MAX PLANCK

EINFÜHRUNG IN DIE THEORETISCHE PHYSIK

II

Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper

VERLAG VON S. HIRZEL 1932
LEIPZIG

МАКС ПЛАНК

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Перевод с немецкого
Л. Я. ШТРУМА

под редакцией
проф. Н. П. КАСТЕРИНА

Издание второе

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1932 ЛЕНИНГРАД

ЧИТАТЕЛЬ, сообщите отзыв об этой книге (ваши замечания о ее недостатках и пожелания об изменениях в следующем издании) по адресу: Москва, Ильинка, проезд Владимирова, д. 4, Государственное технико-теоретическое издательство (в секцию организационно-массовой работы).

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

„Механика деформируемых тел“, представляя продолжение курса „Общей механики“ Планка в применении ее к специальным вопросам упругого деформируемого тела, в то же время подготовляет читателя к усвоению последующих курсов Планка по теории электричества и магнетизма и по теории света. Автор и в этом курсе с обычным мастерством, сжато и ясно, вводит читателя в круг исследований по теории упругости, гидродинамике и аэродинамике и в теорию вихревых движений в объеме, достаточном для того, чтобы можно было приступить к самостоятельной научной работе.

Редактор

Второе русское издание сверено с третьим немецким, отличающимся от предыдущего лишь крайне незначительными дополнениями и немногими поправками.

Редакционную работу по этой книге провел П. Н. Успенский. Издание оформила С. Л. Дыман, корректуру держала З. В. Смирнова, наблюдал за выпуском В. П. Петров. Рукопись сдана в производство 15/IУ, листы подписаны к печати 26/VIII, книга вышла в свет сентябре 1932 г. в количестве 5000 экз., на бумаге формата 62×94, печат. знаков в книге 549 000, листов в книге 11¹/₂, заказ № 3513 ГТТИ 291, уполномоченный Главлита Б-21385

Книга отпечатана в Москве в 5-й типогр. «Пролетарское слово» треста «Полиграфкнига». Каланчевский тупик, № 3/5.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

О задаче, которую я поставил себе при составлении этого курса, а также о пути, выбранном мною для разрешения ее, можно сказать по существу то же самое, что я пытался изложить в предисловии к „Введению в общую механику". В представлении читателя этой книги механика деформируемых тел должна возникнуть как естественное, обусловленное внутренней необходимостью продолжение общей механики и прежде всего как ряд тесно связанных, логически обоснованных понятий. Это даст читателю возможность не только изучать с полным пониманием более подробные курсы и специальную литературу, но и производить самостоятельные, более глубокие исследования.

Благодаря ссылкам на законы и уравнения, выведенные в упомянутой моей книге, нередко удается значительно сократить и упростить изложение. Такие ссылки обозначены цифрой *1*. Так например, *1*, (155) обозначает уравнение 155 „Общей механики"; *1*, § 49 обозначает § 49 той же книги. Кроме того, я старался сберечь место, пропуская те формулы или промежуточные вычисления, которые может выполнить без особого труда всякий читатель, обладающий математическим образованием.

В конце книги, как и в предыдущей, приложен алфавитный указатель встречающихся определений и важнейших выведенных теорем. Этот указатель окажется, надо думать, полезным для справок.

Автор

Берлин-Грюневальд,
февраль 1919 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ВСТУПЛЕНИЕ

§ 1. Деформируемым телом, в противоположность неизменяемому телу, называется такое тело, которое в состоянии подвергнуться изменению формы либо все в целом, либо в какой-либо своей части. В природе, строго говоря, все тела деформируемы, так как не существует вовсе таких движений, которые не сопровождались бы большими или меньшими изменениями формы или деформациями тел, принимающих участие в этих движениях. Но во многих случаях, например при изучении маятника, рычага, волчка, достаточно, в качестве первого приближения к действительности, предположить, что рассматриваемые тела неизменяемы. Движениями неизменяемых тел занимается общая механика. Здесь же мы будем заниматься такими движениями, особенности которых характеризуются прежде всего деформациями тел. Поэтому нам необходимо еще несколько уточнить наши допущения о свойствах тел, причем мы прежде всего предположим в качестве основного допущения, что пространство, занимаемое телами, непрерывно заполнено материей. Конечно, и это допущение, подобно допущению о неизменяемости, представляет собою идеальную абстракцию и в точности никогда не соблюдается в природе, так как, строго говоря, все тела имеют атомистическое строение. Но в качестве первого приближения к действительности можно и в данном случае вполне обойтись упрощающим допущением. Подобно тому как при установлении простейших законов о рычаге было бы излишне и нецелесообразно рассматривать вместе с тем упругий изгиб, фактически всегда существующий, так и при изучении основных законов звуковых волн или течений жидкости было бы очень неудачным приемом, если бы мы с самого же начала захотели перейти к молекулам или даже к неизменным атомам рассматриваемых тел. К тому же даже атомы представляют собою снова лишь идеальную абстракцию. Природа вообще не может быть абсолютно исчерпана человеческой мыслью.

Самая важная и в то же время самая трудная для физика-теоретика задача при математической формулировке какой-либо проблемы заключается в том, чтобы ввести именно те упрощающие допущения, которые имеют существенное значение для интересующих его особенностей исследуемого физического явления, и в то же время пренебречь всеми влияниями меньшего порядка величин, которые ничего существенного не изменили бы в основных результатах и вошли бы в рассуждения лишь в качестве математического балласта. Важно и необходимо лишь требование, чтобы различные гипотезы, вводимые для различных проблем, были совместимы между собою. Иначе физическая картина мира потеряла бы свое единство, и мы имели бы, в зависимости от обстоятельств, различные противоречащие друг другу ответы на один и тот же вопрос.

Для той задачи, которую мы поставили себе в этой книге, целесообразнее всего разделить весь материал на три отдельные части. В первой части рассматриваются общие законы движения непрерывно заполняющих пространство тел, независимо от их агрегатного состояния, а во второй и третьей частях будут даны приложения этих законов к важнейшим видам движения, связанным с бесконечно малыми или же с конечными деформациями.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНО ПРОТЯЖЕННОГО ТЕЛА

ГЛАВА ПЕРВАЯ

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

§ 2. Подобно тому как мы поступали в общей механике материальных точек и неизменяемых тел, мы и в механике деформируемых тел сначала рассмотрим свойства движений самих по себе, не ставя вопроса о причинах движений, и прежде всего постараемся дать для них исчерпывающее математическое представление. Движение материального тела вполне определенно тогда и только тогда, когда известны движения всех материальных точек, на которые его можно мысленно разложить, или же, другими словами, когда положение каждой такой материальной точки задано как функция времени. Чтобы характеризовать определенную материальную точку тела, рассмотрим состояние тела в момент времени $t=0$ и в этом состоянии определим положение каждой материальной точки тела тремя координатами a, b, c относительно неподвижной прямоугольной правой системы координат (*1*, § 16). Эти три величины, a, b, c, должны служить для характеристики материальной точки также и в последующие моменты t, когда координаты ее перейдут от значений a, b, c к значениям x, y, z. Они представляют собою как бы название точки, с помощью которого она может быть опознана во всякий момент. Все движение материального тела определено во всех подробностях, если для каждой материальной точки a, b, c, из которых состоит тело, координаты x, y, z заданы как функции t, т. е. если

$$\left.\begin{aligned} x &= f\,(a,\ b,\ c,\ t),\\ y &= \varphi\,(a,\ b,\ c,\ t),\\ z &= \psi\,(a,\ b,\ c,\ t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где f, φ, ψ обозначают некоторые однозначные и конечные функции от a, b, c, t. Мы примем также, что они непрерывны, полагая таким образом, что тело не распадается во время движения на отдельные части. Согласно указанным выше положениям, при $t=0$

$$x=a;\ y=b;\ z=c. \tag{1a}$$

Ввиду обилия возможностей, заключенных в выражениях (1), рекомендуется сначала рассмотреть некоторый вполне определенный момент времени t, или, другими словами, ограничиться сначала рассмотрением того изменения, которое тело претерпевает от момента 0 до момента t, где t имеет некоторое постоянное значение. Тогда мы можем вовсе выпустить t из выражений (1) и получим более простые формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(a, b, c), \\ y &= \varphi(a, b, c), \\ z &= \psi(a, b, c). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти уравнения обозначают переход тела из определенного „начального положения“ в определенное „конечное положение“, причем материальная точка (a, b, c) переходит из места (a, b, c) в место (x, y, z). Поэтому величины

$$x - a = u, \quad y - b = v, \quad z - c = w \tag{3}$$

называются компонентами „смещения“ точки.

Если разрешить уравнения (2) относительно a, b, c, то мы получим a, b, c как определенные функции от x, y, z. Эти функции дают ответ на вопрос о том, в каком месте находилась до изменения тела та материальная точка, которая после изменения имеет координаты x, y, z. Мы полагаем, что эти функции, которые можно толковать как изменение, обратное рассматриваемому, также однозначны, конечны и непрерывны.

§ 3. В качестве примера рассмотрим сперва общий случай линейного изменения:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ y &= \mu_0 + \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c, \\ z &= \nu_0 + \nu_1 a + \nu_2 b + \nu_3 c. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Обозначения постоянных выбраны так, что буквы λ, μ, ν соответствуют x, y, z, а значки 1, 2, 3 соответствуют a, b, c. Величины λ_0, μ_0, ν_0 дают смещение той материальной точки, которая до изменения находилась в начале координат.

