ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

*

Глава первая

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 51. От частного случая движений с бесконечно малыми деформациями перейдем к более общему случаю движений с конечными деформациями. В нашем изложении мы будем непосредственно исходить из того, что было сказано в § 2 о произвольном конечном движении непрерывно протяженного материального тела. Чтобы представить это движение, мы снова воспользуемся уравнениями (1) и (1 а), при помощи которых вычисляется место (x, y, z), занимаемое материальной точкой (a, b, c) в момент t.

Обратно, разрешив уравнения (1) относительно a, b, c, получим уравнения вида;

$$\left.\begin{aligned} a &= f'(x, y, z, t), \\ b &= \varphi'(x, y, z, t), \\ c &= \psi'(x, y, z, t), \end{aligned}\right\} \qquad 254$$

которые дают ответ на вопрос, какая материальная точка (a, b, c) находится в месте (x, y, z) в момент t.

Противопоставление уравнений (1) и (254) соответствует противопоставлению двух точек зрения, которое проходит через всю гидродинамику и придает ей характер дуализма: „субстанциальной“ (вещественной) и „локальной“ (местной) точки зрения. Согласно первой из них, рассматривают определенную материальную точку (a, b, c) или определенную материальную систему и ставят вопрос об изменениях ее в пространстве.

Согласно второй точке зрения, рассматривают определенную точку пространства (x, y, z) или определенную часть пространства и ставят вопрос о тех материальных точках, которые проходят через эту точку или вступают в эту часть пространства. При субстанциальной точке зрения за независимые переменные берут a, b, c, t, при локальной точке зрения — x, y, z, t.

Чтобы подчеркнуть это различие также в обозначениях, мы будем обозначать в дальнейшем диференциалы, относящиеся к независимым переменным a, b, c, t, с помощью прямого d, а диференциалы, относящиеся к независимым переменным x, y, z, t, с помощью круглого ∂. Тогда, например $\frac{dx}{dt}=u$ обозначает компонент по x скорости материальной точки (a, b, c), между тем, как $\frac{\partial x}{\partial t}=0$. Далее, $\frac{du}{dt}$ есть компонент по x ускорения, между тем как $\frac{\partial u}{\partial t}$ относится к разнице в скоростях тех двух материальных точек, которые находятся в месте (x, y, z) в момент t и в момент $t+\partial t$. Так, например, при стационарном (§ 62) истечении жидкости из сосуда, повсюду $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, между тем, как ускорение $\frac{du}{dt}\neq 0$. Вообще, между этими двумя величинами существует соотношение:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot u+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot v+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot w. \qquad 255$$

§ 52. Что касается чисто кинематической стороны рассматриваемых движений, то понятно, что здесь сохраняют свою годность все законы, выведенные в первой главе этой книги. Мы воспользуемся в особенности теми из них, которые относятся к произвольному бесконечно малому изменению и были формулированы в § 12. Ибо каждое движение можно привести к бесконечно малому изменению, если рассматривать его в течение бесконечно малого промежутка времени, от t до $t+\tau$. В этом случае можно пользоваться всеми формулами § 12, с тем лишь различием, что теперь координаты материальной точки до изменения обозначаются не через a, b, c, а x, y, z, и компоненты бесконечно малого смещения суть не u, v, w, а $u\tau, v\tau, w\tau$, где u, v, w обозначают конечные компоненты скорости. Согласно сказанному, девять бесконечно малых коэфициентов λ, μ, ν (57), которые характеризуют вращение и деформацию материальной частицы, также пропорциональны элементу времени.

Чтобы получить возможность производить вычисления над конечными величинами, разделим все эти бесконечно малые величины на τ, т. е. введем вместо бесконечно малых компонентов поступательного перемещения, вращения и деформации конечные компоненты *скорости поступательного перемещения, скорости вращения и скорости деформации*, а для обозначения их возьмем те же буквы, как и в § 12. Поэтому отныне буквы

$$u,\ v,\ w;\ \xi,\ \eta,\ \zeta;\ x_x,\ y_y,\ z_z,\ y_z,\ z_x,\ x_y \qquad 256$$

будут обозначать соответствующие компоненты скоростей. Между ними и координатами x, y, z существуют соотношения такого же вида, как и прежние соотношения (59), (60), (61) и т. д.

Скорость расширения объема материальной частицы

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\operatorname{div}\mathfrak{q}$$

определяет также изменение плотности ее. Ибо мы имеем так же как в (213a), для изменения материальной частицы первоначального объема dV, происшедшего в течение времени dt:

$$dV\cdot k=dV\cdot\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dt\right]\cdot\left(k+\frac{dk}{dt}dt\right).$$

Отсюда:

$$k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{dk}{dt}=0, \qquad 257$$

или, ввиду того, что

$$\frac{dk}{dt}=\frac{\partial k}{\partial x}u+\frac{\partial k}{\partial y}v+\frac{\partial k}{\partial z}w+\frac{\partial k}{\partial t}, \qquad 258$$

получим:

$$\frac{\partial(ku)}{\partial x}+\frac{\partial(kv)}{\partial y}+\frac{\partial(kw)}{\partial z}+\frac{\partial k}{\partial t}=0. \qquad 259$$

Интересно вывести это равенство, которое часто называют „уравнением непрерывности“, исходя не из субстанциальной, а из локальной точки зрения. Рассмотрим некоторый конечный объем, ограниченный каким-либо образом. Вся масса, заключенная в нем в момент t, равна $\int k d\tau$, а изменение ее в течение времени равно:

$$dt\cdot\int\frac{\partial k}{\partial t}d\tau.$$

С другой стороны, это изменение равно алгебраической сумме масс всех тех частиц тела, которые входят внутрь объема через его поверхность в течение времени dt. Но через элемент поверхности $d\sigma$ с внутренней нормалью ν проникает в течение dt следующая масса:

$$d\sigma\cdot k\cdot(u\cos(\nu x)+v\cos(\nu y)+w\cos(\nu z))\cdot dt. \qquad 260$$

Это — масса (косого) цилиндра плотности k, с площадью основания $d\sigma$ и длиной образующей $\mathfrak{q}\cdot dt$. Следовательно, имеем уравнение:

$$\int\frac{\partial k}{\partial t}\cdot d\tau=\int d\sigma\cdot k\cdot(u\cos(\nu x)+v\cos(\nu y)+w\cos(\nu z)),$$

или, согласно (78),

$$\int\left(\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial(ku)}{\partial x}+\frac{\partial(kv)}{\partial y}+\frac{\partial(kw)}{\partial z}\right)d\tau=0.$$

Это уравнение остается годным и в том случае, если мы уменьшим объем до размеров одного элемента объема, откуда получится (259).

Уравнение непрерывности можно отнести также, вместо бесконечно малого промежутка времени dt, к конечному промежутку t, если положить, что масса элемента тела в момент t равна массе того же элемента тела в момент 0, и воспользоваться выражением (51) функционального определителя для изменения объема. Тогда

$$dV_0\cdot k_0=dV_0\cdot D\cdot k,$$

причем значок 0 показывает, что нужно положить $t=0$. Следовательно:

$$D\cdot k=k_0,\ \text{или}\ \frac{d(Dk)}{dt}=0. \qquad 261$$

В дальнейшем мы будем пользоваться, смотря по надобности, той или иной формой уравнения непрерывности.

§ 53. Теперь перейдем к выводу динамических уравнений движения. Если мы хотим сохранить введенную в § 21 гипотезу „совершенной упругости“, т. е., что давление зависит только от деформации в данный момент, также и для произвольных конечных деформаций, то мы вынуждены будем в дальнейшем рассматривать только жидкости и газы: при непрерывно возрастающей деформации в твердом теле будет раньше или позже перейден предел упругости.

Поэтому настоящая третья часть книги представляет собою область гидродинамики (включая аэродинамику).

Подставим, как в § 44:

$$Y_z = Z_x = X_y = 0; \quad X_x = Y_y = Z_z = p = f(k). \tag{261a}$$

Получим из (83) *основные уравнения гидродинамики:*

$$\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) k - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \ \ldots \tag{262}$$

Последние уравнения можно написать еще в более простом виде, если допустить, что массовая сила имеет потенциал, т. е.

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{263}$$

и, кроме того, ввести функцию давления или плотности

$$P = \int \frac{dp}{k}, \tag{264}$$

в которой остается неопределенной только добавочная постоянная. Тогда уравнения (262) можно написать в таком виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \ \ldots \tag{265}$$

или в векториальной форме:

$$\dot{\mathfrak{q}} + \mathrm{grad}(V + P) = 0. \tag{266}$$

Между тем, эти уравнения не так просты, как кажется с первого взгляда, так как координаты x, y, z входят в них один раз (в ускорении) в качестве зависимых переменных, а другой раз (в падении потенциала и давления) в качестве независимых переменных. Если же производить вычисления, то обычно необходимо провести единую точку зрения, т. е. пользоваться повсюду либо субстанциальным, либо локальным способом рассмотрения. В зависимости от этого получаются две различных формы

уравнений движения, которые построены сложнее, чем (265) или 266).

Чтобы провести субстанциальную точку зрения, умножим три уравнения (265) по очереди на $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$.

Тогда получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{da} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{da} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{da} + \frac{dV}{da} + \frac{dP}{da} = 0, \tag{267}$$

и аналогичные уравнения для b и c.

Это так называемые уравнения *Лагранжа.* Дополнением к ним является уравнение непрерывности в субстанциальной форме (261).

С другой стороны, при локальной точке зрения, мы получим из (265), с помощью (255):

$$\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \tag{268}$$

и два соответствующих уравнения для y и v и для z и w.

Эти уравнения называются уравнениями *Эйлера.* К ним относится локальная формулировка уравнения непрерывности (259).

Как мы видим, уравнения движения сделались не только длиннее, благодаря этим преобразованиям, но также, — что существенно, — потеряли свой линейный характер. Это обстоятельство и сообщает гидродинамическим проблемам свойственные им математические трудности.

§ 54. Первое приложение, которое мы дадим уравнениям гидродинамики, будет применение и подтверждение принципа сохранения энергии. При этом мы будем целиком руководиться методом, примененным в § 23 для бесконечно малых деформаций: будем исходить из уравнения энергии (89) и подставим входящие в него величины, — кинетическую энергию L, потенциальную энергию U, внешнюю работу A, — по образцу уравнений (90), (91) и (92). Но нужно помнить, что компоненты смещений материальной точки, происходящего в течение времени dt, обозначаются теперь не через du, dv, dw, а через $u \cdot dt$, $v \cdot dt$, $w \cdot dt$. Кроме того теперь, когда плотность k подвергается конечным изменениям, удобнее относить потенциальную энергию не к элементам объема, а к элементам массы. Таким путем, мы получим из (90):

$$L = \frac{1}{2}\int (u^2 + v^2 + w^2) k \, d\tau. \tag{269}$$

из (91):

$$U = \int F \cdot k\, d\tau, \qquad 270$$

где F обозначает потенциальную энергию единицы массы, зависящую только от k или (p). Из (92) получим:

$$A = dt \cdot \int (Xu + Yv + Zw) k\, d\tau + dt \cdot \int (X_\nu u + Y_\nu v + Z_\nu w) d\sigma, \qquad 271$$

причем, согласно (74),

$$X_\nu = p \cos(\nu x), \quad Y_\nu = p \cos(\nu y), \quad Z_\nu = p \cos(\nu z). \qquad 272$$

Составляя диференциалы dL и dU по времени, будем иметь в виду, что произведение $k\,d\tau$, масса элемента тела, не зависит от времени. В таком случае получим из (269):

$$dL = dt \cdot \int \left(u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt} \right) k\, d\tau,$$

и из (270):

$$dU = dt \int \frac{dF}{dt} \cdot k\, d\tau;$$

далее, из (271) и (272), при помощи преобразования (78):

$$A = dt \cdot \int (Xu + Yv + Zw) k\, d\tau - dt \int \left(\frac{\partial (pu)}{\partial x} + \frac{\partial (pv)}{\partial y} + \frac{\partial (pw)}{\partial z} \right) d\tau. \qquad 272a$$

Если подставить эти выражения в уравнение энергии (89), принимая во внимание значение компонентов ускорения из (262), то ряд членов в обеих частях уравнения сократится, и останется соотношение:

$$\int \frac{dF}{dt} k d\tau = - \int p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau,$$

или, так как это уравнение имеет место также для одного элемента объема $d\tau$, то принимая во внимание (257), имеем:

$$dF = \frac{p}{k^2} dk. \qquad 273$$

Таким образом требования принципа сохранения энергии выполняются тогда и только тогда, если потенциальная энергия единицы массы равна:

$$F = \int \frac{p}{k^2} dk = - \int p d \left(\frac{1}{k} \right). \qquad 274$$

где $\frac{1}{k}$ есть объем единицы массы (удельный объем). Вместо последнего уравнения можно написать, произведя интегрирование по частям и подставив функцию P из (264):

$$F = - \frac{p}{k} + \int \frac{dp}{k} = - \frac{p}{k} + P. \qquad 275$$

Если потенциальная энергия известна как функция плотности или удельного объема, то отсюда можно непосредственно вычислить зависимость давления p от плотности. Ибо из (274) следует:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = - p, \qquad 276$$

где v временно обозначает удельный объем. Это соотношение находится в очевидной аналогии с выражениями (97). Последние являются более общими, поскольку обнимают также и сдвигающие силы, и в то же время более частными, поскольку относятся лишь к бесконечно малым деформациям.

