винтовой линии. С другой стороны, точки на периметре первоначально плоского сечения цилиндра образуют после деформации волновую линию. В таком случае существует следующее общее правило; те части этой волновой линии, которые примыкают к минимальным значениям радиуса-вектора r, образуют отрезки того же рода, как и ранее рассмотренные волокна цилиндра; если последние — правые винты, то и эти части такие же. Для частей волновой линии, соседних с максимальными значениями r, действительно обратное.

Так, например, в рассмотренном выше примере эллиптического сечения волокна цилиндра образуют, при принятых обозначениях, правые винтовые линии. Поэтому крайняя волновая линия проходит у концов малой оси как правый винт, т. е. поднимается при переходе от первого квадранта ко второму и от третьего к четвертому, совершенно так, как было установлено выше.

Для количественного решения задачи требуется рассмотреть аналитические условия. В согласии с результатами приведенных выше рассуждений, можно следующим образом обобщить выражения (137) компонентов смещения для эллиптического цилиндра с полуосями a и b:

$$u = -\frac{\omega yz}{l}, \quad v = \frac{\omega xz}{l}, \quad w = -Cxy, \qquad 144$$

где C обозначает положительную постоянную. Это значение w выражает найденное выше свойство, что w отрицательно в первом и третьем квадрантах и положительно во втором и четвертом. Таким образом действительно удовлетворяются как условия (120) для внутренней части цилиндра, так и (121) для боковой поверхности, — первые тождественно, а вторые если положить:

$$C = \frac{\omega}{l}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}. \qquad 145$$

Итак, мы имеем также полное решение задачи о кручении эллиптического цилиндра. Выражение (142) для внешнего вращающего момента при круговом цилиндре обобщается, согласно (121), следующим образом:

$$N = \frac{\pi\mu\omega}{l}\cdot\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}. \qquad 146$$

Глава третья

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

§ 33. В основу излагаемой нами сейчас второй части этой книги мы положили общее допущение, что движение постоянно связано с бесконечно малыми деформациями. Такое движение не может, очевидно, быть односторонним, а должно попеременно совершаться в различных направлениях, т. е. должно происходить „колебание“ тела, при котором смещения и вместе с ними деформации постоянно изменяют свой знак. Таким образом мы имеем здесь дело с колебательными явлениями в упругих твердых телах, которые мы будем считать для простоты изотропными. Основные законы такого движения установлены уже в первой главе. Они формулированы в уравнениях движения (83), которые мы можем написать следующим образом, опустив силы тяготения:

$$\left.\begin{aligned} k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad 147$$

далее, в поверхностных условиях (74) и, наконец, в соотношениях (119) между тензором давления и тензором деформации в изотропном веществе.

Наиболее интересные случаи колебательных явлений подобного рода относятся к таким телам, которые имеют размеры неодинакового порядка величины по всем трем измерениям пространства, а простираются преимущественно по двум или по одному измерению пространства. Это дает, понятно, значительное упрощение законов движения, так как уменьшается число независимых пространственных координат. Зато, с другой стороны, следует, имея в виду наиболее важные в практике колебательные движения, ввести некоторое обобщение в уравнения, выведенные выше. Прежде, в § 22, мы отсчитывали компоненты смещения u, v, w и вместе с ними компоненты деформации от того состояния тела, в котором все внешние силы давления равны нулю. Тогда компоненты давления представляют собою однородные функции от компонентов деформации, и в недеформированном состоянии все компоненты давления равны нулю. Но в природе особый интерес имеют часто именно такие колебания, в которых это ограничение не имеет места. Если мы возьмем, например, колебания скрипичной струны, то вполне естественно отсчитывать составляющие деформации от того положения струны, в котором она находится в состоянии устойчивого равновесия. Это — недеформированное состояние. Однако в нем составляющие давления вовсе не равны нулю, а в струне существует определенное и даже довольно сильное натяжение. Это натяжение представляет собою даже настолько существенную причину, определяющую характер колебаний, что даже влияние постоянных упругости λ, μ, ν, свойственных материалу струны, практически отступает перед ним на задний план.

Так, например, струна из кишки вовсе не колебалась бы, если бы не была натянута. Поэтому здесь можно в известном смысле говорить об искусственной вынужденной упругости, которая зависит не от материала, а от внешних сил. Чтобы должным образом принять в расчет эти обстоятельства, мы введем следующее обобщение в соотношения (119) между компонентами давления и компонентами деформации: мы будем, как и ранее считать компоненты давления за линейные функции от компонентов деформации, но теперь это будут уже неоднородные функции, и абсолютные члены в этих функциях будут соответствовать временному состоянию устойчивого равновесия тела.

Таким путем мы введем в уравнения движения, как уже было указано в приведенном примере, наряду с постоянными материала еще одну постоянную. В зависимости от того, имеют ли преобладающее влияние постоянные первого рода или последняя постоянная, мы получим совершенно различные колебательные движения: движения с естественной упругостью и движения с искусственной упругостью. Эти различия практически настолько важны, что резко выражаются также и в словоупотреблении. Так, из тел одного измерения „стержни“ колеблются с естественной, а „струны“ — с искусственной упругостью, из тел двух

измерений „пластины“ и „колокола“ колеблются с естественной, а „мембраны“ и „барабаны“ — с искусственной упругостью. В акустике, поскольку речь идет о твердых телах, наиболее важны колебания с искусственной упругостью. Поэтому мы займемся здесь преимущественно последними. В качестве простейшего примера рассмотрим колебания струны, которая натянута настолько сильно, что влияние упругости материала, так называемая жесткость струны, отступает на задний план по сравнению с влиянием натяжения.

§ 34. Сильно натянутая струна. Пусть струна, которая должна иметь форму цилиндра с бесконечно малым сечением, совпадает в состоянии равновесия с осью x. Тогда каждая точка струны характеризуется определенным значением x, и движение струны вполне известно, если компоненты смещения u, v, w определены как функции от x и t. Для решения этой задачи мы прежде всего введем необходимое, согласно предыдущему параграфу, обобщение соотношений (119). Состояние равновесия струны одинаково с рассмотренным в § 30 равновесием односторонне натянутого цилиндра, поэтому для него действительны уравнения (128) и (130), где F обозначает натягивающую силу, q — площадь поперечного сечения. Следовательно, эти уравнения дают значения компонентов давления для недеформированного состояния струны. Отсюда однозначно следует искомое обобщение уравнений (119) для нашего случая:

$$\begin{aligned} X_x &= -\frac{F}{q} - \lambda\sigma - 2\mu x_x, & Y_z &= -\mu y_z, \\ Y_y &= \phantom{-\frac{F}{q}} - \lambda\sigma - 2\mu y_y, & Z_x &= -\mu z_x, \\ Z_z &= \phantom{-\frac{F}{q}} - \lambda\sigma - 2\mu z_z, & X_y &= -\mu x_y. \end{aligned} \qquad 148$$

Предположение, что струна „сильно“ натянута, выражает собою условие, что первый член в выражении для X_x, зависящий от F, велик по сравнению с остальными членами. С другой стороны, нельзя принимать F бесконечно большим: так как σ и x_x бесконечно малы, то X_x, и вместе с тем также $\frac{F}{q}$, малы по сравнению с величинами λ и μ. Таким образом, порядок величины натяжения F заключен в определенных пределах. Но если вспомнить, что для металлов, например, коэфициенты λ и μ, согласно (136a), имеют порядок величины $10^{12}\left[\frac{дин}{см^2}\right]$, что соответствует давлению в 10 000 *кг* на 1 *мм*², то мы увидим все же, что для величины натяжения остаются еще практически довольно широкие границы.

