x}{l} \quad \text{и} \quad \sin \frac{n\pi x}{l},$$

которые можно еще обобщить, если умножить их на произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$ . Если составить такие решения для всевозможных значений  $n$ , причем для каждого  $n$  постоянные  $A_n$  и  $B_n$  могут иметь различные значения, и сложить их между собою, то мы также получим решение функционального уравнения (167). Это решение — общее (на доказательстве последнего утверждения мы не будем здесь останавливаться). Полученное решение можно написать в таком виде:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (170)$$



Здесь члены с отрицательными  $n$  опущены. Нетрудно видеть, что это не нарушает общности, так как каждый член с отрицательным  $n$  можно соединить в один с членом, содержащим положительное  $n$ . Поэтому каждый член в обеих суммах представляет в сущности два члена. Особое положение занимает член с  $n = 0$ , который встречается только один раз и поэтому обычно содержит численный множитель  $1/2$ . Введение последнего оправдывается также, как мы покажем ниже, тем, что постоянная  $A_0$  получает в этом случае простое значение.

Ряд (170), который называется по имени его автора „рядом Фурье“, действительно имеет период  $2l$  относительно  $x$ . В этом можно, конечно, непосредственно убедиться, если подставить  $x + 2l$  вместо  $x$ , так как все углы увеличиваются на целые кратные  $2\pi$ . Но посредством ряда (170) можно представить любую функцию с периодом  $2l$  относительно  $x$ . Поэтому возникает вопрос, как вычислить коэффициенты  $A$  и  $B$ , если каким-либо образом задано течение функции внутри одного периода, например от  $x=0$  до  $x=2l$ .

Чтобы ответить на этот вопрос, положим, что нам совершенно произвольно даны значения  $f(x)$  для  $0 < x < 2l$ . Вычислим сперва интеграл:

$$\int_0^{2l} f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (171)$$

при каком-либо положительном отличном от нуля целом числе  $n$ . Допустим, что этот интеграл имеет известное вполне определенное значение.

С другой стороны, интеграл (171), если заменить в нем  $f(x)$  рядом (170), представится в виде суммы интегралов. Вычислим каждый из них в отдельности. Первый интеграл, умноженный на  $A_0$ , обратится в нуль, так как

$$\frac{A_0}{2} \int_0^{2l} \frac{\cos n\pi x}{l} dx = 0. \quad (172)$$

В следующие интегралы входят по порядку числа  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ , которые вообще отличны от числа  $n$  в (171). Обозначим их поэтому через  $n'$ . Если  $n'$  не равно  $n$ , то соответствующие два отдельных интеграла выражаются в виде:

$$A_{n'} \int_0^{2l} \cos \frac{n'\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + B_{n'} \int_0^{2l} \sin \frac{n'\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0. \quad (173)$$

Только для двух членов, в которых  $n' = n$ , два соответствующих интеграла дают:

$$A_n \int_0^{2l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx + B_n \int_0^{2l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = A_n l. \quad (174)$$

Поэтому вся сумма интегралов, на которые распадается (171), сводится к одному выражению (174), и мы имеем соотношение:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \\ \text{Совершенно так же} \\ B_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

Таким образом коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  полностью определены. Наконец, чтобы получить  $A_0$ , вычислим из (170):

$$\int_0^{2l} f(x) dx = \frac{A_0}{2} \cdot 2l = A_0 l.$$

Отсюда мы видим, что уравнения (175) применимы также для случая  $n = 0$ . В этом состоит преимущество обозначения постоянного члена через  $\frac{A_0}{2}$ . Значение  $B_0$  безразлично, так как

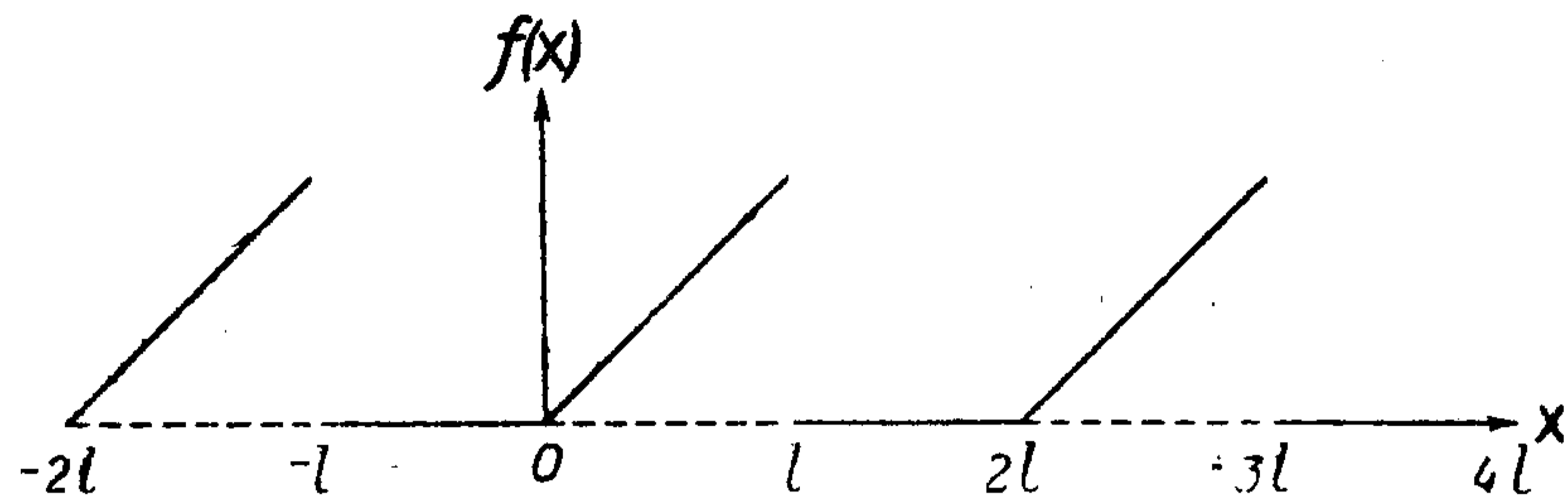
$\sin \frac{n\pi x}{l}$  обращается в нуль при  $n = 0$ .

Из способа вычисления постоянных  $A_n$  и  $B_n$  видно, что это определение однозначное, т. е. существует только один ряд Фурье с периодом  $2l$ , который принимает определенные заданные значения внутри периода. Действительно, если бы существовал еще другой ряд с коэффициентами  $A_n'$  и  $B_n'$ , то эти коэффициенты также обязательно должны были бы удовлетворять уравнениям (175), а так как выражения в правых частях уравнений имеют заданные значения, то эти коэффициенты должны совпадать с коэффициентами  $A_n$  и  $B_n$ .

Чтобы еще лучше иллюстрировать значение ряда Фурье, произведем вычисление для частного примера. Допустим, что при  $0 < x < l$ ,  $f(x) = x$ , а при  $l < x < 2l$ ,  $f(x) = 0$ . Ход этой функции



изображает кривая на черт. 7. В интервалах от  $-l$  до  $0$ , от  $l$  до  $2l$  и т. д. она совпадает с осью абсцисс, а в промежуточных интервалах представляет отрезок прямой, равноделящей координатный угол. Поэтому функция  $f(x)$  прерывна при  $x$  равном  $-l, l, 3l, \dots$ , изменяясь скачком от  $l$  до  $0$ . Совершенно такие же свойства имеет ряд Фурье, который получается из (175) и который мы сейчас составим. Оба входящие в него интеграла



Черт. 7.

разлагаются каждый на два отдельных интеграла, из которых первый берется от  $0$  до  $l$ , а второй от  $l$  до  $2l$ . В первом интеграле  $f(x) = x$ , а во втором  $f(x) = 0$ . Поэтому

$$A_n = \frac{1}{l} \int_0^l x \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx + 0 = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \pi^2} \cdot l,$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_0^l x \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx + 0 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \cdot l,$$

а при  $n = 0$  получается:

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l x dx = \frac{l}{2}.$$

При этих значениях коэффициентов ряд (170) примет вид:

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{2l}{9\pi^2} \cos \frac{3\pi x}{l} - \frac{2l}{25\pi^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \\ \dots + \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{l} - \dots, \quad (176)$$

который охватывает ход кривой на черт. 7 в единственном аналитическом выражении.

Сделаем еще несколько проверок. При  $x = 0$ ,  $f(x) = 0$ , поэтому, согласно (176),

$$0 = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} + \frac{2l}{9\pi^2} - \frac{2l}{25\pi^2} + \dots$$

или

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \dots \quad (177)$$

При  $x = \frac{l}{2}$ ,  $f(x) = x = \frac{l}{2}$ . Поэтому, согласно (176),

$$\frac{l}{2} = \frac{l}{4} + \frac{l}{\pi} - \frac{l}{3\pi} + \frac{l}{5\pi} - \frac{l}{7\pi} + \dots$$

или

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (178)$$

При  $x = -\frac{l}{2}$ ,  $f(x) = 0$ . Поэтому, согласно (176),

$$0 = \frac{l}{4} - \frac{l}{\pi} + \frac{l}{3\pi} - \frac{l}{5\pi} + \frac{l}{7\pi} - \dots,$$

что также приводит к последнему ряду.

Интересно свойство ряда Фурье при разрыве непрерывности, например при  $x = l$ . В то время как значение ряда равно  $x$  или  $0$ , смотря по тому, приближается ли  $x$  к значению  $x = l$ , от меньших или от больших значений, при самом  $x = l$ ,  $f(x)$  не равно ни  $l$ , ни  $0$ , но, как дает подстановка в (176),

$$f(l) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2} + \frac{2l}{9\pi^2} + \frac{2l}{25\pi^2} + \dots,$$

или согласно (177),

$$f(l) = \frac{l}{2},$$

т. е. равно среднему арифметическому из обоих значений. Это положение можно обобщить, но здесь нам незачем на нем останавливаться.