В частном случае, для *несжимаемой* жидкости, $k = \text{const.}$, поэтому, согласно (264):

$$P = \frac{p}{k}, \qquad 277$$

или, согласно (275):

$$F = 0,$$

т. е. несжимаемая жидкость не обладает потенциальной энергией. Этот результат находится в согласии с такого рода соображением: несжимаемость жидкости можно рассматривать, подобно нерастяжимости нити (*1* § 107) как наложенную связь между координатами частиц тела (объемное расширение равно нулю), независимо от величины сил давления; обусловленные таким образом силы связи никогда не совершают работы [*1* (314)].

Отметим еще для позднейшего применения, частное выражение, получающееся из (271), (272) и (272a), для работы внешнего давления, действующего *равномерно* во всех точках поверхности, при любом изменении:

$$A = dt \cdot p \int \left(u \cos(\nu x) + v \cos(\nu y) + w \cos(\nu z) \right) d\sigma =$$

$$= - dt \cdot p \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau.$$

Иначе, так как $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt$ есть расширение элемента объема $d\tau$, происшедшее в течение времени dt, то

$$A = - p \cdot dV, \tag{278}$$

где dV обозначает изменение объема всей массы жидкости.

§ 55. Переходя к частным применениям законов гидродинамики, поставим, прежде всего, вопрос об условиях *равновесия*. Для этого получим, проинтегрировав уравнение (265):

$$V + \int \frac{dp}{k} = \text{const.} \tag{279}$$

Следовательно, при равновесии поверхности уровня массовых сил (I, § 40), $V = \text{const.}$, суть в то же время поверхности постоянного давления и постоянной плотности. Если две различные жидкости соприкасаются друг с другом, то на пограничной поверхности плотность k вообще претерпевает скачок; напротив, давление p изменяется непрерывно при всех обстоятельствах, согласно закону равенства действия и противодействия. Если на поверхность жидкости действует равномерное внешнее давление то давление жидкости постоянно также на границе, и наружная поверхность есть поверхность постоянного потенциала массовых сил. В особенности это верно в том частном случае, когда внешнее давление равно нулю или давлению атмосферного воздуха, и жидкость имеет, как говорят, „свободную" поверхность. От этого закона происходит название поверхностей уровня.

Если постоянная интегрирования в уравнении (279) определена по условиям на поверхности, то тем самым дана величина давления повсюду внутри жидкости, совершенно независимо от того, как ограничена жидкость в остальной части, т. е. независимо от величины и формы сосуда, в котором она находится. Например, если единственная массовая сила, есть вес самой

жидкости, действующий в направлении отрицательной оси z, то, согласно (67),

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z k\, d\tau = -g k\, d\tau,$$

и согласно (263),

$$V = gz + \text{const.} \tag{280}$$

Поэтому (279) переходит в:

$$\int \frac{dp}{k} + gz = \text{const.} \tag{281}$$

и для *несжимаемой* жидкости:

$$p = \text{const.} - kgz. \tag{282}$$

Таким образом давление одинаково во всех точках, лежащих на одинаковой высоте, и растет с уменьшением высоты пропорционально разности высот.

В уравнении (282) содержатся законы сообщающихся сосудов, действия ливеров, барометров и манометров с жидкостью.

Например, для ртутного барометра пусть обозначает $z = 0$ уровень открытой поверхности, подверженной действию внешнего давления p_0; $z = h$ — высота столба жидкости, граничащего с вакуумом.

При $z = 0$, $p = p_0$.
При $z = h$, $p = 0$.

Поэтому, на основании (282):

$$p_0 = kgh. \tag{283}$$

Величину p_0 определяют как „давление в одну атмосферу" при:

$$k = 13{,}956\,[г\ см^{-3}], \quad g = 980{,}6\,[см\ сек^{-2}], \quad h = 76\,[см].$$

Отсюда

$$p_0 = 1\,013\,250\,[гр\ см^{-1}\ сек^{-2}]. \tag{284}$$

Вместо атмосфер, давление измеряют часто также по соответствующей величине h („миллиметры ртутного столба") в уравнении (283), разделив p на kg.

§ 56. Перейдем теперь к условиям равновесия для *сжимаемой* жидкости, например, для столба воздуха произвольной высоты.

Тогда требуется знать функцию $f(k)$ в (211). Если можно считать что температура воздуха всюду одинакова, напр. 0° С, то можно положить

$$p = ck \tag{285}$$

где c определяется из того условия, что при давлении p_0, равном одной атмосфере, $k = k_0 = 0{,}001293\ [гр\ см^{-3}]$, т. е.

$$c = \frac{p_0}{k_0}. \tag{286}$$

Отсюда получим, по (281), произведя интегрирование и зная, что $z = 0$ при $p = p_0$:

$$z = \frac{p_0}{gk_0} \cdot \ln \frac{p_0}{p}. \tag{287}$$

Это так называемая барометрическая формула высоты для изотермического равновесия, при помощи которой находят высоту z, соответствующую давлению воздуха p. Если подставить числовые данные и ввести десятичные логарифмы, то формула гласит:

$$z = 18\,400 \log_{10} \frac{p_0}{p}\ [метр]. \tag{288}$$

В отношении $p_0 : p$ удобнее всего измерять давление в миллиметрах ртутного столба.

В свободной атмосфере лишь в редких случаях осуществляется допущение о постоянстве температуры, так как выравнивание температур между различными слоями воздуха при помощи теплопроводности происходит довольно медленно и постоянно нарушается воздушными течениями. Тогда формула (285) вместе со следствиями из нее теряет вообще свое значение, так как давление зависит не только от плотности, но и от температуры. Но не следует думать, что постоянство температуры есть необходимое условие для применения изложенной теории, в частности для применения гипотезы о совершенной упругости (§ 21). Ибо эта гипотеза не требует, чтобы температура оставалась постоянной, а только, чтобы давление p зависело только от плотности k. Температура может изменяться при этом, но, со своей стороны, должна быть целиком определена плотностью. Важный случай, при котором осуществлено такое условие, имеет место тогда, когда исключена возможность теплопроводности, т. е.

когда все изменения объема происходят не „изотермически" при постоянной температуре, а „адиабатически", при отсутствии перехода теплоты от одной частицы вещества к другой. Изотермические процессы соответствуют предельному случаю бесконечно большой теплопроводности вещества, адиабатические процессы соответствуют бесконечно малой теплопроводности. В процессах последнего рода давление также зависит исключительно от плотности, поэтому и для них имеет место уравнение совершенной упругости (211), но функция $f(k)$ уже не изотермическая (285), а адиабатическая:

$$p = c' k^{\gamma}, \tag{289}$$

где постоянная γ равна 1,405 для воздуха, а коэфициент c' получается из уравнения:

$$c' = \frac{p_0}{k_0^{\gamma}}. \tag{290}$$

Таким образом в адиабатических процессах давление быстрее возрастает при сжатии и убывает при расширении, чем в изотермических процессах. Это происходит от того, что воздух нагревается при адиабатическом сжатии и охлаждается при адиабатическом расширении.

Если подставить выражение (289) в (281) и произвести соответствующие действия, то получится барометрическая формула при адиабатическом равновесии:

$$z = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_0}{gk_0} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right), \tag{291}$$

или, если воспользоваться численными данными:

$$z = 27\,700 \cdot \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{0{,}288}\right) [метр]. \tag{292}$$

Такое убывание давления с высотой соответствует допущению что каждый слой воздуха имеет ту температуру, которая получается при адиабатическом расширении воздуха от 0° С и атмосферного давления до плотности данного слоя.

Еще более важную роль, чем в состояниях равновесия, адиабатические процессы играют в явлениях колебательных, так как повышения и понижения температур, вызванные попеременным сжатием и расширением, следуют друг за другом с такой быстротой, что можно совершенно пренебречь теплопроводностью, которая и без того очень незначительна у газов. Поэтому нужно при вычислении скорости звука в газах из формулы (215) применить формулу (289), которая, в связи с формулой (290) дает для скорости звука в газе плотности k_0 при давлении p_0 следующее выражение:

$$a^2 = \frac{\gamma p_0}{k_0}. \qquad 293$$

Для воздуха при 0° С и атмосферном давлении получится, если подставить численные данные:

$$a = 332\left[\frac{метр}{сек}\right]$$

в согласии с результатами измерений.

Изотермическая сжимаемость (285) дает по (215)

$$a^2 = \frac{p_0}{k_0}, \qquad 294$$

и для воздуха при тех же температуре и давлении:

$$a = 280\left[\frac{метр}{сек}\right],$$

т. е. значительно меньше.

Для капельных жидкостей разница между адиабатической и изотермической сжимаемостью незначительна.

§ 57. В качестве следующего примера применения уравнений гидродинамики рассмотрим *несжимаемую* жидкость, вращающуюся вокруг оси с *постоянной угловой скоростью* ω. В этом случае движение всех материальных точек задано наперед. Примем за ось вращения ось z. Тогда положение какой-либо точки a, b, c жидкости в момент t получится из уравнений (11), если подставить в них:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_1 = \cos(\omega t), & \alpha_2 = -\sin(\omega t) & \alpha_3 = 0, \\ \beta_1 = \sin(\omega t), & \beta_2 = \cos(\omega t) & \beta_3 = 0, \\ \gamma_1 = 0 & \gamma_2 = 0 & \gamma_3 = 1. \end{array}\right\} \qquad 295$$

Следовательно

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t), \\ y = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t), \\ z = c. \end{array}\right\} \qquad 296$$

Если дважды „субстанциально“ продиференцировать эти уравнения по времени t, то получится:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Подставив в уравнения движения (265), имеем:

$$-\omega^2 x + \frac{\partial(V+P)}{\partial x} = 0, \quad -\omega^2 y + \frac{\partial(V+P)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(V+P)}{\partial z} = 0.$$

Проинтегрировав и приняв во внимание (277), выводим окончательно:

$$p = \frac{1}{2} k\omega^2\rho^2 - kV + \text{const.}, \qquad 297$$

где ρ — расстояние точки воздействия (x, y, z) от оси вращения. Применим это уравнение к нескольким интересным случаям.

§ 58. Пусть несжимаемая тяжелая жидкость вращается с постоянной скоростью ω в полом открытом сверху круговом цилиндре с горизонтальным дном. Положим, например, что мы сильно размешиваем ложкой воду в стеклянном стакане, а затем сразу вынимаем ложку. Чтобы избежать тормозящего действия трения о стенки сосуда, можно допустить, что сосуд тоже вращается. Тогда при равномерном вращении вовсе не будет трения, так как движение происходит без деформации.

Из уравнений (280) и (297) получится:

$$p = \frac{1}{2} k\omega^2\rho^2 - kgz + \text{const.} \qquad 298$$

Вид свободной поверхности жидкости получится, согласно § 55, из условия $p = \text{const}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\omega^2\rho^2 - gz = \text{const.}$$

Это уравнение параболоида вращения, осью которого служит ось z. Если подставить $z = z_0$ при $\rho = 0$, то получится:

$$z = z_0 + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\rho^2. \qquad 299$$

Таким образом поверхность жидкости ниже всего в середине сосуда и повышается к краям пропорционально квадрату скорости вращения. Величина z_0, и вместе с тем, абсолютное значение понижения посредине вычисляется независимо от размеров внешнего давления, по объему жидкости, который одинаков в состоянии вращения и в состоянии покоя. Если неподвижная жидкость заполняет сосуд до уровня $z=h$, то объем выражается соотношением:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} z \cdot \rho d\rho d\varphi = R^2\pi \cdot h.,$$

где R обозначает радиус цилиндра.

Отсюда, при помощи формулы (299), получается.

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}. \qquad 300$$

Второй член правой части дает величину понижения уровня на жидкости посредине.

Повышение у края равно значению $z-h$ при $\rho=R$. Согласно (299),

$$z - h = \frac{\omega^2 R^2}{4g}. \qquad 301$$

Таким образом повышение уровня у края равно понижению посредине.

В горизонтальном сечении (z = const) давление переменно согласно (298); в середине наименьшее, у края наибольшее. Это легко наблюдать, если насыпать на дно неподвижного сосуда песок, который настолько тяжел, что не увлекается вращением жидкости. Когда жидкость вращается, песчинки устремляются к середине дна под влиянием падения давления.