Уравнения (4), разрешенные относительно a, b, c, дают:

$$\begin{aligned} a &= \lambda_1'(x - \lambda_0) + \mu_1'(y - \mu_0) + \nu_1'(z - \nu_0), \\ b &= \lambda_2'(x - \lambda_0) + \mu_2'(y - \mu_0) + \nu_2'(z - \nu_0), \\ c &= \lambda_3'(x - \lambda_0) + \mu_3'(y - \mu_0) + \nu_3'(z - \nu_0), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\lambda_1' = \frac{[\lambda_1]}{D} \text{ и т. д.,} \tag{6}$$

если обозначить для сокращения так называемый функциональный определитель:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = D, \tag{7}$$

а коэфициент при элементе λ_1 в выражении этого определителя:

$$\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2 = [\lambda_1] \text{ и т. д.} \tag{8}$$

Так как мы полагаем, что все постоянные, со штрихами и без штрихов, конечны, то функциональный определитель D не может равняться нулю. На этом основании мы можем тотчас определить знак D. Действительно: изменение происходит не внезапно, а постепенно в течение конечного времени t. Поэтому необходимо рассматривать постоянные изменения λ, μ, ν и вместе с тем определитель D как непрерывные функции t. Но до изменения, при $t = 0$,

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0 \text{ и т. д.,} \tag{9}$$

стало быть, $D = 1$. Далее, с течением времени, определитель D изменяется непрерывно, начиная со значения 1 и никогда не обращаясь в нуль. Отсюда следует, что D всегда положительно:

$$D > 0. \tag{10}$$

§ 4. Частный случай линейного изменения представляет собою поступательное перемещение (*1*, § 102), при котором все материальные точки тела претерпевают одинаково направленные и равные смещения любой величины. В этом случае, согласно (3),

$$x - a = \text{const}, \quad y - b = \text{const}, \quad z - c = \text{const},$$

т. е. частный случай уравнений (4).

Другой частный случай линейного изменения есть вращение (*1*, § 101) около какой-либо оси, с произвольным углом вращения. Чтобы доказать это утверждение, составим уравнения для произвольного конечного вращения. Для этого введем, кроме неподвижной в пространстве системы координат, начало которой мы поместим на оси вращения, еще другую систему координат, неизменно связанную с телом и, значит, могущую двигаться в пространстве. Последнюю систему выберем так, чтобы до изменения соответствующие оси обеих систем совпадали между собою. В таком случае после изменения каждые две оси обеих систем образуют друг с другом некоторые углы, косинусы которых мы обозначим α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3, причем пусть буквы α, β, γ относятся к осям первой системы, а цифры 1, 2, 3 — к осям второй системы.

Положим, что до изменения тела какая-нибудь материальная точка имеет координаты a, b, c относительно каждой из двух систем. Зато после изменения та же материальная точка имеет уже координаты x, y, z относительно первой системы, а относительно второй системы — прежние координаты a, b, c. Поэтому взаимоотношение между x, y, z и a, b, c такое же, как при преобразовании координат какой-нибудь точки пространства от одной системы координат к другой системе, характеризующейся девятью заданными косинусами направления, или, согласно [1, (329)]:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c, \\ y &= \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c, \\ z &= \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

т. е. также частный случай уравнений (4).

Если к вращению (11) присоединить еще поступательное перемещение с компонентами смещения λ_0, μ_0, ν_0, то мы получим наиболее общее изменение, которому может подвергнуться неизменяемое тело. Это изменение выражается уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c, \\ y &= \mu_0 + \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c, \\ z &= \nu_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Но и это изменение также представляет собою частный случай общего линейного изменения (4), так как 12 постоянных, характеризующих его, не независимы друг от друга. Таким образом, если поставить вопрос, при каких условиях линейное изменение (4) какого-нибудь тела не сопровождается деформациями последнего, то ответ будет следующий: коэфициенты изменения λ, μ, ν должны удовлетворять тем соотношениям, которые существуют между соответствующими коэфициентами уравнений (12). На основании [1, (331) и (332)] это всего шесть соотношений, из них три соотношения вида:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1 \text{ и т. д.,} \tag{13}$$

и три соотношения вида:

$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0 \text{ и т. д.} \tag{14}$$

В этих соотношениях содержится вместе с тем ряд других соотношений, как например те шесть, которые можно получить из (12) и (14) заменой букв λ, μ, ν цифрами 1, 2, 3 [см. 1, (333) и (334)], далее соотношение [1, (491)]

$$D = 1 \tag{15}$$

и девять соотношений [1, (492)] вида:

$$\lambda_1 = \mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2 = [\lambda_1] = \lambda_1' \text{ и т. д.} \tag{16}$$

Поэтому в уравнениях (5) для обратного изменения коэфициенты со штрихами заменяются коэфициентами без штрихов.

§ 5. Возвратимся к общему случаю линейного изменения и выведем некоторые свойства последнего. Прежде всего легко показать, что все материальные точки, лежащие до изменения в одной плоскости, находятся в одной плоскости также и после изменения. Действительно, материальные точки (a, b, c), лежащие в одной плоскости, удовлетворяют линейному уравнению:

$$Aa + Bb + Cc + D = 0. \tag{17}$$

После изменения положение каждой из этих точек определяется величинами x, y, z, которые заданы уравнениями (4). Поэтому, если a, b, c удовлетворяют уравнению (17), то x, y, z удовлетворяют соотношению, которое получится, если исключить a, b, c или, проще всего, подставить значения (5) в (17). Получится снова линейное уравнение. Следовательно, точки (x, y, z) лежат также в одной плоскости.

Из закона сохранения плоскостей непосредственно следует закон сохранения прямых, так как прямая определяется пересечением двух плоскостей, а также закон сохранения порядка какой-либо поверхности, так как порядок поверхности определяется числом точек пересечения ее с прямой линией.

При линейном изменении сохраняется также параллелизм: если бы две материальные плоскости, которые были параллельны до изменения, сделались бы непараллельными после изменения, то линия пересечения их, не лежащая в бесконечности, состояла бы из таких материальных точек (a, b, c), которые до изменения лежали в бесконечности, для которых, следовательно, при конечных величинах x, y, z, хотя бы некоторые из величин (a, b, c) были бы бесконечными. Но это невозможно, на основании уравнений (5).

Из сохранения плоскостей и сохранения параллелизма следует также сохранение всех параллелепипедов. Но углы и объемы последних могут изменяться. Вычислим изменение объема какого-нибудь вырезанного из тела параллелепипеда, который может быть задан четырьмя произвольно выбранными вершинами: a_1, b_1, $c_1, \ldots$, a_4, b_4, c_4. До изменения объем этого параллелепипеда:

$$V = \pm \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

а после изменения:

$$V' = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

где x, y, z связаны с величинами a, b, c, имеющими одинаковые значки, при помощи уравнений (4).

Зависимость между V и V' проще всего получить, если умножить определитель (18) на функциональный определитель (7), который можно написать в виде определителя четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = D. \tag{20}$$

Согласно теореме умножения определителей, произведение определителей (18) и (20) есть также определитель четвертого порядка, отдельные члены которого получатся, если следующим образом сопоставить между собою каждую строку первого определителя с каждой строкой второго определителя: члены обеих строчек, стоящие на одинаковых местах, перемножаются, и произведения складываются. Таким образом первый член первой строки произведения равен:

$$a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 + 1 \cdot \lambda_0;$$

второй член первой строки:

$$a_1\mu_1 + b_1\mu_2 + c_1\mu_3 + 1 \cdot \mu_0;$$

четвертый член первой строки:

$$a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \text{ и т. д.},$$

а весь определитель окажется, на основании (4), тождественным с определителем (19). Поэтому имеем:

$$V \cdot D = V', \tag{21}$$

причем все три величины V, V', D положительны.

Так как последнее соотношение не зависит от величины и формы рассматриваемого параллелепипеда, и, значит, действительно также для бесконечно малых параллелепипедов, то уравнение (21) можно обобщить непосредственно на всякий объем, вырезанный из тела. Мы получим такое правило: при линейном изменении объемы всех частей тела изменяются в одинаковой мере, причем отношение объема какой-либо части тела после изменения к объему ее до изменения равно функциональному определителю. В согласии с этим находится уравнение (15), по которому при всяком изменении неизменяемого тела функциональный определитель равен единице.

„Расширением“ объема называется отношение изменения объема к первоначальному объему. Таким образом расширение при линейном изменении равно:

$$\frac{V' - V}{V} = D - 1. \tag{22}$$

Оно положительно или отрицательно, смотря по тому, происходит ли растяжение или сжатие.

§ 6. Если подвергнуть какое-нибудь тело двум или нескольким последовательным линейным изменениям, то в результате получится также линейное изменение. В этом легко убедиться, если рассмотреть взаимоотношение между координатами какой-либо материальной точки после совершения последнего изменения и ее первоначальными координатами (a, b, c). Если точка после первого изменения оказывается в месте (x, y, z), после второго в месте (x', y', z') и т. д., после последнего изменения в месте (x^*, y^*, z^*), то соотношения между a, b, c и x^*, y^*, z^* получатся в результате исключения промежуточных координат. Эти соотношения будут, очевидно, также линейными уравнениями.

Обратно, каждое линейное изменение можно разложить на несколько последовательно выполненных линейных изменений, причем порядок последних вообще, конечно, небезразличен. Вполне естественно произвести это разложение таким образом, чтобы характер отдельных изменений был возможно более простым и физически наглядным. Тогда удалось бы свести общий случай (4) линейного изменения к некоторому числу более простых и легко исследуемых изменений и вместе с тем выяснить физическое значение постоянных изменения λ, μ, ν.

Первый шаг на этом пути состоит в том, что мы сводим изменение (4) к такому изменению, при котором материальная точка $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ сохраняет свое положение. Это легко сделать, если сообщить телу п о с т у п а т е л ь н о е п е р е м е щ е н и е с компонентами λ_0, μ_0, ν_0, и таким образом упомянутая точка придет в свое конечное положение. Останется еще так называемое „однородное изменение“, общий вид которого:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ y &= \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c, \\ z &= \nu_1 a + \nu_2 b + \nu_3 c. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Последним мы и займемся подробнее.

Рассмотрим все те материальные точки, которые лежат до изменения на поверхности шара, описанного из начала координат как центра произвольным радиусом R, т. е. точки, для которых

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2. \tag{24}$$

После изменения эти точки лежат, согласно § 5, на некоторой поверхности второго порядка. Так как ни одна точка не смещается в бесконечность, то эта поверхность есть эллипсоид с центром в начале координат, в чем легко убедиться, если подставить в (24) величины a, b, c, выраженные при помощи уравнений (23) через x, y, z. Те материальные прямые, которые до изменения совпадали с осями координат, после изменения не будут, вообще говоря, перпендикулярными друг к другу. Однако можно утверждать, что они и после изменения образуют тройку взаимно сопряженных диаметров эллипса, т. е. что касательная к эллипсоиду плоскость, проведенная через конец одного из диаметров, параллельна плоскости, проходящей через два другие диаметра: во-первых, три координатные оси, как и всякие три взаимно перпендикулярные прямые, представляют собою три взаимно сопряженные диаметра шара, и, во-вторых, свойство образовать сопряженную тройку принадлежит к тем свойствам, которые не изменяются при линейном изменении, так как при этом сохраняются и касательная плоскость, и параллелизм.