§ 39. Если в частном случае  $f(x)$  „четная“ функция, т. е. если  $f(-x) = f(x)$ , то из (175) следует, что интегрирование от  $0$  до  $2l$



можно просто заменить интегрированием от  $-l$  до  $+l$ :

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

и для первого из этих интегралов, введя переменную  $x' = -x$ :

$$-\frac{1}{l} \int_{-l}^0 f(-x') \cos \frac{n\pi x'}{l} dx' = \frac{1}{l} \int_0^l f(x') \cos \frac{n\pi x'}{l} dx'.$$

Оба интеграла равны друг другу, и

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (179)$$

Соответствующим образом получается  $B_n = 0$ , так как оба отдельных интеграла равны и противоположного знака.

Поэтому разложение четной функции в ряд Фурье с периодом  $2l$  имеет более простой вид:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (180)$$

где коэффициенты  $A$  определяются однозначно по (179) на основании хода функции внутри половины периода, от 0 до  $l$ . Действительно, каждый член ряда, а также постоянная  $A_0$ , есть четная функция  $x$ .

Если же  $f(x)$  „нечетная“ функция, т. е. если  $f(-x) = -f(x)$ , то таким же образом получается:  $A_n = 0$ , и

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (181)$$

так что ряд Фурье принимает вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (182)$$

Здесь коэффициенты ряда также однозначно определяются по (181) на основании хода функции внутри половины периода.

§ 40. Возвратимся к задаче о колебании струны длиной  $l$ . Воспользуемся методом, разработанным в последнем параграфе, для того чтобы привести решение задачи, т. е. выражение для смещения  $v$  как функции  $x$  и  $t$ , к одному виду, пригодному для всех  $x$  и  $t$ . Согласно (157),

$$v = f(x + at) + g(x - at).$$

Здесь можно в общем случае свести функцию  $g$  к функции  $f$  при помощи пограничных условий (165), если подставить в них  $at - x$  вместо  $x$ :

$$f(at - x) + g(x - at) = 0.$$

Таким образом

$$v = f(x + at) - f(at - x).$$

Но, согласно (167),  $f(x)$  периодична с периодом  $2l$ . Поэтому для  $f(x + at)$  и  $f(at - x)$  имеют место уравнения, которые получатся, если в обе части (170) подставить один раз  $at + x$ , а другой раз  $at - x$ , или:

$$v = \frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos \frac{n\pi}{l} (at + x) + \sum B_n \sin \frac{n\pi}{l} (at + x) - \frac{A_0}{2} - \sum A_n \cos \frac{n\pi}{l} (at - x) - \sum B_n \sin \frac{n\pi}{l} (at - x). \quad (183)$$

Суммирование нужно производить всякий раз от  $n=1$  до  $n=\infty$ .

Мы получили общее выражение для поперечных колебаний струны длины  $l$ . Его можно привести к различным более простым формам, каждая из которых обладает особыми преимуществами.

Если подставить

$$A_n = C_n \cos \vartheta_n, \quad B_n = -C_n \sin \vartheta_n, \quad (184)$$

полагая, что  $C_n$  положительно, а  $\vartheta_n$  заключается между 0 и  $2\pi$ , то можно написать:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left\{ \frac{n\pi}{l} (at + x) + \vartheta_n \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left\{ \frac{n\pi}{l} (at - x) + \vartheta_n \right\}. \quad (185)$$

Таким образом наиболее общее колебание струны состоит из попарно равных противоположных чисто периодических волн,



пробегающих в обе стороны, так называемых „парциальных волн“, каждая из которых имеет период

$$\frac{2l}{n} = \lambda_n \quad (186)$$

относительно  $x$  и период

$$\frac{2l}{na} = \tau_n \quad (187)$$

относительно  $t$ . Пространственный период называется „длиной волны“, а временной период  $\tau_n$  называется „периодом колебания“ соответствующей волны. Наибольшая длина волны (при  $n=1$ ) равна  $2l$ , т. е. удвоенной длине струны, ей соответствует наибольший период колебания  $\frac{2l}{a}$ . Это колебание называется „основ-

ным колебанием“ струны. Остальные длины волн и периоды колебаний суть  $n$ -е доли соответствующих величин основного колебания.

Величина, обратная периоду колебаний:

$$\frac{1}{\tau_n} = \nu_n = \frac{na}{2l}, \quad (188)$$

обозначает число колебаний в единицу времени и поэтому называется „числом колебаний“ соответствующей волны. Длина волны, период колебаний и число колебаний связаны между собою, на основании последних трех уравнений, следующей зависимостью:

$$\frac{\lambda_n}{\tau_n} = \lambda_n \nu_n = a. \quad (189)$$

Если ввести длины волн и числа колебаний, то уравнение (185) примет вид:

$$v = \left. \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left\{ \left( \frac{t}{\tau_n} + \frac{x}{\lambda_n} \right) 2\pi + \vartheta_n \right\} - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left\{ \left( \frac{t}{\tau_n} - \frac{x}{\lambda_n} \right) 2\pi + \vartheta_n \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

Весь угол, заключенный в фигурные скобки, называется „фазой“ соответствующей волны (1, § 12), а постоянная  $\vartheta_n$  называется „фазовой постоянной“.

Выражение для  $v$  значительно упрощается, если в (183) или в (190) соединить в один член два члена с одинаковым порядковым числом  $n$ . Тогда из (183) следует:

$$v = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \sin \frac{n\pi at}{l} - B_n \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (191)$$

Этот вид уравнения колебания наиболее удобен для вычисления коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  по начальному состоянию струны. Именно, при  $t=0$ , на основании (160) и (191):

$$\left. \begin{aligned} v_0 = F(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \\ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_0 = \Phi(x) &= -\frac{2\pi a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

Таким образом задача определения  $A_n$  и  $B_n$  приводится к разложению данных функций  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  в ряды Фурье по синусам. Но, как показывают уравнения (181) и (182), это можно сделать только единственным способом, так как разлагаемые в ряд функции заданы внутри половины периода ряда, от  $x=0$  до  $x=l$ . Нужно только подставить в (182)  $F(x)$  или  $\Phi(x)$  вместо  $f(x)$ , а также  $2B_n$  или:

$$-\frac{2\pi a}{l} n A_n$$

вместо  $B_n$ . Тогда из (181) получится:

$$\left. \begin{aligned} 2B_n &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \\ -\frac{2\pi a}{l} n A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \Phi(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

и коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  определены для всех значений  $n$ .



С другой стороны, если в (185) соединить попарно по две соответствующие парциальные волны, то получится:

$$v = -2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi at}{l} + \vartheta_n\right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (194)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2\pi a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \cos\left(\frac{n\pi at}{l} + \vartheta_n\right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (195)$$

В этом виде колебание струны представляет собою совокупность парциальных колебаний, каждое из которых состоит из двух парциальных волн с одинаковым порядковым числом, движущихся в противоположных направлениях. Поэтому такие колебания называются „стоячими“ волнами в отличие от „проходящих“ волн. Рассмотрим одну из этих стоячих волн с порядковым числом  $n$ :

$$\begin{aligned} v &= -2C_n \sin\left(\frac{n\pi at}{l} + \vartheta_n\right) \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ &= -2C_n \sin(2\pi_n vt + \vartheta_n) \sin \frac{2\pi x}{\lambda_n}. \end{aligned} \quad (196)$$

Она представляет сама по себе возможное колебание струны, так как выполняются предельные условия:  $v = 0$  при  $x = 0$  и при  $x = l$ , в чем легко убедиться. Особенность ее заключается в том, что все точки струны имеют одинаковую фазу, так как фазовый угол, содержащий время  $t$ , не зависит, как у проходящих волн, от  $x$ . Поэтому, например, все точки струны проходят одновременно через положение равновесия  $v = 0$  и одновременно достигают наибольшего отклонения. Струна всегда изображается синусоидальной кривой, и движение каждой точки есть синусоидальное колебание, амплитуда которого изменяется периодически от одной точки к другой. В точках

$$x = 0, \quad \frac{l}{n}, \quad \frac{2l}{n}, \quad \frac{3l}{n}, \quad \dots, \quad \frac{n-1}{n} l, \quad l \quad (196a)$$

амплитуда колебаний равна нулю. Поэтому эти точки называются „узлами колебаний“. Они разделяют длину струны на  $n$  равных отрезков длины  $\frac{l}{n}$ , каждый из которых равен, на основании (186), половине длины волны  $\lambda_n$ , соответствующей проходящей волне.

Для основного колебания ( $n = 1$ ) обе конечные точки струны суть узловые точки, для второго парциального колебания ( $n = 2$ ) один узел лежит посередине струны и т. д. Колебания происходят между каждыми двумя узлами, в соседних отрезках — в противоположном направлении. Максимумы амплитуд колебания лежат посередине между узлами и называются „пучностями“ колебания. Главное колебание имеет только одну пучность. Вообще, для всякого парциального колебания число пучностей равно порядковому числу колебания  $n$ . На черт. 8 изображен вид струны и направления колебаний при  $n = 3$ .



Черт. 8.

§ 41. Изображение колебания струны в виде суммы простых периодических колебаний (194) имеет не только формально-математический, но также выдающийся физический и физиологический интерес, ввиду его значения для акустики. Если колебания струны воспринимаются воздухом и через его посредство передаются уху, в частности барабанной перепонке, то органы слуха реагируют на каждый член суммы (196), т. е. на каждое простое периодическое колебание, с особой чувствительностью, — с чувствительностью к соответствующему „парциальному тону“. Число колебаний  $\nu_n$  определяет высоту тона, постоянная амплитуды  $C_n$  — силу его, а фазовая постоянная  $\vartheta_n$  не имеет акустического значения. Как показали глубокие исследования Гельмгольца, тому, что в акустике называется качеством тона или окраской звука (тембром), не соответствует особого физического атрибута. Тембр звука колеблющейся струны скорее всего приводится к тем численным отношениям, в которых отдельные парциальные тоны входят в колебание и которые сильно зависят, конечно, от того, как подействовали на струну. Чем многочисленнее и сильнее высокие парциальные тоны, тем звук вообще резче и пронзительнее, между тем как основной тон ( $n = 1$ ) или же отдельный парциальный тон звучат мягко и бесцветно.