Теперь установим пограничные условия для боковой поверхности цилиндра струны. Так как вся струна, кроме двух концов, которые мы считаем прочно зажатыми, должна свободно колебаться, то на боковую поверхность не действуют внешние силы и мы имеем поэтому, согласно (74),

$$X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z) = 0, \ \ldots \qquad 149$$

Нормаль ν к боковой поверхности может принимать любое направление, но связана условием, что должна всегда и повсюду составлять прямой угол с той пространственной кривой, которую образует собою струна в какой-либо момент. Эта пространственная кривая образуется точками с координатами $x + u$, v, w, поэтому отношения косинусов направления ее (угловые коэфициенты) суть:

$$d(x+u):dv:dw = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) : \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial x},$$

и поэтому имеет место условие:

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(\nu x) + \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\nu y) + \frac{\partial w}{\partial x}\cos(\nu z) = 0.$$

Так как деформации бесконечно малы, то, как легко видеть, $\cos(\nu x)$ бесконечно мал по сравнению с двумя другими косинусами, и можно написать проще:

$$\cos(\nu x) = -\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\nu y) - \frac{\partial w}{\partial x}\cos(\nu z).$$

Подставим эти значения в три уравнения (149) и примем во внимание, что отношение $\cos(\nu y):\cos(\nu z)$ может принимать любое значение. Пренебрегая малыми членами второго порядка, получим соотношения:

$$\left.\begin{aligned} X_y &= X_x \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{F}{q}\frac{\partial v}{\partial x} \\ X_z &= X_x \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{F}{q}\frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad 150$$

$$Y_y = 0, \ Z_z = 0, \ Z_y = 0. \qquad 151$$

Остается еще точно выразить шестой компонент давления с точностью до членов второго порядка. Это можно сделать при помощи уравнений (148), которые дают сперва в связи с (151):

$$y_y = z_z = -\frac{\lambda}{2\mu}\sigma;$$

отсюда, на основании (118):

$$\sigma = \frac{\mu}{\lambda+\mu} x_x,$$

и, наконец, согласно первому из уравнений (148) и (135)

$$X_x = -\frac{F}{q} - E\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad 152$$

Теперь мы получим искомые уравнения движения из уравнений (147), подставив значения компонентов давления (150), (151), (152),

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 153a$$

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{F}{q}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \qquad 153b$$

$$k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{F}{q}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \qquad 153c$$

Таким образом каждый из компонентов смещения u, v, w следует своему особому закону, независимо от двух других, причем вид этих законов одинаков для всех трех компонентов. Однако величина характеристической постоянной, входящей в уравнения, не всюду одинакова: для u имеется другая величина, чем для v и w. Это зависит, конечно, от того, что направление u совпадает с направлением струны, а направления v и w перпендикулярны к ней. Поэтому колебания u называются „продольными колебаниями" струны, а v и w — колебания, наоборот, поперечными колебаниями. Как мы видим, продольные колебания зависят только от упругости вещества струны, и в частности от линейного модуля упругости и не зависят от натяжения, а для поперечных колебаний действительно обратное.

Для дальнейшего исследования законов колебания достаточно рассмотреть один только компонент. Так как в акустике поперечные колебания играют значительно большую роль, то мы ограничимся в дальнейших рассуждениях уравнением (153b), которое представляет плоские поперечные колебания в плоскости xy. Введя постоянную

$$a^2=\frac{F}{kq}, \tag{154}$$

можно написать это уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{155}$$

Интегрирование последнего уравнения дает v в виде функции двух независимых переменных x и t. Если положить, что x постоянно, а t изменяется, то мы получим движение определенной точки струны. Если же положить, что t постоянно, а x изменяется, то мы получим форму кривой, которую образует струна в определенный момент. Соответственным образом $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ представляет ускорение какой-нибудь точки струны, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ — кривизну кривой струны, а уравнение (155) выражает такое правило: ускорение какой-либо точки струны, а, следовательно, и сила, действующая на нее, пропорциональна кривизне кривой, которую образует струна, в данной точке.

§ 35. Интегрирование уравнения движения. Чтобы найти общий интеграл диференциального уравнения с частными производными (155), введем вместо независимых переменных x и t новые независимые переменные:

$$\xi=x+at;\quad \eta=x-at. \tag{156}$$

Тогда преобразование производных выражается следующими соотношениями:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_x=\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)_\eta\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_x+\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_\xi\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_x=\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot a-\frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot a.$$

Отсюда, повторив то же действие, получим:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_x=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-2a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2},$$

и совершенно аналогичным образом:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_t=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Если в уравнении (155) заменить производные по независимым переменным x и t производными по независимым переменным ξ и η, то получится:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

Это уравнение выражает, что $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ зависит только от ξ, и $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ зависит только от η. Поэтому:

$$v=f(\xi)+g(\eta),$$

где f и g суть какие-то две функции, каждая из которых зависит только от одной переменной.

На основании (156), имеем:

$$v=f(x+at)+g(x-at). \tag{157}$$

Это и есть общий интеграл диференциального уравнения (155). Действительно, непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что уравнение удовлетворяется выражением (157), каковы бы ни были функции f и g.

При этом нужно иметь в виду следующее обстоятельство.

Ограничение, которое налагается равенством (157) на значения v, и благодаря которому v удовлетворяет диференциальному уравнению (155), основано на том, что независимые переменные x и t входят в функцию f только в соединении $x+at$, а в функцию g только в соединении $x-at$. Эти выражения называются „аргументами" функций f и g. Каждая из этих двух функций зависит только от своего особого аргумента. Поэтому, если диференцировать функцию по x или по t, то можно сперва диференцировать по аргументу, а потом диференцировать аргумент по соответствующей переменной. Таким образом, из (157) получается:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=f'+g';\quad \frac{\partial v}{\partial t}=f'a-g'a, \tag{157a}$$

где f' и g' обозначают производные f и g по их аргументам. Продолжение операции дает:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=f''+g'', \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=f''\cdot a^2+g''\cdot a^2.$$

Эти значения действительно удовлетворяют уравнению (155) в самом общем виде.

Частный вид функций f или g никак нельзя получить из диференциального уравнения. Его можно найти только по начальным и пограничным условиям колеблющейся струны. Однако, прежде чем перейти к рассмотрению этих условий, исследуем в общем виде тот особенный физический характер, который накладывается на движение струны выражением (157) для смещения v.