Среди всех трех взаимно сопряженных диаметров эллипсоида имеются три таких сопряженных диаметра, которые образуют прямые углы: это — оси эллипсоида. Отсюда следует, что те три материальные прямые, которые совпадают с осями эллипсоида после изменения, перпендикулярны друг к другу также и до изменения, так как тогда они являются сопряженными диаметрами шара. Другими словами: существуют три определенные материальные прямые, которые перпендикулярны друг к другу как до изменения, так и после изменения.

С помощью этого правила можно всякое однородное линейное изменение разложить на простое вращение около начала координат, которое совершается таким образом, что сообщает трем названным прямым новые направления, и, кроме того, на некоторое линейное изменение, которое имеет то свойство, что три взаимно перпендикулярные прямые сохраняют свое направление. Такое изменение мы назовем расширением по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

§ 7. Рассмотрим подробнее свойство расширения по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Поместим координатные оси по этим трем направлениям — так называемым „осям расширения", и определим, какое упрощение получат при сделанных допущениях общие уравнения (23) однородного линейного изменения. Если направление оси x остается неизменным, то при $b=0$ и $c=0$ должно быть также $y=0$ и $z=0$, и, стало быть, $\mu_1=0$ и $\nu_1=0$. Соответственные выражения получатся и для двух других осей. Отсюда мы получим общее выражение для расширения по трем координатным осям в виде уравнений:

$$x=\lambda_1 a,\quad y=\mu_2 b,\quad z=\nu_3 c. \tag{25}$$

Функциональный определитель, согласно (7) и (10):

$$D=\lambda_1\mu_2\nu_3>0, \tag{26}$$

причем все три коэфициента положительны, так как оси координат не изменяют своего направления на противоположное.

С другой стороны, оси координат представляют собою, по крайней мере в общем случае, единственные направления, которые не подвергаются изменению. Дело в том, что материальные точки, которые до изменения лежат на прямой с отношениями между косинусами направления (угловыми коэфициентами)

$$\alpha:\beta:\gamma=a:b:c,$$

образуют после изменения прямую с отношениями косинусов направления

$$x:y:z=\lambda_1\alpha:\mu_2\beta:\nu_3\gamma.$$

Объемное расширение равно, на основании (22), выражению:

$$D-1=\lambda_1\mu_2\nu_3-1. \tag{27}$$

Можно получить также расширение прямой, если разделить изменение расстояния между двумя точками прямой на их первоначальное расстояние. Расширения по трем осям равны:

$$\frac{x-a}{a}=\lambda_1-1;\quad \frac{y-b}{b}=\mu_2-1;\quad \frac{z-c}{c}=\nu_3-1. \tag{28}$$

Они называются обычно „главными расширениями". Их выражения наглядно определяют физический смысл трех коэфициентов изменения.

В частном случае $\lambda_1=\mu_2=\nu_3$ все три главные расширения, положительные или отрицательные, равны между собой, все прямые сохраняют свое направление, оси расширения становятся неопределенными, и тело испытывает всестороннее равномерное растяжение или сжатие, причем все части его остаются подобными самим себе.

§ 8. Мы видели, что каждое линейное изменение можно разложить на поступательное перемещение, вращение и расширение по трем взаимно перпендикулярным направлениям. В таком случае нам предстоит задача вывести в действительности эти три отдельные операции для определенного изменения, заданного уравнениями (4), или, другими словами, по заданным коэфициентам λ, μ, ν вычислить соответственные отдельные изменения. С этой целью убедимся прежде всего, что для вычисления всех искомых величин имеется ровно столько же уравнений, сколько есть неизвестных. Действительно, уравнения (4) содержат 12 независимых постоянных λ, μ, ν, которые мы рассматриваем как заданные. Ровно столько же нужно величин, характеризующих отдельные изменения, а именно: три — для поступательного перемещения, три — для вращения и шесть — для расширения по трем перпендикулярным направлениям, так как требуются три величины для определения направления осей расширения и еще три величины для определения главных расширений.

Для компонентов поступательного перемещения получим, как мы уже видели в § 6, просто величины λ_0, μ_0, ν_0, после отделения которых останутся уравнения (23) для однородного изменения. Чтобы получить взаимоотношения между коэфициентами последнего и величинами, определяющими вращение и расширение, положим, что тело сперва испытывает расширение по трем взаимно перпендикулярным направлениям, а затем вращение около начала координат, и вычислим полное изменение положения, которое претерпевает при этом определенная материальная точка (a, b, c). Обозначим направления трех осей расширения, которые в общем случае, конечно, не совпадают с осями координат, при помощи косинусов направления $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, а постоянные дилатации обозначим l_0, m_0, n_0, так как буквы λ, μ, ν имеют другое значение в уравнениях (23). Чтобы иметь возможность применить здесь уравнение (25) для расширения, отнесем прежде всего материальную точку (a, b, c) к осям расширения как к координатным осям. Координаты точки получат тогда значения:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c &= \xi, \\ \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c &= \eta, \\ \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c &= \zeta. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Затем совершим расширение. Из уравнений (25) получим координаты рассматриваемой материальной точки относительно осей расширения после изменения:

$$\xi' = l_0\xi, \quad \eta' = m_0\eta, \quad \zeta' = n_0\zeta. \tag{30}$$

Далее пусть последует вращение. Положим, что оси расширения перешли из направлений, обозначенных величинами α, β, γ, в некоторые другие направления, которым соответствуют косинусы $\alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \alpha_2', \beta_2', \gamma_2', \alpha_3', \beta_3', \gamma_3'$. Тогда координаты нашей материальной точки относительно трех направлений $(\alpha', \beta', \gamma')$ будут после вращения равны ξ', η', ζ', так как положение точки относительно осей расширения не изменяется при вращении. Относительно же первоначальной, неподвижной в пространстве системы координат точка имеет координаты x, y, z, так как вместе с вращением завершается все изменение тела.

Поэтому мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1'\xi' + \alpha_2'\eta' + \alpha_3'\zeta', \\ y &= \beta_1'\xi' + \beta_2'\eta' + \beta_3'\zeta', \\ z &= \gamma_1'\xi' + \gamma_2'\eta' + \gamma_3'\zeta'. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Этими равенствами замыкается круг рассуждений, и координаты x, y, z выражаются через координаты a, b, c. Для этого нужно только выразить ξ', η', ζ' через ξ, η, ζ при помощи (30), а последние величины выразить через a, b, c при помощи (29). Если проделать это и полностью отождествить полученные три уравнения с общими уравнениями (23) линейного однородного изменения, то получим следующие девять соотношений:

$$\left.\begin{aligned} l_0\alpha_1\alpha_1' + m_0\alpha_2\alpha_2' + n_0\alpha_3\alpha_3' &= \lambda_1, \\ l_0\beta_1\alpha_1' + m_0\beta_2\alpha_2' + n_0\beta_3\alpha_3' &= \lambda_2, \\ l_0\gamma_1\alpha_1' + m_0\gamma_2\alpha_2' + n_0\gamma_3\alpha_3' &= \lambda_3, \\ l_0\alpha_1\beta_1' + m_0\alpha_2\beta_2' + n_0\alpha_3\beta_3' &= \mu_1, \\ l_0\beta_1\beta_1' + m_0\beta_2\beta_2' + n_0\beta_3\beta_3' &= \mu_2, \\ l_0\gamma_1\beta_1' + m_0\gamma_2\beta_2' + n_0\gamma_3\beta_3' &= \mu_3, \\ l_0\alpha_1\gamma_1' + m_0\alpha_2\gamma_2' + n_0\alpha_3\gamma_3' &= \nu_1, \\ l_0\beta_1\gamma_1' + m_0\beta_2\gamma_2' + n_0\beta_3\gamma_3' &= \nu_2, \\ l_0\gamma_1\gamma_1' + m_0\gamma_2\gamma_2' + n_0\gamma_3\gamma_3' &= \nu_3, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

построение которых легко подметить. Из них получается при заданных λ, μ, ν девять содержащихся в них неизвестных.

§ 9. При производстве вычислений ограничимся частным случаем бесконечно малого линейного изменения. Этот случай почти полностью осуществлен во многих явлениях, например, в твердых телах. Но он имеет известное значение и для конечных изменений, так как конечное изменение всегда происходит в течение конечного времени и поэтому состоит из ряда бесконечно малых изменений, которые совершаются последовательно в течение бесконечно малых промежутков времени.

Удобнее всего ввести упрощения, которые возможны при бесконечно малом изменении, если вместо конечных координат x, y, z материальной точки воспользоваться бесконечно малыми компонентами ее смещения (3). Тогда уравнения изменения (4) напишутся так:

$$\left.\begin{aligned} u &= \lambda_0 + \lambda a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ v &= \mu_0 + \mu_1 a + \mu b + \mu_3 c, \\ w &= \nu_0 + \nu_1 a + \nu_2 b + \nu c, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

где для упрощения полагаем:

$$\lambda_1 - 1 = \lambda, \quad \mu_2 - 1 = \mu, \quad \nu_3 - 1 = \nu. \tag{34}$$

Все 12 коэфициентов λ, μ, ν в уравнениях (33) бесконечно малы.