Благодаря этим своеобразным акустическим воздействиям парциальные колебания, и вместе с тем отдельные члены ряда Фурье для волны, приобретают самостоятельное значение также и в физическом смысле. Поэтому некоторые склонны даже приписывать им самостоятельное существование уже в самом колебании струны и в воздушной волне, вызванной колебанием струны, независимо от органа слуха. Однако не следует забывать, что такое представление допустимо и даже очень целесообразно, но вовсе не необходимо. Пока мы рассматриваем колебание струны и воздушную волну, зависимость смещения материальной точки  $v$  от независимых переменных  $x$  и  $t$  и вместе с тем все особенности физического явления полностью представлены одной единствен-



ной функцией, и лишь при помощи некоторого произвола можно разложить эту функцию на отдельные составные части. Поэтому парциальные тоны не содержатся уже как нечто реальное в колебании струны или в воздушной волне, а отделяются друг от друга лишь в органе слуха.

Однако орган слуха чувствителен не только по отношению к абсолютной величине числа колебаний, но реагирует также очень характерным образом на отношение чисел колебаний двух звуковых волн, одновременно попадающих на него: если это отношение простое рациональное, т. е. может быть выражено отношением двух небольших целых чисел, то орган слуха воспринимает созвучие как приятное, гармоническое, консонирующее. Абсолютная высота обоих тонов не играет при этом роли. Поэтому расстояние между двумя различными тонами, музыкальный „интервал“, измеряется в акустике не по разности, а по отношению чисел колебаний, или, что одинаково по существу, по разности их логарифмов. Чем проще это отношение, тем совершеннее созвучность (консонантность). Так как, на основании (188), числа колебаний  $\nu_n$  парциальных тонов колеблющейся струны относятся между собой, как ряд натуральных чисел  $1:2:3:4\dots$ , то тоны с небольшим порядковым числом консонируют с основным тоном и между собою и поэтому носят также название „гармонических обертонов“.

Самый простой интервал, кроме „однозвучия“ (унисона)  $1:1$ , есть отношение  $2:1$ , или „октава“. Здесь созвучие обоих тонов настолько совершенно, что они часто сливаются в одно ощущение, и тогда даже опытный слух с трудом может, а то и вовсе не в состоянии отличить их друг от друга. Затем следует отношение  $3:2$ , или „квинта“, далее  $4:3$ , или „кварта“.

Квинта и кварта дают вместе октаву, так как  $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$ .

Вообще, интервал, который дополняет другой интервал до октавы, называется „обращением“ последнего. Поэтому кварта есть обращение квинты. Затем следует отношение  $5:4$ , или „большая терция“, и ее обращение  $8:5$ , или „малая секста“; потом отношение  $6:5$ , или „малая терция“ и ее обращение  $5:3$ , — „большая секста“. Этим исчерпывается число интервалов, которые считаются консонирующими, если ограничиться интервалами, которые лежат в пределах одной октавы, т. е. меньше 2. Большие интервалы приводятся к интервалам большим 2 путем деления на целые степени 2.

Для обозначения тонов вся область тонов делится сперва на октавы. При этом исходят от произвольного нормального тона, установленного с общего согласия. Согласно парижскому соглашению, это тон  $\nu_0 = 261$ , или  $c'$  с одним штрихом (нота „до“ первой октавы, в русском обозначении), который легко доступен для мужского

и женского голоса, а также для важнейших инструментов. Затем идут с одной стороны октавы вверх до  $c''''$ , с пятью штрихами, т. е.  $\nu = 261 \cdot 2^4$ , с другой стороны вниз до малого  $c$ , большого  $C$ , контра  $C_1$  и субконтра  $C_{11}$ :  $\nu = 261 \cdot 2^{-4}$ . Звуковые волны, числа колебаний которых лежат вне указанных пределов, уже не производят впечатления тона на наше ухо, а оказывают лишь механическое действие, высокие — колющее, а низкие — дергающие. Область тонов между  $c'$  (с одним штрихом) и  $c''$  (с двумя штрихами) называется октавой с одним штрихом или первой октавой. Точно так же всякая октава носит название того  $c$ , которое ограничивает ее снизу. Все тона, которые отличаются на целое число октав, обозначаются одинаковыми буквами, а положение самих октав указывается так же, как и для различных  $c$ . Так, например, струна с основным тоном  $C$  (самая толстая струна виолончели) имеет следующие гармонические обертоны:

$$n = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \dots$$

парциальный тон:  $C \ c \ g \ c' \ e' \ g' \ c'' \ d'' \ e''$

Обертоны  $n = 7, 11, 13, 14, \dots$  не употребляются в современной музыке и не имеют поэтому особых обозначений. Но так называемая натуральная септима  $7:4$ , ближайшая к малой септимере  $9:5$ , благозвучнее последней; в этом можно отчетливо убедиться, если иметь возможность сравнить слухом эти два интервала. Несомненно также, что важная роль, которую играет в музыке так называемый доминант-септаккорд (основной тон, большая терция, квинта, малая септима), основана на том обстоятельстве, что интервалы этого аккорда приблизительно выражаются отношениями  $4:5:6:7$ .

§ 42. Консонирующие интервалы образуют основу всей практической музыки. От этого закона природы искусство не может безнаказанно отступить. Совокупность всех тонов, которую можно получить, исходя от одного нормального тона  $\nu_0$  и двигаясь определенными консонирующими интервалами, образует натуральную систему тонов. Числа колебаний тонов, принадлежащих к определенной системе, могут быть представлены при помощи простого математического выражения. Если ограничиться октавами, то числа колебаний имеют вид:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n, \quad (197)$$

где  $n$  обозначает какое-либо целое положительное или отрицательное число. Эти тоны отличаются от нормального тона на целое число октав и поэтому образуют совокупность, еще недостаточную для практической музыки. Если же присоединить к ним квинты, то получатся тоны с числом колебаний:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n \cdot 3^p, \quad (198)$$

где  $p$  также обозначает целое положительное или отрицательное число. Все тоны, числа колебаний которых могут быть выражены



в виде (198), образуют пифагорейскую систему тонов. Последняя обнимает практически все воспроизводимые тоны и, значит, все интервалы, так как всякое число можно, хотя и неточно, но с желаемым приближением, выразить при помощи (198). Так, например, большая терция 5 : 4 может быть получена с практически достаточным приближением при помощи четырех квинт вверх и двух октав вниз, т.е. при помощи интервала  $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{81}{64}$ , так на-

зываемой пифагорейской терции, которая несколько больше, чем натуральная терция. Различие между этими двумя терциями составляет  $\frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80}$ , — так называемая „синтоническая комма“.

Увеличив число квинт и октав, можно, конечно, получить еще лучшее совпадение. Однако в абсолютном смысле совершенно невозможно получить интервал натуральной терции при помощи квинт и октав, как бы ни увеличивать число ступеней, и в этом смысле пифагорейская система тонов является неудовлетворительной. Лучше удовлетворяет теоретической потребности система тонов, обогащенная терциями:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n \cdot 3^p \cdot 5^q, \quad (199)$$

которая действительно послужила основой для музыки на долгое время.

Однако и эта система, подобно всем натуральным системам тонов, имеет тот практически важный недостаток, что каждая из них обнимает, строго говоря, неограниченное множество тонов, между тем как практическая музыка, особенно после введения инструментов с неизменными тонами (орган, пианино), вынуждена обходиться при помощи ограниченного, не очень многочисленного количества тонов. Но если произвольно оборвать систему тонов на определенных значениях чисел  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , т.е. после определенного числа интервалов, то этим тоны на границах будут лишены своей роли, так как невозможно будет идти от них вперед, между тем как неограниченная возможность модулирования образует основную потребность новой музыки. Этот недостаток оказался настолько невыносимым в течение долгого времени, что было принято решение пожертвовать для устранения его абсолютной чистотой натуральной системы тонов и несколько изменить, „темперировать“, консонирующие интервалы. Из всех искусственных систем тонов наиболее употребительной оказалась так называемая двенадцатиступенчатая темперированная система Иоганна-Себастиана Баха. В этой системе все октавы, в качестве важнейших консонансов, абсолютно чисты, зато квинты темперированы, исходя из того обстоятельства, что

двенадцать квинт, т.е.  $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$ , приблизительно равны семи октавам,

т.е.  $2^7$ . Различие составляет  $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \sim \frac{74}{73}$ , — так называемая „пифагорейская комма“. Если в равной мере уменьшить все эти двенадцать квинт так, чтобы они образовали ровно семь октав, то условие для интервала  $x$  темперированной квинты представится в виде уравнения:

$$x^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 1, \quad (200)$$

или же

$$x = 2^{\frac{7}{12}} = 1,498.$$

Таким образом различие между чистой и темперированной квинтой составляет всего

$$1,5 : 1,498 \sim \frac{886}{885}$$

и непосредственно не воспринимается даже самым опытным слухом. Если распределить двенадцать соседних тонов, которые получаются при помощи двенадцати темперированных квинт и соответствующих октав, в пределах одной октавы, например малой октавы, от  $c$  до  $c'$ , то последняя разделится на двенадцать равных интервалов по следующей схеме:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2^0 & 2^{\frac{1}{12}} & 2^{\frac{2}{12}} & 2^{\frac{3}{12}} & 2^{\frac{4}{12}} & 2^{\frac{5}{12}} & 2^{\frac{6}{12}} & 2^{\frac{7}{12}} & 2^{\frac{8}{12}} & 2^{\frac{9}{12}} & 2^{\frac{10}{12}} & 2^{\frac{11}{12}} & 2^{\frac{12}{12}} \\ c & cis = des & d & dis = es & e & f & fis = ges & g & gis = as & a & ais = d & h & c' \end{array}$$

Определенные таким способом тоны образуют темперированную систему, которая повторяется совершенно одинаковым образом в каждой октаве.

Интервал между двумя соседними тонами есть темперированный полутон:

$$2^{\frac{1}{12}} = 1,0595.$$

Темперированная большая терция состоит из четырех полутонов. Она больше натуральной терции, именно на

$$\sqrt[3]{2 \cdot \frac{4}{5}} \sim \frac{126}{125},$$

но меньше пифагорейской терции, так как последний интервал меньше синтонической коммы  $\frac{81}{80}$ .