§ 59. Положим, что несжимаемая жидкость, частицы которой тяготеют к неподвижному центру по закону *Ньютона*, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр. Требуется определить форму свободной поверхности. Главный интерес этой задачи заключается в том, что она родственна с проблемой о сжатии земли у полюсов. Поэтому мы возьмем в качестве примера данные, относящиеся к земле.

Если обозначить через r расстояние от точки воздействия до центра O, то гравитационный потенциал равен, согласно [*1* (111)]:

$$V = -\frac{c}{r},$$

а сила притяжения на единицу массы (ускорение силы тяжести) равна, согласно (67) и (263):

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{c}{r^2}.$$

Чтобы определить постоянную c, допустим, что ускорение силы тяжести равно g_0 на расстоянии r_0. Тогда имеем:

$$g_0 = \frac{c}{r_0^2},$$

и вообще

$$V = -\frac{g_0 r_0^2}{r}. \qquad 302$$

Это дает, согласно (297), следующее уравнение для формы свободной поверхности:

$$\frac{1}{2}\omega^2\rho^2 + \frac{g_0 r_0^2}{r} = \text{const.},$$

или, если положить, что на поверхности $r=r_0$ (полярный радиус) при $\rho=0$;

$$\frac{1}{2}\omega^2\rho^2 = g_0 r_0^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right). \qquad 303$$

Введем вместо ρ угол φ (географическая широта) при помощи соотношения: $\rho = r\cos\varphi$. Тогда (303) примет вид:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \frac{\omega^2}{2g_0 r_0^2} \cdot r^2\cos^2\varphi. \qquad 304$$

В частном случае, когда $\omega=0$ (неподвижная жидкость), r постоянно, т. е. поверхность есть шар. Поэтому при малых значениях ω поверхность есть сжатый у полюсов сфероид, мало отличающийся по форме от шара. Уравнение сфероида можно написать в первом приближении следующим образом:

$$r = r_0\left(1 + \frac{\omega^2 r_0}{2g_0}\cos^2\varphi\right). \qquad 305$$

Величина сжатия равна

$$\frac{r_{\max} - r_0}{r_0} = \frac{\omega^2 r_0}{2g_0}. \qquad 306$$

Это дает для земного шара, при

$$\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\,[сек^{-1}],\quad r_0 = 6{,}356\cdot 10^8\,[см],\quad g_0 = 983\left[\frac{см}{сек^2}\right]$$

величину $\frac{1}{585}$, между тем как действительное сжатие заметно больше, а именно $\frac{1}{298}$.

Разница легко объясняется тем, что частицы земли притягиваются не к центру, а друг к другу, что, конечно, вызывает отклонение от формы шара. Введение взаимного тяготения значительно усложняет задачу, так как выражение потенциала тяготения уже не дано заранее, а само зависит от искомой формы поверхности. Более подробное исследование показало, что задача, формулированная таким образом, не имеет однозначного решения, т. е. возможно несколько различных форм поверхности, в том числе и эллипсоид вращения с определенной величиной сжатия.

Если рассматривать только небольшие значения угловой скорости, а значит, и небольшие отклонения от формы шара, то при взаимном тяготении можно допустить с известным приближением что сила притяжения, действующая на частицу жидкости, прямо пропорциональна расстоянию r от центра земли, согласно [*1*(102)], следовательно потенциал пропорционален r^2. Если произвести вычисление при этом допущении по тому же способу, что и выше, то получится снова выражение (306) для величины сжатия. Это объясняется, очевидно, тем, что при малых отклонениях от формы шара вид закона, по которому V зависит от r, не оказывает существенного влияния на величину сжатия.

§ 60. Теперь снова возвратимся к обсуждению теории. Прежде всего произведем важное интегрирование уравнений гидродинамики, которое было открыто *Гельмгольцем*. Оно имеет такое же значение для гидродинамики, как принцип площадей для общей механики.

Будем исходить из трех уравнений *Лагранжа* (267), которые соответствуют буквам a, b, c. Функции V и P можно исключить из них, если продиференцировать первое уравнение по b, второе уравнение по a, и из одного получившегося уравнения вычесть другое. Произведя эту операцию, мы можем снова получить три уравнения, которые соответствуют буквам a, b, c.

Произведем сперва вычисление только для уравнения a. Получается:

$$\frac{d}{db}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dc}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dc}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dc}\right)-\frac{d}{dc}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{db}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{db}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{db}\right)=0.$$

После диференцирования:

$$\sum_{x,y,z}\frac{dx}{dc}\frac{d}{db}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dx}{db}\frac{d}{dc}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,$$

где знак суммы показывает, что к написанному члену с буквой x нужно добавить два аналогичные члена с буквами y и z. Это выражение можно написать в виде производной по времени t, а именно:

$$\sum_{x,y,z}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dc}\frac{du}{db}-\frac{dx}{db}\frac{du}{dc}\right)=0.$$

В этом нужно убедиться, продиференцировав по t, так как из получившихся четырех членов два сократятся.

Проинтегрировав, получим:

$$\sum_{x,y,z}\frac{dx}{dc}\frac{du}{db}-\frac{dx}{db}\frac{du}{dc}=A, \qquad 307а$$

где величина A зависит только от a, b, c, а не от t. Совершенно таким же образом получим выражение $(307b)=B$ и выражение $(307c)=C$, где B и C обладают таким же свойством, как A.

Чтобы преобразовать три уравнения, соответствующие буквам a, b, c, в уравнения, соответствующие буквам x, y, z, умножим уравнения (307) последовательно на $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dx}{dc}$ и сложим. Собрав вместе по нескольку членов, часть из которых сократится, а часть может быть написана в виде символа, аналогичного (8), получим:

$$\sum_{a,b,c}\frac{dw}{da}\left[\frac{dy}{da}\right]-\frac{dv}{da}\left[\frac{dz}{da}\right]=A\frac{dx}{da}+B\frac{dx}{db}+C\frac{dx}{dc} \qquad 308x$$

и соответствующие два уравнения $(308\,y)$ и $(308\,z)$.

Согласно (53),

$$\sum_{a,b,c}\frac{dw}{da}\left[\frac{dy}{da}\right]=D\cdot\frac{\partial w}{\partial y},$$

где D обозначает функциональный определитель (51). Поэтому ($308x$) примет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{D}\left(A\frac{dx}{da}+B\frac{dx}{db}+C\frac{dx}{dc}\right),$$

а, принимая во внимание с одной стороны (59) и (256), с другой стороны (261), получим:

$$\xi=\frac{k}{2k_0}\left(A\frac{dx}{da}+B\frac{dx}{db}+C\frac{dx}{dc}\right), \qquad 309x$$

и аналогичные уравнения ($309y$) и ($309z$) для η и ζ.

Чтобы определить значения „постоянных интегрирования" A, B, C, не зависящих от t, положим в трех уравнениях (309) $t=0$. Так как, согласно (1а)

$$\left(\frac{dx}{da}\right)_0=1,\quad \left(\frac{dx}{db}\right)_0=1,\quad \left(\frac{dx}{dc}\right)_0=1,$$

то получится:

$$\xi_0=\frac{1}{2}A,\quad \eta_0=\frac{1}{2}B,\quad \zeta_0=\frac{1}{2}C.$$

Следовательно, вообще

$$\begin{aligned}\xi&=\frac{k}{k_0}\left(\xi_0\frac{dx}{da}+\eta_0\frac{dx}{db}+\zeta_0\frac{dx}{dc}\right),\\ \eta&=\frac{k}{k_0}\left(\xi_0\frac{dy}{da}+\eta_0\frac{dy}{db}+\zeta_0\frac{dy}{dc}\right),\\ \zeta&=\frac{k}{k_0}\left(\xi_0\frac{dz}{da}+\eta_0\frac{dz}{db}+\zeta_0\frac{dz}{dc}\right).\end{aligned} \qquad 310$$

Из этих уравнений вытекает множество следствий, которые основаны на том, что величины k_0, ξ_0, η_0, ζ_0 зависят только от a, b, c, а не от t.

Рассмотрим сперва частицу жидкости a, b, c, скорость вращения которой равна нулю в момент $t=0$. Тогда соответствующие компоненты ξ_0, η_0, ζ_0 обратятся в нуль, и из (310) следует:

$$\xi=0,\quad \eta=0,\quad \zeta=0.$$

Таким образом *частица жидкости, которая не обладает вращением в некоторый момент, сохраняет это свойство во все времена.*

Далее, рассмотрим в момент $t=0$, когда a, b, c совпадают с x, y, z, такие частицы жидкости a, b, c, для которых все или часть компонентов скорости и вращения отличны от нуля. Мы можем следующим образом составить себе наглядное представление о пространственном расположении этого вектора (ξ_0, η_0, ζ_0). Вообразим такое семейство кривых:

$$da:db:dc=\xi_0:\eta_0:\zeta_0. \qquad 311$$

Каждая из этих кривых обладает тем свойством, что касательная в какой-либо точке ее совпадает с направлением оси вращения в этой точке. Поэтому такая кривая называется *вихревой линией* жидкости. Проследим и в дальнейшие моменты t те из материальных точек a, b, c, которые в момент $t=0$ принадлежат вихревой линии и поэтому связаны между собою уравнением (311). Определим скорости вращения этих точек. Величину и направление скоростей можно получить из уравнений (310). Что касается направления, то, подставив значения ξ_0, η_0, ζ_0 из (311), получим:

$$\xi:\eta:\zeta=dx:dy:dz. \qquad 312$$

Это значит, что кривая, образованная в пространстве рассматриваемыми точками, также обладает свойством вихревой линии, или же: *вихревые линии всегда состоят из одних и тех же материальных точек.*

Поэтому вихревая линия представляет собою индивидуальное субстанциальное образование, которое может изменять свое положение и форму во время движения, но никогда не изменяет материального состава и основного свойства, характеризующегося уравнением (312). Вихревая линия может быть замкнутой, или же простираться в бесконечность, или же заканчиваться на поверхности жидкости.

Уравнения (310) дают ответ также и на вопрос о скорости вращения (или вихревой скорости) ω.

Рассмотрим элемент длины вихревой линии

$$ds_0=\sqrt{da^2+db^2+dc^2}$$

в момент $t=0$. Согласно (311),

$$\frac{\xi_0}{\omega_0}=\frac{da}{ds_0},\quad \frac{\eta_0}{\omega_0}=\frac{db}{ds_0},\quad \frac{\zeta_0}{\omega_0}=\frac{dc}{ds_0}.$$

Подставив в (310), имеем:

$$\xi=\frac{k}{k_0}\,\omega_0\,\frac{dx}{ds_0},\quad \eta=\frac{k}{k_0}\,\omega_0\,\frac{dy}{ds_0},\quad \zeta=\frac{k}{k_0}\,\omega_0\,\frac{dz}{ds_0}.$$

Следовательно, скорость вращения в момент t:

$$\omega=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=\frac{k}{k_0}\,\omega_0\,\frac{ds}{ds_0}. \qquad 313$$

Таким образом скорость вращения в какой-нибудь точке вихревой линии пропорциональна плотности жидкости и длине элемента дуги линии, если элемент дуги все время проходит через одни и те же материальные точки. Если же, например, элемент дуги удлиняется с течением времени, так что образующие его материальные точки удаляются друг от друга, а величина k остается неизменной, то вихревая скорость возрастает.

Это положение станет еще нагляднее, если изложить его в другой форме. Представим себе какую-нибудь часть поверхности внутри жидкости и проведем через каждую точку ее края вихревую линию. Таким образом мы выделим из жидкости объем, который называется „вихревой нитью" или „вихревой трубкой". Боковая поверхность трубки состоит исключительно из вихревых линий, а упомянутая часть поверхности представляет собою сечение трубки. Можно представить себе, что весь объем жидкости состоит целиком из бесконечно тонких вихревых нитей, которые либо замкнуты, либо простираются в бесконечность, либо оканчиваются на поверхности жидкости. Вихревые нити, подобно вихревым линиям, состоят всегда из одних и тех же материальных точек.

Рассмотрим бесконечно короткий отрезок такой бесконечно тонкой вихревой нити, проведя через две точки одной из линий вихревой нити, два произвольных сечения с площадью f на расстоянии ds друг от друга. Проследим за точками, принадлежащими этому отрезку вихревой нити, в разные моменты времени.

Так как масса отрезка вихревой нити неизменна, то:

$$k\cdot f\cdot ds\cdot\cos\vartheta=k_0\cdot f_0\cdot ds_0\cdot\cos\vartheta_0,$$

где ϑ обозначает острый угол между нормалью к поперечному сечению и ds, т. е. осью вихря.