С другой стороны, главные расширения (28), разумеется, также бесконечно малы. Поэтому полагаем их значения:

$$l_0 - 1 = l, \quad m_0 - 1 = m, \quad n_0 - 1 = n. \tag{35}$$

Кроме того косинусы направлений осей расширения α, β, γ, которые, вообще говоря, конечны, претерпевают при вращении лишь бесконечно малые изменения. Поэтому мы можем положить:

$$\alpha_1' = \alpha_1 + d\alpha_1,\ \beta_1' = \beta_1 + d\beta_1 \text{ и т. д.}$$

Если ввести все эти подстановки в уравнения (32) и, кроме того, принять во внимание общие соотношения [1, (333), (334)] между косинусами направлений и соотношения [1, (335), (336)] между их диференциалами, то девять уравнений (32) примут такой вид:

$$\left.\begin{aligned}
&l\alpha_1^2 + m\alpha_2^2 + n\alpha_3^2 = \lambda,\\
&l\alpha_1\beta_1 + m\alpha_2\beta_2 + n\alpha_3\beta_3 - \zeta = \lambda_2,\\
&l\alpha_1\gamma_1 + m\alpha_2\gamma_2 + n\alpha_3\gamma_3 + \eta = \lambda_3,\\
&l\alpha_1\beta_1 + m\alpha_2\beta_2 + n\alpha_3\beta_3 + \zeta = \mu_1,\\
&l\beta_1^2 + m\beta_2^2 + n\beta_3^2 = \mu,\\
&l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3 - \xi = \mu_3,\\
&l\alpha_1\gamma_1 + m\alpha_2\gamma_2 + n\alpha_3\gamma_3 - \eta = \nu_1,\\
&l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3 + \xi = \nu_2,\\
&l\gamma_1^2 + m\gamma_2^2 + n\gamma_3^2 = \nu,
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

где ξ, η, ζ представляют, согласно (1, § 101), компоненты того бесконечно малого вращения, которое перемещает оси расширения из направлений (α, β, γ) в направления (α', β', γ'). Значения их получаются непосредственно в виде:

$$\xi = \frac{\nu_2 - \mu_3}{2},\quad \eta = \frac{\lambda_3 - \nu_1}{2},\quad \zeta = \frac{\mu_1 - \lambda_2}{2}. \tag{37}$$

Величина и направление расширения выражаются шестью уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
&l\alpha_1^2 + m\alpha_2^2 + n\alpha_3^2 = \lambda,\\
&l\beta_1^2 + m\beta_2^2 + n\beta_3^2 = \mu,\\
&l\gamma_1^2 + m\gamma_2^2 + n\gamma_3^2 = \nu,\\
&l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3 = \frac{\nu_2 + \mu_3}{2},\\
&l\gamma_1\alpha_1 + m\gamma_2\alpha_2 + n\gamma_3\alpha_3 = \frac{\lambda_3 + \nu_1}{2},\\
&l\alpha_1\beta_1 + m\alpha_2\beta_2 + n\alpha_3\beta_3 = \frac{\mu_1 + \lambda_2}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Воспользовавшись этими уравнениями и рассмотрев определитель D (7), можно установить, состоит ли изменение, кроме поступательного перемещения, только из расширения по трем взаимно перпендикулярным направлениям или же сопровождается также вращением. Если определитель симметричен, т. е. не изменяется при взаимной замене строк и столбцов, то ξ, η, ζ все равны нулю, и вращения нет. Следует иметь в виду, что только оси расширения не поворачиваются. Другие же прямые, как мы видели в § 7, изменяют свое направление также и в случае чистого расширения тела.

Противоположный случай, когда изменение состоит только из поступательного перемещения и вращения, характеризуется тем, что главные расширения l, m, n обращаются в нуль. Тогда, по (38) и (37):

$$\lambda = \mu = \nu = 0,\quad \nu_2 = -\mu_3 = \xi,\quad \lambda_3 = -\nu_1 = \eta,\quad \mu_1 = -\lambda_2 = \zeta,$$

и уравнения (33) для компонентов смещения переходят в уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
u &= \lambda_0 - \zeta b + \eta c,\\
v &= \mu_0 + \zeta a - \xi c,\\
w &= \nu_0 - \eta a + \xi b,
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

аналогичные общим выражениям [1, (348)] для смещений точек абсолютно твердого тела.

Остается еще задача вычислить из уравнений (38) главные расширения l, m, n и косинусы направления (α, β, γ). Для этого воспользуемся снова общими соотношениями между косинусами направлений, на сей раз в форме [1, (331), (332)].

С помощью их получатся из уравнений (38) следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda\alpha_1 + \frac{\mu_1 + \lambda_2}{2}\beta_1 + \frac{\lambda_3 + \nu_1}{2}\gamma_1 &= l\alpha_1,\\
\frac{\mu_1 + \lambda_2}{2}\alpha_1 + \mu\beta_1 + \frac{\nu_2 + \mu_3}{2}\gamma_1 &= l\beta_1,\\
\frac{\lambda_3 + \nu_1}{2}\alpha_1 + \frac{\nu_2 + \mu_3}{2}\beta_1 + \nu\gamma_1 &= l\gamma_1.
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Эти три уравнения линейны и однородны относительно α_1, β_1, γ_1. Так как эти величины не могут все равняться нулю, то определитель уравнения должен равняться нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix}
\lambda - l & \frac{\mu_1 + \lambda_2}{2} & \frac{\lambda_3 + \nu_1}{2}\\
\frac{\mu_1 + \lambda_2}{2} & \mu - l & \frac{\nu_2 + \mu_3}{2}\\
\frac{\lambda_3 + \nu_1}{2} & \frac{\nu_2 + \mu_3}{2} & \nu - l
\end{vmatrix} = 0. \tag{41}$$

Получилось кубическое уравнение для вычисления l. В коэфициентах этого уравнения цифра 1 ничем не выделяется по сравнению с другими. Отсюда следует, что этому же уравнению удовлетворяют также другие главные расширения m и n, или, другими словами, что три корня этого уравнения представляют собою величины l, m, n и потому всегда вещественны. Который из корней обозначить через l, m или n, — это остается, конечно, неопределенным. Можно, например, положить $l > m > n$, не ограничивая общности решения. Зная l, m, n, можно при помощи (40) вычислить соответственные (α, β, γ). Знак последних, одинаковый для всех, остается неопределенным.

Объемное расширение (22) для бесконечно малого изменения можно вычислить, найдя функциональный определитель (7) и принимая во внимание (34). Если пренебречь бесконечно малыми величинами высшего порядка, то получим величину объемного расширения:

$$D - 1 = \lambda + \mu + \nu. \tag{42}$$

Таким образом в выражение объемной дилатации входят только диагональные члены определителя. Тот же результат можно, конечно, получить, если иметь в виду, что для объемного расширения вращение не принимается во внимание, и на основании (27) и (35)

$$D - 1 = l_0 m_0 n_0 - 1 = l + m + n. \tag{43}$$

Эта величина представляет собою сумму корней кубического относительно l уравнения (41), т. е. равна коэфициенту при l^2 в этом уравнении:

$$l + m + n = \lambda + \mu + \nu, \tag{44}$$

что можно получить и непосредственно, если сложить первые три уравнения (38).

§ 10. Разложение линейного изменения на поступательное перемещение, вращение и расширение по трем перпендикулярным направлениям не единственно возможное, но оно имеет преимущество благодаря своему простому физическому значению. Вместо него можно произвести также другие сравнительно простые разложения. Так, например, бесконечно малое однородное изменение

$$\left.\begin{aligned} u &= \lambda a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ v &= \mu_1 a + \mu b + \mu_3 c, \\ w &= \nu_1 a + \nu_2 b + \nu c \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

можно рассматривать как произведенное расширением по трем координатным осям, с главными расширениями λ, μ, ν, и кроме

того еще шестью изменениями, которые могут быть представлены уравнениями:

$$u = \lambda_2 b, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad u = \lambda_3 c, \quad v = 0, \quad w = 0 \text{ и т. д.}$$

Порядок совершения этих изменений безразличен, так как перемена этого порядка вызывает только различия в величинах меньшего порядка [ср. *1*, (101)]. Каждое из этих шести изменений имеет простое значение: так, например, в первом из них смещения ни зависят от a и c и все происходят в направлении оси x, т. е. каждая плоскость параллельная плоскости xz, совершает простое поступательное перемещение, она смещается как целое, без поворота и без деформации в направлении оси x, причем только величина смещения меняется при переходе от одной плоскости к другой. Такое изменение напоминает скользящее движение двух половинок ножниц. Оно называется „срезом“ или „сдвигом“. Отсюда следует правило, что каждое бесконечно малое однородное изменение может быть разложено на расширение по трем координатным осям и шесть сдвигов плоскостей, параллельных координатным плоскостям, по направлению осей.

Несмотря на простую форму, это правило имеет вообще довольно сложное физическое значение. Возьмем, например, бесконечно малое вращение $u = -\zeta b$, $v = \zeta a$, $w = 0$ как частный случай общего смещения (39). Согласно последнему правилу, это смещение пришлось бы рассматривать как произведенное двумя последовательными сдвигами, т. е. изменениями, которые связаны с деформациями тела. Введение последних совершенно излишне, так как они, понятно, взаимно уничтожаются.

§ 11. Рассмотренный в последних параграфах случай линейного изменения представляет интерес не только как простой частный случай, он имеет также важное значение для самого общего случая **п р о и з в о л ь н о г о к о н е ч н о г о и з м е н е н и я**. К рассмотрению последнего мы теперь и перейдем, возвратившись к уравнениям (2). Это значение линейного изменения основано на том, что всякую произвольную функцию можно рассматривать как линейную функцию внутри бесконечно малой области ее переменных.

Обратим внимание на некоторую материальную точку P_0 с координатами a_0, b_0, c_0. Под влиянием изменения точка займет положение x_0, y_0, z_0, причем, по (2),

$$x_0 = f(a_0, b_0, c_0), \quad y_0 = \varphi(a_0, b_0, c_0), \quad z_0 = \psi(a_0, b_0, c_0). \tag{46}$$

Другая точка P, лежащая в непосредственной близости от точки P_0 и имеющая координаты

$$a = a_0 + a', \quad b = b_0 + b', \quad c = c_0 + c', \tag{47}$$

займет после изменения положение:

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z'. \tag{48}$$

Полагая, что a', b', c' бесконечно малы, разложением в ряд Тейлора, по (2) и (46) получим:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_0 a' + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_0 b' + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_0 c', \\ y' &= \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0 a' + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_0 b' + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_0 c', \\ z' &= \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_0 a' + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_0 b' + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_0 c'. \end{aligned}\right| \tag{49}$$

Давая величинам a', b', c' всевозможные бесконечно малые значения, получим из этих уравнений изменение той бесконечно малой части тела, которая окружает точку P_0. Таким образом это изменение можно рассматривать как состоящее из конечного поступательного перемещения с компонентами:

$$x_0 - a_0 = u_0, \quad y_0 - b_0 = v_0, \quad z_0 - c_0 = w_0,$$

которое переводит точку P из положения (a, b, c) в положение

$$a + u_0 = x_0 + a', \quad b + v_0 = y_0 + b', \quad c + w_0 = z_0 + c',$$

и из конечного линейного однородного изменения (49) с точкой P_0 в качестве неподвижного начала, причем последнее изменение переводит точку P с координатами (a', b', c') в положение (x', y', z'). Обозначим для сокращения девять коэфициентов изменения (49):

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_0 = \lambda_1, && \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_0 = \lambda_2, && \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_0 = \lambda_3, \\ &\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0 = \mu_1, && \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_0 = \mu_2, && \left(\frac{dy}{\partial c}\right)_0 = \mu_3, \\ &\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_0 = \nu_1, && \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_0 = \nu_2, && \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_0 = \nu_3. \end{aligned}\right| \tag{50}$$

Тогда мы формально получим уравнения (23) и можем высказать все те следствия, которые вывели раньше из них.