Вполне естественное нежелание сознательно отказаться от абсолютного соответствия природе нередко выражалось в теории консонирующих интервалов в виде возражений против темперированной настройки и в требованиях возвращения к натуральной настройке. Однако нужно иметь в виду, что вопрос



о признании такой настройки в практической музыке не является предметом научного обсуждения. В искусстве решающую роль играют не теоретические основания, а единственно только фактическое эстетическое воздействие. Поэтому преимущественное положение будет занимать всегда та система тонов, которая обладает наиболее действительными художественными способами выражения. Натуральная настройка также лишь тогда восстанавливает свое практическое значение, когда явится художник, который в состоянии будет сказать больше и выразительнее на языке натуральной настройки, чем можно было бы выразить другими средствами.

§ 43. После этого отступления в область искусства возвратимся снова к общей акустике. Обратим сперва внимание на следующий замечательный факт: когда ухо выделяет из попадающей на него волны отдельные парциальные тоны, оно совершает в сущности то же самое, что и математик, который по данной периодической, но произвольно сложной функции вычисляет отдельные коэффициенты соответствующего ряда Фурье,  $A_n$  и  $B_n$ , при помощи интегрирования, указанного в уравнениях (175). Раздражения, на которые реагирует слуховой нерв, целиком во всех подробностях заключаются в том возбуждении, которому подвергается барабанная перепонка под влиянием падающей на нее волны. Они вполне исчерпывающе изображаются при помощи единственной функции времени  $f(t)$ , которая дает смещение барабанной перепонки от положения равновесия в каждый момент, а при разложении звука в ухе на отдельные парциальные тоны происходит разложение функции  $f(t)$  в ряд Фурье. Об этой удивительной способности органа слуха можно составить себе некоторое представление, если вспомнить, что опытный слух дирижера оказывается в состоянии выделить из звуковой массы хора, сопровождаемого оркестром, не только тоны и тембр отдельных инструментов, но и отдельные буквы слов, которые поются. В этом отношении ухо бесконечно превосходит глаз, так как мы всегда воспринимаем какой-нибудь цвет, — белый, зеленый, голубой как нечто цельное и совершенно не можем определить, состоит ли этот цвет из других цветов и из каких именно.

Перед нами возникает теперь такой фундаментальный вопрос: каким образом ухо в состоянии совершать такие действия и какие физические явления лежат в основе разложения звука на его парциальные тона? Ответ на этот вопрос дал Гельмгольц, исходя из допущения, что с каждым субъективным процессом — ощущением определенного парциального тона с числом колебаний  $\nu$  — всякий раз связан объективный процесс — маятникообразное колебание некоторого элементарного материального образования во внутреннем ухе с тем же числом колебаний  $\nu$ , — и обратно. Сколько различных парциальных тонов в состоянии ощущать наш слух, столько же имеется внутри уха таких элементарных

маятников, расположенных рядом, подобно струнам арфы. Когда барабанная перепонка совершает колебания  $f(t)$  под влиянием падающей на нее воздушной волны, то парциальный тон  $\nu$  ощущается в том случае, если тот элементарный маятник, которому свойственно число колебаний  $\nu$ , совершает заметные колебания при сотрясении барабанной перепонки. Таким образом вопрос о том, содержится ли парциальный тон  $\nu$  в звуковой волне  $f(t)$ , сводится по существу к вопросу, в состоянии ли сила, величина которой  $f(t)$ , привести в заметные колебания маятник с периодом колебаний  $\tau = \frac{1}{\nu}$ . На этот вопрос дает точный ответ общая механика следующим образом.

Маятник с определенным периодом колебаний  $\tau = \frac{1}{\nu}$  может быть изображен, согласно 7, § 13, при помощи материальной точки, которая совершает небольшие колебания около положения устойчивого равновесия  $x = 0$ . Если колебания вызваны одним толчком, а затем происходят без нарушения извне, то они следуют уравнению движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 m \nu^2 x, \quad (201)$$

которое получается из уравнения [7, (15)], если выразить в нем постоянную  $c$  через число колебаний  $\nu$ , на основании зависимости:

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = \tau = \frac{1}{\nu}. \quad (202)$$

В этом случае маятник совершает „свободные“ колебания, период которых называется поэтому „собственным“ периодом колебаний маятника.

Но если на маятник действует, кроме того, внешняя сила, то он совершает „вынужденные“ колебания, согласно уравнению движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 m \nu^2 x + f(t). \quad (203)$$

Вычислим сперва вынужденные колебания для частного случая, когда внешняя сила  $f(t)$  — периодическая, т. е. имеет вид:

$$f(t) = C \cos(2\pi\nu't + \vartheta), \quad (204)$$

при том допущении, что в начальном состоянии при  $t = 0$  маятник покоится в состоянии равновесия, т. е.  $x = 0$  и  $\frac{dx}{dt} = 0$ .

Общее решение дифференциального уравнения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 4\pi^2 m \nu^2 x = C \cos(2\pi\nu't + \vartheta) \quad (205)$$



имеет вид:

$$x = a \cos(2\pi\nu t + \vartheta_0) + \beta \cos(2\pi\nu' t + \vartheta). \quad (206)$$

Если подставить это выражение для  $x$  в уравнение (205), то в левой части останутся только члены с  $\beta$ . Поэтому получится:

$$\beta = \frac{C}{4\pi^2 m (\nu^2 - \nu'^2)}, \quad (207)$$

между тем как  $a$  и  $\vartheta_0$  остаются неопределенными и поэтому представляют собою постоянные интегрирования. Если определить их значения по начальным условиям и подставить их, а также значение  $\beta$ , в (206), то получится искомое колебание маятника:

$$x = \frac{C}{4\pi^2 m (\nu^2 - \nu'^2)} \cdot \left\{ -\cos \vartheta \cos 2\pi\nu t + \frac{\nu'}{\nu} \sin \vartheta \sin 2\pi\nu t + \cos(2\pi\nu' t + \vartheta) \right\}. \quad (208)$$

Таким образом маятник совершает движение, которое состоит вообще из двух колебаний с двумя различными периодами, числа колебаний которых  $\nu$  и  $\nu'$  соответствуют собственному колебанию и внешнему возбуждающему колебанию.

Однако исключение составляет тот случай, когда период возбуждающего колебания совпадает с периодом собственного колебания, так что  $\nu' = \nu$ . Тогда выражение (208) принимает вид:

Истинное значение последнего получится, если положить  $\nu' = \nu + \Delta\nu$ , разложить числитель и знаменатель по степеням  $\Delta\nu$  и перейти к пределу  $\Delta\nu = 0$ :

$$x = \frac{C}{8\pi^2 m \nu^2} \cdot \left\{ 2\pi\nu t \sin(2\pi\nu t + \vartheta) - \sin 2\pi\nu t \sin \vartheta \right\}. \quad (209)$$

Конечно, можно и непосредственно убедиться в том, что выражение (209) удовлетворяет как начальным условиям, так и дифференциальному уравнению (205) при  $\nu' = \nu$ .

Это движение маятника, ввиду того, что перед синусом стоит множитель  $t$ , совершенно отлично от движения, изображаемого формулой (208), не только по закону движения, но даже по порядку величины: оно не состоит из периодических колебаний, а бесконечно возрастает с течением времени. Отсюда следует, что внешняя периодическая сила с произвольно малой амплитудой  $C$ , если только период силы совпадает с собственным периодом маятника, может с течением времени произвести более значительное действие, чем любая произвольно большая сила с каким-либо другим периодом. Тогда говорят, что возбуждающая сила находится в резонансе с маятником. Резонанс дает объяснение многих замечательных явлений природы, — разумеется, не только в области акустики. Когда слабая звуковая волна

приводит в звучание зубцы большого камертона, или когда ребенок приводит в сильное колебание многопудовый колокол, или когда крепкий мост начинает совершать опасные колебания под влиянием идущих в ногу людей, то все это — явления резонанса. Естественно допустить, что подобно тому, как бывает в акустике и электродинамике, также и в химии и даже в биологии интенсивность некоторых реакций сводится по существу к явлению резонанса.

Сделаем теперь более общее допущение, что сила, колеблющая маятник, не просто периодична, а состоит из ряда простых периодических колебаний, т. е. может быть выражена при помощи ряда Фурье. Как нам известно, это представляет собою наиболее общий случай. Тогда колебания маятника будут бесконечно возрастать с течением времени в зависимости от того, содержится ли в ряде Фурье член с собственными колебаниями маятника. Величина коэффициента этого члена по сравнению с другими членами ряда Фурье не играет при этом роли. По тому, как маятник реагирует на возбуждающее колебание, можно определить, имеется ли соответствующий член в ряде Фурье. Таким образом маятник служит для анализа ряда при помощи резонанса, поэтому он называется также „резонатором“. Резонатор заметно отзывается только на то колебание, которое соответствует его собственному периоду, поэтому действие его избирательное, „селективное“. Благодаря явлению резонанса, отдельные члены ряда Фурье также получают физическое значение, между тем как до сих пор физически определена была только их сумма.

Подойдем теперь еще ближе к количественному взаимоотношению между возбуждающей силой  $f(t)$  и энергией вызванного ею колебания резонатора. Рассмотрим процесс в течение определенного промежутка времени. Допустим, что возбуждающая сила  $f(t)$  настолько слаба, что в течение этого промежутка времени маятник колеблется почти как свободный, т. е. периодически. Тогда изменение колебательной энергии  $E$  (кинетической и потенциальной вместе) в течение элемента времени  $dt$  равно, согласно [1, (393)]:

$$dE = F_x \cdot dx = f(t) \cdot dx,$$

или

$$dE = f(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt.$$

Поэтому изменение энергии за время от  $t$  до  $t'$  равно:

$$E' - E = \int_t^{t'} f(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt. \quad (210)$$

Смотря по тому, как выражаются отклонения маятника  $x$  во время рассматриваемого промежутка времени — через  $\cos 2\pi\nu t$  или



через  $\sin 2\pi vt$ , производная  $\frac{dx}{dt}$  пропорциональна  $\sin vt$  или  $\cos 2\pi vt$ ,

а интеграл (210) принимает такой же вид, как интегралы (175), служащие для вычисления коэффициентов ряда Фурье для функции  $f(t)$ , с той лишь разницей, что там переменная интегрирования обозначена через  $x$ , а здесь через  $t$ . Представим себе длинный ряд таких маятников-резонаторов с соответственно подобранными периодами колебаний и фазами и подвергнем их одновременно действию одной и той же возбуждающей силы  $f(t)$ . Тогда энергия колебаний каждого маятника укажет величину соответствующего коэффициента разложения  $f(t)$  в ряд Фурье. Согласно Гельмгольцу, этот процесс одинаков по существу с тем процессом, который происходит в ухе, когда каждое из слуховых волокон, отзывается на определенное число колебаний, воспринимает, благодаря резонансу, свой тон из колебаний барабанной перепонки и передает его чувствительным нервам. Отсюда мы видим, что слух не только производит такое разложение звуковой волны, которое, как мы видели в начале параграфа, соответствует превращению этой волны в сумму простых периодических волн, но что природа пользуется при этом тем же самым методом, как и математика, ибо последнее уравнение (210) есть не что иное, как механическая иллюстрация математического определения коэффициентов ряда в (175). Благодаря этому нам становится физически совершенно понятной способность уха разлагать звук на отдельные тоны.