Тогда (313) примет вид:

$$\omega\cdot f\cdot\cos\vartheta=\omega_0\cdot f_0\cdot\cos\vartheta_0=\omega\cdot f_n, \qquad 314$$

где f_n обозначает площадь сечения, нормального к оси вихря. Таким образом *произведение вихревой скорости на площадь нормального сечения вихревой нити не изменяется с течением времени.*

Но это произведение имеет одинаковую величину также и в различных местах определенной вихревой нити. Ибо, если проинтегрировать по произвольному объему жидкости следующее тождество:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0, \qquad 315$$

вытекающее из равенств (59), и преобразовать каждый из получившихся при этом объемных интегралов по формуле (78), то мы получим для интеграла, взятого по поверхности, ограничивающей объем:

$$\int\Big(\xi\cos(\nu x)+\eta\cos(\nu y)+\zeta\cos(\nu z)\Big)\,d\sigma=\int\omega\cos(\nu,\omega)\cdot d\sigma=0. \qquad 316$$

Если взятый объем жидкости есть отрезок вихревой нити произвольной длины, то все те члены поверхностного интеграла, которые относятся к боковой поверхности нити, обращаются в нуль, так как в каждой точке боковой поверхности нормаль ν перпендикулярна к направлению вихревой оси, лежащей на боковой поверхности. Если вихревая нить бесконечно тонка, но конечной длины, с произвольно расположенным начальным сечением f и конечным сечением f', то уравнение (316) приводится к двум членам:

$$\omega\cos(\nu,\omega)\cdot f+\omega'\cos(\nu,\omega')\cdot f'=0.$$

Если снова обозначить через ϑ острый угол между нормалью к поперечному сечению и вихревой осью и, кроме того, принять во внимание, что вихревые оси ω, ω' направлены в одну сторону, а внутренние нормали направлены в противоположные стороны, то получится:

$$\omega f\cos\vartheta-\omega' f'\cos\vartheta'=0, \qquad 317$$

что в сочетании с (314) дает такое правило: *для бесконечно тонкой вихревой нити произведение вихревой скорости на площадь нормального поперечного сечения имеет одну и ту же величину во всех* *точках нити и во всякий момент.* Это произведение называется также „моментом" вихревой нити.

Существование изложенных законов непосредственно связано, очевидно, с допущениями о совершенно упругой жидкости (§ 53) и о существовании силового потенциала (263). Но в природе всегда встречаются более или менее значительные отступления от этих допущений. В результате таких отступлений вихри могут, в противность выведенным законам как появляться, так и исчезать. Подобные отступления обусловливаются явлениями трения и теплопроводности. Под влиянием трения внутри жидкости появляются силы давления, которые зависят не от деформации, а от скорости деформации в данный момент (§ 78), а в результате теплопроводности давление становится зависимым не только от плотности и потому не выполняется равенство (211). Только в предельных случаях бесконечно большой теплопроводности (изотермические процессы) и бесконечно малой теплопроводности (адиабатические процессы) можно, как мы видели в (§ 56), рассматривать жидкость как абсолютно упругую и принимать законы вихревых движений при действии консервативных массовых сил.

Глава вторая

БЕЗВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 61. Проинтегрировав общие уравнения гидродинамики, мы познакомились с фундаментальным значением вихревых движений. Поэтому естественно будет в дальнейшем, рассматривая движения жидкости, разделить их на два рода: движения безвихревые (невращательные) и вихревые. Сперва рассмотрим первый род движений. Основное условие безвихревых движений:

$$\operatorname{rot} q = 0, \tag{318}$$

или же

$$q = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{319}$$

т. е., что существует такая функция φ, „потенциал скорости" частные производные которой по x, y, z равны соответствующим компонентам скорости [ср. выше (217) и (218)]. Мы знаем из предыдущего, что если равенство (318) или (312) имеет место для одного момента времени, то оно имеет место во всякое время. Обычно определяют потенциал скорости φ не с тем знаком, какой мы взяли, и в уравнении (319) пишут знак $+$. Но, если мы желаем сохранить аналогию с потенциалом сил и упругим потенциалом, а также с электрическим и термодинамическим потенциалами, то приходится и для потенциала скорости считать направление вектора q обратным направлению соответствующего градиента. Тогда и скорость, подобно силе в отношении силового потенциала, направлена в сторону *убывающего* потенциала. В выражении потенциала скорости остается по (319), еще аддитивная функция времени, совершенно неопределенная и поэтому не имеющая физического значения.

Удобнее всего рассматривать состояние жидкости в отношении скоростей ее точек в какой-либо момент t, если построить поверхности постоянного потенциала скорости $\varphi = \text{const.}$ и перпендикулярные к ним кривые:

$$dx : dy : dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{320}$$

так называемые „линии тока", которые указывают направление скорости в каждой ее точке, совершенно аналогично поверхностям уровня и силовым линиям (*1* § 40). Так как линия тока идет всегда от более высокого к более низкому потенциалу скорости, то она не может быть замкнутой, если потенциал скорости однозначен и непрерывен. Позднее (§ 68) мы встретим безвихревое движение жидкости с замкнутыми линиями тока, и тогда вынуждены будем сделать вывод, что определенное безвихревое движение может обладать также многозначным или прерывным потенциалом скорости.

Из понятия о линии тока непосредственно вытекает понятие о „нити тока" или „трубке тока", которая характеризуется тем, что боковая поверхность ее образована линиями тока. Нить тока относится к линии тока совершенно так же, как вихревая нить относится к вихревой линии. Поверхности постоянного потенциала скорости, понятно, ортогональны к нитям тока.

Если движение жидкости нестационарно, то система линий и нитей тока будет неодинаковой в различные моменты, т. е. линии тока будут изменяться с течением времени. Но следует при этом иметь в виду, что говорить о движении какой-либо определенной линии тока не имеет смысла. Ибо точки жидкости, которые образуют линию тока в определенный момент, уже не обладают этим свойством в другой момент. Поэтому вообще не является возможным сопоставить с линией тока в один момент определенную линию тока в другой момент. В этом заключается принципиальное отличие линий тока от вихревых линий, которые состоят всегда из одних и тех же точек жидкости и поэтому имеют индивидуальное значение.

Так как условие отсутствия вихрей удобнее всего выражается при помощи пространственных координат x, y, z в качестве независимых переменных, то для изображения безвихревых движений лучше всего подходят уравнения движения в эйлеровой форме (268). Последние можно написать следующим образом, воспользовавшись (319):

$$\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

и т. д. Проинтегрировав их по x, y, z, получим:

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V + P - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(t).$$

Как мы уже заметили, в выражении потенциала скорости аддитивная функция времени является произвольной. Поэтому можно написать:

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V + P - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{321}$$

К этому уравнению нужно присоединить условие непрерывности (259) и соотношение между давлением и плотностью, зависящее от природы жидкости. Тогда мы будем иметь три уравнения, из которых можно определить три величины φ, p, k, как функции независимых переменных x, y, z, t, воспользовавшись начальными и предельными условиями, соответствующими данному особому случаю.

§ 62. Стационарное (установившееся) движение несжимаемой жидкости. Если движение *стационарно*, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Проинтегрировав эти уравнения по x, y, z, получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \text{const.}$$

Если жидкость несжимаемая и тяжелая, то P принимает значение (277), V — значение (280) и уравнение (321) переходит в уравнение:

$$p = -\frac{k}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) - kgz + \text{const.}, \tag{322}$$

а уравнение непрерывности приводится к такому:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{323}$$

Это — известное уравнение *Лапласа*. Каждое решение этого дифференциального уравнения, не зависящее от t, представляет возможное в природе безвихревое стационарное (установившееся) движение несжимаемой жидкости, при котором давление выражается формулой (322). Как мы видим, давление состоит из двух частей, из которых первую часть часто называют гидродинамическим давлением, а вторую, тождественную с (282) — гидростатическим давлением. Гидродинамическое давление зависит только от величины скорости и уменьшается с возрастанием ее. Как давление, так и падение давления не имеют ничего общего с направлением движения жидкости. В следующих параграфах мы познакомимся с интересными примерами этого положения.

Возьмем внутри жидкости какой-нибудь определенный ограниченный со всех сторон объем и проинтегрируем уравнение непрерывности (323) по этому объему. Тогда получим, на основании (82)

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\sigma = 0. \qquad 324$$

Это уравнение получит наглядное истолкование, если принять во внимание, что выражение

$$-k\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\sigma dt = k\mathbf{q}_\nu\, d\sigma dt \qquad 325$$

представляет то количество жидкости, которое втекает внутрь объема через элемент поверхности $d\sigma$ за время dt. Уравнение (324) гласит, что количество жидкости, втекающей в рассматриваемый объем через все элементы поверхности его, равно в целом нулю, т. е. втекает ровно столько же жидкости, сколько вытекает.

Если рассматриваемый объем представляет собою отрезок трубки тока произвольной длины и произвольного сечения, то те части поверхностного интеграла (324), которые относятся к боковой поверхности трубки, отпадают, и уравнение сводится к правилу, что через каждое сечение трубки тока протекает одинаковое количество жидкости. Это количество характерно для рассматриваемой трубки тока. Отнесенное к единице времени, оно называется „интенсивностью тока" или „силой тока" трубки:

$$J = -k\int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\sigma, \qquad 326$$

где интеграл берется по какому-нибудь произвольному сечению трубки, и направление ν должно быть взято в направлении течения.

Если взять сечение, совпадающее с поверхностью $\varphi = \text{const.}$, то направление ν совпадает с направлением скорости q, и мы получим:

$$J = k\int q\, d\sigma. \qquad 327$$

§ 63. Для каждой трубки тока можно себе представить, что боковая поверхность ее заменена твердой стеной, без всякого нарушения движения жидкости, так как предельное условие, существующее для твердой стены, что нормальная составляющая скорости обращается в нуль, всегда осуществлено на боковой поверхности трубки тока. Благодаря этому трубки тока получают непосредственное практическое значение. Если сечение трубки не слишком велико, и скорость течения распределена не слишком неравномерно по величине и направлению в различных точках сечения, как, например, бывает в водопроводных трубах, то можно с известным приближением считать плоскими поверхности постоянного потенциала скорости и вынести q за знак интеграла в формуле (327). Тогда

$$I = k \cdot q \cdot f, \qquad 328$$

где f обозначает площадь нормального сечения трубки. Так как I и k остаются постоянными вдоль всей трубки, то величина скорости обратно пропорциональна сечению f трубки, или

$$q = \frac{f_0 q_0}{f}, \qquad 329$$

если обозначить значком нуль какое-нибудь определенное сечение, например, начальное сечение. Отсюда получится, согласно (322) давление в каком-нибудь сечении f трубки:

$$p - p_0 = -\frac{k}{2} q_0^2\left(\frac{f_0^2}{f^2} - 1\right) + kg(z_0 - z). \qquad 330$$

Как мы видим, давление меньше всего в самых узких местах трубки. Поэтому можно в принципе, при данных q_0 и f_0, сузив должным образом трубку, т. е. уменьшив величину f, получить любое уменьшение давления, соответственно увеличению скорости. Если в таком узком месте проделать в стенке трубки узкое отверстие, установив таким образом сообщением с наружным воздухом, находящемся при нормальном давлении p_0, то под влиянием разности давления $p_0 - p$ воздух вгонится в трубку и будет унесен жидкостью. Это обстоятельство применяется, например, в гидравлических воздушных насосах. Так называемые распылительные аппараты также основаны на уменьшении давления при возрастании скорости.

Член равенства (330), зависящий от тяжести, также может быть использован для уменьшения давления p, например, в воздушно-водяном насосе *Бунзена*: где вода падает в вертикальной цилиндрической трубке ($f = f_0$), так что разность давлений в двух местах прямо пропорциональна разности уровней $z_0 - z$.