Возьмем сначала частный случай, когда одна из двух функций, например g, обращается в нуль, так, что

$$v=f(x+at). \qquad 158$$

Тогда мы имеем движение струны, для которого характерно то обстоятельство, что смещение v не изменяется при таком изменении x и t, когда $x+at$ остается постоянным, т. е. когда

$$dx+a\ dt=0;$$

или

$$\frac{dx}{dt}=-a.$$

Но последнее уравнение обозначает движение со скоростью a в направлении отрицательной оси. Отсюда следует, что если передвигаться глазом или указателем вдоль струны в направлении отрицательной оси x со скоростью a, то та точка струны, на которую попадают при этом, всегда имеет в данный момент определенное смещение v. Это можно выразить еще таким образом: каждое смещение v распространяется неизменным со скоростью a в направлении отрицательной оси x. Поэтому форма кривой, которую образует струна в каждый момент, остается одинаковой, кривая только постоянно смещается, как целое, указанным образом. Такое движение называется „волновым движением", скорость смещения называется „скоростью распространения" волны. Скорость распространения нужно отличать по существу от

корпускулярной скорости точек струны, которая не имеет с ней ничего общего (ср. *I*, § 1). Вид волны определяется функцией f, он может быть произвольным, и в частности не обязательно должен быть периодическим. Можно получить простой и очень наглядный образ движения, если начертить на полоске бумаги функцию f в виде кривой с абсциссой ξ и ординатой f, а затем передвигать эту полоску вдоль струны со скоростью $-a$. Тогда чертеж дает непосредственное изображение струны в каждый момент. При $t=0$ аргумент $\xi=x+at$ непосредственно совпадает с абсциссой x точки струны.

Соответственным образом частное решение

$$v=g(x-at) \qquad 159$$

обозначает также волновое движение с тою же скоростью a, но распространяющееся в сторону положительной оси x. Поэтому общий случай колебания (157) представляет собою наложение друг на друга двух волн, распространяющихся с одинаковой скоростью a в противоположных направлениях. Если начертить каждую из двух волн в виде кривой на полоске бумаги и передвигать эти полоски вдоль струны со скоростями $\pm a$, то алгебраическая сумма двух ординат дает смещение v соответствующей точки струны в данный момент.

Теперь исследуем, как определяется вид обеих волн f и g на основании начальных и конечных условий колебательного процесса. Для этого рассмотрим сперва идеальный случай бесконечно длинной струны.

§ 36. Струна, неограниченная с двух сторон. Если струна простирается от $x=-\infty$ до $x=+\infty$, то для полного определения движения достаточно рассмотреть только начальное состояние и можно обойтись без предельных условий.

Положим, что даны смещения и скорости всех точек струны в момент $t=0$, т. е.

$$v_0=F(x) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0=\Phi(x), \qquad 160$$

где F и Φ обозначают две функции, известные при всех положительных и отрицательных значениях x. Подставив в (157) и (157a), получим:

$$f(x)+g(x)=F(x),$$

$$f'(x)-g'(x)=\frac{1}{a}\Phi(x).$$

Проинтегрировав последнее уравнение, имеем:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{a}\int_c^x \Phi(x)dx.$$

Следовательно

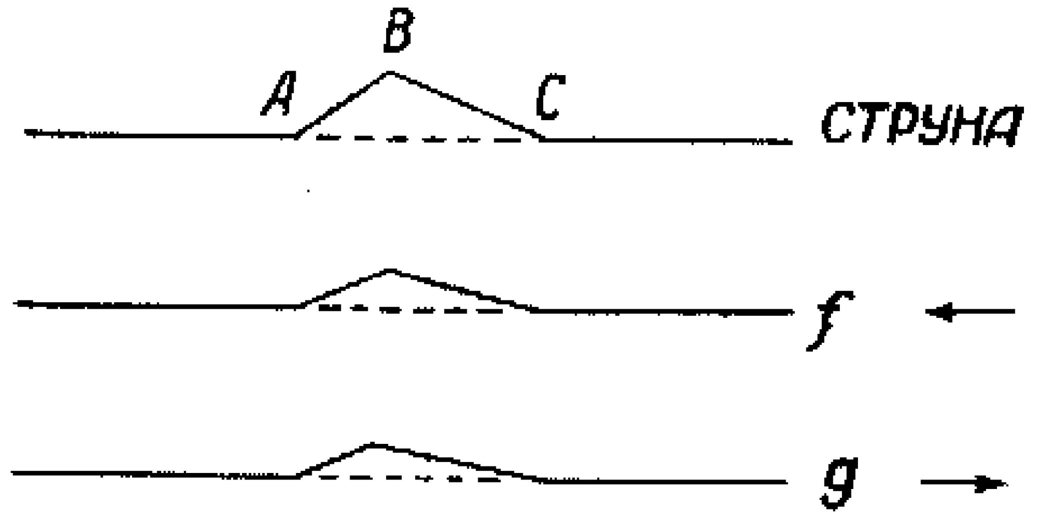
$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2a}\int_c^x\Phi(x)dx, \\ g(x)&=\frac{1}{2}F(x)-\frac{1}{2a}\int_c^x\Phi(x)dx. \end{aligned}\right\} \qquad 161$$

Эти выражения для f и g полностью определяют вид обеих волн и, значит, все движение. Нужно только подставить в функцию f вместо x аргумент $x+at$ и в функцию g аргумент $x-at$. Неопределенность, заключающаяся в произвольном выборе постоянной интегрирования c, только кажущаяся, так как в выражение (157) для v функции f и g входят только в виде суммы, при изменении c обе функции изменяются на одинаковую величину в противоположных направлениях. Поэтому можно, не нарушая общности, положить $c=0$.

Рассмотрим в виде примеров несколько частных случаев. Сначала рассмотрим такой случай, когда *все начальные скорости равны нулю*, как бывает, если дернуть струну, т. е. вывести ее из состояния равновесия и затем отпустить. В этом случае $\Phi(x)=0$, поэтому, согласно (161),

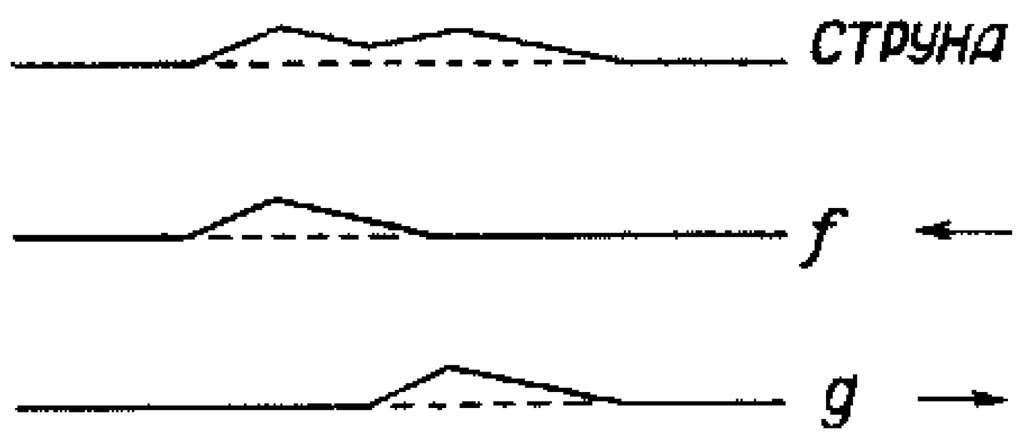
$$f(x)=g(x)=\frac{1}{2}F(x). \qquad 162$$