Таким образом при любом изменении тела каждая бесконечно малая часть его или каждый „элемент тела" изменяется линейно, и отличие от прежде рассмотренного линейного изменения тела состоит лишь в том, что коэфициенты изменения (λ, μ, ν) принимают разные значения от элемента к элементу. Из вытекающих отсюда правил упомянем важнейшие.

Бесконечно малые параллелепипеды сохраняются даже при самом общем изменении, но углы их могут получить любые другие значения. Точно также сохраняется порядок всякой бесконечно малой поверхности. Так, например, бесконечно малый шар превращается в эллипсоид, в центр которого переходит центр шара. Отсюда вытекает одно своеобразное на первый взгляд

следствие: поверхность тела всегда состоит после изменения из тех же самых материальных точек, что и до изменения. Действительно, каждую точку, которая до изменения не лежит на поверхности, можно рассматривать как центр шара, который весь лежит внутри тела, поэтому его центр и остается внутри. То же самое относится, конечно, и к обратному изменению, и таким образом следствие является доказанным.

Объемное расширение определяется, как и в (22), при помощи функционального определителя (7):

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}. \tag{51}$$

(Значок 0 мы будем отныне опускать для упрощения письма.) При этом величина D представляет собой отношение объема содержащего материальную точку элемента тела после изменения к объему того же элемента тела до изменения.

Если разрешить уравнения (49) относительно a', b', c', то мы получим для последних линейные выражения с коэфициентами (λ', μ', ν'), значения которых, на основании (6), равны:

$$\lambda'_1 = \frac{[\lambda_1]}{D} = \frac{\left[\dfrac{\partial x}{\partial a}\right]}{D} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial c} - \dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial b}}{D} \quad \text{и т. д.} \tag{52}$$

Однако, с другой стороны, можно сперва разрешить уравнения (2) относительно a, b, c, а затем уже произвести подстановки (47) и (48) и разложение в ряд Тейлора. Таким путем получим, аналогично (49):

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\partial a}{\partial x} x' + \frac{\partial a}{\partial y} y' + \frac{\partial a}{\partial z} z', \\ b' &= \frac{\partial b}{\partial x} x' + \frac{\partial b}{\partial y} y' + \frac{\partial b}{\partial z} z', \\ c' &= \frac{\partial c}{\partial x} x' + \frac{\partial c}{\partial y} y' + \frac{\partial c}{\partial z} z', \end{aligned}$$

где коэфициенты должны совпадать с (λ', μ', ν'). Отсюда получаются следующие формулы преобразования:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\left[\dfrac{\partial x}{\partial a}\right]}{D}, \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\left[\dfrac{\partial y}{\partial a}\right]}{D}, \ldots \tag{53}$$

При помощи последних можно выразить производные по независимым переменным x, y, z в зависимости от производных по независимым переменным a, b, c.

Аналогичные уравнения выражают, очевидно, также обратный переход от x, y, z к независимым переменным a, b, c. Функциональный определитель такого преобразования:

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} & \frac{\partial b}{\partial z} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{54}$$

представляет отношение, в котором изменяется объем элемента тела, если материальная точка переходит из положения x, y, z в положение a, b, c. Так как оба перехода взаимно уничтожаются, то

$$D \cdot D' = 1. \tag{55}$$

Это соотношение можно получить непосредственно, если приложить теорему об умножении определителей (§ 5) к определителям (51) и (54) во второй форме и принять во внимание, что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \\ &\frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Кроме объемного расширения $D-1$ элемента тела особенно важны его вращение и расширение. И то и другое можно получить из уравнений (32), если воспользоваться значениями (50) для девяти коэфициентов λ, μ, ν.

§ 12. Мы произведем вычисление только для частного случая произвольного бесконечно малого изменения. Пусть это изменение характеризуется составляющими смещения (3), которые заданы в виде произвольных бесконечно малых функций от a, b, c. В таком случае для элемента тела, заключающего в себе точку (a_0, b_0, c_0), действительны все правила § 9. В частности, вращение задано уравнениями (37), расширение—уравнениями (38)

причем бесконечно малые коэфициенты (λ, μ, ν) имеют следующие значения, согласно (50), (3) и (34):

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_0, \quad \lambda_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0, \quad \lambda_3 = \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_0, \\ &\mu_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)_0, \quad \mu = \left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)_0, \quad \mu_3 = \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_0, \\ &\nu_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)_0, \quad \nu_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)_0, \quad \nu = \left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)_0. \end{aligned}\right| \tag{57}$$

Если ввести компоненты смещения u, v, w, то буквы x, y, z в их прежнем значении становятся излишними, так как вместо них можно писать $a+u$, $b+v$, $c+w$. Поэтому часто пишут (x, y, z) вместо (a, b, c), а последних букв вовсе не употребляют. Но если даже оставить все прежние обозначения, то при бесконечно малых изменениях можно без заметной ошибки заменить во всех производных переменные (a, b, c) переменными (x, y, z). Так, например,

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial a}$$

или, по (3)

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{58}$$

до бесконечно малых высшего порядка. То же самое относится и к остальным производным.

Если опустить повсюду значок 0, то компоненты вращения равны, по (37) и (57):

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{59}$$

Для вычисления расширения введем сокращенные обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = x_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = y_y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = z_z, \\ &\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = y_z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = z_x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x_y, \end{aligned}\right\}. \tag{60}$$

причем, очевидно,

$$y_z = z_y, \quad z_x = x_z, \quad x_y = y_x. \tag{60a}$$

Тогда объемное расширение, по (42) и (57), равно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = x_x + y_y + z_z. \tag{61}$$

Далее, главные расширения равны, по (57), корням уравнения (41) третьей степени относительно l:

$$\begin{vmatrix} x_x - l & \frac{1}{2} x_y & \frac{1}{2} x_z \\ \frac{1}{2} y_x & y_y - l & \frac{1}{2} y_z \\ \frac{1}{2} z_x & \frac{1}{2} z_y & z_z - l \end{vmatrix} = 0. \tag{62}$$

Направления соответствующих осей расширения можно получить на основании (40) и (57) при помощи двух из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (x_x - l)\alpha + \frac{x_y}{2}\beta + \frac{x_z}{2}\gamma &= 0, \\ \frac{y_x}{2}\alpha + (y_y - l)\beta + \frac{y_z}{2}\gamma &= 0, \\ \frac{z_x}{2}\alpha + \frac{z_y}{2}\beta + (z_z - l)\gamma &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

причем общий знак косинусов направлений α, β, γ остается неопределенным.

Обратно, если даны главные расширения l, m, n и направления соответствующих осей расширения (α, β, γ), то компоненты расширения получаются однозначно из (38):

$$\left.\begin{aligned} x_x &= l\alpha_1^2 + m\alpha_2^2 + n\alpha_3^2, \ldots \\ \frac{1}{2} z_y = \frac{1}{2} y_z &= l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

§ 13. Все эти соотношения встречаются не только в теории деформируемых тел. В измененном значении они играют существенную роль и для других отделов физики. В векторном исчислении они имеют особые названия и обозначаются сокращенными символами. Так, например, вектор, который получается из вектора смещения $\mathbf{q}$ с компонентами u, v, w таким образом, что скобки в уравнениях (59) представляют собою составляющие нового вектора, носит название „ротора" (rot или curl), или „вихря" вектора $\mathbf{q}$, и потому для обозначения вектора вращения $\mathbf{o}$ с компонентами ξ, η, ζ пишут вместо трех уравнений (59) одно уравнение:

$$\mathbf{o} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{q}. \tag{65}$$

Формальное неизящество формулы, состоящее в том, что вращение равно не целому ротору, а половине его, приходится принять уже заодно с принятым обозначением, но оно вообще мало заметно, так как операция rot применяется, главным образом, не в механике, а в электродинамике, где о вращениях нет речи.

Далее, ту скалярную величину, которая получается из вектора $\mathbf{q}$ при помощи операции (61), называют „дивергенцией" (div), или „расхождением", а объемное расширение обозначают

$$\operatorname{div}\mathbf{q}. \tag{66}$$

В этой формуле, как и в предыдущей, исключена всякая зависимость от какой-либо системы координат.

Наконец, что касается расширения по трем взаимно перпендикулярным направлениям, то его нельзя охарактеризовать как вектор при помощи одной направленной величины. Она представляет собой частный случай величины более высокого порядка, называемой „тензором", в данном случае тензором второго ранга, причем вектор рассматривается как тензор первого ранга. Тензор обозначается при помощи шести независимых друг от друга величин: либо при помощи трех „главных значений" l, m, n в связи с тремя соответственными взаимно перпендикулярными „главными осями" ($\alpha_1, \ldots, \gamma_3$), причем оба противоположных направления какой-либо оси совершенно равнозначны, либо же при помощи шести „компонентов" x_x, y_y, z_z, $\frac{1}{2}y_z$, $\frac{1}{2}z_x$, $\frac{1}{2}x_y$. Ввиду соотношений (60a), тензор называется симметричным. Между главными значениями, направлениями главных осей и компонентами существуют соотношения (62), (63) и (64). Если в частном случае три главных значения l, m, n равны между собою (равномерное расширение), то

$$x_x = y_y = z_z = l = m = n,$$

$$x_y = y_z = z_x = 0,$$

и направления главных осей совершенно неопределенны.

Дальнейшие свойства симметричного тензора будут рассмотрены позднее (§ 20).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

§ 14. Теперь, после чисто кинематических соображений, обратимся к динамике, т. е. к исследованию сил, которые вызывают деформацию тела. Сперва поставим вопрос об условиях равновесия.

