изменяется только скорость течения. Диференцированием (381) непосредственно получается

$$q = T \cdot q', \tag{382}$$

т. е. скорость в каком-нибудь месте пропорциональна стационарной скорости в этом месте и множителю T.

Обозначим, как и раньше, величины, относящиеся к верхнему уровню жидкости, значком O, а величины, относящиеся к отверстию для истечения, будем писать без значка. Если пренебречь величиной f по сравнению с f_0, то из (329), (380), (381) и (382) получится:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q'^2}{2(\varphi_0' - \varphi')}(1 - T^2). \tag{383}$$

Проинтегрируем это диференциальное уравнение. Обозначив для сокращения положительную постоянную:

$$\frac{q'^2}{\varphi_0' - \varphi'} = \alpha,$$

и принимая во внимание, что $T = 0$ при $t = 0$, получим:

$$T = \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}. \tag{384}$$

Уравнения (382) и (384) определяют скорость истечения жидкости в любой момент t, Скорость растет от 0 до стационарного значения в (331), которому она точно равняется лишь после бесконечно большого промежутка времени, но к которому подходит тем ближе, чем больше этот промежуток.

Глава третья

ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 73. Рассмотрим несжимаемую жидкость, которая заполняет односвязное пространство произвольного объема, ограниченное со всех сторон твердыми стенками. Из § 71 известно, что в том случае, если в жидкости нет вихрей, скорость ее всюду и всегда равна нулю. Но допустим, что где-либо и когда-либо имеются вихри, т. е. что в некоторый момент в некоторых местах жидкости скорость вращения имеет данное значение, отличное от нуля. Тогда можно доказать, что скорость всей жидкости однозначно определена внутри и вне вихрей как в данный момент, так и во всякое время.

Проведем доказательство сначала для данного момента t и покажем, что компоненты скорости u, v, w повсюду однозначно определены одновременными значениями компонентов вращения ξ, η, ζ в уравнениях (59) и условием несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{385}$$

Действительно, если бы этого не было, то существовали бы еще другие значения компонентов скорости, например u', v', w', которые удовлетворяли бы этим условиям. Тогда разности $u' - u = u_0$, $v' - v = v_0$, $w' - w = w_0$, рассматриваемые как составляющие скорости, изображали бы движение жидкости в односвязном пространстве, ограниченном со всех сторон твердыми стенами. Это движение, во-первых, удовлетворяло бы условию несжимаемости и, во-вторых, происходило бы совершенно без вихрей, так как для него компоненты ξ_0, η_0, ζ_0 повсюду равнялись бы нулю. Но такое движение невозможно. Следовательно, u_0, v_0, w_0 повсюду равны нулю.

Так как компоненты скорости, u, v, w, определены повсюду, то они определены, конечно, и внутри вихревых нитей, а вместе с ними и пространственные производные их по x, y, z, т. е. компоненты скорости деформации. Ввиду этого вполне определенным является изменение, которому подвергается вихревая нить в течение элемента времени, включая ее вращение и деформацию. Так как, согласно (317), произведение вихревой скорости ω на площадь поперечного сечения нити не изменяется с течением времени, то определенным становится изменение вихревой скорости ω в течение промежутка времени dt. Вместе с тем, становятся известными величина и направление, т. е. компоненты ξ, η, ζ скорости вращения в момент $t+dt$. Но этого достаточно, чтобы применить к моменту $t+dt$ такие же соображения, как раньше к моменту t. Таким образом процесс продолжается вполне однозначно, так как от каждого момента, можно перейти к бесконечно близкому позднейшему моменту и движение всей жидкости является определенным во всякое время.

§ 74. Установив основные положения предыдущего параграфа, перейдем теперь к действительному вычислению компонентов скорости u, v, w, которые соответствуют заданному вихрю, определенному величинами ξ, η, ζ. Допустим, что жидкость простирается в бесконечность по всем направлениям. Тогда задача сводится к определению трех непрерывных функций u, v, w которые удовлетворяют, во-первых, условию несжимаемости (385) и, во-вторых, трем уравнениям (59) при заданных ξ, η, ζ.

Чтобы удовлетворить условию (385), положим:

$$u=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z},\quad v=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x},\quad w=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad 386$$

где U, V, W обозначают три новые непрерывные функции с непрерывными первыми производными. Тогда, очевидно, тождественно удовлетворяется равенство (385). Не нарушая общности задачи, можно наложить еще некоторое ограничение на функции U, V, W: если вместо U написать $U+\frac{\partial\phi}{\partial x}$, вместо V: $V+\frac{\partial\phi}{\partial y}$ вместо W: $W+\frac{\partial\phi}{\partial z}$, где ϕ — совершенно произвольная функция, то, очевидно, уравнения (386) дадут такие же значения u, v, w, как и раньше. Таким образом можно совершенно произвольно задать функцию ϕ, не предвосхищая этим вычисления u, v, w. Выберем ϕ таким образом, чтобы было:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0. \qquad 387$$

Это всегда можно осуществить, подобрав должным образом величину $\Delta\phi$.

Сделав такое допущение, подставим выражения (386) в уравнения (59). Получим:

$$2\xi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)-\Delta U, \qquad 388$$

или, согласно (387),

$$\Delta U=-2\xi,\quad \Delta V=-2\eta,\quad \Delta W=-2\zeta. \qquad 389$$

Это три диференциальные уравнения *Пуассона* [*1.* (132)], интегралы которых равны, согласно *1* § 45:

$$U=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\xi' d\tau'}{r},\quad V=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\eta' d\tau'}{r},\quad W=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\zeta' d\tau'}{r}. \qquad 390$$

Здесь r обозначает расстояние точки воздействия x, y, z от какой-нибудь другой точки жидкости x', y', z', в которой компоненты вихревой скорости суть ξ', η', ζ'. Интегрирование производится по всем элементам объема жидкости $d\tau'$, причем, конечно, нужно опустить все те элементы объема, в которых вихревая скорость равна нулю. Для жидкости, в которой совершенно нет вихрей, мы снова получим вывод § 71.