Следовательно, в этом случае обе волны равны между собой, и каждая из волновых функций равна половине величины начального смещения. Отсюда непосредственно получается весь процесс движения. На черт. 5 верхняя линия изображает вид струны в начальном состоянии. Нарушение равновесия ограничено здесь определенным участком струны. Оно может быть вызвано тем, что струна отдернута стерженьком в точке B и в то же время удерживается в точках A и C по обе стороны B

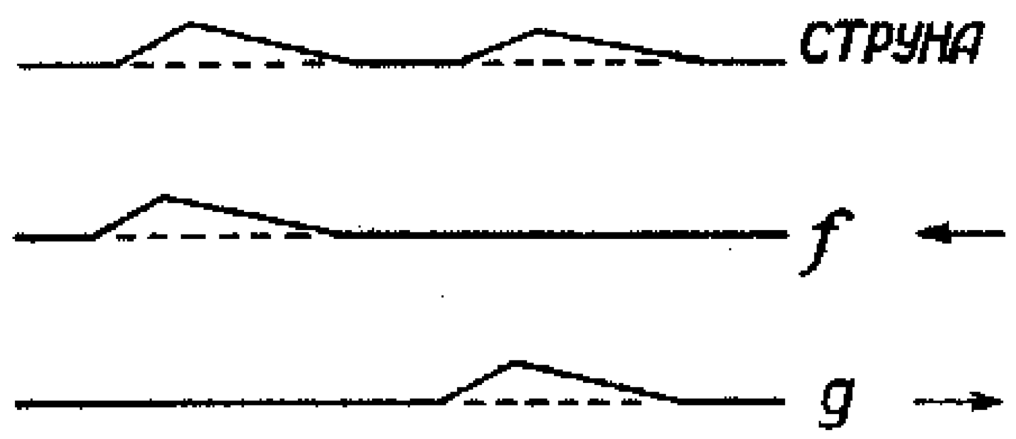


Черт. 5.

Если теперь отпустить струну без начальной скорости, то колебание ее совершается описанным выше образом: начерченные внизу изображения равных друг другу волновых функций f и g движутся в направлении стрелок вдоль струны со скоростью a, причем ординаты, лежащие друг над другом в каждый момент складываются. Таким образом первоначальное выпучивание струны разбивается на два одинаковых вдвое меньших выпучивания, которые раздвигаются в обе стороны со скоростями $\pm a$, между тем, как посредине снова наступает покой. Это изображено на чертежах 5a и 5b: верхняя линия дает изображение струны по истечении некоторого времени, а две нижние линии показывают способ построения изображения. Периодичности в этом явлении не имеется вовсе. Так, например, точка B, которая больше всего выведена из состояния равновесия, непосредственно возвращается к нему с постоянной скоростью и затем остается неподвижной навсегда.



Черт. 5a.



Черт. 5b.

Аналогичным образом исследуется противоположный случай, когда *все начальные смещения равны нулю*, как бывает, если ударить молотком длинную фортепианную струну настолько быстро, чтобы удар был закончен раньше, чем подвергнувшиеся удару точки струны успели бы заметно оставить положение равновесия. Тогда, согласно (160),

$$F(x)=0$$

и, согласно (161),

$$f(x)=-g(x)=\frac{1}{2a}\int_c^x\Phi(x)dx. \qquad 163$$

Таким образом и в этом случае обе волновые функции равны друг другу, но противоположного знака. Дальнейшее исследование, производимое совершенно так же, как и в предыдущем случае, показывает, что от места удара удаляются в обе стороны две противоположные равные волны, между тем как посредине струна снова возвращается в неподвижное состояние.

Но не следует думать, что при *всяком* нарушении равновесия струны идут две волны в обе стороны. Чтобы убедиться в этом, поставим такой вопрос: какое условие должно быть выполнено в начальном состоянии, чтобы от места нарушения распространялась одна волна, например, волна f. Ответ на этот вопрос дают уравнения (161), если положить в них $g=0$, именно:

$$F(x)=\frac{1}{a}\int_c^x \Phi(x)dx,$$

или

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{a}\Phi(x),$$

или, на основании (160),

$$\frac{dv_0}{dx}=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0, \qquad 164$$

т. е. в начальном состоянии скорость какой-нибудь точки струны равна тангенсу угла наклона струны к оси x, умноженному на a.

Если выполнено это соотношение между скоростью и смещением каждой точки струны, то все возмущение передвигается в виде одной неизменяемой волны в отрицательном направлении x. В этом можно убедиться также при помощи простого кинематического рассуждения, так как скорость каждой точки кривой непосредственно определяется видом кривой f и скоростью распространения a.

§ 37. Струна, ограниченная с двух сторон. Рассмотрим теперь колебания струны конечной длины l. Пусть струна закреплена в точках $x=0$ и $x=l$. Для нее, конечно, также действительны уравнения (161), но эти уравнения имеют смысл только для тех значений x, которые находятся между 0 и l, так как функции $F(x)$ и $\Phi(x)$, которые представляют начальные значения смещений и скоростей для точек струны, определены только для $0<x<l$. Однако, для того, чтобы представить движение для *всех* значений времени, нужно, на основании (157), знать значения f и g также и для других значений их аргументов; например, при больших положительных значениях t нужны значения f при больших положительных значениях аргумента значения, а g — при больших отрицательных значениях аргумента. Поэтому мы должны еще дополнить то определение f и g, которое дается

уравнениями (161). Для этого служит условие $v=0$ в пограничных точках $x=0$ и $x=l$, или, согласно (157),

$$0=f(at)+g(-at)$$

и

$$0=f(l+at)+g(l-at).$$

Эти условия действительны при любых значениях t. Если написать в них x вместо at, то получится:

$$f(x)+g(-x)=0, \qquad 165$$

$$f(l+x)+g(l-x)=0. \qquad 166$$

Эти два уравнения, имеющие место при *всех* значениях x дают дополнительные условия, необходимые для вычисления волновых функций f и g. Действительно, если подставить в (166) $(l+x)$ вместо x, то получится:

$$f(2l+x)+g(-x)=0.$$

Из сравнения с (165) имеем:

Подобным образом

$$\left.\begin{aligned} f(2l+x)&=f(x).\\ g(2l+x)&=g(x).\end{aligned}\right\} \qquad 167$$

Это значит, что волновые функции f и g обе ***периодичны*** относительно x с периодом $2l$. Отсюда непосредственно следует на основании (157), что движение струны также периодично относительно времени t с периодом $\frac{2l}{a}$.

Теперь установим, как на самом деле определить значения волновых функций f и g при всех положительных и отрицательных значениях аргументов, на основании начальных условий (161) и предельных условий (165) и (167).