Другой принципиально важный вопрос — это объяснение своеобразного созвучного действия консонирующих интервалов. По этому вопросу Гельмгольц также разработал теорию, согласно которой понятие консонанса возникло не из бессознательно мистического удовлетворения, которое слуховой нерв испытывает при появлении простых рациональных числовых отношений, но что и здесь также играют решающую роль вполне определенные реальные физически определимые обстоятельства, которые вызывают удовольствие в случае консонанса и неудовольствие в случае диссонанса. Кратким обсуждением этой теории мы и займемся в ближайшей главе, в которой будет идти речь об акустических звуковых волнах (§ 46).

#### ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

§ 44. Жидкости и газы могут быть выделены как частный случай среди совершенно упругих изотропных тел (§ 21), так как в них все три главные давления (§ 20) равны. Отсюда следует, что на каждый элемент поверхности действует перпендикулярное

к нему давление  $X_x = Y_y = Z_z = p$ , не зависящее от расположения элемента поверхности и положительное, если тело подвергается сжатию. Так как тангенциальные давления обращаются в нуль, то постоянная упругости в уравнениях (119) также равна нулю, и давление зависит только от объема или же от плотности:

$$p = f(k). \quad (211)$$

Вид функции  $f$  зависит от природы тела. Для капельных жидкостей  $p$  чрезвычайно сильно изменяется при изменении  $k$ , поэтому удобнее представить  $k$  в виде функции от  $p$ . Предельный случай образуют несжимаемые жидкости, для которых  $k$  постоянно. Подробнее о виде функций  $f$  мы будем говорить позднее, при обсуждении конечных деформаций (§ 56).

В интересах общности мы распространим последующие исследования как на капельные жидкости, так и на газы. Для этого мы воспользуемся обобщением уравнений (119), которое мы уже ввели в § 33, а именно мы положим, что в недеформированном состоянии ( $\sigma = 0$ ) давление  $p$  не равно нулю, а равно  $p_0$ , так как газ в устойчивом равновесии всегда обладает конечным давлением. Тогда шесть уравнений (119) обратятся в одно уравнение:

$$p = p_0 - \lambda \sigma. \quad (212)$$

Коэффициент упругости  $\lambda$  зависит от сжимаемости, так как

$$\frac{-\sigma}{p - p_0} = \frac{1}{\lambda}, \quad (213)$$

и может быть вычислен при всяком состоянии вещества, если дана функция  $f$  в уравнении (211). Так как масса элемента тела объема  $dV$  не изменяется, то для бесконечно малого расширения объема  $d\sigma$  существует соотношение:

$$dV \cdot k = dV (1 + \sigma) \cdot (k + dk). \quad (213a)$$

Поэтому

$$\sigma = -\frac{dk}{k},$$

и из (213):

$$\lambda = k \frac{dp}{dk}. \quad (214)$$

Так как жидкое и газообразное состояние можно рассматривать как частный случай твердого состояния, то мы выведем уравнения движения непосредственно из уравнений для твердых тел и при этом также опустим силы тяготения. Тогда из (147) и (212) получится:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad (215)$$



или же, в векториальной форме, если еще ввести постоянную:

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{dp}{dk} = a^2,$$

получится:

$$\ddot{\mathbf{q}} = a^2 \cdot \text{grad } \sigma. \quad (216)$$

Произведем над этим уравнением векторное действие rot (§ 13). Ввиду (65), следует:

$$\delta = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение дважды по  $t$ , получим:

$$\mathbf{o} = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2.$$

Отсюда следует, что составляющие вращения материальной частицы  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  суть линейные функции времени. Значит, вращение возрастает с течением времени до бесконечности, если только вектор  $\mathbf{c}_1$  не равен нулю. Так как мы намерены заняться бесконечно малыми колебаниями около положения равновесия и поэтому постоянное во времени вращение также не представляет для нас интереса, то мы ограничимся рассмотрением случая, когда обе постоянные  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$  обращаются в нуль и тогда

$$\mathbf{o} = \text{rot } \mathbf{q} = 0. \quad (217)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения равно:

$$\mathbf{q} = -\text{grad } \varphi, \quad (218)$$

где  $\varphi$  обозначает некоторую скалярную функцию места и времени. Эта функция находится в таком же соотношении к вектору смещения  $\mathbf{q}$ , в каком потенциал  $U$  находится к силовому вектору  $\mathbf{F}$ , согласно [7, (121)]. Поэтому можно назвать  $\varphi$  „потенциалом смещения“. Таким образом существование потенциала смещения равнозначно с условием, чтобы при смещении не происходило вращений. Как видно из уравнения (218), в величине потенциала смещения  $\varphi$  аддитивная функция времени не имеет физического значения и поэтому может быть определена только при помощи произвольного допущения.

Если потенциал смещения  $\varphi$  известен как функция  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , то отсюда однозначно следуют все подробности движения. Прежде всего, из уравнения (218) получим для скорости:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\text{grad } \dot{\varphi}. \quad (219)$$

Таким образом скорость также имеет потенциал: „потенциал скорости“. Далее, для объемного расширения следует из (66):

$$\sigma = \text{div } \mathbf{q} = -\text{div grad } \varphi = -\Delta \varphi, \quad (220)$$

и для изменения давления следует из (212):

$$p - p_0 = -\lambda \sigma = \lambda \cdot \Delta \varphi. \quad (221)$$

Поэтому вся задача сводится к нахождению потенциала смещения. Для этого служит следующее дифференциальное уравнение, вытекающее из уравнений движения (216):

$$\text{grad } \ddot{\varphi} = a^2 \cdot \text{grad } \Delta \varphi,$$

которое после интегрирования по трем координатным направлениям примет вид:

$$\ddot{\varphi} = a^2 \Delta \varphi. \quad (222)$$

Как легко убедиться при помощи дифференцирования, уравнение (222) имеет место не только для потенциала смещения  $\varphi$ , но и для каждого из компонентов смещения и скорости, а также для объемного расширения  $\sigma$  и для давления  $p$ . Это уравнение представляет собою обобщение уравнения (155) для колебаний натянутой струны и поэтому называется также пространственным „волновым уравнением“. Конечно, постоянная  $a$  также играет при этом роль скорости распространения. Однако волны, которые мы здесь будем рассматривать, существенно отличаются от волны поперечно колеблющейся струны, так как здесь упругие действия обуславливаются не вращениями, а изменениями плотности и давления.

Как уже было сказано при обсуждении проблем статики (§ 28), нас всегда меньше интересует с физической точки зрения общее решение характеристического дифференциального уравнения, чем такие частные решения, которые возможно больше соответствуют известным важным процессам в природе. В дальнейшем мы займемся некоторыми такими решениями.

§ 45. Самое простое частное решение дифференциального уравнения (222) получается в том случае, когда функция  $\varphi$  зависит только от одной пространственной переменной, например от  $x$ . Тогда уравнение (222) приводится к простому виду (155) и поэтому представляет две волны, которые распространяются со скоростью  $a$  в направлении положительной и отрицательной оси  $x$ . Так как физическое состояние всех материальных частиц, лежащих в какой-либо плоскости, перпендикулярной к оси  $x$ , совершенно одинаково, то эти волны называются плоскими волнами, каждая плоскость  $x = \text{const}$  называется „волновой плоскостью“, а перпендикулярное к ней направление  $x$  — „волновой нормалью“. Вид волн определяется начальным состоянием и пограничными условиями. Так как потенциал смещения зависит, кроме времени, только от  $x$ , то из трех составляющих смещения только  $u$  не равно нулю. Поэтому колебания происходят в направлении распространения. Такие волны, в противоположность рассмотренным в предыдущей главе поперечным колебаниям струны, являются продольными.



Плоские волны можно приблизительно осуществить, заключив жидкость или газ, например воздух, в длинный достаточно узкий цилиндр. Такой цилиндр служит „трубой“, нормальные сечения суть волновые плоскости, а колебания воздуха происходят исключительно в продольном направлении, которое мы примем за ось  $x$ , по тем же законам, с которыми мы познакомились при изучении колебаний струны. Поэтому мы можем и не останавливаться на подробностях. Только введение пограничных условий требует особого обсуждения. Конец какой-либо трубы может быть открыт или закрыт. В последнем случае на конце  $u = 0$ , так как воздух не может ни войти в стенку сосуда, ни выйти из нее. Это пограничное условие соответствует струне, закрепленной на одном конце. А в первом случае у открытого сечения, на основании принципа равенства действия и противодействия, давление колеблющегося в струне воздуха на внешний атмосферный воздух  $p$ , равно давлению атмосферы на воздух в трубе, следовательно, постоянно равно  $p_0$ , т. е.  $\sigma = 0$ , или плотность постоянна во времени. Отсюда однозначно получаются законы колебаний воздуха в открытых и закрытых трубах.