Можно непосредственно убедиться в том, что определенные таким образом функции U, V, W, действительно обладают свойством (387) если подставить выражения (390), продиференцировав их по x, y, z и преобразовав получившиеся интегралы интегрированием по частям согласно (79). При этом нужно воспользоваться тождествами:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{\partial r}{\partial x'},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{\partial r}{\partial y'},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=-\frac{\partial r}{\partial z'} \qquad 391$$

и соотношением (315).

Если подставить найденные выражения U, V, W в уравнения (386), то отсюда получатся искомые значения составляющих скорости в произвольной точке жидкости x, y, z, внутри или вне вихрей:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\left(\zeta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \eta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\tau', \text{ и т. д.,} \qquad 392$$

или

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\left(\eta' \frac{z - z'}{r^3} - \zeta' \frac{y - y'}{r^3}\right) d\tau', \text{ и т. д.,} \qquad 393$$

или, в векториальном обозначении (*I* § 87)

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{2\pi}\int\left[\boldsymbol{O}', \frac{\mathbf{r}}{r}\right]\frac{d\tau'}{r^2}. \qquad 394$$

Здесь $\mathfrak{q}$ обозначает вектор скорости в точке воздействия, r — расстояние точки воздействия от элемента жидкости $d\tau'$, в котором вихревая скорость равна $\boldsymbol{O}'$, наконец, $\frac{\mathbf{r}}{r}$ — вектор длиной 1, который направлен от элемента жидкости $d\tau'$ к точке воздействия.

Значение уравнения (394) можно наглядно истолковать следующим образом: каждый элемент вихря, объемом $d\tau'$, вносит определенную долю в общую величину скорости жидкости $\mathfrak{q}$ в точке воздействия. Эта доля определяется по величине и направлению при помощи выражения:

$$\frac{1}{2\pi}\left[\boldsymbol{O}', \frac{\mathbf{r}}{r}\right]\frac{d\tau'}{r^2} = \delta\mathfrak{q}, \qquad 395$$

т. е. она пропорциональна вихревой скорости, обратно пропорциональна квадрату расстояния, далее она пропорциональна синусу угла между осью вихря и соединительной прямой r и перпендикулярна к плоскости, проходящей через эти два направления. Направления $\boldsymbol{O}'$, $\mathbf{r}$, $\delta\mathfrak{q}$ образуют в последовательном порядке правую координатную систему. Другими словами: движение $\delta\mathfrak{q}$ совершается в направлении той скорости, которую имели бы частицы элемента вихря, *ближайшие* к точке воздействия, совершая вращение вокруг оси вихря, если бы она была неподвижна.

Зная составляющие скорости u, v, w как функции x, y, z, получим диференциальные уравнения линий тока:

$$u:v:w = dx:dy:dz, \qquad 396$$

которые существенно отличаются от прежних уравнений (320) тем, что в данном случае вообще не существует потенциала скорости.

§ 75. Рассмотрим для примера вихревую нить, имеющую вид тонкого кругового кольца. Скорость вращения можно считать настолько большой, что произведение ее на сечение кольца, или момент вихревой нити, имеет конечную величину. Вне кольца движение жидкости происходит, конечно, без вихрей. Все те частицы жидкости, которые лежат в плоскости кольца, текут перпендикулярно к этой плоскости. Частицы, лежащие внутри кольца, движутся в направлении вращательного движения внутренних частиц вихревого кольца, а частицы, лежащие вне кольца, движутся в направлении вращения наружных частиц кольца. Линии тока свободной от вихрей жидкости проходят сквозь середину кольца в соответствующем направлении, огибают его наружу, симметрично расширяясь во все стороны бесконечного пространства совершенно так, как в „двойном источнике" (§ 64), затем, обойдя плоскость кольца снаружи его в противоположном направлении, возвращаются, снова сближаясь, с другой стороны к середине кольца. Таким образом все линии тока окружают вихревую нить в направлении ее вращения. При этом скорость течения непрерывна повсюду: внутри и снаружи вихря, а также при переходе от жидкости в вихре к жидкости вне вихря. Величина скорости течения больше внутри вихря, где нити тока суживаются, чем снаружи, где они расширяются. Замкнутым линиям тока соответствует многозначный или прерывный потенциал скорости и бесконечное двусвязное пространство жидкости. Действительно, такую линию невозможно стянуть в одну точку путем непрерывного сужения внутри пространства, свободного от вихрей.

Однако само вихревое кольцо не находится в покое, а сообщает само себе определенную скорость. Как показывает небольшое рассуждение на основании закона (395), оно движется перпендикулярно своей плоскости в направлении линий тока, проходящих через его середину.

Положим теперь, что в жидкости имеются два таких вихревых кольца одинаковой длины, одинакового момента и параллельные друг другу, причем линия, соединяющая оба центра, перпендикулярна к плоскости колец, образуя ось симметрии всего процесса. Нетрудно видеть, каким образом будет совершаться этот процесс. Сперва оба вихревых кольца будут двигаться со свойственной им скоростью поступательного движения вдоль оси симметрии в направлении проходящих через нее линий тока. Но кроме того, возникнут силы взаимодействия между ними. Так как уравнение (394) не зависит от того, совершает ли жидкость вихревое движение в точке воздействия, то вихревые элементы одного кольца будут, так сказать, увеличены линиями тока, произведенными другим кольцом. Вследствие этого первое кольцо, движущееся впереди, расширяется наружу, а скорость его постепенно уменьшается, между тем как второе кольцо, следующее позади, суживается и движется все быстрее вперед, пока не догонит первого кольца и не пройдет сквозь него. Как только это произойдет, процесс обращается. Теперь уже второе кольцо будет расширяться и скорость его уменьшаться, а первое кольцо будет суживаться, пока оба кольца не сделаются одинаковой величины, а расстояние между ними станет таким же, как было вначале. Затем повторится то же явление, причем кольца поменяются ролями, и так будет продолжаться до бесконечности.