Прежде всего, f и g определены для $0<x<l$ на основании (161). Далее, уравнения (165) в виде

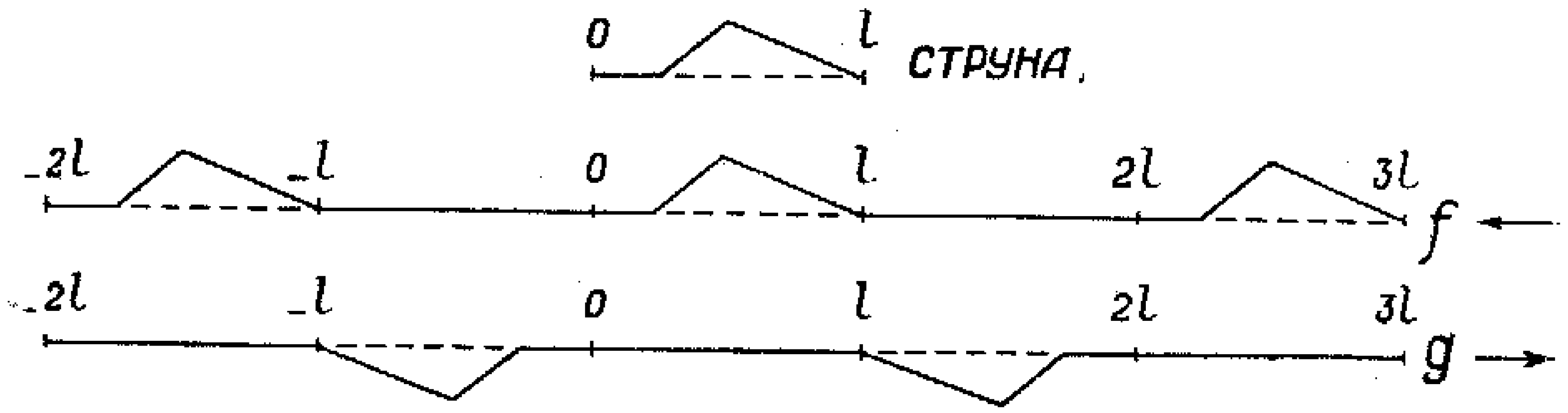
$$f(x)=-g(-x),$$

$$g(x)=-f(-x) \qquad 168$$

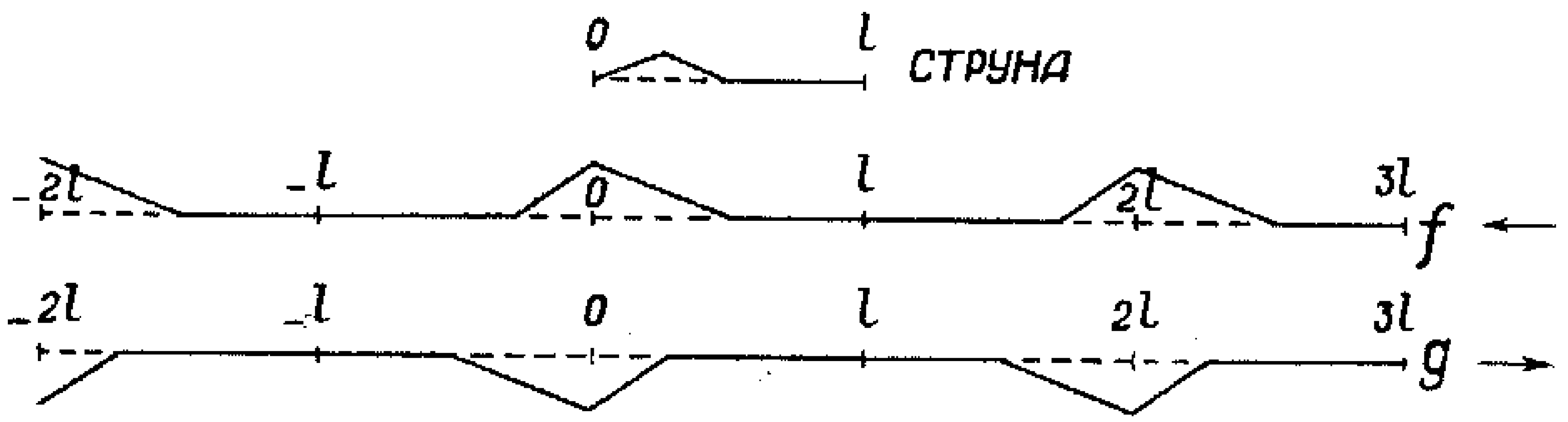
дают также значения $f(x)$ и $g(x)$ при $-l<x<0$, так как правые части двух уравнений известны для данной области значений x.

Но тогда $f(x)$ и $g(x)$ даны в пределах целого периода, от $x=-l$ до $x=+l$, и таким образом полностью определены по (167).

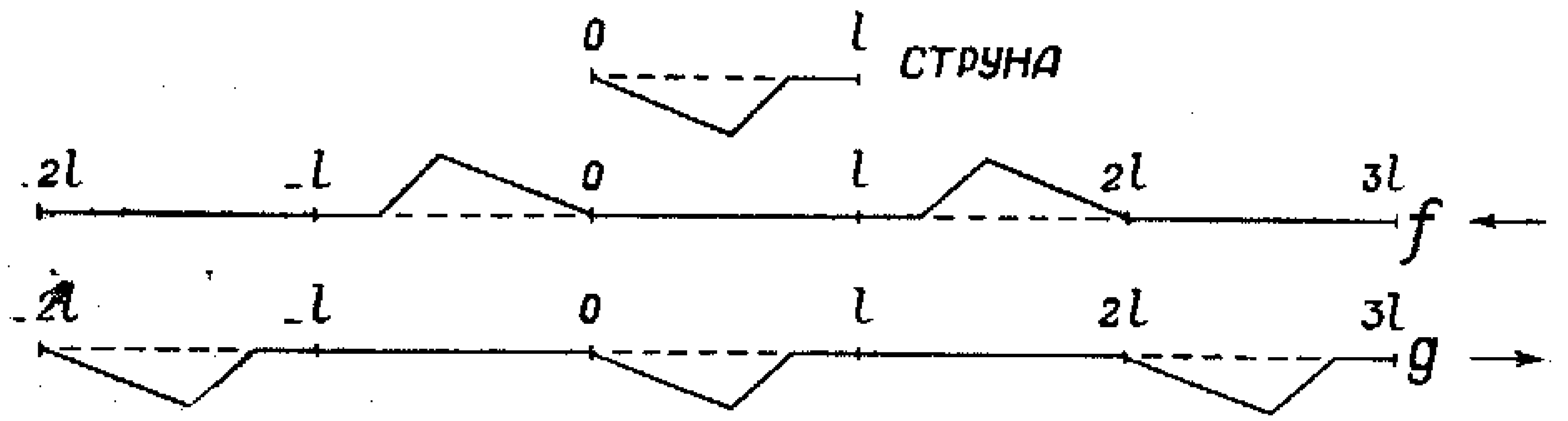
Этот метод вычисления проведем на одном частном примере. Для этого выберем, ради простоты, колебания струны, на которой в начале есть только одна волна, например волна f. Значит, в начальном состоянии действительно соотношение (164). Пусть первоначальное состояние струны изображено на черт. 5. Тогда



Черт. 6.



Черт. 6а.



Черт. 6б.

волновая функция $f(x)$ при $0<x<l$ будет представлена тем же изображением, причем $g(x)$ равно нулю в этом промежутке. Напротив, при $-l<x<0$, согласно (168), $f(x)$ повсюду 0, между тем, как $g(x)$ имеет нарисованную на чертеже форму, которую можно назвать „противоположным зеркальным изображением" $f(x)$ относительно точки $x=0$. Эти формы повторяются периодически, как показано на черт. 6.