Уравнения (329) и (330) можно использовать также и для того, чтобы по заданной разности давления $p_0 - p$ в начале и конце трубки найти стационарные скорости q_0 и q, с которыми жидкость течет в трубке. Вычислим, например, стационарную скорость истечения из трубки, широкой вверху и узкой внизу, полагая, что на верхнем уровне жидкости давление p_0, а у отверстия давление равно p. Если пренебречь f по сравнению с f_0 и обозначить разность высот обоих уравнений через h, то мы получим из (330) и (329) следующее выражение для скорости истечения:

$$q^2 = 2gh + \frac{2}{k}\left(p_0 - p\right). \qquad 331$$

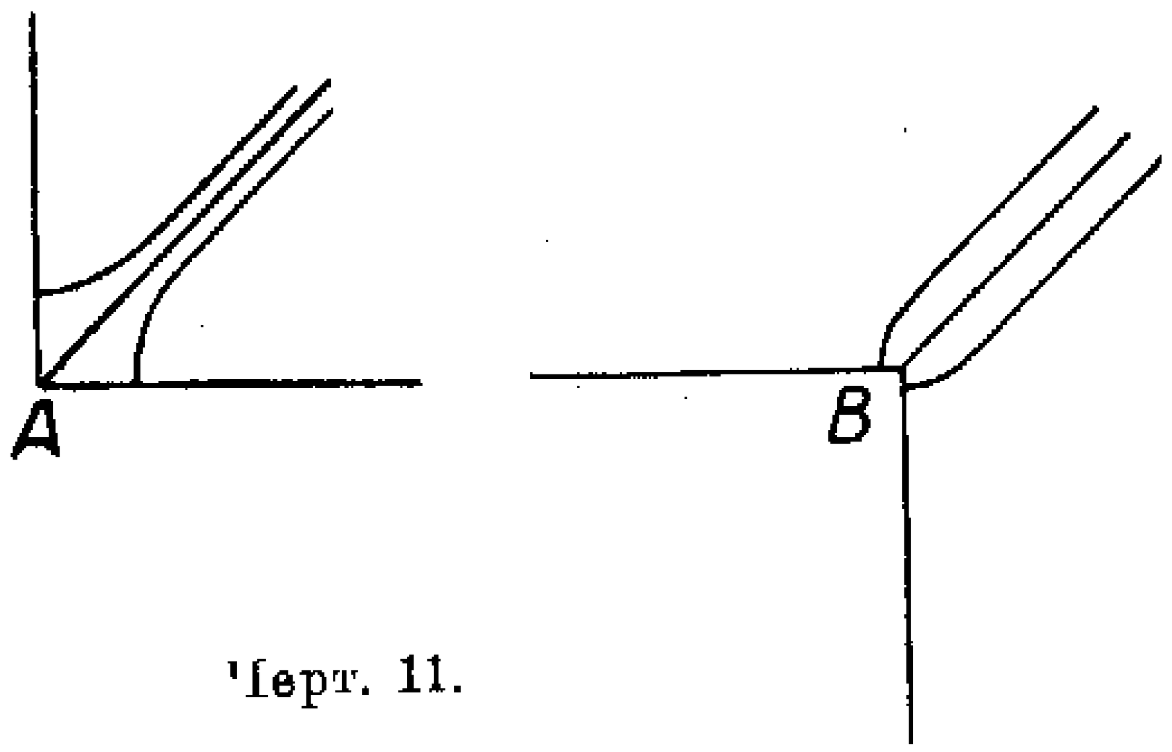
Если давление вверху и внизу одинаково, то $q = \sqrt{2gh}$, т. е. скорость истечения равна скорости тела, свободно падающего с высоты h (теорема *Торичелли*). Введя разность давлений, можно, в зависимости от знака ее, ускорить или замедлить истечение. Но, для того чтобы q оставалось вещественным, разность давлений не должна быть меньше величины $-hkg$. В предельном случае скорость стационарного истечения равна нулю, и мы получим для разности давлений известную барометрическую формулу (283).

В действительности количество вытекающей жидкости значительно (приблизительно на треть) меньше, чем вычисленное по скорости истечения на основании (331) и по площади отверстия f на основании (328). Это обусловлено главным образом тем обстоятельством, что поверхность $\varphi = \text{const}$. у отверстия не плоская, а вогнутая, если смотреть снаружи, так как линии тока, приходя изнутри жидкости, сдвигаются около узкого отверстия, подобно образующим конуса у вершины. Поэтому поверхности $\varphi = \text{const}$ расположены подобно шаровым поверхностям, концентрически

окружающим вершину конуса. Вследствие этого скорость неодинаково направлена в различных точках отверстия, как мы предполагали, применяя уравнение (328), но линии тока сходятся и поэтому сечение трубки тока еще несколько сжимается за отверстием там, где жидкость образует свободную струю (§ 67). Лучшее приближение к действительности получится, если подставить в уравнение (328) вместо f не площадь отверстия, а меньшую площадь, которую имеет струя после сжатия, так как там линии тока ближе к параллельному расположению.

Количество вытекающей жидкости можно значительно увеличить, присоединив к отверстию цилиндрическую или, еще лучше, конически расширяющуюся наружу трубку. Главная задача этого приспособления состоит в том, чтобы сделать линии тока у отверстия параллельными или расходящимися, и этим избегнуть сжатия струи. Подробнее об истечении из конической трубки мы будем говорить в следующем параграфе.

Если стенка трубки не всюду непрерывно изогнута, а образует в каком-либо месте угол, то та линия тока, которая идет вдоль стенки и проходит через вершину угла, имеет в этом месте особенную точку, так как направление линии здесь двузначно. Компоненты скорости течения в таком углу равны нулю или бесконечны. Выясним, при каких условиях имеет место каждый из этих случаев. Положим, что стена образует вогнутый угол ($<\pi$), если смотреть со стороны жидкости, как в точке A на черт. 11. Тогда поверхности $\varphi = \text{const}.$, перпендикулярные к стенке и изображенные на чертеже линиями, расположены таким образом, что, при приближении к A, расходятся от особенной поверхности потенциала, проходящей через A. В таком случае градиент φ и вместе с тем величина скорости в точке A обращаются в нуль (ср. *I* § 40), вследствие чего давление p достигает максимума, согласно (332). Если же стена образует выпуклый, входящий в жидкость угол ($>\pi$), как в точке B



Черт. 11.

того же чертежа, то поверхности постоянного потенциала скорости сходятся по направлению к особенной точке, градиент φ и скорость равны ∞, следовательно, давление $p = -\infty$, и жидкость должна была бы обладать бесконечно большим сцеплением, чтобы не разорваться.

§ 64. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых простых частных решений уравнения потенциала (323) и соответствующих движений жидкости. Наиболее простое решение состоит в том, что φ зависит линейно от x, y, z. Ему соответствует равномерное поступательное движение жидкости, которое не представляет для нас интереса.

Более общее решение [согласно 1(125) и (129)]:

$$\varphi=\sum\frac{\mu_1}{r_1}, \tag{332}$$

где r_1 — расстояние точки воздействия от неподвижного центра 1; μ — постоянная, свойственная этому центру, а суммирование распространяется на произвольное число различных центров. Так как потенциал скорости становится бесконечно большим при неограниченном приближении точки воздействия к какому-нибудь неподвижному центру, то нужно представлять себе, что сами неподвижные центры выделены из жидкости. Это может быть сделано посредством небольших замкнутых поверхностей, непосредственно окружающих отдельные центры.

Рассмотрим сперва частный случай одного центра

$$\varphi=\frac{\mu}{r}. \tag{333}$$

этом случае поверхности постоянного потенциала скорости представляют собою концентрические шаровые поверхности, а линии тока суть образующие прямолинейного ортогонального пучка лучей. Если μ положительно, то жидкость течет от центра по всем направлениям, и мы имеем так называемую „точку истока" („источник"). Если μ отрицательно, то жидкость всасывается отовсюду в центре и там находится „точка стока". Величина скорости, считая в направлении от центра, равна

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\mu}{r^2}. \tag{334}$$

Она изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, и в самом центре $=\pm\infty$. Вследствие этого давление p в центре, согласно (322), всегда равно $-\infty$, независимо от того,

находится ли в нем источник или сток. Здесь мы встречаемся с интересной особенностью по сравнению со стационарными гальваническими и термическими течениями, которые исходят из точечного электрода или точечного источника тепла и также изображаются диференциальным уравнением *Лапласа*. В этих явлениях направление течения зависит от падения (градиента) потенциала или температуры и изменяется вместе со знаком градиента. В течениях жидкости давление всегда возрастает наружу, независимо от того, течет ли жидкость наружу или внутрь. Причина этой особенности заключается в инерции жидкости, так как падение давления дает здесь силу, всегда направленную внутрь. Сила эта необходима, для того чтобы в случае источника постепенно замедлять скорость жидкости, вытекающей наружу, а в случае стока постепенно повышать скорость жидкости, втекающей внутрь.

Любую коническую поверхность с вершиной в центре можно мысленно заменить твердой стеной. Таким образом мы получим законы истечения из конической трубки, о которой шла речь в предыдущем параграфе. Постоянная μ непосредственно связана с производительностью источника. Представим себе, что в жидкости проведена некоторая поверхность произвольной формы, которая окружает со всех сторон точку истока. Так как движение стационарно, то все количество жидкости, протекающее в единицу времени сквозь поверхность наружу, равно количеству жидкости, которая доставляется за это время источником, и не зависит поэтому от формы поверхности. Эту величину назовем „интенсивностью" или „силой" источника и обозначим буквой J. Ее проще всего вычислить, если предположить, что поверхность — шаровая с источником в центре. Тогда мы получим для интенсивности источника, согласно (325) и (334):

$$J=-k\int\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,d\sigma=k\,\frac{\mu}{r^2}\int d\sigma=4\pi k\mu. \tag{335}$$

Это равенство представляет собою вместе с тем обобщение равенства (324), которое верно только в том случае, если объем ограниченный поверхностью, не заключает в себе особенных точек.

Далее, перейдем к более общему случаю (332) произвольного числа точек истока и стока. Здесь мы будем иметь дело с аналогичными соотношениями. Линии тока начинаются в точках истока и заканчиваются либо в точках стока, либо простираются в бесконечность. Производительность каждой особенной точки определяется постоянной μ, при помощи которой определяется интенсивность I источника или стока. Ибо в непосредственной близости от точки можно пренебречь влиянием всех других источников, и поэтому поверхности постоянного потенциала скорости вблизи от источника суть шаровые поверхности, его окружающие.

Представим себе, что внутри жидкости построена замкнутая поверхность, ограничивающая некоторый объем. Ввиду стационарности движения, все количество жидкости, протекающей в единицу времени сквозь поверхность наружу, равно алгебраической сумме количеств жидкости, доставляемых источниками и стоками, лежащими внутри объема, или согласно (325) и (335),

$$k\int\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\sigma=\sum J_i=4\pi k\sum\mu_i.$$

Следовательно,

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\sigma=4\pi\sum\mu_i, \qquad 336$$

где значок i обозначает внутренние особенные точки, окруженные поверхностью σ; ν обозначает, как и всегда, внутреннюю нормаль. Это соотношение объединяет в один общий закон два более частных соотношения (324) и (325) и часто называется, в честь автора, уравнением *Гаусса*.

Рассмотрим еще некоторые частные приложения. При двух точечных источниках одинаковой интенсивности потенциал скорости равен

$$\varphi=\mu\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right). \qquad 337$$

Плоскость, которая делит пополам прямую, соединяющую оба источника, и перпендикулярна к ней, т. е. плоскость симметрии, состоит из линий тока. Поэтому можно мысленно заменить ее твердой стеной. Воспользовавшись рассуждением, изложенным в § 47, получим свойства истечения жидкости из источника по направлению к неподвижной стене.

Если оба источника обладают одинаковой интенсивностью, но разных знаков, то потенциал скорости равен:

$$\varphi=\mu\left(-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right). \qquad 338$$

Тогда жидкость течет из источника 2 в сток 1, а именно, линии тока начинаются в точке 2 и оканчиваются в точке 1. Если оба центра очень близки друг к другу, и точка 1 имеет координаты ξ, η, ζ, а точка 2 имеет координаты $\xi+\Delta\xi$, $\eta+\Delta\eta$, $\zeta+\Delta\zeta$, то выражение (338) преобразуется в такое:

$$\varphi=\mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\Delta\xi+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\Delta\eta+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\Delta\zeta\right).$$

При переходе к пределу $\Delta=0$, можно представить себе, что μ возрастает так, что произведения $\mu\cdot\Delta\xi$, $\mu\cdot\Delta\eta$, $\mu\cdot\Delta\zeta$ остаются конечными. Обозначим их через μ_ξ, μ_η, μ_ζ. Тогда получим для потенциала скорости конечное выражение:

$$\varphi=\mu_\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+\mu_\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+\mu_\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}. \qquad 339$$

Такое образование, состоящее из двух бесконечно близких точечных источников с противоположными и равными бесконечно большими интенсивностями называется „двойным источником“. Постоянный вектор, компоненты которого μ_ξ, μ_η, μ_ζ, называется „моментом“, его направление (от стока к источнику) называется „осью“ — двойного источника. Линии тока выходят из источника в направлении оси и возвращаются к стоку, описав большую или меньшую дугу. Замена друг другом источника и стока изменяет только направление течения, но не положение линии тока. Так как расстояние r между точкой воздействия и особенной точкой зависит только от разностей координат обеих точек, $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$, то можно написать вместо (339)

$$\varphi=-\mu_\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-\mu_\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\mu_\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}. \qquad 340$$

Из выражения φ в этой форме непосредственно видно, что φ действительно удовлетворяет уравнению *Лапласа* (323).

§ 65. Рассмотрим, в качестве дальнейшего применения изложенной теории, еще один случай, который можно обосновать на сделанных выше упрощающих допущениях: *равномерное движение твердого шара в несжимаемой жидкости*. Согласно принципу относительности (*1*, § 59), законы этого движения совершенно те же, как в случае *шара, покоящегося в равномерном потоке жидкости*. Последний же случай представляет собою стационарное движение жидкости рассмотренного здесь вида. Поэтому мы заменим шар, движущийся с постоянной скоростью a в направлении оси z, неподвижным шаром с центром в начале координат, который омывается со всех сторон потоком жидкости. В тех местах, которые настолько удалены от шара, что последний не оказывает на поток никакого действия, — иначе, на бесконечно большом расстоянии от начала координат, — поток имеет постоянную скорость $-a$ в направлении оси z.