§ 76. Произведем более подробные вычисления для случая двух измерений (как в § 66), когда движение жидкости происходит параллельно плоскости xy и зависит только от координат x и y. Тогда условие несжимаемости (385) примет более простой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Из трех компонентов вращения в уравнениях (59) ξ и η обращаются в нуль, и остается только

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{397}$$

так что, согласно (389):

$$U=0, \quad V=0.$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=-2\zeta, \tag{398}$$

и, согласно (386):

$$u=\frac{\partial W}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial W}{\partial x}. \tag{399}$$

Таким образом все вихревые линии и вихревые нити параллельны оси z. Так как они движутся параллельно плоскости xy, то длина каждой вихревой нити постоянна все время. Но так как масса вихревой нити и, вследствие несжимаемости жидкости, также объем нити не изменяются с течением времени, то отсюда следует, что постоянным во времени остается и сечение каждой нити, а вместе с тем, согласно (314), также и скорость вращения ее.

Уравнение системы линий тока, согласно (396) и (399):

$$W=\text{const.} \tag{400}$$

имеет место как внутри, так и вне вихрей. Так как линии тока проходят параллельно плоскости xy, то для движения, изображаемого предыдущими уравнениями, безразлично, простирается ли жидкость в бесконечность по обоим направлениям вдоль оси, или же она заключена между любыми двумя твердыми стенами, параллельными плоскости.

Двухмерное уравнение *Пуассона* (398) можно проинтегрировать [согласно *I* (139) и (140)] посредством логарифмического потенциала.

$$W_{xy}=-\frac{1}{\pi}\int \zeta' \log \rho d\sigma', \tag{401}$$

где $d\sigma'$ обозначает площадь сечения бесконечно тонкой вихревой нити, ζ' — вихревую скорость нити, ρ — расстояние от точки воздействия. Интеграл берется по всем вихревым нитям. Отсюда получаются на основании (399) следующие выражения для компонентов скорости в какой-нибудь точке x, y, лежащей вне вихрей:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{1}{\pi}\int \zeta'\cdot\frac{y-y'}{\rho^2}\,d\sigma',\\ v&=\frac{1}{\pi}\int \zeta'\cdot\frac{x-x'}{\rho^2}\,d\sigma'.\end{aligned}\right\} \tag{401a}$$

Эти выражения гласят, что каждый элемент вихря $d\sigma'$ вызывает в точке воздействия скорость, которая обратно пропорциональна расстоянию и имеет одинаковое направление с вращением.

Возьмем одну какую-нибудь бесконечно тонкую нить, например, в начале координат. При этом можно положить скорость вращения настолько большой, чтобы момент $\zeta'\cdot d\sigma'=\mu$ имел конечную величину. Тогда интеграл в (401) сведется к одному члену, и мы получим:

$$W=-\frac{\mu}{\pi}\cdot\log\rho. \tag{402}$$

Следовательно, на основании (400), линии тока суть концентрические круги. Составляющие скорости в какой-нибудь точке вне вихря равны, согласно (399):

$$u=-\frac{\mu}{\pi}\frac{y}{\rho^2}, \quad v=\frac{\mu}{\pi}\frac{x}{\rho^2}. \tag{403}$$

Эти уравнения совершенно одинаковы с уравнениями (373), если не считать постоянного множителя. Различие только в том, что жидкость, циркулирующая без вихрей по концентрическим кругам, ограничена индиферентной твердой цилиндрической стеной, а в рассматриваемом здесь случае имеется причинное соотношение между моментом вихревой нити, неподвижной в центре, и внешним течением.

Для двух таких вихревых нитей в точках x_1, y_1 и x_2, y_2 имеем, согласно (401):

$$W = -\frac{\mu_1}{\pi}\log\rho_1 - \frac{\mu_2}{\pi}\log\rho_2. \tag{404}$$

Скорости равны, согласно (399):

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\mu_1}{\pi}\frac{y-y_1}{\rho_1^2} - \frac{\mu_2}{\pi}\frac{y-y_2}{\rho_2^2}, \\ v &= \frac{\mu_1}{\pi}\frac{x-x_1}{\rho_1^2} + \frac{\mu_2}{\pi}\frac{x-x_2}{\rho_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{405}$$

При помощи этих уравнений скорости всех точек жидкости, свободной от вихрей, выражаются в зависимости от положения обеих вихревых нитей в данный момент. Линии тока суть: $W = \mathrm{const}$. Потенциал скорости:

$$\varphi = -\frac{\mu_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-y_1}{x-x_1} - \frac{\mu_2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-y_2}{x-x_2}. \tag{405a}$$

Пространство без вихрей, ввиду многозначности, трехсвязно.

Что касается движения самих вихревых нитей, т. е. изменения координат x_1, y_1, x_2, x_2, с течением времени, то его также можно вывести из уравнений (405). Но при этом нужно иметь в виду, что вихревая нить не сообщает себе поступательной скорости. В этом можно убедиться также путем вычисления, если принять во внимание соотношения внутри нити. В таком случае в уравнениях (405) выпадает член, соответствующий воздействию нити самой на себя, и мы получим:

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\mu_2}{\pi}\frac{y_1-y_2}{\rho_{12}^2}, \quad v_1 = \frac{dy_1}{dt} = \frac{\mu_2}{\pi}\frac{x_1-x_2}{\rho_{12}^2}. \tag{406}$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\mu_1}{\pi}\frac{y_2-y_1}{\rho_{12}^2}, \quad v_2 = \frac{dy_2}{dt} = \frac{\mu_1}{\pi}\frac{x_2-x_1}{\rho_{12}^2}. \tag{407}$$

Отсюда получится следующая картина движения обеих вихревых нитей.