Если труба закрыта с обоих концов, то мы имеем, как в § 40, стоячие колебания вида (194), где нужно только подставить  $u$  вместо  $v$ . Колебания могут быть вызваны сотрясением извне или при помощи небольшого отверстия для дутья. На каждом конце трубы находится узел смещения  $u$  и скорости  $\dot{u}$ . Положение остальных узлов для  $n$ -го парциального колебания дано в (196а). Посредине между двумя соседними узлами находится пучность. Что касается объемного расширения, то на основании (194) получается:

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \sin\left(\frac{n\pi a t}{l} + \vartheta_n\right) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (223)$$

Отсюда видно, что объемное расширение, а вместе с тем и колебание давления имеют пучность на обоих концах трубы и что узлы объемного расширения  $\sigma = 0$ , т. е. те места, в которых плотность и давление остаются постоянными, совпадают с пучностями смещения и скорости, посредине между узлами последних.

Представим себе, что колеблющаяся труба разрезана в таком узле расширения  $\sigma = 0$ , и отверстие сообщается со свободной атмосферой. Это совершенно не нарушает колебаний ни в одной из половин трубы, так как установленное выше предельное условие осуществлено в отверстии. Отсюда следует закон колебаний в открытой или частью открытой трубе.

Если труба открыта с обоих концов, то на каждом конце находится узел объемного расширения и пучность смещения. Ряд парциальных тонов такой же, как у закрытой с обоих концов трубы или у струны, закрепленной на обоих концах, только узлы

и пучности поменялись ролями. При основном колебании  $\sigma$  имеет единственную пучность,  $u$  имеет единственный узел посредине трубы.

Совершенно иной закон парциальных тонов получается для трубы, закрытой с одного конца и открытой с другого. Здесь смещение  $u$  имеет на одном конце узел, а на другом конце пучность. Поэтому в такой трубе главное колебание не имеет посредине ни узла, ни пучности. Для главного колебания в этом случае вся длина трубы равна расстоянию между узлом и пучностью, т. е. равна половине расстояния между двумя соседними узлами в более длинной трубе, которая совершает такое же стоячее колебание. Таким образом труба, закрытая на одном конце, обладает таким же основным колебанием, как и труба, открытая с двух концов или закрытая с двух концов, но двойной длины. Для обертонов трубы, закрытой на одном конце, длина трубы содержит нечетное кратное расстояния между узлом и пучностью. Отсюда следует, что числа колебаний парциальных тонов относятся как нечетные целые числа 1:3:5:7.

§ 46. В открытом воздухе также могут быть приблизительно осуществлены плоские волны, если звуковая волна занимает сравнительно небольшое пространство и точка воздействия (1, § 35) достаточно удалена от источника звука. Тогда расстояние  $x$  между точкой воздействия и источником звука представляет собою нормаль к волне, и для простого тона с числом колебаний  $\nu = \frac{1}{\tau}$  и длиной волны  $\lambda$  мы имеем, как и в (190), частное решение уравнения (222) в виде:

$$\varphi = C \cos \left\{ 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \vartheta \right\}, \quad (224)$$

где между  $\tau$ ,  $\nu$  и  $\lambda$  существуют соотношения (189). Сложив несколько таких частных решений, мы получим более общее решение, которое соответствует тому случаю, когда несколько звуковых волн одновременно попадает в ухо по одному направлению. Особый интерес представляет случай, когда взаимодействуют два тона одинаковой интенсивности и с мало отличающимися числами колебаний  $\nu$  и  $\nu'$ . Тогда мы имеем для колебания в точке, которую мы примем для простоты за начало координат:

$$\varphi = C \cos(2\pi\nu t + \vartheta) + C \cos(2\pi\nu' t + \vartheta'),$$

или

$$\varphi = 2C \cos\left(2\pi \frac{\nu' - \nu}{2} t + \frac{\vartheta' - \vartheta}{2}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{\nu' + \nu}{2} t + \frac{\vartheta' + \vartheta}{2}\right). \quad (225)$$

Если  $\nu' - \nu$  мало по сравнению с  $\nu$ , то первый косинус в (225)



медленно изменяется с течением времени, и пройдет много колебаний отдельных тонов, пока заметно изменится его величина. Поэтому колебание (225) действует на ухо так же, как колебание одного тона с переменной амплитудой

$$C_t = 2C \cos\left(2\pi \frac{\nu' - \nu}{2} t + \frac{\vartheta' - \vartheta}{2}\right) \quad (226)$$

и числом колебаний  $\frac{\nu' + \nu}{2}$ , равным среднему арифметическому из чисел колебаний отдельных тонов. В этом случае слышится определенный тон, интенсивность которого медленно и периодически колеблется между нулем и максимумом. Эти колебания интенсивности называются „биениями“ обоих совпадающих тонов, их максимумы называются „толчками“ биений. Частота биений зависит от времени между двумя последовательными нулевыми значениями  $C_t$ , число их составляет  $\nu' - \nu$  в единицу времени. Чем ближе друг к другу оба тона, тем медленнее и отчетливее становятся биения. Когда тона расходятся, биения становятся частыми и менее заметными. Поэтому биения представляют прекрасное средство, для того чтобы испытать при помощи слуха не только различие двух почти одинаковых тонов, но также отклонение от полного консонанса двух музыкальных тонов, близких к консонансу, ибо при двух почти консонирующих музыкальных тонах (звучаниях) возникают биения, конечно, не основных тонов, но отдельных пар, содержащихся в звучаниях парциальных тонов. Так, например, при расстроенной октаве первый обертоном более низкого звука дает биения с основным тоном более высокого звука, при расстроенной квинте второй обертоном более низкого звука дает биения с первым обертоном более высокого звука. Поэтому значительно легче настроить инструменты в натуральной системе тонов, чем в темперированной системе.

Эти биения по Гельмгольцу и составляют физическую основу для противоположения консонанса и диссонанса, ибо для всех органов чувств установлен факт, что прерывистые раздражения, при известной частоте, действуют назойливо, утомительно, неприятно. Достаточно вспомнить, например, чтение при мигающем освещении или некоторые виды световой рекламы. Подобным же образом и слуховой нерв страдает от трескучих, щелкающих, тремолирующих звуков, если частота следования их достигает определенной степени. Если она заметно превзойдена, то ухо уже не в состоянии различить отдельные толчки, и неприятное чувство ослабевает. Если, с другой стороны, биения становятся очень медленными, то слуху легче следовать за повышением и понижением силы звука; в тот момент, когда интервал между двумя постепенно сближающимися тонами переходит в созвучие, и биения становятся все медленнее, теряясь в бесконечности.

слух испытывает облегчение, а иногда даже своего рода наслаждение.

Такие же явления, как и при созвучии двух тонов, происходят согласно изложенному и при совпадении обертонов двух консонирующих звучаний. Поэтому неприятное чувство при слушании диссонирующего интервала и удовольствие при слушании консонирующего интервала могут быть также приведены в связь с появлением и исчезновением неприятно действующих биений. Согласно этой точке зрения, гармония, основанная на консонансе, лишается своего мистического характера, и особый характер соответствующего слухового ощущения сводится к физико-физиологическим процессам.

§ 47. Можно получить еще одно довольно простое решение волнового уравнения (222), если предположить, что потенциал смещения зависит, кроме времени, только от расстояния

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

между точкой воздействия  $(x, y, z)$  и началом координат. Тогда согласно [7, (110)]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x^2}{r^3}.$$

Аналогичные выражения получаются для  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$  и  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ . Поэтому

$\Delta \varphi$  преобразуется следующим образом:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi), \quad (227)$$

и волновое уравнение (222) можно написать в таком виде:

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}. \quad (228)$$

Последнее уравнение имеет такой же вид, как и (155), и поэтому имеет общее решение, согласно (157):

$$r\varphi = f(r + at) + g(r - at). \quad (229)$$

Это — две шаровые волны (сферические волны), из которых одна распространяется внутрь, а другая — наружу, обе со скоростью  $a$ . Но, в отличие от плоских волн, здесь распространяется неизменным не потенциал смещения, а произведение его на  $r$ .



Рассмотрим сперва шаровую волну, распространяющуюся наружу, т. е. положим  $f = 0$ . Тогда

$$\varphi = \frac{1}{r} \cdot g(r - at). \quad (230)$$

Для того чтобы волновая функция  $g$  была конечной, необходимо, чтобы, при  $r = 0$ ,  $\varphi$  было бесконечно велико. Стало быть, начало координат есть особенная точка этой волны. Поэтому при реализации волны начало координат должно быть исключено из области колеблющейся жидкости (воздуха). В действительности, в этом месте находится источник звука. Можно представить себе, например, что источником звука служит шар, окруженный со всех сторон жидкостью и сделанный из какого-нибудь упругого твердого вещества. Под влиянием какого-нибудь внутреннего механизма объем этого шара попеременно увеличивается и уменьшается по какому-нибудь закону, — так называемый „пульсирующий“ шар. Последний передает свои колебания непосредственно примыкающей к нему жидкости. Это пограничное условие определяет вид волновой функции  $g$ . С другой стороны, величина смещения  $q$  на границе получается из потенциала смещения, на основании (218) и (230). Смещение происходит в радиальном направлении, поэтому такие шаровые волны продольны. Величина смещения убывает с увеличением расстояния от источника звука.