Возьмем какое-нибудь тело, которое находится в деформированном состоянии под воздействием некоторых сил, например, согнутый стержень, скрученную проволоку, сжатый газ. Силы, действующие на тело, мы разделим на два класса:

1. Силы, которые действуют на все, в том числе и внутренние части тела — „массовые силы". Мы полагаем, что эти силы, подобно, например, тяжести, пропорциональны элементам массы тела.

Если $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ обозначает объем, k — плотность элемента массы, то составляющие массовой силы, действующей на элемент, равны (ср. *1*, § 31):

$$Xkd\tau, \quad Ykd\tau, \quad Zkd\tau. \tag{67}$$

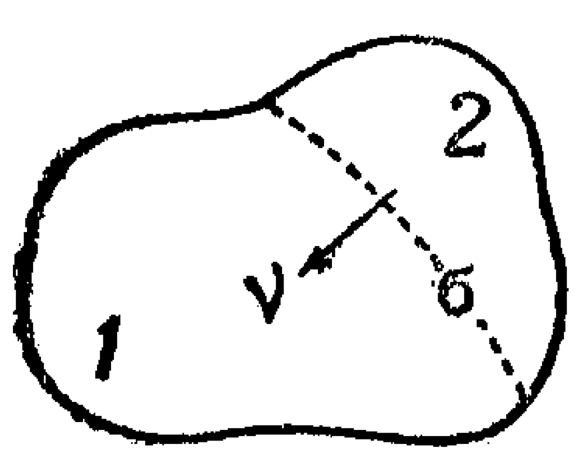
Величины X, Y, Z считаются конечными.

2. Силы, которые действуют на поверхность тела, — „поверхностные силы". Назовем частное, равное результирующей силе, действующей на участок поверхности тела σ, разделенной на площадь поверхности σ, „средним давлением" на σ. Если участок поверхности сожмется в элемент поверхности $d\sigma$, то это частное мы назовем просто „давлением" на $d\sigma$ и будем рассматривать его как конечную величину. Так как для $d\sigma$ существенно не только место, но и направление, то для обозначения составляющих поверхностной силы, действующей на $d\sigma$, мы прибавим к буквам X, Y, Z значок ν, указывающий на нормаль к $d\sigma$, направленную внутрь тела. Тогда составляющие поверхностной силы, действующей на элемент поверхности, равны:

$$X_\nu d\sigma, \quad Y_\nu d\sigma, \quad Z_\nu d\sigma. \tag{68}$$

Направление этой поверхностной силы может составлять любой угол с нормалью ν. Если оба направления совпадают, то поверхностная сила производит сжатие тела, подобно действию давления на газ. Если направления противоположны, то поверхностная сила производит растяжение, подобно силе, действующей на натянутую проволоку. Если направления перпендикулярны, то поверхностная сила производит сдвиг, как при кручении или при трении.

Давление — равнодействующая трех составляющих давления X_ν, Y_ν, Z_ν — имеет, конечно, размерность частного от деления силы на поверхность, т. е. $[ml^{-1}\ t^{-2}]$ (*1*, § 9).



Черт. 1.

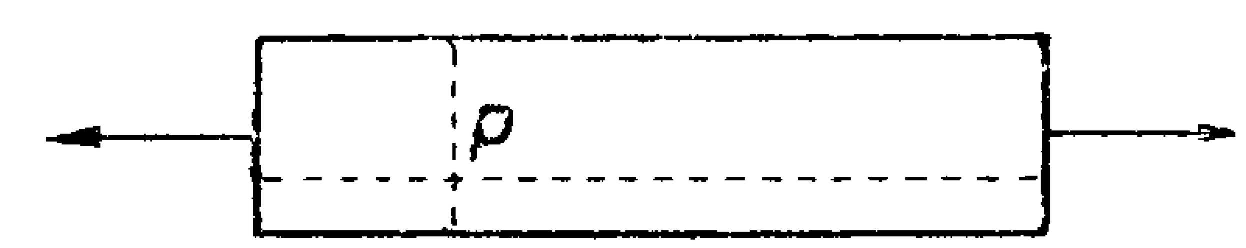
§ 15. Все законы равновесия деформированного тела содержатся в одной теореме общей механики (*1*, § 112): е с л и с и с т е м а т о ч е к н а х о д и т с я в р а в н о в е с и и, т о в н е ш н и е с и л ы у р а в н о в е ш и в а ю т с я, к а к е с л и б ы с и с т е м а о т в е р д е л а.

Плодотворность этой теоремы выражается в том, что можно любую часть тела рассматривать как систему точек. Представим себе, например, что тело разделено на две части — *1* и *2* (черт. 1) — некоторой воображаемой поверхностью σ. Остановим наше внимание на части *1*. Мы можем полагать, что эта часть тела твердая и находится в равновесии под воздействием внешних сил, приложенных к ней. Но к внешним силам относятся, на основании *1*, § 112, не только массовые силы и силы, действующие на действительную поверхность тела, но также и те силы, которыми часть тела *2* действует на воображаемую поверхность σ. Эти силы определяются следующим образом: если бы совершенно была удалена часть тела *2*, то их необходимо было бы приложить для того, чтобы не было нарушено равновесие.

На каждый элемент $d\sigma$ поверхности части тела *1* действует поверхностная сила с компонентами (68), согласно с принятым нами обозначением. Таким образом можно положить, что и внутри какого-нибудь тела в каждой точке действуют некоторые силы давления. Однако величина их зависит не только от места, но и от направления элемента поверхности $d\sigma$ или, иначе, его нормали ν. Если обратить направление ν, т. е. рассматривать часть тела *2* как систему точек, то вместо (68) появится поверхностная сила, с которой часть *1* действует на часть *2* на элементе поверхности $d\sigma$. На основании принципа равенства действия и противодействия эта сила противоположна предыдущей. Поэтому имеем вообще

$$X_{-\nu} = -X_\nu, \quad Y_{-\nu} = -Y_\nu, \quad Z_{-\nu} = -Z_\nu. \tag{69}$$

Чтобы убедиться, насколько различные значения принимает давление в одном и том же месте в зависимости от направления $d\sigma$, рассмотрим в качестве п р и м е р а цилиндрический с т е р ж е н ь, растягиваемый в длину двумя разными противоположными силами (черт. 2). Проведем мысленно горизонтальную плоскость через внутреннюю точку P и будем рассматривать лежащую над плоскостью часть стержня как систему точек. В таком случае на элемент поверхности в точке P действует давление нуль, так как равновесие совершенно не было бы нарушено, если бы была удалена вся нижняя часть стержня. Если же через ту же точку P провести вертикальную плоскость и рассматривать в качестве системы точек часть стержня, лежащую слева от плоскости, то на элемент плоскости в P действует более или менее значительное давление, так как равновесие системы точек было бы нарушено, если бы мы удалили всю правую часть стержня, не приложив при этом особой силы.



Черт. 2.

Общий закон, согласно которому величина и направление давления в определенной точке P зависят от направления нормали к элементу поверхности, проходящему через P, будет выведен в § 17 из динамических соотношений.

§ 16. Мы привели законы равновесия деформированного тела к законам общей механики, а теперь проделаем то же для более общего случая д в и ж е н и я деформированного тела. Это можно проще всего сделать, применив принцип д' А л а м б е р а, согласно которому при всяком движении системы материальных точек внешние силы и сопротивления инерции находятся в равновесии в каждый момент,—так, как если бы система была твердой (*1*, § 130).

Так как сопротивление инерции элемента массы, равное

$$-\frac{d^2x}{dt^2}k\,d\tau,\ -\frac{d^2y}{dt^2}k\,d\tau,\ -\frac{d^2z}{dt^2}k\,dt, \tag{70}$$

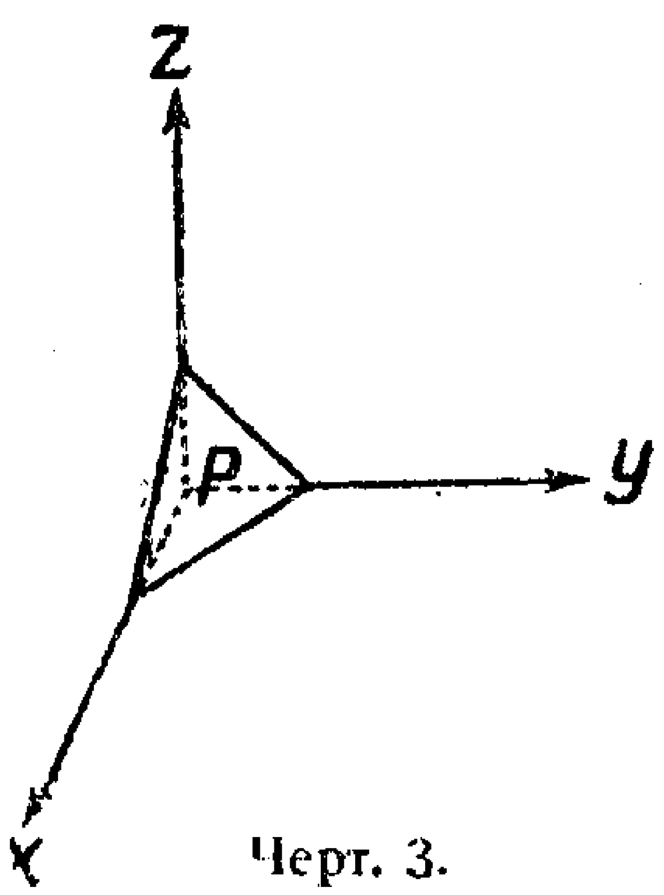
пропорционально массе элемента, то оно принадлежит к числу массовых сил, и все различие между динамикой и статикой деформированного тела состоит только в том, что к компонентам X, Y, Z сил, отнесенных к единице массы (67), прибавляются компоненты ускорения с обратным знаком.

Применим теперь шесть уравнений [*1*, (306a)], выражающих условия равновесия твердого тела, к рассматриваемому случаю и воспользуемся введенными выше обозначениями. Тогда для движения деформированного тела получатся следующие шесть уравнений:

$$\int\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)k\,d\tau+\int X_\nu\,d\sigma=0 \text{ и т. д.} \tag{71}$$

$$\int\left\{y\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)-z\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\}k\,d\tau+\int(yZ_\nu-zY_\nu)\,d\sigma=0 \text{ и т. д.,} \tag{72}$$

где $d\tau$ обозначает элемент объема, $d\sigma$ — элемент поверхности любой выделенной части тела, а интегрирование распространяется на эту часть тела. Разумеется, эти уравнения действительны и для всего тела.