Так как

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0, \quad \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0,$$

то точка с координатами

$$\frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1+\mu_2} = x_0, \quad \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1+\mu_2} = y_0, \tag{408}$$

которую можно назвать „центром тяжести“ обеих вихревых нитей, остается все время неподвижной:

$$u_1(x_1-x_2) + v_1(y_1-y_2) = 0,$$
$$u_2(x_1-x_2) + v_2(y_1-y_2) = 0,$$

т. е. движение каждой из нитей перпендикулярно к прямой, соединяющей их. Поэтому расстояние между ними, а также расстояния от центра тяжести, остаются постоянными. Следовательно, нити вращаются с общей угловой скоростью вокруг центра тяжести, оставаясь на постоянном расстоянии ρ_{12}. Если оба вращения имеют одинаковое направление, то центр тяжести обеих нитей лежит между ними. Если же вращения противоположны, то центр тяжести лежит вне нитей со стороны большего момента. Угловая скорость вращения равна

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{\pi\rho_{12}^2}$$

и имеет направление большего из обеих моментов.

Если моменты равны и противоположны, то „центр тяжести“ отодвигается в бесконечность, угловая скорость вращения становится равной нулю, и обе вихревые нити совершают, согласно (406) и (407), общее поступательное движение со скоростью $\frac{\mu}{\pi\rho_{12}}$ в направлении линий тока, проходящих между ними, подобно одному вихревому кольцу (§ 75). Действительно, такие две „антипараллельные“ вихревые нити можно рассматривать как части одного вихревого кольца, имеющего вид бесконечно длинного прямоугольника. Положение линий тока выразится в этом частном случае, на основании (400) и (404), в виде уравнения:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \mathrm{const}. \tag{409}$$

Таким образом линии тока суть круги, симметрично расположенные относительно соединительной линии обеих вихревых нитей и делящие расстояние между ними в гармоническом отношении.

§ 77. В заключение рассмотрим еще простой пример одной вихревой нити конечного сечения. Положим, что сечение нити — круг радиуса R, а скорость вращения повсюду равна ζ. Как мы знаем, она постоянна и во времени. Интегралы с элементами вихря $d\sigma'$ нужно взять по всей площади круга. Выражения для компонентов скорости в какой-нибудь точке жидкости можно получить, произведя интегрирование в (401a) или же, что удобнее для нас, вычислив при помощи формулы (400) логарифмический потенциал W массы, покрывающей круг с равномерной поверхностной плотностью $\frac{\zeta}{\pi}$ (401). Обозначим расстояние точки воздействия от центра круга через

$$\rho_0 = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Тогда для внутренней точки ($\rho_0 < R$) имеем, согласно *I* (145),

$$W = \frac{\zeta}{2}\left(R^2 - P_0^2\right) - \zeta R^2 \log R. \qquad 410$$

Для внешней точки ($\rho_0 > R$), согласно *I* (146),

$$W = -\zeta R^2 \log \rho_0. \qquad 411$$

Следовательно, линии тока представляют собою, согласно (400), концентрические круги, $\rho_0 = \text{const.}$, как внутри, так и вне вихревого цилиндра. Вне цилиндра, в пространстве без вихрей, скорость выражается следующим образом, на основании (399) и (411):

$$u = -\zeta R^2 \frac{y}{\rho_0^2}, \quad v = \zeta R^2 \frac{x}{\rho_0^2}, \qquad 412$$

т. е. снова в согласии с (403). Зато внутри вихря скорость имеет такое значение на основании (410):

$$u = -\zeta y, \quad v = \zeta x. \qquad 413$$

Значит, вся жидкость вращается здесь с угловой скоростью без деформации, подобно твердому телу (ср. 39 стр. 24). Интересно, что на поверхности вихревой нити, там, где жидкость вихря граничит с жидкостью свободной от вихрей, скорость изменяется всюду непрерывно, так как формулы (412) и (413) переходят одна в другую при $\rho_0 = R$. Здесь величина скорости достигает максимального значения, ζR, и уменьшается в обе стороны до нуля.

Давление p во внешнем пространстве жидкости, свободном от вихрей, следует, на основании (322), закону:

$$p = -\frac{k}{2}\zeta^2 \frac{R^4}{\rho_0^2} + \text{const.}, \qquad 414$$

а внутри вихревой нити давление выражается иначе, на основании (297):

$$p = \frac{k}{2}\zeta^2 \rho_0^2 + \text{const.} \qquad 415$$

На основании принципа равенства действия и противодействия, давление на ограничивающей поверхности должно быть непрерывно. Поэтому величина его определена повсюду, если она известна на каком-нибудь расстоянии, например, в бесконечности.

Глава четвертая

ТРЕНИЕ

§ 78. Изложенные выше приложения основных уравнений гидродинамики показали, что эти уравнения в форме, выведенной в § 53, дают возможность представить значительное число различных движений жидкости в хорошем согласии с действительностью. Но в природе существуют и такие виды гидродинамических явлений, законы которых не удовлетворяют требованиям этих диференциальных уравнений. Это мы видели всего отчетливее на примере парадоксальной теоремы в (§ 65), согласно которой шар, движущийся в покоящейся жидкости, не должен испытывать никакого сопротивления. Если мы хотим отдать себе лучший отчет в действительном положении вещей для этого важного случая, то нам необходимо расширить теорию должным образом. Спрашивается, как это сделать.