Задача будет решена, если удастся составить такое выражение потенциала скорости φ, которое удовлетворяет уравнению *Лапласа* и кроме того удовлетворяет предельным условиям. Пределы жидкости суть $r=R$ (радиус шара) и $r=\infty$. При $r=\infty$, согласно вышесказанному,

$$\varphi = az. \tag{341}$$

При $r=R$, компонент скорости, нормальный к поверхности шара, равен нулю. Поэтому

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_R = 0. \tag{342}$$

Чтобы выполнить все эти условия, положим:

$$\varphi = az + \varphi'. \tag{343}$$

Тогда функция φ' должна удовлетворять уравнению *Лапласа* и кроме того пограничным условиям:

$$\text{при } r=\infty;\ \varphi'=0;$$

$$\text{при } r=R:\ \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial r}\right)_R = -a\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_R = -\frac{az}{R}. \tag{344}$$

Легко показать, что мы получим решение последней задачи, если положим, что φ' равна потенциальной функции двойного источника, то есть:

$$\varphi' = \mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = -\mu\frac{z}{r^3}. \tag{345}$$

Действительно: во-первых, φ' удовлетворяет уравнению *Лапласа*, — во-вторых φ' обращается в нуль при $r=\infty$ и, в-третьих, из (344) получается постоянное значение μ:

$$\mu = -\frac{1}{2}R^3 a. \tag{346}$$

Если производные $\frac{\partial z}{\partial r}$ и $\frac{\partial r}{\partial z}$ имеют одинаковую величину в уравнениях (344) и (345), а именно обе равны $\frac{z}{r}$, то в этом еще нельзя видеть противоречия. Оно могло бы возникнуть только в результате неправильного понимания значения этих символов. Но можно и формально избежать противоречия, если написать подробнее:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{\vartheta,\varphi} = \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x,y}, \tag{347}$$

т. е. в левой части уравнения нужно рассматривать z как функцию полярных координат r, ϑ, φ, а в правой части — r как функцию прямолинейных координат x, y, z.

Принимая во внимание (345) и (346), получим из (343) искомое выражение потенциала скорости, т. е. решение всей задачи:

$$\varphi = az\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\}. \tag{348}$$

Так как φ зависит только от z и r, то течение симметрично относительно оси z, и линии тока лежат, естественно, в плоскостях, проходящих через ось z.

Составляющие скорости равны, согласно (348),

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{3}{2}R^3 a\cdot\frac{xz}{r^5},\\
v &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{3}{2}R^3 a\cdot\frac{yz}{r^5},\\
w &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} = a\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{349}
$$

Чтобы найти линии тока, которые лежат в какой-либо плоскости, проходящей через ось z, введем вместо x и y расстояние ρ от оси z:

$$\rho^2 = x^2 + y^2. \tag{350}$$

Следовательно,

$$r^2 = \rho^2 + z^2. \tag{351}$$

В таком случае диференциальное уравнение линий тока гласит:

$$d\rho : dz = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} : \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

и, согласно (349),

$$d\rho : dz = \frac{3}{2} R^3 a \cdot \frac{\rho z}{r^5} : -a\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right)\right\}.$$

Если заменить z через r и ρ, при помощи соотношений

$$z^2 = r^2 - \rho^2, \quad z\,dz = r\,dr - \rho\,d\rho,$$

то получим, после сокращений,

$$\frac{3R^3 dr}{r^4\left\{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right\}} + \frac{2d\rho}{\rho} = 0.$$

Отсюда, интегрируя, получим уравнение системы линии тока:

$$\log\left\{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right\} + 2\log\rho = \text{const.},$$

или

$$\rho^2\left\{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right\} = \text{const.}\ (>0). \tag{352}$$

Система линий тока зависит от радиуса шара D, а не от величины скорости a. Если подставить вместо const. все значения от 0 до ∞, то получатся все линии тока. При const. $= \infty$, $\rho = \infty$, а также $r = \infty$, а скорость постоянна и равна $-a$. Но при const. $= 0$, либо $\rho = 0$, либо $r = R$, т. е. линия тока распадается на две различные части, одна из которых совпадает с осью z (вне шара), а другая проходит по поверхности шара. В точках перехода при $\rho = 0$, $z = \pm R$, в „полюсах" шара, линия

тока претерпевает прямоугольный излом. Здесь скорость становится равной нулю, и линия тока расщепляется на бесконечное множество ветвей, которые непосредственно окружают шар.

Интересно исследовать сколько времени требуется для того, чтобы точка жидкости, находящаяся на оси z, достигла полюса шара $z = +R$. Так как при движении этой точки $x = 0$, $y = 0$, $r = z$, то мы получим из (349) искомое время:

$$t = \int_z^R \frac{dz}{w} = \frac{1}{a}\int_R^z \frac{z^3 dz}{z^3 - R^3} = \infty. \tag{353}$$

Это значит, что время, которое требуется частице жидкости, чтобы достичь шара, неограниченно возрастает по мере приближения траектории ее к поверхности шара.

Скорость, с которой жидкость протекает непосредственно у самой поверхности шара, получится из (349), если подставить $r = R$. Она равна

$$\frac{3}{2}\frac{\rho}{R}a. \tag{354}$$

Наибольшей величины $\frac{3}{2}a$ она достигает в экваториальной плоскости шара. Вообще же скорость распределена совершенно симметрично на двух полушариях по обе стороны от этой плоскости.

Наконец, определим *давление*, которое жидкость оказывает на шар. По давлению мы вычислим равнодействующую силу, с которой поток жидкости действует на неподвижный шар, т. е. сопротивление, которое движущийся шар испытывает в неподвижной жидкости.

Давление на шар, p, получится из (322), если пренебречь тяжестью и подставить величину скорости из (354)

$$p = \text{const.} - \frac{9}{8}\left(\frac{\rho}{R}\right)^3 a^2 k,$$

или же, если обозначить через p_0 давление в ненарушаемом потоке жидкости, т. е. при скорости a,

$$p = p_0 + \frac{a^2}{2}k\left\{1 - \left(\frac{3}{2}\frac{\rho}{R}\right)^2\right\}. \tag{355}$$

Давление не зависит от направления течения, оно больше всего у полюсов шара, меньше всего в экваториальной плоскости и симметрично по обе стороны ее. Если соединить в одну равнодействующую все силы давления $pd\sigma$, действующие на элементы поверхности шара, то ясно без особого вычисления, на основании симметрии этих сил для положительных и отрицательных z, что равнодействующая обращается в нуль. Другими словами: поток жидкости не оказывает вовсе никакого действия на покоящийся в нем твердый шар, или же равномерно движущийся шар не испытывает сопротивления в неподвижной жидкости.

Этот результат находится в резком противоречии со всеми опытами и представляет собою знаменитый парадокс гидродинамики. Объяснение его можно найти в том обстоятельстве, что в уравнениях, которыми мы пользовались, не принят во внимание член, играющий существенную роль в рассматриваемом вопросе, а именно влияние трения, того трения, которое возникает на поверхности соприкосновения обоих веществ. В действительности под влиянием трения на поверхности шара равен нулю не только нормальный компонент, но и тангенциальный компонент скорости, т. е. жидкость держится совершенно неподвижно на поверхности шара. Мы еще рассмотрим этот вопрос подробнее (§ 80).

§ 66. Теперь перейдем к изучению следующего класса частных решений диференциального уравнения *Лапласа* для потенциала скорости φ. Рассмотрим решения, в которых функция φ зависит только от двух координат x и y и не зависит от третьей z, так что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \qquad 356$$

Тогда задача сводится к двум измерениям, что гораздо проще. Поверхности равного потенциала (эквипотенциальные поверхности) суть цилиндрические поверхности, параллельные оси z и могут быть представлены при помощи линий в плоскости xy — линий равного потенциала. Тогда система линий тока представится в виде линий, ортогональных к линиям равного потенциала и лежащих в той же плоскости.

Имеется очень общий метод интегрирования диференциального уравнения (356), основанный на введении комплексных величин. Легко показать, что *всякая* аналитическая функция комплексной величины $x+iy=z$ приводит к решению уравнения

(356) и поэтому может быть физически истолкована как стационарное безвихревое движение несжимаемой жидкости. Пусть w обозначает такую функцию, т. е.

$$w=f(x+iy)=f(z), \qquad 357$$

причем в выражение функции f могут входить любые вещественные или комплексные постоянные.

Если разложить w на вещественную и мнимую часть

$$w=\varphi+i\psi, \qquad 358$$

то φ и ψ суть вещественные функции вещественных переменных x и y. Из (358) следует:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial y}. \qquad 359$$

С другой стороны, из (357):

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{dw}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dw}{dz},\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{dw}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dw}{dz}i.\end{aligned} \qquad 359a$$

Поэтому

$$\frac{\partial w}{\partial y}=i\frac{\partial w}{\partial x},$$

и, согласно (359), после отделения вещественной части от мнимой:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \qquad 360$$

Исключение ψ дает уравнение (356), а исключив φ, получим уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0. \qquad 361$$

Кроме того имеет место соотношение:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}=0. \qquad 362$$

Таким образом можно рассматривать φ как потенциал скорости. Тогда кривые $\varphi=\text{const.}$ суть линии равного потенциала, а соответствующие линии тока выражаются уравнениями

$\psi = \text{const.}$, так как, согласно (362) кривые обоих семейств перпендикулярны друг к другу. Но функции φ и ψ могут поменяться ролями, и последнюю можно рассматривать как потенциал скорости, а первую как функцию тока.

Характер зависимости комплексной функции w от z можно представить всего нагляднее, если рассматривать w и z, как такие точки двух плоскостей, — плоскости w и плоскости z, из которых одна точка определяется координатами φ и ψ, а другая точка определяется координатами x и y. Тогда функция $f(z) = w$ представляет определенное сопоставление обеих точек, т. е. отображение плоскости w в плоскости z, или наоборот. Это отображение можно также представить себе как деформацию некоторого вещества, непрерывно покрывающего плоскость, причем φ и ψ обозначают координаты вещественной точки до деформации, а x и y — координаты той же точки после деформации, или наоборот. Тогда можно высказать такие же соображения об особенностях этой деформации, какие были представлены в первой главе для более общего случая вещества, занимающего некоторый объем. Рассмотрим важнейшие результаты.

Прежде всего нетрудно видеть, что бесконечно малые участки поверхности отображаются *линейно* и поэтому могут быть преобразованы друг в друга посредством прямолинейного перемещения, вращения и дилатации (§ 11). Из (357) следует:

$$dz = \frac{dz}{dw} \cdot dw. \qquad 363$$

Положим, что

$$\frac{dz}{dw} = \zeta = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \qquad 364$$

причем

$$r > 0, \quad \pi > \vartheta > -\pi.$$

Тогда получим из (363) отделив вещественную часть от мнимой:

$$dx = r\cos\vartheta\, d\varphi - r\sin\vartheta\, d\psi,$$
$$dy = y\sin\vartheta\, d\varphi + r\cos\vartheta\, d\psi.$$

Положим, что соответствующие друг другу точки w и z неподвижны и, значит, r и ϑ постоянны, и будем рассматривать диференциалы $d\varphi$, $d\psi$, dx, dy, как переменные координаты. Тогда последние два уравнения дадут законы отображения для областей, бесконечно близких к точкам w и z. Геометрическое значение их получим непосредственно, если напишем:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{r} &= \cos\vartheta\, d\varphi - \sin\vartheta\, d\psi = dx', \\ \frac{dy}{r} &= \sin\vartheta\, d\varphi + \cos\vartheta\, d\psi = dy'. \end{aligned} \qquad 365$$

Это значит: для того чтобы перевести бесконечно близкую точку из положения $(d\varphi, d\psi)$ в положение (dx, dy), нужно во-первых, произвести простой поворот на угол ϑ, в результате чего точка придет в положение (dx', dy') и во-вторых произвести равномерное расширение по всем направлениям (конец § 7) в отношении $r:1$, отчего все отрезки увеличатся в том же отношении, между тем как все направления, а значит и все углы, останутся без изменения. Тем самым измененная область останется подобной первоначальной области и только будет повернута относительно нее. Поэтому отображение при помощи комплексной функции называется также „конформным" в бесконечно малых частях.

Таким образом каждому конформному отображению плоскости w на плоскости z соответствует стационарное движение жидкости в плоскости z. При этом каждая нить тока образует в плоскости w полоску, параллельную оси φ, так как она ограничена двумя линиями $\psi = \text{const.}$ Поэтому задача найти стационарное течение жидкости между двумя неподвижными предельными линиями (стенами) приводится к конформному отображению полоски, ограниченной двумя параллельными прямыми в плоскости w, на область, лежащую между этими двумя предельными линиями в плоскости z.