Черт. 3.

Уравнения (71) и (72) представляют совершенно исчерпывающим образом взаимоотношения между силами и ускорениями. В следующих параграфах мы лишь подробнее исследуем их содержание.

§ 17. Сперва применим уравнения (71) к бесконечно малому элементу тела, расположенному где-либо внутри последнего. Форму элемента выберем следующим образом. Через произвольную точку P проведем три прямые, параллельные положительным направлениям координатных осей (черт. 3), и пересечем их плоскостью, бесконечно близкой к P. На чертеже плоскость изображена впереди точки P. Образуется тетраэдр,

в вершине которого P пересекаются три взаимно перпендикулярные ребра. Обозначим площадь грани, противолежащей вершине P, через $d\sigma$, нормаль к этой грани, направленную внутрь тетраэдра, через ν, и площади трех остальных граней—$d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ соответственно нормалям. Последние грани представляют собою проекции $d\sigma$ на три координатные плоскости. Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$d\sigma_x=-d\sigma\cos(\nu x),\ d\sigma_y=-d\sigma\cos(\nu y),\ d\sigma_z=-d\sigma\cos(\nu z), \tag{73}$$

так как площади всех граней положительны, а нормаль ν образует тупые углы с положительными направлениями всех координатных осей.

В уравнении (71) объемный интеграл сводится для данного случая к одному члену, который содержит объем тетраэдра $d\tau$ в качестве множителя, а поверхностный интеграл равен сумме четырех членов, каждый из которых соответствует одной из граней тетраэдра и пропорционален площади ее. Так как $d\tau$ — бесконечно малая величина третьего порядка, а все площади $d\sigma$ — второго порядка, то объемный интеграл исчезает по сравнению с каждым из членов поверхностного интеграла, и уравнение (71) переходит в:

$$X_x d\sigma_x+X_y d\sigma_y+X_z d\sigma_z+X_\nu\,d\sigma=0.$$

При этом нужно иметь в виду, что внутренние нормали к граням тетраэдра суть прямые x, y, z, ν. Отсюда, в связи с (73), получим:

$$\left.\begin{array}{l} X_\nu=X_x\cos(\nu x)+X_y\cos(\nu y)+X_z\cos(\nu z), \\ \text{подобным образом из двух других уравнений (71):} \\ Y_\nu=Y_x\cos(\nu x)+Y_y\cos(\nu y)+Y_z\cos(\nu z), \\ Z_\nu=Z_x\cos(\nu x)+Z_y\cos(\nu y)+Z_z\cos(\nu z). \end{array}\right\} \tag{74}$$

Эти уравнения дают для каждой точки P тела зависимость величины и направления действующего в ней давления (X_ν, Y_ν, Z_ν) от направления нормали к элементу поверхности, на который действует давление (ср. конец § 15). То обстоятельство, что $d\sigma$ проходит не через самую точку P, а лежит от нее на бесконечно близком расстоянии, не оказывает влияния на конечные величины составляющих давления.

Таким образом давление определено для любого направления ν, если известны девять компонентов давления $X_\nu, \ldots, Z_\nu$. Если ν совпадает с направлением одной из координатных осей, то уравнения выполняются тождественно. Они удовлетворяют также всегда требованиям (69), так как косинусы изменяют знак, если направление ν изменяется на обратное.

Из девяти компонентов давления, соответствующих координатным плоскостям $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$, „диагональные" компоненты

X_x, Y_y, Z_z представляют такие давления, которые нормальны к их поверхности. При этом положительный знак обозначает давление сжатия, как у газа, независимо от выбранного направления координат, а отрицательный знак — натяжение, как у растянутой проволоки (ср. § 19): при обращении направления координатных осей изменяется как знак компонента поверхностной силы, так и знак внутренней нормали. Конечно, все три нормальные давления не должны обязательно быть одного знака.

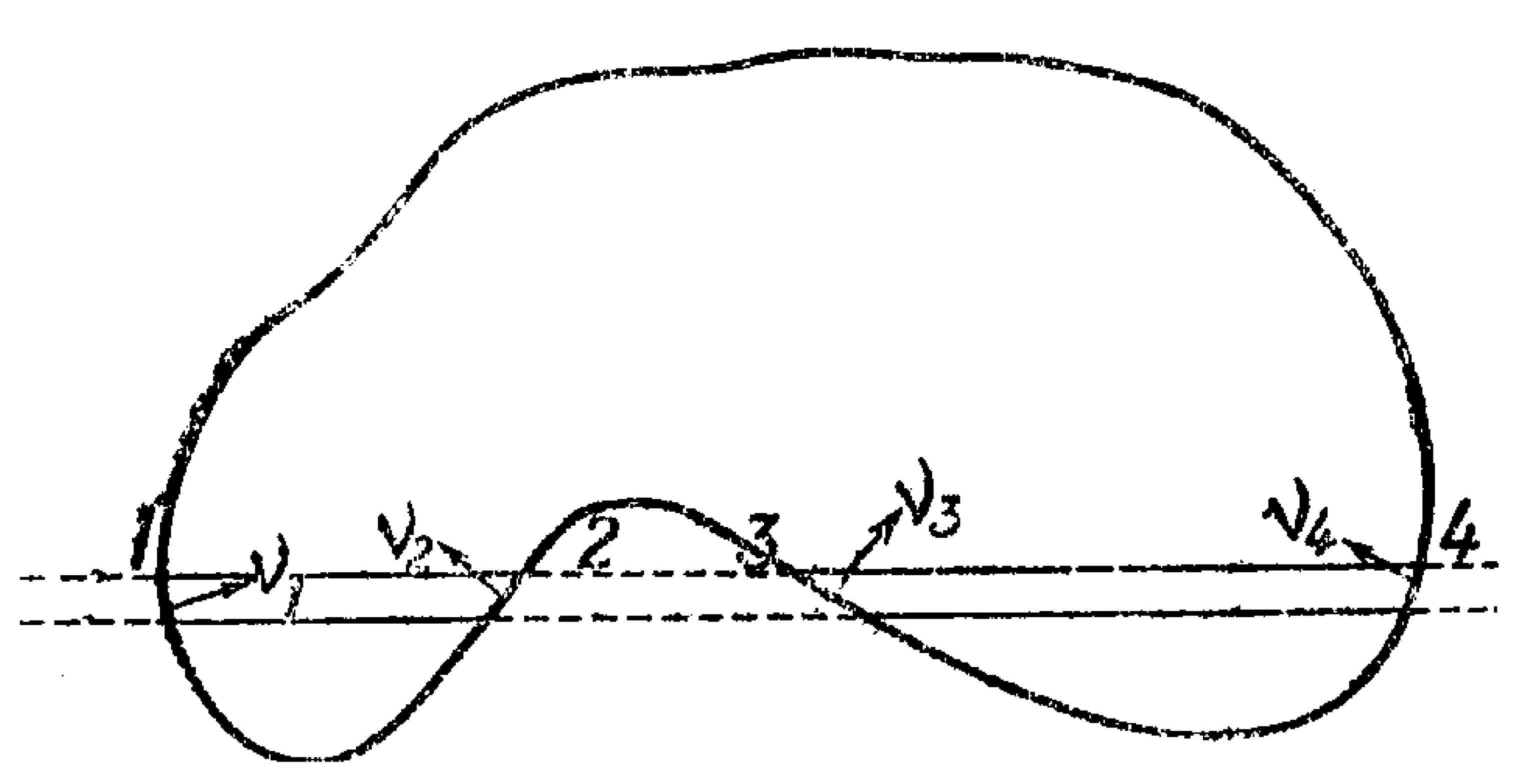
Остальные шесть компонентов давления суть тангенциальные или срезывающие давления, которые называются также сдвигающими напряжениями, подобно тем, которые имеют место при кручении и при трении.

В заключение следует напомнить, что все вышеприведенные соображения относятся к бесконечно малому элементу тела и что величины компонентов давления изменяются при переходе от одного элемента к другому. Поэтому девять компонентов давления $X_x, \ldots, Z_z$ нужно рассматривать вообще как функции места (x, y, z).

§ 18. Чтобы использовать динамические уравнения (71) и (72) для дальнейших заключений, выведем сперва одну математическую теорему, которая еще не раз окажется нам полезной в дальнейшем. Она касается преобразования некоторого объемного интеграла в поверхностный интеграл. Пусть φ обозначает однозначную непрерывную функцию пространственных координат x, y, z, и требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau, \qquad (75)$$

взятый по некоторому объему. На черт. 4 этот объем изображен, ради большей общности, так, что поверхность его, глядя снаружи, вогнута в некоторых местах. Поверхность могла бы также состоять из нескольких совсем разделенных частей, что не повлияло бы на правильность выводимых положений.



Черт. 4.

Положим $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ и будем интегрировать сперва по x, полагая y и z, а также dy и dz постоянными, т. е. будем производить суммирование по элементам объема бесконечно тонкого цилиндра, параллельно оси x, с поперечным сечением $dy \cdot dz$.

Если цилиндр пересекает наружную поверхность области интегрирования в нескольких точках 1, 2, 3, 4, то он разделяется на несколько отдельных цилиндров, и интеграл по всему цилиндру равен сумме интегралов по отдельным цилиндрам, т. е. в нашем случае

$$dy\,dz\,(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3). \qquad (76)$$

Обозначим площади элементов поверхности, которые вырезываются цилиндром из наружной поверхности области интегрирования, через $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$, их внутренние нормали — через ν_1, ν_2, ν_3, ν_4. Тогда

$$dy\,dz = d\sigma_1 \cos(\nu_1 x) = -d\sigma_2 \cos(\nu_2 x) = d\sigma_3 \cos(\nu_3 x) = -d\sigma_4 \cos(\nu_4 x), \qquad (77)$$

и интеграл по цилиндру будет равняться:

$$-\varphi_1 \cos(\nu_1 x)\,d\sigma_1 - \varphi_2 \cos(\nu_2 x)\,d\sigma_2 - \varphi_3 \cos(\nu_3 x)\,d\sigma_3 - \varphi_4 \cos(\nu_4 x)\,d\sigma_4.$$

Соответственные выражения относятся к каждому из бесконечно многих бесконечно тонких цилиндров, параллельных оси x, на которые можно мысленно разбить всю область интегрирования, и сумма всех этих выражений, т. е. искомый интеграл, может быть написана в таком виде:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau = -\int \varphi \cos(\nu x)\,d\sigma. \qquad (78)$$

Интеграл распределен по всем элементам $d\sigma$ наружной поверхности области интегрирования.