Уравнения движения (83) и (84) в первой части этой книги выведены из принципов общей механики, которых мы не можем здесь изменить. Этих уравнений мы будем придерживаться неизменно. Однако представляется возможность видоизменить теорию, если принять во внимание, что мы получили наши диференциальные уравнения гидродинамики (262), введя гипотезу „совершенной упругости", т. е. гипотезу, что давление зависит только от состояния деформации (§ 21). Тогда получаются для жидкости простые значения (261a) шести компонентов давления. Теперь же мы можем обобщить эту гипотезу таким образом, что давление в каком-нибудь элементе тела должно зависеть не только от состояния деформации, но и от состояния скорости элемента, т. е. от компонентов скорости u, v, w и их производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots$ Соответственно этому мы напишем равенства (261a) в обобщенном виде:

$$\left.\begin{array}{lll} X_x = p + X_x', & Y_y = p + Y_y', & Z_z = p + Z_z', \\ Y_z = Y_z', & Z_x = Z_x', & X_y = X_y' \end{array}\right\} \qquad 416$$

$$p = f(k). \qquad 417$$

и допустим, что добавочные компоненты давления X_x', Y_y',... зависят некоторым образом от упомянутых величин скорости. Понятно, что непосредственное влияние на давление в элементе тела не может оказать ни равномерная скорость поступательного перемещения, ни равномерная скорость вращения, а только такое состояние скорости, которое связано с деформацией. Отсюда следует, что в выражения X_x', X_y',... могут войти из двенадцати величин скорости (256) только шесть компонентов скорости деформации x_x, x_y,... Мы допустим, что они входят линейно, — что наверно имеет место при достаточно малых скоростях деформации, и однородно, так как при скорости деформации, обращающейся в нуль, давление, вызываемое ею, также обращается в нуль. Давление, изображаемое вновь введенным тензором, мы назовем „трением" жидкости, в частности „внутренним" трением или „вязкостью", в отличие от „внешнего" трения, которое возникает при скольжении жидкости по поверхности соприкосновения ее с другим веществом и которое нужно принять в расчет при установлении пограничных условий.

Если тензор трения известен в виде однородной линейной функции тензора скорости деформации, то из общих уравнений (83) и (84), в связи с уравнениями (416) и (417) вытекают законы движения, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) k &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial X_x'}{\partial x} + \frac{\partial X_y'}{\partial y} + \frac{\partial X_z'}{\partial z}, \\ \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) k &= \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial Y_x'}{\partial x} + \frac{\partial Y_y'}{\partial y} + \frac{\partial Y_z'}{\partial z}; \\ \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) k &= \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial Z_x'}{\partial x} + \frac{\partial Z_y'}{\partial y} + \frac{\partial Z_z'}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad 418$$

$$Y_z' = Z_y', \quad Z_x' = X_i'', \quad X_y' = Y_x'. \qquad 419$$

Теперь нужно определить характер зависимости величин X_x', X_y',... от x_x, x_y,... Наиболее простой и верный способ — это тот, который мы применили в § 23 для вывода компонентов упругого давления в твердом теле: это применение принципа сохранения энергии, — в данном случае уже не как механического закона, а как всеобщего физического принципа. Ибо трение не относится к числу консервативных сил (*I* § 49), а во всяком процессе, в котором участвует трение, известная часть механической энергии обращается в теплоту. Теплота, произведенная трением в каком-нибудь бесконечно малом элементе тела, объемом $d\tau$, в течение бесконечно малого времени dt, пропорциональна величинам dt и $d\tau$. Поэтому полагаем, что она равна

$$W \cdot dt \cdot d\tau. \tag{420}$$

Величину W мы должны считать конечной и всегда положительной.

Будем рассуждать таким же образом, как раньше в § 23, но с тем различием, что вместо уравнения энергии (89) напишем

$$d(L+U) + \int W \cdot dt \cdot d\tau = A, \tag{421}$$

и вместо уравнений движения упругого твердого тела (83) и (84) воспользуемся уравнениями движения жидкости с трением (418) и (419). В результате рассуждения мы получим, вместо (95) такое соотношение:

$$\int W \cdot d\tau \cdot dt + \int (X_x' x_x + X_y' x_y + \ldots)\, d\tau \cdot dt = 0. \tag{422}$$

Со стороны формальных обозначений нужно при этом помнить, что в § 23 обозначения u, v, w, x_x, y_y,... относятся к *положениям*, а здесь согласно (256) они относятся к *скоростям*. Поэтому нужно умножить эти обозначения на множитель dt, чтобы выразить те величины, которые изображались раньше диференциалами du, dv, dw, dx_x, dx_y,...

Так как уравнение (422) верно для произвольно малого объема, то мы получим для любой точки пространства:

$$X_x' x_x + Y_y' y_y + Z_z' z_z + Y_z' y_z + Z_x' z_x + X_y' x_y = -W. \tag{423}$$

Как мы видели, компоненты давления суть однородные линейные функции переменных x_x, x_y,... Следовательно, W есть однородная квадратичная, и всегда положительная, функция этих величин. Ввиду физического значения W и вследствие изотропии жидкости, постоянные, входящие в эту функцию, не могут зависеть от выбора системы координат. Поэтому, согласно (117), наиболее общий вид W:

$$W = \rho(x_x + y_y + z_z)^2 + 2\varkappa\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{y_z^2 + z_x^2 + x_y^2}{2}\right), \tag{424}$$

где ρ и $\varkappa$ обозначают две постоянные, характеризующие внутреннее трение жидкости.

Отсюда однозначно получаются выражения для компонентов трения: так как компоненты скорости деформации не зависят друг от друга, то из обоих последних уравнений вытекают компоненты трения:

$$\left.\begin{aligned} X_x' &= -\rho(x_x + y_y + z_z) - 2\varkappa x_x + \ldots, \\ Y_z' &= -\varkappa y_z, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{425}$$

Подставив их в уравнения (416) и (418), получим соответствующий результат для величины полного давления и для уравнений движения.