Начертив волновые функции f и g, мы можем уже определить известным способом весь процесс движения. На чертежах 6а и 6b в верхней линии представлено результирующее изображение струны по истечении некоторого времени, а на двух нижних линиях представлен способ, по которому это изображение составлено из f и g.

Отсюда вытекает, что волна f, попадая на закрепленную точку струны $x=0$, превращается в волну g, движущуюся в противоположном направлении, т. е. „отражается" и при этом меняет знак. Затем волна g пробегает всю длину струны и отражается на другом конце, $x=l$, в виде волны f.

По истечении периода времени $\frac{2l}{a}$ снова достигается первоначальное состояние, и все начинается снова.

Таким же образом решается общий случай, когда в начале обе волны, f и g, отличны от нуля.

§ 38. Аналитическое изображение периодических функций. До сих пор мы изображали периодические волновые функции $f(x)$ и $g(x)$ в различных интервалах x при помощи различных уравнений. Но часто бывает важно обозначить волновую функцию $f(x)$ на всем ее протяжении, от $x=-\infty$ до $x=+\infty$ при помощи одного только аналитического выражения.

Чтобы достигнуть этого, отыщем сперва наиболее общее аналитическое выражение функции $f(x)$ с периодом $x=2l$, или, другими словами, общее решение функционального уравнения (167). Возьмем частное решение

$$f(x)=e^{ax}, \tag{169}$$

которое, очевидно, удовлетворяет уравнению, если постоянная α удовлетворяет условию:

$$e^{2la}=1.$$

Отсюда следует:

$$2la=2n\pi i,$$

где n обозначает произвольное положительное или отрицательное целое число. Если подставить получающееся отсюда значение α в (169) и отделить вещественную от мнимой часть $f(x)$, то мы получим два частных решения:

$$\cos\frac{n\pi x}{l} \quad \text{и} \quad \sin\frac{n\pi x}{l},$$

которые можно еще обобщить, если умножить их на произвольные постоянные A_n и B_n. Если составить такие решения для всевозможных значений n, причем для каждого n постоянные A_n и B_n могут иметь различные значения, и сложить их между собою, то мы также получим решение функционального уравнения (167). Это решение — *общее* (на доказательстве последнего утверждения мы не будем здесь останавливаться). Полученное решение можно написать в таком виде:

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad 170$$

Здесь члены с отрицательными n опущены. Нетрудно видеть, что это не нарушает общности, так как каждый член с отрицательным n можно соединить в один с членом, содержащим положительное n. Поэтому каждый член в обеих суммах представляет в сущности два члена. Особое положение занимает член с $n=0$, который встречается только один раз и поэтому обычно содержит численный множитель $^1/_2$. Введение последнего оправдывается также, как мы покажем ниже, тем, что постоянная A_0 получает в этом случае простое значение.

Ряд (170), который называется по имени автора „рядом *Фурье*", действительно имеет период $2l$ относительно x. В этом можно, конечно, непосредственно убедиться, если подставить $x+2l$ вместо x, так как все углы увеличиваются на целые кратные 2π. Но посредством ряда (170) можно представить *любую* функцию с периодом $2l$ относительно x. Поэтому возникает вопрос, как вычислить коэфициенты A и B, если каким-либо образом задано течение функции внутри одного периода, например от $x=0$ до $x=2l$.

Чтобы ответить на этот вопрос, положим, что нам совершенно произвольно даны значения $f(x)$ для $0<x<2l$. Вычислим сперва интеграл:

$$\int_0^{2l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad 171$$

при каком-либо положительном отличном от нуля целом числе n. Допустим, что этот интеграл имеет известное вполне определенное значение.

С другой стороны, интеграл (171), если заменить в нем $f(x)$ рядом (170), представится в виде суммы интегралов. Вычислим

каждый из них в отдельности. Первый интеграл, умноженный на A_0, обратится в нуль, так как

$$\frac{A_0}{2}\int_0^{2l}\frac{\cos n\pi x}{l}\,dx=0. \qquad 172$$

В следующие интегралы входят по порядку числа 1, 2, 3, ... n, ..., которые вообще отличны от числа n в (171). Обозначим их поэтому через n'. Если n' не равно n, то соответствующие два отдельных интеграла выражаются в виде

$$A_{n'}\int_0^{2l}\cos\frac{n'\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+B_{n'}\int_0^{2l}\sin\frac{n'\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=0. \qquad 173$$

Только для двух членов, в которых $n'=n$, два соответствующих интеграла дают:

$$A_n\int_0^{2l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}\,dx+B_n\int_0^{2l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=A_n l. \qquad 174$$

Поэтому вся сумма интегралов, на которые распадается (171), сводится к одному выражению (174), и мы имеем соотношение:

$$\left.\begin{aligned} A_n&=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.\\ &\text{Совершенно так же}\\ B_n&=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.\end{aligned}\right\} \qquad 175$$

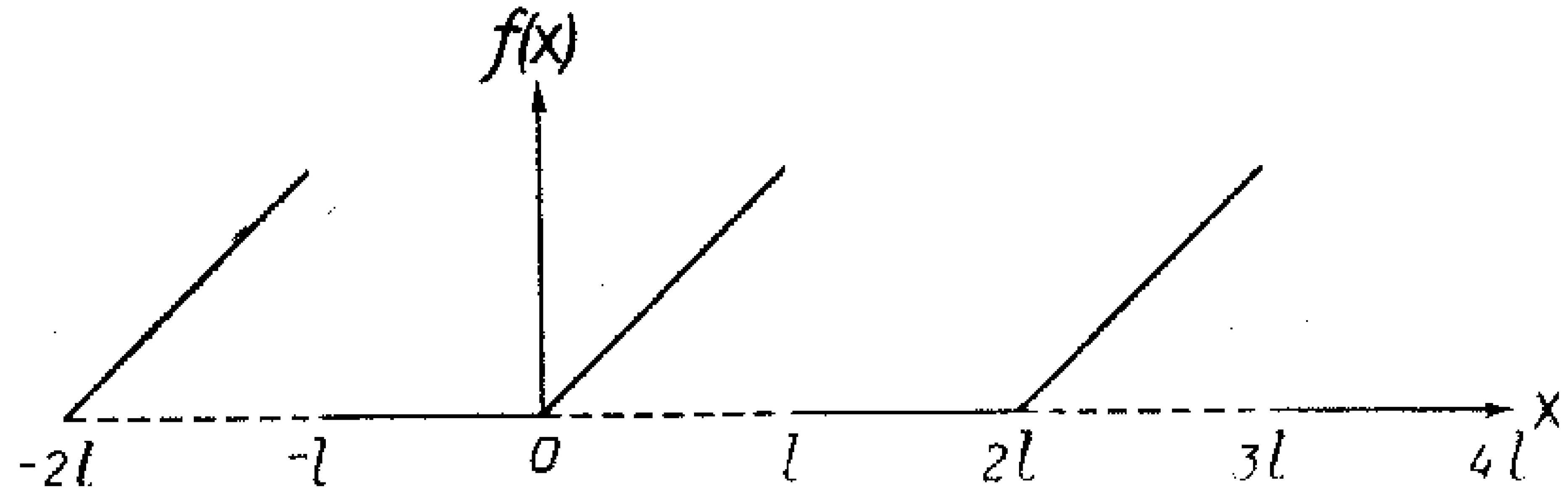
Таким образом коэфициенты A_n и B_n полностью определены. Наконец, чтобы получить A_0, вычислим из (170):

$$\int_0^{2l}f(x)\,dx=\frac{A_0}{2}\cdot 2l=A_0 l.$$

Отсюда мы видим, что уравнения (175) применимы также для случая $n=0$. В этом состоит преимущество обозначения постоянного члена через $\frac{A_0}{2}$. Значение B_0 безразлично, так как $\sin\frac{n\pi x}{l}$ обращается в нуль при $n=0$.