Величины r и ϑ, — характеризующие это отображение, наглядным образом определяют движение жидкости. Так как, в виду (359а) и (360)

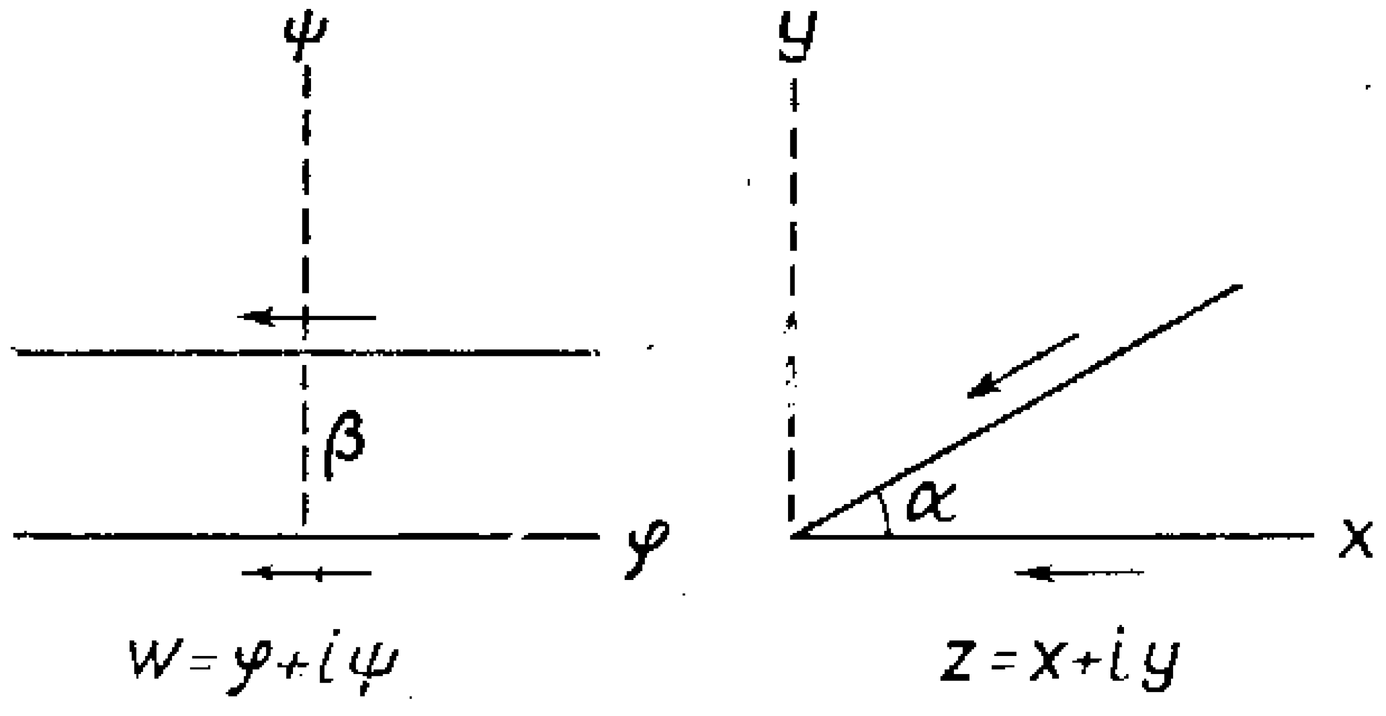
$$\zeta = 1 : \frac{dw}{dz} = 1 : \frac{\partial w}{\partial x} = 1 : \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

то из (364) получится после разделения вещественной и мнимой части:

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2, \qquad 366$$

$$\cos\vartheta = r\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \sin\vartheta = r\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \qquad 367$$

Таким образом, r есть величина, обратная скорости, а ϑ (между π и $-\pi$) есть угол, который образует градиент потенциала скорости (противоположный линии тока) с положительным направлением оси x.



Черт. 12.

В качестве простого примера рассмотрим течение жидкости в пространстве между двумя неподвижными прямыми, которые пересекаются в точке стока O под углом α (истечение из бесконечно малого отверстия в O). Для этого необходимо конформно отобразить полоску, параллельную оси φ и шириною β лежащую в плоскости w, на секторный вырез с углом α в плоскости z (черт. 12). Это отображение можно представить при помощи функции:

$$z = e^{\frac{\alpha}{\beta} w}, \tag{368}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi} \cos\left(\frac{\alpha}{\beta}\psi\right), \\ y &= e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi} \sin\left(\frac{\alpha}{\beta}\psi\right). \end{aligned}\right\} \tag{369}$$

Действительно: если φ убывает от $+\infty$ до $-\infty$, соответственно направлению линии тока (обозначенных стрелками на черт. 12), то точка z движется при $\psi = 0$ по неподвижной прямой, по оси x, от $x = \infty$ до $x = 0$, а при $\psi = \beta$ точка движется по другой неподвижной прямой от бесконечного удаления до точки O, и при промежуточном постоянном значении ψ точка движется по прямой, лежащей между этими прямыми, от бесконечного удаления до точки O. Следовательно, линии тока в плоскости z суть прямые, которые проходят через точку O внутри угла α. Если выразить φ и ψ через x и y, то из (369) получится:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha}{\beta} \log \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\beta}{\alpha} \log \rho_0, \\ \psi &= \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{370}$$

Таким образом, мы имеем здесь логарифмический потенциал в качестве частного решения диференциального уравнения (356) (ср. *I*, § 46). Постоянная β соответствует, очевидно, силе течения.

Для величин r и ϑ получаются следующие значения из (366) и (367):

$$r = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{x^2+y^2}, \quad \vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \tag{371}$$

в согласии с тем, что r обозначает величину, обратную скорости, и ϑ обозначает направление, противоположное линии тока.

§ 67. Метод конформных отображений позволяет также разрешить задачу, которая неразрешима при более общих условиях, а именно задачу представить движение жидкости, которые соответствуют „свободным струям": это — токи жидкости, которые протекают не между твердыми стенами, а в свободном воздухе. Задача здесь значительно труднее по той причине, что границы жидкости не даны заранее, а должны быть вычислены при помощи поверхностных условий, характерных для свободной струи. Предельное условие, которое существует на поверхности свободной струи, не только ограничивается требованием, чтобы эта поверхность состояла из линий тока, но и требует также, в виду принципа равенства действия и противодействия, чтобы давление p жидкости на поверхности свободной струи равнялось давлению свободного воздуха p_0, т. е. было постоянным.

Если пренебречь влиянием тяжести, то из (322) следует, что на поверхности свободной струи величина скорости течения постоянна. Обратно, каждая линия тока, на которой скорость постоянна, может представлять границу свободной струи. Если в одной части линии тока скорость изменяется, а в другой части остается постоянной, то первая часть представляет течение вдоль твердой стены, а вторая часть представляет продолжение этого течения в виде свободной струи, что имеет место, например, при истечении жидкости из трубы произвольной формы в воздух.

Следовательно, для изображения свободной струи в рассмотренном здесь частном случае двухмерных течений необходимо найти такие линии тока, на которых постоянно не только ψ, но и скорость $\frac{1}{r}$. Эту задачу можно решить, если принять во внимание, что линии $\psi = \text{const.}$ обозначают, как уже было указано, прямые, параллельные оси в плоскости w, а линии $r = \text{const.}$

представляют, согласно (364), концентрические круги с центром в начале координат в плоскости ζ. Поэтому, если удастся конформно отразить полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми в плоскости w, на область, ограниченную с одной стороны дугой круга $r = \text{const}$. в плоскости ζ, то из функциональной зависимости между w и $\zeta = \frac{dz}{dw}$ получится функциональная зависимость между z и w, т. е. отображение полоски в плоскости w на плоскость z. Это отображение имеет то свойство, что на определенных пограничных линиях области плоскости z как $\psi = \text{const}$., так и $r = \text{const}$. Эти линии представляют поверхности свободных струй движений жидкости. При помощи описанного метода *Гельмгольцу* впервые удалось найти точные решения задачи об образовании свободных струй[1].

§ 68. Возвратимся теперь к рассмотрению более общего случая безвихревого течения жидкости, с тем, чтобы подробнее осветить вопрос, которого мы кратко коснулись в § 61: вопрос о том, могут ли линии тока быть замкнутыми. Там мы нашли, что это невозможно в том случае, если потенциал скорости есть однозначная и непрерывная функция пространственных координат. Однако легко показать, что в действительности существует течение с такими линиями тока, которые замкнуты сами на себя. Например, рассмотрим простое движение жидкости, изображенное уравнениями (370) и примем во внимание, что функции φ и ψ могут поменяться друг с другом местами, как уже было указано выше. Тогда мы получим для движения жидкости:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \\ \psi &= \frac{\beta}{\alpha} \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\beta}{\alpha} \log \rho_0. \end{aligned}\right\} \qquad 372$$

Здесь мы имеем безвихревое стационарное течение жидкости, заполняющей всю плоскость xy за исключением произвольно малой области, заключающей особенную точку O. В этом движении линии тока $\psi = \text{const}$. суть концентрические круги с центром в особенной точке O, а линии равного потенциала суть прямые, выходящие из точки O. Если рассматривать какие-нибудь два

[1] *H. v. Helmholtz*, Wissenschaftliche Abhandlungen, Leipzig (J. A. Barth) I, S. 146, 1882.

концентрических круга как твердые стены, то мы имеем течение в круговом кольце. Компоненты скорости в этом случае равны:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{y}{\rho_0^2}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x}{\rho_0^2}, \end{aligned}\right\} \qquad 373$$

а величина скорости:

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\rho_0}. \qquad 374$$

Таким образом жидкость непрерывно циркулирует по кругу, между тем как скорость вращения повсюду постоянно равна нулю. Эта теорема перестанет казаться столь парадоксальной, если принять во внимание, что жидкость не вращается подобно твердому телу, а претерпевает деформации во время движения, так как угловая скорость циркуляции становится все меньшей с увеличением расстояния от оси вращения. Поэтому нужно отличать угловую скорость циркуляции от угловой скорости вращения, так как первая обусловливается радиусом кривизны траектории частицы жидкости, а вторая — вращением самой частицы, совершенно независящим от радиуса кривизны. Впрочем, не следует думать, что если скорость вращения равна нулю, то частица жидкости остается всегда параллельной самой себе. Ибо компоненты скорости вращения частицы не равны производным по времени от углов, которые определяют положение частицы. Если бы это было так, то пришлось бы заключить, что углы постоянны, если скорость вращения обращается в нуль. Но на самом деле из последнего обстоятельства следует лишь, что именно те прямые, которые представляют главные оси расширения частицы, не изменяют направления, между тем как все остальные прямые в частице могут поворачиваться (§ 7). И так как в каждый момент главные оси расширения изменяются, то получается такой результат, что после конечного промежутка времени частица может совершить конечный поворот, в то время как скорость вращения в каждый момент равна нулю (*1*, § 137).

Наряду с простым примером, выражаемым уравнением (272), можно указать еще другие, более общие случаи безвихревых движений с замкнутыми линиями тока, на плоскости и в пространстве, например, течение в какой-нибудь замкнутой трубе.

Во всех подобных случаях приходится прийти к заключению, что потенциал не может быть однозначным и непрерывным. Действительно, это можно подтвердить при помощи выражения для φ в уравнении (372). Либо можно предположить, что arc tg однозначен; но тогда он не непрерывен, а претерпевает внезапный скачок в каком-либо произвольно выбранном месте. Либо его можно считать непрерывным, но тогда он бесконечно многозначен. Если приходится производить вычисления с подобного рода функцией, то в большинстве случаев удобнее выбрать первую возможность и установить определенное место прерывности, для того чтобы результат вычисления был вполне определенным. Многозначность или прерывность потенциала скорости не оказывает, конечно, никакого влияния на величину и направление скорости.