В этих формулах заключена теория *Стокса* для трения в жидкостях.

Для несжимаемой жидкости, которую мы только и будем рассматривать в дальнейшем, уравнения значительно упрощаются, ввиду того, что скорость объемного расширения $x_x + y_y + z_z = 0$, и поэтому, согласно (416) и (425):

$$\begin{aligned} X_x &= p - 2\varkappa x_x, \quad & Y_y &= p - 2\varkappa y_y, \quad & Z_z &= p - 2\varkappa z_z, \\ Y_z &= -\varkappa y_z, & Z_x &= -\varkappa z_x, & X_y &= -\varkappa x_y. \end{aligned} \tag{426}$$

Таким образом внутреннее трение несжимаемой жидкости зависит только от одной постоянной $\varkappa$.

Для полной формулировки законов движения жидкости, связанного с трением, нужно установить еще пограничные условия.

Если жидкость течет вдоль неподвижной твердой стенки, то для нормального давления, действующего на поверхности, не нужно особого условия, так как сопротивление стены может выдержать всякое давление. Но для давления, действующего на поверхность жидкости тангенциально, посредством трения, будет существовать определенное соотношение. В последнем играет роль скорость, с которой жидкость скользит вдоль стены. Обозначим снова через ν внутреннюю нормаль к поверхности жидкости, через X_ν, Y_ν, Z_ν — компоненты действующего на нее снаружи давления. Тангенциальный компонент давления, который равен нулю при совершенно упругой жидкости, направлен в случае жидкости с трением в сторону, противоположную скорости течения. Величину его проще всего принять пропорциональной этой скорости q, т. е.

$$X_\nu \cos(\tau x) + Y_\nu \cos(\tau y) + Z_\nu \cos(\tau z) = -\lambda q, \tag{427}$$

где τ обозначает направление течения, λ — некоторая положительная постоянная, зависящая как от вещества жидкости, так и от вещества стенки, — „коэфициент внешнего трения".

В этой формулировке заключаются также крайние случаи. $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. В первом случае вместе с внешним трением обращается в нуль и тангенциальное давление. Во втором же случае, так как тангенциальное давление остается постоянным, то скорость скольжения $q = 0$, т. е. жидкость „прилипает" к твердой стене. Численная величина коэфициентов внутреннего и внешнего трения может быть определена только из измерений.

§ 79. Рассмотрим сперва простое приложение выведенных уравнений: *стационарное течение несжимаемой жидкости в узкой трубке, имеющей вид кругового цилиндра.* Положим, что дано давление у обоих концов трубки, а весом жидкости можно пренебречь.

Примем ось трубки за ось z, а сечение трубки у начала — за плоскость xy. Давление в этом месте пусть равно p_0. Если l — длина трубки, для конечного сечения $z = l$, и давление $p_l < p_0$, то жидкость течет в направлении положительной оси z. Линии тока параллельны оси z, следовательно

$$u = 0, \quad v = 0. \tag{428}$$

Из условия стационарного состояния и условия несжимаемости (385) следует:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{429}$$

а из уравнений (426) получаются следующие значения компонентов давления:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= p, & Y_y &= p, & Z_z &= p, \\ Y_z &= -\varkappa\frac{\partial w}{\partial y}, & Z_x &= -\varkappa\frac{\partial w}{\partial x}, & X_y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{430}$$

Поэтому уравнения движения (83), в которых все три компонента ускорения обращаются в нуль, принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ &\varkappa\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{431}$$

Так как p зависит только от z, а w зависит только от x и y, согласно (429), то последнее из уравнений (431) возможно лишь в том случае, если

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \varkappa\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -c, \tag{432}$$

где падение давления есть положительная постоянная, величина которой получается из условия, что давление дано при $z = 0$ и $z = l$, а именно:

$$c = \frac{p_0 - pl}{l} = \frac{\Delta p}{l}. \tag{433}$$

Чтобы вывести из (432) величину w, как функцию x и y, введем плоские полярные координаты ρ и φ [*1* (159)] и примем во внимание, что, в виду симметрии, w зависит только от ρ. Тогда получится

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho} = -\frac{c}{\varkappa}. \tag{434}$$

Чтобы получить общий интеграл диференциального уравнения, положим:

$$\rho\frac{dw}{d\rho} = w', \tag{435}$$

тогда

$$\frac{dw'}{d\rho} = \rho\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{dw}{d\rho},$$

и, согласно (434):

$$\frac{1}{\rho}\frac{dw'}{d\rho} = -\frac{c}{\varkappa}.$$

Интегрируя, получим:

$$w' = -\frac{c}{\varkappa}\frac{\rho^2}{2} + A,$$

и, интегрируя второй раз, получим, согласно (435):

$$w = -\frac{c}{\varkappa}\cdot\frac{\rho^2}{4} + A\log\rho + B. \tag{436}$$

Для определения обеих постоянных интегрирования служат пограничные условия. При $\rho = 0$, w конечно; следовательно

$$A = 0. \tag{437}$$

Пусть на поверхности жидкости $\rho = R$ (радиус трубки). Тогда в уравнении (427):

$$\cos(\tau x) = 0, \quad \cos(\tau y) = 0, \quad \cos(\tau z) = 1,$$

и, так как ν совпадает с $-\rho$, то, согласно (70) и (430),

$$Z_\nu = \varkappa \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{x}{\rho} + \varkappa \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{y}{\rho}.$$

Следовательно, на основании (427), при $\rho = R$,

$$\frac{\varkappa}{R}\left(x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\lambda \cdot w. \tag{438}$$