Из способа вычисления постоянных A_n и B_n видно, что это определение *однозначно*, т. е. существует только один ряд *Фурье* с периодом $2l$, который принимает определенные заданные значения внутри периода. Действительно, если бы существовал еще другой ряд с коэфициентами A_n' и B_n', то эти коэфициенты также обязательно должны были бы удовлетворять уравнениям (175), а так как выражения в правых частях уравнений имеют заданные значения, то эти коэффициенты должны совпадать с коэфициентами A_n и B_n.

Чтобы еще лучше иллюстрировать значение ряда *Фурье*, произведем вычисление для частного примера. Допустим, что при $0<x<l$, $f(x)=x$, а при $l<x<2l$; $f(x)=0$. Ход этой функции изображает кривая на черт. 7. В интервалах от $-l$ до 0, от l до $2l$, и т. д., она совпадает с осью абсцисс, а в промежуточных интервалах представляет отрезок прямой, равноделящей координатный угол. Поэтому функция $f(x)$ прерывна при x равном $-l$, l, $3l\cdots$ изменяясь скачком от l до 0. Совершенно такие же свой-



Черт. 7.

ства имеет ряд *Фурье*, который получается из (175), и который мы сейчас составим. Оба входящие в него интеграла разлагаются каждый на два отдельные интеграла, из которых первый берется от 0 до l, а второй от l до $2l$. В первом интеграле $f(x)=x$, а во втором $f(x)=0$. Поэтому

$$A_n=\frac{1}{l}\int_0^l x\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+0=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cdot l,$$

$$B_n=\frac{1}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx+0=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\cdot l,$$

а при $n=0$ получается:

$$A_0=\frac{1}{l}\int_0^l x\,dx=\frac{l}{2}\cdot$$

При этих значениях коэфициентов ряд (170) примет вид:

$$f(x)=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{2l}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{l}-\frac{2l}{25\pi^2}\cos\frac{5\pi x}{l}-\cdots$$
$$+\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}+\frac{l}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{l}-\cdots, \qquad 176$$

который охватывает ход кривой на черт. 7 в единственном аналитическом выражении.

Сделаем еще несколько проверок. При $x=0$, $f(x)=0$, поэтому согласно (176)

$$0=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}-\frac{2l}{3\pi^2}-\frac{2l}{25\pi^2}-\cdots,$$

или

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots \qquad 177$$

При $x=\frac{l}{2}$, $f(x)=x=\frac{l}{2}$. Поэтому, согласно (176),

$$\frac{l}{2}=\frac{l}{4}+\frac{l}{\pi}-\frac{l}{3\pi}+\frac{l}{5\pi}-\frac{l}{7\pi}+\cdots,$$

или

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \qquad 178$$

При $x=-\frac{l}{2}$, $f(x)=0$. Поэтому, согласно (176),

$$0=\frac{l}{4}-\frac{l}{\pi}+\frac{l}{3\pi}-\frac{l}{5\pi}+\frac{l}{7\pi}-\cdots,$$

что также приводит к последнему ряду.

Интересно свойство ряда *Фурье* при разрыве непрерывности, например, при $x=l$. В то время, как значение ряда $=x$ или $=0$, смотря по тому, приближается ли x к значению $x=l$ от меньших или от больших значений, при самом $x=l$, $f(x)$ не равно ни l ни 0, но, как дает подстановка в (176),

$$f(l)=\frac{l}{4}+\frac{2l}{\pi^2}+\frac{2l}{9\pi^2}+\frac{2l}{25\pi^2}+\cdots,$$

или согласно (177),

$$f(l)=\frac{l}{2},$$

т. е. равно среднему арифметическому из обоих значений. Это положение можно обобщить, но здесь нам незачем на нем останавливаться.

§ 39. Если в частном случае $f(x)$ „четная" функция, т. е. если $f(-x)=f(x)$, то из (175) следует, что интегрирование от 0 до $2l$ можно просто заменить интегрированием от $-l$ до $+l$

$$A_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

и для первого из этих интегралов, введя переменную $x'=-x$:

$$-\frac{1}{l}\int_{l}^{0} f(-x')\cos\frac{n\pi x'}{l}\,dx'=\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x')\cos\frac{n\pi x'}{l}\cdot dx'\cdot$$

Оба интеграла равны друг другу, и

$$A_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad 179$$

Соответствующим образом получается $B_n=0$, так как оба отдельных интеграла равны и противоположного знака.

Поэтому разложение четной функции в ряд *Фурье* с периодом $2l$ имеет более простой вид:

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad 180$$

где коэффициенты A определяются однозначно по (179) на основании хода функции внутри половины периода, от 0 до l. Действительно, каждый член ряда, а также постоянная A_0, есть четная функция x.

Если же $f(x)$ „нечетная" функция, т. е. если $f(-x)=-f(x)$, то таким же образом получается: $A_n=0$, и

$$B_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad 181$$

так что ряд *Фурье* принимает вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad 182$$

Здесь коэффициенты ряда также однозначно определяются по (181) на основании хода функции внутри половины периода.

§ 40. Возвратимся к задаче о колебаниях струны длиной l. Воспользуемся методом, разработанным в последнем параграфе, для того чтобы привести решение задачи, т. е. выражение для смещения v как функции x и t к одному виду, пригодному для всех x и t. Согласно (157),

$$v=f(x+at)+g(x-at).$$

Здесь можно в общем случае свести функцию g к функции f при помощи пограничных условий (165), если подставить в них $at-x$ вместо x:

$$f(at-x)+g(x-at)=0.$$

Таким образом,

$$v=f(x+at)-f(at-x).$$

Но, согласно (167), $f(x)$ периодична с периодом $2l$. Поэтому для $f(x+at)$ и $f(at-x)$ имеют место уравнения, которые получатся, если в обе части (170) подставить один раз $at+x$, а другой раз $at-x$, или:

$$\begin{aligned} v=&\frac{A_0}{2}+\sum A_n\cos\frac{n\pi}{l}(at+x)+\sum B_n\sin\frac{n\pi}{l}(at+x)\\ &-\frac{A_0}{2}-\sum A_n\cos\frac{n\pi}{l}(at-x)-\sum B_n\sin\frac{n\pi}{l}(at-x). \end{aligned} \qquad 183$$

Суммирование нужно производить всякий раз от $n=1$ до $n=\infty$.