§ 69. Так как характер безвихревого движения жидкости существенно зависит от того, является ли потенциал скорости однозначным и непрерывным, то возникает вопрос, можно ли установить такой общий критерий, который позволил бы заранее определить, необходимо ли для данного движения жидкости, чтобы потенциал скорости был однозначным и непрерывным. Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны прежде всего подробнее рассмотреть математическое значение уравнений (318), которые выражают отсутствие вихрей. Положим, что $\boldsymbol{q}$ есть вектор, компоненты которого u, v, w даны в виде однозначных и непрерывных функций пространственных координат x, y, z внутри некоторого пространства R, так что выполняются три уравнения (318). Тогда имеет место следующее правило. Если взять интеграл

$$I=\int_1^2 \boldsymbol{q}_s\cdot ds \qquad 375$$

от какой-либо определенной точки 1 пространства R до какой-либо другой определенной точки 2 того же пространства, вдоль произвольной кривой s, которая вся проходит внутри R, то значение интеграла остается неизменным при любом бесконечно малом изменении пути интегрирования s. Доказательство этого положения производится следующим образом. Из равенства

$$\boldsymbol{q}_s=u\cdot\frac{dx}{ds}+v\frac{dy}{ds}+w\frac{dz}{ds}$$

следует:

$$I=\int_1^2 (u\,dx+v\,dy+v\,dz). \qquad 376$$

Следовательно, для бесконечно малой вариации кривой s:

$$\delta I=\int_1^2 (u\cdot\delta dx+\delta u\cdot dx+\cdots). \qquad 377$$

Так как $\delta dx=d\delta x$, то, интегрируя по частям и принимая во внимание, что пределы интеграла не подвергаются вариации, получим:

$$\int_1^2 u\cdot\delta dx=-\int_1^2 du\cdot\delta x=-\int_1^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\cdot dx.$$

Далее,

$$\delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\delta z.$$

Следовательно, подставив это преобразование и аналогичные ему в равенство (377), имеем:

$$\delta I=\int_1^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot(\delta y\,dz-\delta z\,dy)+\cdots \qquad 378$$

и, согласно (318)

$$U\delta=0. \qquad 379$$

Но если величина I остается инвариантной при бесконечно малом изменении пути интегрирования, то отсюда еще не следует, что I имеет одинаковую величину для *всех* возможных путей интегрирования. Ибо это заключение допустимо только в том случае, если можно из одного пути интегрирования вывести все остальные посредством последовательных бесконечно малых, т. е. непрерывных изменений. Но осуществим ли такой переход, это зависит от свойств пространства R, внутри которого определен вектор $\boldsymbol{q}$. Если, например, R имеет форму параллелепипеда или эллипсоида, то все кривые, которые проходят между двумя определенными точками внутри R, могут быть преобразованы одна в другую посредством непрерывных изменений. Такое пространство называется ***односвязным.*** Поэтому в нем интеграл I совершенно не зависит от пути интегрирования и целиком определен обеими предельными точками, а, вместе с тем, и потенциал скорости, который выражается через I, однозначен вплоть до аддитивной постоянной, которая зависит от нижнего предела.

Но если R имеет, например, кольцеобразную форму, в роде замкнутой трубки, то уже невозможно преобразовать при помощи непрерывных изменений одну кривую, которая соединяет две точки в трубке, в другую кривую, которая соединяет эти точки таким образом, что проходят через трубку в обратном направлении. Такое пространство, в котором не все линии, соединяющие две точки, могут быть непрерывно преобразованы одна в другую, называется *многосвязным*. В таком пространстве соединительные линии между двумя точками распадаются на некоторое число групп, в каждой из которых интеграл I имеет различную величину.

Изложенное противоположение одно- и много-связных пространств можно формулировать также другим способом, который имеет некоторые преимущества. Очевидно, что две соединительные линии между двумя точками можно всегда соединить в замкнутый контур, причем одну из линий можно принять за путь в одном направлении, а другую — за обратный путь. Если можно эти линии перевести одну в другую при помощи непрерывных изменений, то возможно, посредством непрерывного сужения замкнутого контура, стянуть его в одну точку. Если невозможно первое, то невозможно и второе. Отсюда вытекает правило: пространство односвязно или многосвязно, в зависимости от того, можно ли посредством непрерывного сужения стянуть в одну точку все проходящие в нем замкнутые линии, или нельзя. В параллелепипеде или эллипсоиде это возможно, а в кольцеобразной трубке невозможно, так как замкнутая линия, которая проходит в трубке в определенном направлении, наталкивается при непрерывном сужении на стенку, которая является препятствием для дальнейшего сужения.

Чтобы приложить этот метод к интересующему нас случаю, примем во внимание, что вопрос о том, имеет ли интеграл I в (375) одинаковую величину для двух различных путей интегрирования, совпадает с вопросом о том, равен ли этот интеграл нулю для замкнутого контура, составленного из этих двух путей: ибо замкнутый интеграл равен алгебраической сумме обоих отдельных интегралов, один из которых взят в обратном направлении. Согласно положению, выраженному равенством (379), замкнутый интеграл не изменяет своей величины при всяком непрерывном сужении пути интегрирования, причем точки 1 и 2 также могут

быть смещены. Поэтому, если можно довести сужение до единственной точки, что всегда возможно в односвязном пространстве,— то длина пути интегрирования и, вместе с тем, величина интеграла обращается в нуль. Стало быть, интеграл равен нулю также при всяком расширении пути интегрирования, и все значения J между двумя определенными точками равны между собой: потенциал скорости однозначен.

Но если, в многосвязном пространстве, сужение замкнутого пути интегрирования наталкивается на границу, то интеграл по такой замкнутой кривой может иметь величину, отличную от нуля. Это величина одинакова для всех других замкнутых кривых, которые получаются из данной посредством непрерывного изменения. Потенциал скорости многозначен, он имеет дискретное множество значений.

§ 70. Чтобы избегнуть неудобства, которое приносит с собой многозначность какой-либо величины, можно превратить многосвязное пространство в односвязное при помощи целесообразно подобранного произвольного ограничения: в определенных местах пространства проводятся разделяющие сечения, причем устанавливается положение, что линия, соединяющая две точки пространства, не должна проходить через какое-либо сечение. Тогда, очевидно, уменьшается число возможных видов соединительных линий между двумя точками, непрерывно преобразуемых друг в друга. Проведя достаточно большое число разделяющих сечений, можно добиться того, чтобы остался возможным только один вид кривых, и пространство становится односвязным. Если достаточно одного разделяющего сечения, чтобы достичь этого результата, то пространство называется двусвязным. Если необходимо n разделяющих сечений, то пространство $(n+1)$-связно.

Примером более чем двусвязного пространства может послужить колесо с несколькими спицами. Если колесо с четырьмя спицами, то необходимо четыре разделяющих сечения, которые можно мысленно провести на ободе колеса, между каждыми двумя спицами. Поэтому такое пространство пятисвязное.

Если представить себе, что вышеописанным способом проведено необходимое число разделяющих сечений, то пространство будет односвязным. Всякая проведенная в нем замкнутая кривая может быть стянута в одну точку посредством непрерывного сужения, и потенциал скорости однозначен. Но выигрыш однозначности искупается потерей непрерывности. Действительно, определим разность значений потенциала скорости в двух точках 1 и

2, которые бесконечно близки друг к другу, но лежат по разные стороны от разделяющего сечения. Интегрирование (375), служащее для вычисления этой разности, нужно произвести не по бесконечно короткому, а по единственному дозволенному конечному соединительному пути. Так как этот интеграл даст конечную величину, то искомая разность также конечна: потенциал скорости претерпевает скачок на разделяющей поверхности. Но так как путь интегрирования, при помощи которого производилось это вычисление, представляет замкнутую кривую, и так как величина этого интеграла не изменяется, согласно (379), при любом непрерывном изменении этой кривой, то мы получаем такое правило: *скачок потенциала скорости на поверхности разрыва одинаков во всех точках этой поверхности и равен величине интеграла (375) по любой замкнутой линии, пересекающей поверхность разрыва.*

Все эти правила могут быть наглядно иллюстрированы при помощи простого рассмотренного в § 68 случая циркуляции жидкости в плоском круговом кольце. Здесь линии тока замкнуты, потенциал скорости многозначен, пространство двусвязно. Действительно, замкнутую линию тока невозможно сжать в одну точку, так как небольшая область, содержащая особенную точку и не принадлежащая к пространству жидкости, представляет препятствие неограниченному сужению. Но если представить себе, что через жидкость проходит разделяющее сечение, от особенной точки в бесконечность,— или, в случае если имеются две концентрические круговые неподвижные стены, от одной стены к другой,— то пространство жидкости — односвязное, и потенциал скорости однозначен, но прерывен. Скачок на поверхности разрыва одинаков во всех точках этой поверхности и легко получается вычислением интеграла (375) для замкнутой линии тока, т. е. согласно (374),

$$\int q \cdot ds = \frac{\beta}{a} \cdot 2\pi,$$

в согласии со скачком 2π функции $\operatorname{arc\,tg}\ldots$ в выражении (372) для потенциала скорости φ.

§ 71. Так как линия тока не может быть замкнутой в односвязном пространстве, и так как она не может заканчиваться у твердой стены, то отсюда следует, что в *односвязном пространстве, которое ограничено со всех сторон неподвижными стенами, безвихревое движение несжимаемой жидкости вообще невозможно.* Это легко доказать, рассмотрев тождества (81). Так как стены неподвижны, то поверхностный интеграл равен нулю, а так как

жидкость несжимаема, то объемный интеграл в правой части равен нулю, и поэтому φ постоянно, т. е. жидкость неподвижна. Но для правильности тождества (81) необходимо, чтобы потенциал скорости был однозначным и непрерывным, так как иначе интеграл

$$\int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx$$

не равнялся бы $\varphi_2 - \varphi_1$, как было принято в выражении (76).

§ 72. В заключение этой главы рассмотрим еще простой пример *нестационарного* безвихревого движения несжимаемой жидкости. Для этого воспользуемся рассмотрением в § 63 случаем истечения тяжелой жидкости из трубки, широкой вверху и узкой внизу, и положим, как и раньше, что верхний уровень жидкости находится под постоянным давлением p_0, а давление у отверстия тоже постоянно и равно p. Но теперь мы рассмотрим нестационарное истечение, и постараемся определить, какое возникает движение, если в момент $t=0$ жидкость повсюду неподвижна.

Прежде всего, что касается диференциальных уравнений движения, то уравнение *Лапласа* (323) и вытекающие из него соотношения от (324) до (329) имеют место также для нестационарных движений: ибо уравнение *Лапласа* вытекает из общего условия непрерывности (259) в связи с условием несжимаемости. Зато уравнение (322) обобщается, согласно (321), следующим образом

$$p = -\frac{k}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - kgz + k\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \qquad 380$$

Кроме того, нужно добавить пограничные условия у стенок и у обоих отверстий, а также начальное условие, при $t=0$.

Всем этим условиям можно удовлетворить, полагая:

$$\varphi = T \cdot \varphi', \qquad 381$$

где T — функция только времени t, а функцию φ' можно принять за известное уже выражение потенциала скорости в рассмотренном выше частном случае стационарного истечения. Тогда выполняются как уравнение *Лапласа*, так и пограничные условия у неподвижных стенок.

В диференциальном уравнении линий тока (320) множитель T сокращается, поэтому линии тока проходят все время так же, как и при стационарном истечении. С течением времени изменяется только скорость течения. Диференцированием (381) непосредственно получается

$$q = T \cdot q', \tag{382}$$

т. е. скорость в каком-нибудь месте пропорциональна стационарной скорости в этом месте и множителю T.

Обозначим, как и раньше, величины, относящиеся к верхнему уровню жидкости, значком O, а величины, относящиеся к отверстию для истечения, будем писать без значка. Если пренебречь величиной f по сравнению с f_0, то из (329), (380), (381) и (382) получится:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q'^2}{2(\varphi_0' - \varphi')}(1 - T^2). \tag{383}$$

Проинтегрируем это диференциальное уравнение. Обозначив для сокращения положительную постоянную:

$$\frac{q'^2}{\varphi_0' - \varphi'} = \alpha,$$

и принимая во внимание, что $T = 0$ при $t = 0$, получим:

$$T = \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}. \tag{384}$$

Уравнения (382) и (384) определяют скорость истечения жидкости в любой момент t. Скорость растет от 0 до стационарного значения в (331), которому она точно равняется лишь после бесконечно большого промежутка времени, но к которому подходит тем ближе, чем больше этот промежуток.

Глава третья

ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 73. Рассмотрим несжимаемую жидкость, которая заполняет односвязное пространство произвольного объема, ограниченное со всех сторон твердыми стенками. Из § 71 известно, что в том случае, если в жидкости нет вихрей, скорость ее всюду и всегда равна нулю. Но допустим, что где-либо и когда-либо имеются вихри, т. е. что в некоторый момент в некоторых местах жидкости скорость вращения имеет данное значение, отличное от нуля. Тогда можно доказать, что скорость всей жидкости однозначно определена внутри и вне вихрей как в данный момент, так и во всякое время.

Проведем доказательство сначала для данного момента t и покажем, что компоненты скорости u, v, w повсюду однозначно определены одновременными значениями компонентов вращения ξ, η, ζ в уравнениях (59) и условием несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{385}$$

Действительно, если бы этого не было, то существовали бы еще другие значения компонентов скорости, например u', v', w', которые удовлетворяли бы этим условиям. Тогда разности $u' - u = u_0$, $v' - v = v_0$, $w' - w = w_0$, рассматриваемые как составляющие скорости, изображали бы движение жидкости в односвязном пространстве, ограниченном со всех сторон твердыми стенами. Это движение, во-первых, удовлетворяло бы условию несжимаемости и, во-вторых, происходило бы совершенно без вихрей, так как для него компоненты ξ_0, η_0, ζ_0 повсюду равнялись бы нулю. Но такое движение невозможно. Следовательно, u_0, v_0, w_0 повсюду равны нулю.