Здесь нужно положить, согласно (436) и (437),

$$w_R = -\frac{c}{\varkappa} \cdot \frac{R^2}{4} + B$$

и

$$\left(x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y}\right)_R = \left(\rho \frac{dw}{d\rho}\right)_R = -\frac{c}{\varkappa} \cdot \frac{R^2}{2}.$$

Вместе с тем пограничное условие (438) гласит:

$$B = \frac{c}{\varkappa} \cdot \frac{R^2}{4} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{R}{2},$$

и мы получим из (436) решение задачи, подставив найденные значения постоянных c и B; скорость течения равна:

$$w = \frac{\Delta p}{4\varkappa l} \cdot \left(R^2 - \rho^2 + \frac{2\varkappa}{\lambda} R\right). \tag{439}$$

Таким образом скорость течения убывает от середины трубки к стенкам, что вполне естественно. Нетрудно видеть, что обе постоянные $\varkappa$ и λ должны отличаться от нуля, если скорость имеет повсюду конечную величину.

Для проверки выведенной выше формулы (439) лучше всего измерить объем жидкости, вытекшей за некоторое время t. Этот объем получится, если взять интеграл по сечению трубки:

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} w \cdot t \cdot \rho d\rho d\varphi.$$

Следовательно:

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{R^4}{\varkappa}\left(1 + \frac{4\varkappa}{\lambda R}\right) \cdot t. \tag{440}$$

Отсюда мы видим, что закон истечения существенно зависит от отношения постоянной внутреннего трения $\varkappa$ к постоянной внешнего трения λ. Если это отношение мало по сравнению с радиусом трубы R, то количество вытекающей жидкости пропорционально четвертой степени радиуса и зависит только от внутреннего трения. Если же отношение велико по сравнению с R, то количество вытекающей жидкости пропорционально третьей степени радиуса и зависит только от внешнего трения. В промежуточных случаях закон сложнее, так как влияния обоих коэффициентов трения накладываются друг на друга.

Опыты *Пуазеля*, которые были подтверждены впоследствии, показали, что обычно осуществляется первый случай, т. е. в последней формуле можно положить $\lambda = \infty$, или

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{R^4}{\varkappa} \cdot t. \tag{441}$$

Отсюда следует на основании (439), что $w = 0$ при $\rho = R$, т. е. что жидкость „прилипает" к стенке трубки.

Однако опыты показывают, что закон *Пуазеля* (441) верен только для сравнительно узких трубок. Если же радиус трубки превосходит некоторую критическую величину, то все изложенное выше решение задачи лишается физического значения. Уже первое допущение (428) не соответствует действительности, так как линии тока уже не проходят параллельно оси трубки, а изменяются под влиянием вихревых образований. Это явление называется „турбулентностью". Согласно новейшим исследованиям возникновение турбулентных движений не находится в противоречии с уравнениями гидродинамики. Оно объясняется тем, что уравнения течения имеют несколько различных решений, простейшее из которых, рассмотренное нами, изображает движение устойчивое и осуществляемое в природе только в том случае, если трубка довольно узкая. Однако точная теория турбулентных движений представляет значительные трудности для математической разработки.

§ 80. Изложенная теория трения позволяет нам также снова приняться, и с бо́льшим успехом, за решение задачи, которую мы раньше признали неразрешимой: задачи о вычислении сопротивления, которое испытывает шар, движущийся в покоящейся жидкости. Определим полную величину давления, которое оказывает несжимаемая неподвижная жидкость на шар радиуса R, движущийся в ней с постоянной скоростью a в определенном направлении — направлении оси z. Предполагаем, что жидкость тяжелая, плотности k. На основании принципа относительности мы можем взять, вместо движущегося шара в неподвижной жидкости, *неподвижный шар* с центром в начале координат, в *равномерном* токе жидкости, т. е. в стационарном течении, скорость которого на бесконечном расстоянии от шара ($r = \infty$) равна:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = -a. \tag{442}$$

В качестве второго пограничного условия воспользуемся обстоятельством, найденным в предыдущем параграфе, что на поверхности шара, при $r = R$, жидкость прилипает к шару, т. е.

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \tag{443}$$

Диференциальными уравнениями для определения u, v, w и p в качестве функции x, y, z нам послужат уравнения движения (83) с величинами компонентов давления (426), а также условие несжимаемости (385). Уравнения движения вообще не линейны, так как для ускорения мы имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w, \dots \tag{444}$$

Поэтому мы еще упростим задачу, введя ограничивающее допущение: скорости u, v, w настолько малы, что можно пренебречь членами второй степени в правой части (444). Поэтому уравнения (83) преобразуются следующим образом:

$$\left(X - \frac{\partial u}{\partial t}\right) k - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \dots$$

Подставив выражения составляющих давления (426) и приняв во внимание условие несжимаемости (385), получим:

$$\left(X - \frac{\partial u}{\partial t}\right) k - \frac{\partial p}{\partial x} + \varkappa \cdot \Delta u = 0, \dots \tag{445}$$

Далее, так как течение стационарно, и $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, то

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \varkappa \cdot \Delta u, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \varkappa \cdot \Delta v, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -kg + \varkappa \cdot \Delta w. \end{aligned}\right\} \tag{446}$$

Исключив p из этих трех уравнений, получим:

$$\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{447}$$

Теперь задача распадается на две отдельные части: во-первых, определение компонентов скорости u, v, w из (385) и (447) с пограничными условиями (442) и (443), во-вторых, определение давления p из (446), а также общего действия на шар результирующей компонентов давления.