Положим, для примера, что $\varphi = \text{const}$. Тогда получим тождество:

$$\int \cos(\nu x) d\sigma = 0.$$

В том, что это тождество имеет место при всякой форме поверхности, легко убедиться непосредственно, если уяснить себе содержание этого уравнения с помощью соотношения (77).

Теперь выведем еще несколько общих и частных применений выведенной формулы, которые пригодятся нам впоследствии.

Обозначим через ψ другую однозначную непрерывную функцию. Возьмем равенство:

$$\frac{\partial(\varphi \cdot \psi)}{\partial x} = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

и проинтегрируем его по некоторому объему. Согласно (78), в левой части получится поверхностный интеграл, а в правой части — два объемных интеграла. Тогда можно написать:

$$\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} d\tau = -\int \varphi\psi \cos(\nu x)\,d\sigma - \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau. \qquad (79)$$

Это соотношение выражает правило интегрирования по частям в применении к области трех измерений.

Часто встречается такое приложение равенства (79):

$$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau = -\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\nu x)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\nu y)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\nu z)\right)\psi\, d\sigma - \int\psi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)d\tau,$$

или, по [1, (120a)] и [1, (129)]:

$$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau = -\int\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\sigma - \int\psi\cdot\Delta\varphi\cdot d\tau. \quad (80)$$

В частном случае, при $\psi=\varphi$, получается:

$$\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = -\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\sigma - \int\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot d\tau, \quad (81)$$

и при $\psi = \text{const}$:

$$\int\Delta\varphi\cdot d\tau = -\int\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\sigma. \quad (82)$$

§ 19. Возьмем теперь снова динамические уравнения (71) в применении к произвольной части тела. В первых из этих уравнений заменим X_ν выражением (74). Поверхностный интеграл можно написать, согласно (78), в виде объемного интеграла, так как, например,

$$\int X_x\cos(\nu x)\,d\tau = -\int\frac{\partial X_x}{\partial x}\,d\tau.$$

Последний интеграл соединим с первым интегралом в (71) в один объемный интеграл. Если взять бесконечно малую часть тела, объема $d\tau$, то объемный интеграл сведется к единственному члену. Сократив на $d\tau$, получим:

$$\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)k-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial X_y}{\partial y}-\frac{\partial X_z}{\partial z}=0.$$

Подобным же образом

$$\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)k-\frac{\partial Y_x}{\partial x}-\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0, \quad (83)$$

$$\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)k-\frac{\partial Z_x}{\partial x}-\frac{\partial Z_y}{\partial y}-\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0.$$

Эти уравнения имеют место для каждой точки тела. Особенностью их является то, что в них входят не самые компоненты давления, а их пространственные производные.

Таким образом равномерное давление, как бы оно ни было велико, никогда не может вызвать движения. Последнее обусловливается всегда пространственной изменчивостью давления, или „падением давления“. В этом отношении физическое значение давления напоминает значение потенциала (ср. 1, § 39 и сл.).

Подобным же образом можно превратить поверхностный интеграл в объемный интеграл в динамических уравнениях (72) по образцу преобразования:

$$\int yZ_x\cos(\nu x)\,d\sigma = -\int\frac{\partial(yZ_x)}{\partial x}\,d\tau,$$

и тем же путем получим из первого уравнения (72):

$$\left\{y\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)-z\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\}k - \frac{\partial}{\partial x}(yZ_x-zY_x)-\frac{\partial}{\partial y}(yZ_y-zY_y)-\frac{\partial}{\partial z}(yZ_z-zY_z)=0,$$

или, исключив массовые силы при помощи (83) и выполнив дифференцирование:

$$Z_y = Y_z.$$

Подобным же образом,

$$X_z = Z_x \text{ и } Y_x = X_y. \quad (84)$$

Следовательно, тангенциальные компоненты давления попарно равны друг другу, и девять компонентов давления $X_x, \ldots, Z_z$ сводятся в общем случае к шести.

Уравнения (83) и (84) физически совершенно эквивалентны уравнениям (71) и (72), так как, проинтегрировав (83) и (84) по некоторой части тела, можно снова получить (71) и (72). В дальнейшем они послужат основой всех наших исследований над проблемами равновесия и движения.

§ 20. Соотношениями (84) значительно упрощаются законы давления (74). Теперь мы подробнее изучим эти законы. Прежде всего поставим такой вопрос: если даны любые шесть компонентов давления $X_x, \ldots, Z_z$, то имеются ли такие элементы поверхности, к которым давление перпендикулярно, т. е. такие, для которых направление давления совпадает с направлением нормали? Условия для этого следующие:

$$X_\nu = p\cos(\nu x),\quad Y_\nu = p\cos(\nu y),\quad Z_\nu = p\cos(\nu z),$$

где p обозначает величину давления. Подставив эти выражения в (74), получим:

$$\left.\begin{aligned}(X_x-p)\cos(\nu x)+X_y\cos(\nu y)+X_z\cos(\nu z)&=0,\\ Y_x\cos(\nu x)+(Y_y-p)\cos(\nu y)+Y_z\cos(\nu z)&=0,\\ Z_x\cos(\nu x)+Z_y\cos(\nu y)+(Z_z-p)\cos(\nu z)&=0.\end{aligned}\right\} \quad (85)$$

Эти уравнения совершенно одинаковы с уравнениями (40) или (63), кроме обозначений и того обстоятельства, что в них речь идет только о конечных величинах. Поэтому они приводят к одинаковым результатам, которые можно выразить в виде следующих правил.

Распределение давления в каком-либо элементе тела всегда может быть представлено при помощи симметричного тензора, — тензора давления и натяжения. Компоненты его суть шесть компонентов давления, а главные значения представляют собою так называемые „главные давления" p, q, r, которые равны корням кубического уравнения вида (62). Главные оси тензора суть нормали к тем элементам поверхности, на которые давление действует перпендикулярно. Эти оси представляют собою вместе с тем направления соответствующих главных давлений. Распределение давления целиком определяется величинами и направлениями главных давлений или же шестью компонентами давления по отношению к какой-либо системе координат, при помощи уравнений вида (64). Если в частном случае три главные давления равны друг другу (что всегда бывает в совершенно упругой жидкости, § 44), то нормальные давления $X_x = Y_y = Z_z = p = q = r$; тангенциальные давления $X_y = Y_z = Z_x = 0$, и направления главных осей неопределенны.

Чтобы составить себе наглядное представление о взаимоотношении, в общем случае, между направлением давления (X_ν, Y_ν, Z_ν) и направлением нормали ν к элементу поверхности, на который действует давление, построим мысленно следующую идеальную поверхность второго порядка (эллипсоид или гиперболоид):

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2Y_z yz + 2Z_x zx + 2X_y xy = \pm 1, \qquad (86)$$

где знак правой части нужно выбрать так, чтобы геометрические операции, которые мы произведем, получились вещественными.

Относительно этой поверхности можно доказать следующую теорему: направление нормали к поверхности в конце диаметра, имеющего направление ν, дает направление давления, действующего на элемент поверхности, перпендикулярный к ν.

Именно, обозначим уравнение поверхности: $f(x, y, z) = 0$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (87)$$

суть отношения косинусов направления (угловые коэфициенты) нормали в точке (x, y, z) поверхности. Если эта точка лежит на диаметре, имеющем направление ν, то

$$x : y : z = \cos(\nu x) : \cos(\nu y) : \cos(\nu z).$$

С помощью этих величин отношения (87) становятся равными

$$X_\nu : Y_\nu : Z_\nu ,$$

если воспользоваться выражением (86) и принять во внимание уравнения (74).

Согласно выясненному нами физическому значению поверхности (86), форма и положение ее не зависят от выбора системы координат. Оси поверхности суть, очевидно, главные оси давления. При $p = q = r$ поверхность обращается в шар.

Можно вообще утверждать, что при переходе от координат x, y, z к каким-либо другим прямоугольным прямолинейным координатам x', y', z' выражение (86) остается инвариантным, так как уравнение, которое получится вместо (86), если написать в нем x', y', z' вместо x, y, z и в то же время $X'_{x'}, \ldots, Z'_{z'}$ вместо $X_x, \ldots, Z_z$, представляет ту же самую поверхность. Взаимоотношение между компонентами давления со штрихами X_x', ... и компонентами давления без штрихов X_x, ... должно быть таково, чтобы при замене компонентов и координат со штрихами соответственными величинами без штрихов снова получилось уравнение (86). Это правило содержит законы преобразования компонентов давления от одной системы координат к любой другой.

Понятно, что все выведенные здесь соотношения годны не только для тензора давления, но и для тензора деформации, и вообще для каждого симметричного тензора второго ранга. Но физическое значение их совершенно различно и неодинаково важно в разных случаях. При помощи симметричного тензора можно представить также момент инерции какого-нибудь тела (*I*, § 142) относительно различных осей, проходящих через одну точку. Главные значения такого тензора (главные моменты инерции) всегда положительны. Поверхность (86) представляет собою эллипсоид инерции. Здесь, как нередко и в других случаях, можно сделать интересное наблюдение, что природа, как бы неимоверно разнообразны ни казались ее явления с первого взгляда, применяет одни и те же средства в совершенно разных областях. Если бы этого не было, то человеческому разуму, который большей частью работает с помощью уподоблений и заключений по аналогии, было бы, конечно, труднее напасть на след ее законов.

Прежде чем перейти к плодотворным приложениям динамических уравнений (83), нам необходимо ознакомиться с соотношениями, которые существуют между давлением и деформацией. Вопрос об этих соотношениях с неизбежностью приводит к вопросу о материале изучаемого тела. Вопроса этого мы пока еще не рассматривали, и о нем будет в первую очередь итти речь в ближайших параграфах.