Можно обобщить частное решение (230) волнового уравнения (222), сложив несколько таких решений. Потенциал смещения выразится в виде:

$$\varphi = \frac{1}{r_1} g_1(r_1 - at) + \frac{1}{r_2} g_2(r_2 - at) + \dots \quad (231)$$

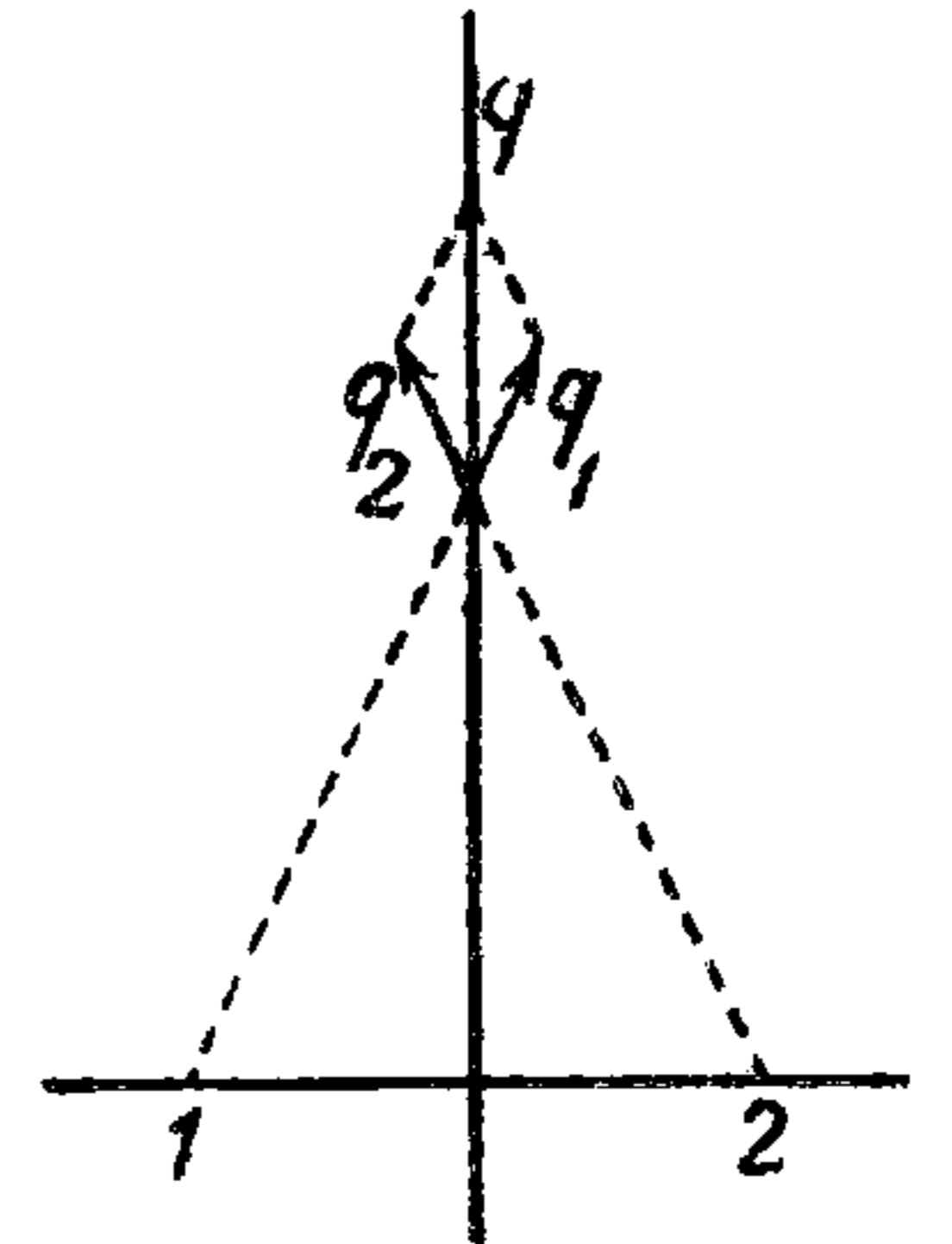
где  $r_1, r_2, \dots$  — расстояния точки воздействия от некоторых неподвижных центров;  $g_1, g_2, \dots$  — некоторые функции одного аргумента. Это движение жидкости вызывается взаимодействием нескольких шаров, пульсирующих в ней по любым законам, если шары так далеки друг от друга, что можно пренебречь возмущениями, которые претерпевают пограничные условия на поверхности какого-либо шара под влиянием волны, исходящей из других шаров.

Возьмем в частном случае два шара и положим  $g_1 = g_2 = g$ . Тогда получится:

$$\varphi = \frac{1}{r_1} g(r_1 - at) + \frac{1}{r_2} g(r_2 - at). \quad (232)$$

Этот случай может быть осуществлен также другим интересным образом. Проведем плоскость симметрии обоих центров  $r_1 = 0$  и  $r_2 = 0$ , т. е. такую плоскость, которая перпендикулярна к прямой, соединяющей оба центра, в ее середине. Тогда для

каждой точки воздействия, лежащей в этой плоскости симметрии, смещение  $q = q_1 + q_2$  произойдет в этой же плоскости, так как равнодействующая обоих равных друг другу радиальных смещений  $q_1$  и  $q_2$  делит пополам угол между ними (черт. 9). Если в плоскости симметрии поместить твердую стену, то это несколько не нарушит процесса движения, так как предельное условие для твердой стены, чтобы компонент смещения в направлении нормали к стене обратился в нуль, уже осуществлено повсюду. Следовательно, движение будет происходить совершенно одинаковым образом, если поместить твердую стену и вовсе удалить половину пространства с источником звука 2. Или, другими словами: твердая плоская стена, противопоставленная источнику звука, действует совершенно так же, как и зеркальное изображение источника звука относительно стены.



Черт. 9.

Теперь рассмотрим шаровую волну, распространяющуюся внутрь и представленную функцией  $f(r + at)$  в уравнении (229). Ее можно представить себе осуществленной при помощи большого тонкостенного полого шара, наполненного воздухом, который попеременно сжимается и растягивается каким-либо внешним механизмом. Все подробности процесса однозначно определены уравнением (229) в связи с начальными и пограничными условиями. Особый интерес представляет здесь такой вопрос: что произойдет с какой-нибудь заданной распространяющейся внутрь шаровой волной, когда она достигнет центра шара  $r = 0$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, допустим, что в начальный момент,  $t = 0$ , существует только одна идущая внутрь волна  $f(r)$  произвольного заданного вида. Так как центр шара находится в жидкости, то для него также имеет место уравнение (229). Так как в природе не встречается бесконечно больших смещений, то при  $r = 0$  потенциал смещения также конечен, и мы имеем во всякий момент:

$$0 = f(at) + g(-at),$$

или, если написать  $at - r$  вместо  $at$ :

$$0 = f(at - r) + g(r - at).$$

Подставив это выражение в (229), получим:

$$r\varphi = f(at + r) - f(at - r). \quad (233)$$

Таким образом в центре шара происходит своего рода отражение шаровой волны, подобно тому явлению, которое мы рассмотрели в § 37 в связи с уравнением (168). Волна, распространяющаяся внутрь, превращается в противоположную волну, распространяющуюся наружу, или, как можно выразиться, шаровая



волна проходит сама сквозь себя в центре шара. Уравнение (233) не находится в противоречии со сделанным нами допущением, что в начале движения имеется только одна волна, распространяющаяся внутрь, ибо функция  $f(r)$ , которая изображает вид волны при  $t=0$ , определена только для положительных значений  $r$ , между тем как в уравнении (233) рассматриваются также отрицательные значения аргумента  $at-r$ . Поэтому достаточно лишь допустить, что функция  $f$  равна нулю при всех отрицательных значениях аргумента, и мы можем однозначно вывести из уравнения (233) весь ход движения для данного случая.

Действительно, тогда при  $t=0$ :

$$r\varphi = f(r),$$

и волна, распространяющаяся наружу, также исчезает при всех значениях  $t < \frac{r}{a}$ . Это значит, что отраженная волна попадает на точку воздействия  $r$  лишь после того, как пройдет путь от центра шара до точки воздействия со скоростью  $a$ .

§ 48. Теория шаровых волн дает нам еще одно решение общего волнового уравнения (222) для неограниченной со всех сторон жидкости. Проинтегрируем сперва это уравнение по некоторому объему жидкости, обозначив элемент объема через  $d\tau$ . Тогда получим, принимая во внимание преобразование (82):

$$\int \ddot{\varphi} d\tau = -a^2 \int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \cdot d\sigma. \quad (234)$$

Возьмем в качестве области интегрирования шар с центром в начале координат и радиусом  $r$  и введем полярные координаты  $\varrho, \vartheta, \psi$  [1, (92)]. Тогда, согласно [1, (93)]:

$$d\tau = \varrho^2 d\varrho d\Omega, \quad (235)$$

причем для сокращения мы обозначили

$$\sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\psi = d\Omega, \quad (236)$$

$d\Omega$  — „телесный угол“ конуса, определенного дифференциалами  $d\vartheta$  и  $d\psi$ . Он измеряется участком поверхности, который вырезывается конусом из поверхности шара с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Далее,

$$d\sigma = r^2 \cdot d\Omega, \quad \nu = -\varrho. \quad (237)$$

Следовательно,

$$\iint \ddot{\varphi} \varrho^2 d\varrho d\Omega = a^2 r^2 \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)_r d\Omega. \quad (238)$$

Интегрирование по  $\Omega$  производится в обеих частях уравнения от  $\vartheta=0$  до  $\vartheta=\pi$  и от  $\psi=0$  до  $\psi=2\pi$ , кроме того, в левой

части по  $\varrho$  от 0 до  $r$ . Значок  $r$  в правой части показывает, что после дифференцирования нужно подставить  $\varrho=r$ .

Введем теперь среднее значение потенциала смещения на определенном расстоянии  $\varrho$  от начала, т. е. сумму произведений значений  $\varphi$  во всех элементах поверхности шара на площади этих элементов, разделенную на сумму всех элементов площади, т. е. на поверхность всего шара:

$$\frac{1}{4\pi\varrho^2} \int \varphi \varrho^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \varphi d\Omega = \bar{\varphi}.$$

Тогда можно написать предыдущее уравнение в таком виде:

$$\int_0^r \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} \varrho^2 d\varrho = a^2 r^2 \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \varrho} \right)_r,$$

Если продифференцировать его по  $r$ , то получится:

$$r^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \right) = a^2 \left( 2r \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} \right),$$

где нужно полагать, что в выражение  $\bar{\varphi}$  подставлено  $r$  вместо  $\varrho$ . Но это уравнение одинаково с волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 (r\bar{\varphi})}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\bar{\varphi})}{\partial r^2} \quad (240)$$

и дает нам такую теорему: при любом колебательном процессе в жидкости законы шаровых волн имеют место для средних значений потенциала смещения, огнесенных к поверхности шара, описанного около любой точки жидкости, принятой за начало. В частности, для шаровых волн  $\bar{\varphi} = \varphi$ , и (240) совпадает с (228).