Что касается скорости, то ясно, в виду пограничных условий, что она не может иметь потенциала. Поэтому мы, исходя из уравнений § 65, но несколько обобщив их, сделаем следующее допущение:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u', \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + v', \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + w', \end{aligned}\right\} \tag{448}$$

$$\varphi = a \cdot z + b \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + c \cdot \frac{\partial r}{\partial z}, \tag{449}$$

где u', v', w' обозначают три новые функции более простого вида, a, b, c — три постоянные. Тогда пограничные условия (442) выполняются, если u', v', w' обращаются в нуль в бесконечности. Условие несжимаемости (385) требует, чтобы

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \Delta \varphi. \tag{450}$$

Если принять во внимание, что, согласно (449),

$$\Delta\varphi = c\cdot\Delta\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) = c\cdot\frac{\partial(\Delta r)}{\partial z}$$

и что

$$\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}, \qquad 451$$

то (450) примет вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z} = 2c\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, положим:

$$u' = 0,\quad v' = 0,\quad w' = \frac{2c}{r}.$$

Тогда получим из (448):

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ w &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{2c}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad 452$$

Эти выражения удовлетворяют также всем остальным условиям. Прежде всего легко видеть, что уравнения (447) обращаются в тождества. Остаются еще пограничные условия (443), которые дают при $r=R$:

$$0 = b\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}+c\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial z} = \frac{3bxz}{R^5}-\frac{cxz}{R^3},$$

$$0 = b\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial z}+c\,\frac{\partial^2 r}{\partial y\partial z} = \frac{3byz}{R^5}-\frac{cyz}{R^3},$$

$$0 = -a-b\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}-c\,\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}+\frac{2c}{R} = -a-b\left(\frac{3z^2}{R^5}-\frac{1}{R^3}\right)+c\left(\frac{z^2}{R^3}+\frac{1}{R}\right).$$

Отсюда следует:

$$b = \frac{aR^3}{4},\qquad c = \frac{3}{4}Ra, \qquad 453$$

и величины u, v, w определены полностью.

Вторая часть задачи представляет собою вычисление давления. Для этого подставим найденные значения u, v, w в уравнения (446) и проинтегрируем. Получим:

$$p = -kgz-\varkappa\Delta\varphi+p_0,$$

где p_0 обозначает давление тока жидкости в плоскости $z=0$, если бы там не было шара. Подставив выражение (449) для φ, получим:

$$p = -kgz+2\varkappa c\cdot\frac{z}{r^3}+p_0. \qquad 454$$

Вся сила давления, которое оказывает текущая жидкость на неподвижный шар, есть результирующая всех сил давления, действующих на элементы поверхности шара $d\sigma$ с внутренними нормалями $\nu = -r$. Так как эта результирующая должна быть направлена по оси z, то она равна на основании (74)

$$\int Z_\nu d\sigma = \int\Big[Z_x\cos(\nu x)+Z_y\cos(\nu y)+Z_z\cos(\nu z)\Big]d\sigma, \qquad 455$$

куда нужно подставить величины компонентов давления из (426). Затем нужно проинтегрировать по всей поверхности шара, вводя для удобства полярные координаты: $d\sigma = R^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$. Непосредственное вычисление довольно сложно, но его можно значительно упростить при помощи следующих соображений.

На основании (83) внутри жидкости для данного случая:

$$kg+\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0,$$

так как ускорение $\frac{d^2z}{dt^2}$ обращается в нуль, как мы видели выше на основании (444).

Проинтегрируем последнее уравнение по пространству между поверхностью твердого шара и какой-нибудь концентрической поверхностью с радиусом $r > R$, а затем преобразуем интеграл при помощи (78). Тогда получится следующий результат:

искомый интеграл (455), взятый по поверхности шара с радиусом R, равен тому же интегралу, взятому по поверхности шара с радиусом r, плюс такой член:

$$-kg(V_r - V_R), \tag{456}$$

где V_r и V_R — объемы обоих шаров. Так как выбор r совершенно произволен, то мы допустим, что r бесконечно велико, и этим значительно упростим наши выражения.

Прежде всего при $r = \infty$, имеем на основании (452) и (449):

$$z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{6cxz^2}{r^5},$$

$$z_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{6cyz^2}{r^5},$$

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{cz}{r^3}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right).$$

Следовательно на основании (426) и принимая во внимание (454):

$$Z_x = \frac{6\varkappa cxz^2}{r^5}, \quad Z_y = \frac{6\varkappa cyz^2}{r^5},$$

$$Z_z = p_0 - kgz + \frac{6\varkappa cz^3}{r^5}.$$

Если подставить эти значения в (455) и проинтегрировать по всем элементам $d\sigma = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ поверхности шара r с внутренней нормалью $\nu = -r$, то мы получим выражение:

$$-8\pi\varkappa c + kg \cdot V_r.$$

Прибавив член (456), получим величину искомой силы давления на шар:

$$kg\,V_R - 8\pi\varkappa c,$$

или согласно (453)

$$kg\,V_R - 6\pi\varkappa Ra. \tag{457}$$

Первый член соответствует подъемной силе, обусловленной весом вытесненной жидкости (*I* § 114), а второй член — сопротивлению трения. Последнее действует, конечно, в направлении потока жидкости (442).

Положим, что шар свободно подвижен и тяжел, веса G_0, и определим силу F, с которой нужно действовать на него, чтобы удержать его на месте. Считая силу положительной, если она направлена вверх, получим:

$$F = G_0 - G + 6\pi\varkappa Ra. \tag{458}$$

Это и есть та сила, которую нужно приложить к шару снизу вверх, для того чтобы заставить его двигаться в неподвижной жидкости со скоростью $+a$. С другой стороны, эта формула *Стокса* дает величину стационарной скорости a, с которой шар движется в жидкости, когда на него действует постоянная сила F. Если, например, шар падает под влиянием силы тяжести, то скорость равна:

$$a = -\frac{G_0 - G}{6\pi\varkappa R}. \tag{459}$$

УКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ВАЖНЕЙШИХ ТЕОРЕМ