Интересное следствие получается из (240), если применить его к предельному случаю несжимаемой жидкости, для которой, согласно (215), скорость распространения  $a$  становится равной бесконечности. Тогда полное уравнение (222) переходит в уравнение  $\Delta \varphi = 0$ , т. е. в уравнение Лапласа [1, (129)], а уравнение (240) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 (r\bar{\varphi})}{\partial r^2} = 0,$$

общее решение которого равно:

$$r\bar{\varphi} = A + Br,$$

или

$$\bar{\varphi} = \frac{A}{r} + B. \quad (241)$$



Так как, при  $r = 0$ ,  $\bar{\varphi}$  конечно, то  $A = 0$ , и

$$\bar{\varphi} = B. \quad (242)$$

Это значит, что функция  $\varphi$ , которая удовлетворяет уравнению Лапласа, например потенциальная функция тяготеющих масс вне этих масс, обладает таким свойством, что средние значения ее на поверхностях ряда концентрических шаров равны между собою, стало быть, равны значению в центре. Отсюда следует также, что функция не может иметь абсолютного максимума или абсолютного минимума ни в одной точке пространства, а на основании (1, § 41) вытекает, что вне системы тяготеющих масс никогда не может существовать места абсолютно устойчивого или абсолютно неустойчивого равновесия.

§ 49. Мы можем пользоваться законом, выраженным в уравнении (240), для того чтобы вычислить по заданному начальному состоянию потенциал смещения какой-нибудь массы жидкости, занимающей достаточно большой объем, в любой точке жидкости, принятой за начало координат, для любого момента времени.

Прежде всего, из (240) следует общий интеграл:

$$r\bar{\varphi} = f(r + at) + g(r - at),$$

или, так как  $\bar{\varphi}$  остается конечным при  $r = 0$ , совершенно подобно (233) для шаровых волн:

$$r\bar{\varphi} = f(at + r) - f(at - r). \quad (243)$$

Вид функции  $f$  получается однозначно из условий начального состояния. Для характеристики его мы можем допустить, что при  $t = 0$  потенциал смещения  $\varphi$ , а также его производная по времени  $\dot{\varphi}$  даны как функции места, ибо  $\varphi$  определяется, кроме несущественной аддитивной постоянной, по смещению  $q$  из (218), а  $\dot{\varphi}$  определяется по скорости  $\dot{q}$  из (219).

Поэтому напишем:

$$\varphi_0 = F(r, \vartheta, \psi), \quad \dot{\varphi}_0 = \Phi(r, \vartheta, \psi), \quad (244)$$

полагая, что  $F$  и  $\Phi$  даны. Тогда нужно считать заданными функциями  $r$  также:

$$\bar{\varphi}_0 = \bar{F}(r), \quad \dot{\bar{\varphi}}_0 = \bar{\Phi}(r). \quad (245)$$

С другой стороны, продифференцировав (243) по  $t$ , получим:

$$r\dot{\bar{\varphi}} = af'(at + r) - af'(at - r). \quad (246)$$

Следовательно, при  $t = 0$ , на основании (243), (246) и (245):

$$rF = f(r) - f(-r), \quad (247)$$

$$r\bar{\Phi} = af'(r) - af'(-r). \quad (248)$$

Интегрирование последнего уравнения дает:

$$\frac{1}{a} \int r\bar{\Phi} dr = f(r) + f(-r).$$

Отсюда, в связи с (247):

$$f(\pm r) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} \int r\bar{\Phi} \pm dr r\bar{F} \right\}. \quad (249)$$

Таким образом функция  $f$  определена для всех положительных и отрицательных значений аргумента, а вместе с тем, согласно (243),  $\varphi$  непосредственно дано как функция  $r$  и  $t$ . Аддитивная постоянная в интеграле совершенно произвольна и не оказывает влияния на значение  $\varphi$ .

Из выражения  $\bar{\varphi}$  при произвольном  $r$  и произвольном  $t$  можно вывести также значение  $\varphi_t(0)$  при  $r = 0$ . Так как, согласно (243),

$$\varphi_t(0) = \varphi(0) = \lim_{r=0} \frac{f(at+r) - f(at-r)}{r} = 2f'(at),$$

и, согласно (249),

$$\pm f'(\pm r) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{r}{a} \bar{\Phi}(r) \pm \frac{d[r\bar{F}(r)]}{dr} \right\},$$

то для всех положительных значений  $t$  следует:

$$\varphi_t(0) = t\bar{\Phi}(at) + \frac{d[t\bar{F}(at)]}{dt}. \quad (250)$$

Это уравнение дает потенциал смещения  $\varphi$  в какой-нибудь точке жидкости в какой-нибудь момент  $t$ , в зависимости от значений (244) для  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  при  $t = 0$  на поверхности шара, описанного вокруг точки радиусом  $at$ . Например, если колебания вызываются возмущением равновесия, которое сначала ограничено замкнутой областью жидкости, „очагом возмущения“, то какая-нибудь точка, находящаяся вне очага возмущения, подвергнется волне возмущения лишь по истечении промежутка времени, необходимого для того, чтобы расстояние до ближайшей точки очага возмущения могло быть пройдено со скоростью  $a$ . С другой стороны, движение прекратится вполне лишь по истечении промежутка времени, в течение которого может быть пройдено со скоростью  $a$  расстояние до самой отдаленной точки очага возмущения. То же самое относится и к точке, лежащей внутри очага возмущения. Итак, начальное возмущение распространяется во все стороны от очага с начальной скоростью  $a$ , а внутри жидкости образуется непрерывно увеличивающаяся область покоя,



начиная с той точки, расстояние которой от наиболее удаленной точки очага возмущения наименьшее.

Уравнение (250) относится не только к потенциалу смещения, но и к каждому компоненту смещения или скорости, а также к объемному расширению и давлению и вообще к каждой величине, которая удовлетворяет волновому уравнению (222).

§ 50. В заключение исследуем влияние, которое оказывает движение источника звука или наблюдателя на высоту слышимого тона. Существование такого влияния следует из того, что высота тона обусловлена числом волн, попадающих в ухо в течение единицы времени, а это число зависит от того, остается ли неизменным расстояние между наблюдателем и источником звука, или изменяется. Но было бы неправильно предположить, что высота тона зависит только от относительного движения источника звука и наблюдателя. Положим, например, что источник звука неподвижен, а наблюдатель удаляется от него со скоростью звука; тогда наблюдатель вовсе ничего не услышит, так как звуковые волны не достигают его. Но зато звуковые волны всегда достигнут наблюдателя, если он сам неподвижен, а источник звука удаляется от него с любой скоростью. Основание для этого различия состоит не в том, что оно имеет какое-либо отношение к абсолютному движению, — „абсолютное“ движение вообще не имеет смысла, — а в следующем обстоятельстве: при распространении звука играет существенную роль та среда, в которой звук распространяется, например воздух, и поэтому необходимо принимать во внимание движение относительно воздуха. Правила, которые определяют это явление, обычно форму-



Черт. 10.

лируются под названием „принципа Доплера“, хотя мы имеем здесь дело, очевидно, не с принципом, а просто с элементарными правилами кинематики.

Допустим, что источник звука  $Q$ , который испускает в единицу времени  $\nu_0$  колебаний, и наблюдатель  $B$  оба движутся вдоль оси  $x$  первый со скоростью  $q_0$ , второй — со скоростью  $q$  относительно воздуха, который мы считаем неподвижным. Источник звука находится с положительной стороны (справа) от  $B$ . Тогда в случае  $q > q_0$  наблюдатель приближается к источнику звука. Каково будет число колебаний тона, слышимого теперь наблюдателем?

Рассмотрим сперва частный случай, когда источник  $Q$  неподвижен, а наблюдатель  $B$  приближается к нему со скоростью  $q$ . В единицу времени наблюдатель проходит расстояние  $BB' = q$ . Если бы он оставался в  $B$ , то за это время до него дошло бы  $\nu_0$  волн. Но так как он двигался навстречу волнам, то, кроме

этих  $\nu_0$  волн до него дошли также все те волны, которые укладываются на расстоянии  $BB'$ , т. е.  $\frac{q}{\lambda_0}$ , или, согласно (18),  $\frac{q}{v_0 \lambda_0}$  волн. Следовательно, число колебаний слышимого тона равно

$$\nu_0 \left(1 + \frac{q}{a}\right) = \frac{a + q}{\lambda_0}. \quad (251)$$

Теперь сделаем более общее допущение, что источник звука  $Q$  также движется направо со скоростью  $q_0$ . Тогда источник придет по истечении единицы времени в точку  $Q'$ , причем  $QQ' = q_0$ . Из звуковых волн, которые вышли в течение этого времени от источника по направлению к  $B$ , первая волна прошла расстояние  $a$  от  $Q$ , а последняя находится в точке  $Q'$ . Все это расстояние  $a + q_0$  равномерно заполнено волнами. Так как имеется всего  $\nu_0$  волн, то длина волны равна  $\frac{a + q_0}{\nu_0} = \lambda$ . Если подставить эту длину волны  $\lambda$  в уравнение (251) вместо  $\lambda_0$ , то мы получим число колебаний слышимого тона:

$$\nu = \frac{a + q}{a + q_0} \cdot \nu_0. \quad (252)$$

Полученная формула представляет собою общее выражение принципа Доплера для рассмотренного случая. Если, например, наблюдатель и источник звука движутся с одинаковой скоростью, так что расстояние между ними остается постоянным, то  $\nu = \nu_0$ , и движение не оказывает влияния на высоту тона. Но если расстояние между наблюдателем и источником изменяется, то получаются различные результаты в зависимости от того, неподвижен ли наблюдатель или источник. Если наблюдатель удаляется от неподвижного источника со скоростью звука, то  $q = -a$ , и  $q_0 = 0$ , следовательно,  $\nu = 0$ . Если же источник удаляется от неподвижного наблюдателя со скоростью звука, то  $q_0 = a$ ,  $q = 0$ , следовательно,  $\nu = \frac{\nu_0}{2}$ , в согласии со сказанным выше.

Только в том случае, если  $q$  и  $q_0$  малы по сравнению с  $a$ , в первом приближении мы имеем:

$$\nu = \left(1 + \frac{q - q_0}{a}\right) \nu_0. \quad (253)$$

Тогда уже играет роль только разность скоростей, т. е. относительное движение источника звука и наблюдателя.