Мы получили общее выражение для поперечных колебаний струны длины l. Его можно привести к различным более простым формам, каждая из которых обладает особыми преимуществами.

Если подставить

$$A_n=C_n\cos\vartheta_n,\ \ B_n=-C_n\sin\vartheta_n, \qquad 184$$

полагая, что C_n положительно, а ϑ_n заключается между 0 и 2π, то можно написать:

$$v=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left\{\frac{n\pi}{l}(at+x)+\vartheta_n\right\}-\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left\{\frac{n\pi}{l}(at-x)+\vartheta_n\right\}. \qquad 185$$

Таким образом наиболее общее колебание струны состоит из попарно равных противоположных чисто периодических волн, пробегающих в обе стороны, так называемых „парциальных волн", каждая из которых имеет период

$$\frac{2l}{n}=\lambda_n \qquad 186$$

относительно x и период

$$\frac{2l}{na}=\tau_n \qquad 187$$

относительно t. Пространственный период называется „длиной волны", а временной период τ_n называется „периодом колебания" соответствующей волны. Наибольшая длина волны (при $n=1$) равна $2l$, т. е. удвоенной длине струны, ей соответствует наибольший период колебания $\frac{2l}{a}$. Это колебание называется „основным колебанием" струны. Остальные длины волн и периоды колебаний суть n—ые доли соответствующих величин основного колебания.

Величина, обратная периоду колебаний,

$$\frac{1}{\tau_n}=\nu_n=\frac{na}{2l} \qquad 188$$

обозначает число колебаний в единицу времени и поэтому называется „числом колебаний" соответствующей волны. Длина волны, период колебаний и число колебаний связаны между собою, на основании последних трех уравнений, следующей зависимостью:

$$\frac{\lambda_n}{\tau_n}=\lambda_n\nu_n=a. \qquad 189$$

Если ввести длины волн и числа колебаний, то уравнение (185) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} v=&\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left\{\left(\frac{t}{\tau_n}+\frac{x}{\lambda_n}\right)2\pi+\vartheta_n\right\}-\\ &-\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left\{\left(\frac{t}{\tau_n}-\frac{x}{\lambda_n}\right)2\pi+\vartheta_n\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad 190$$

Весь угол, заключенный в фигурные скобки, называется „фазой" соответствующей волны (*1* § 12), а постоянная ϑ_n называется „фазовой постоянной".

Выражение для v значительно упрощается, если в (183) или в (190) соединить в один член два члена с одинаковым порядковым числом n. Тогда из (183) следует:

$$v=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{n\pi at}{l}-B_n\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad 191$$

Этот вид уравнения колебания наиболее удобен для вычисления коэфициентов A_n и B_n по начальному состоянию струны. Именно, при $t=0$, на основании (160) и (191):

$$\left.\begin{aligned} v_0=F(x)&=2\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi x}{l}.\\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0=\Phi(x)&=-\frac{2\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\sin\frac{n\pi x}{l}.\end{aligned}\right\} \qquad 192$$

Таким образом задача определения A_n и B_n приводится к разложению данных функций $F(x)$ и $\Phi(x)$ в ряды *Фурье* по синусам. Но, как показывают уравнения (181) и (182), это можно сделать только единственным способом, так как разлагаемые в ряд функции заданы внутри половины периода ряда, от $x=0$ до $x=l$. Нужно только подставить в (182) $F(x)$ или $\Phi(x)$ вместо $f(x)$, а также $2B_n$ или $-\frac{2\pi a}{l}nA_n$ вместо B_n. Тогда из (181) получится:

$$\left.\begin{aligned} 2B_n&=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\\ -\frac{2\pi a}{l}\,nA_n&=\frac{2}{l}\int_0^l \Phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\end{aligned}\right\} \qquad 193$$

и коэфициенты A_n и B_n определены для всех значений n.

С другой стороны, если в (185) соединить попарно по две соответствующие парциальные волны, то получится:

$$v = -2\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi a t}{l} + \vartheta_n\right)\cdot \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{194}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n C_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{l} + \vartheta_n\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{195}$$

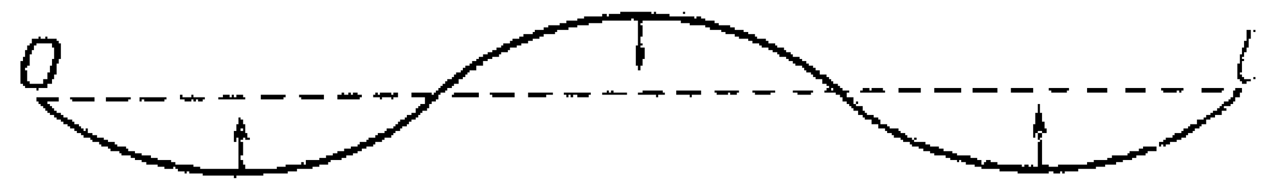
В этом виде колебание струны представляет собою совокупность парциальных колебаний, каждое из которых состоит из двух парциальных волн с одинаковым порядковым числом, движущихся в противоположных направлениях. Поэтому такие колебания называются „стоячими" волнами в отличие от „проходящих" волн. Рассмотрим одну из этих стоячих волн с порядковым числом n:

$$\left.\begin{aligned} v &= -2C_n \sin\left(\frac{n\pi a t}{l} + \vartheta_n\right)\sin\frac{n\pi x}{l} = \\ &= -2C_n \sin(2\pi\nu_n t + \vartheta_n)\sin\frac{2\pi x}{\lambda_n}\cdot \end{aligned}\right\} \tag{196}$$

Она представляет сама по себе возможное колебание струны, так как выполняются предельные условия: $v=0$ при $x=0$ и при $x=l$, в чем легко убедиться. Особенность ее заключается в том, что все точки струны имеют одинаковую фазу, так как фазовый угол, содержащий время t, не зависит, как у проходящих волн, от x. Поэтому, например, все точки струны проходят одновременно через положение равновесия $v=0$ и одновременно достигают наибольшего отклонения. Струна всегда изображается синусоидальной кривой, и движение каждой точки есть синусоидальное колебание, амплитуда которого изменяется периодически от одной точки к другой. В точках

$$x = 0,\ \frac{l}{n},\ \frac{2l}{n},\ \frac{3l}{n},\dots,\ \frac{n-1}{n}l, l \tag{196a}$$

амплитуда колебаний равна нулю. Поэтому эти точки называются „узлами колебаний". Они разделяют длину струны на n равных отрезков длины $\frac{l}{n}$, каждый из которых равен, на основании (186), половине длины волны λ_n, соответствующей проходящей волне. Для основного колебания ($n=1$) обе конечные точки струны суть узловые точки, для второго парциального колебания ($n=2$) один узел лежит по средине струны и т. д. Колебания происходят между каждыми двумя узлами, в соседних отрезках — в противоположном направлении. Максимумы амплитуд колебания лежат по средине между узлами и называются „пучностями" колебания. Главное колебание имеет только одну пучность. Вообще, для всякого парциального колебания число пучностей равно порядковому числу колебания n. На черт. 8 изображен вид струны и направления колебаний при $n=3$.



Черт. 8.

§ 41. Изображение колебания струны в виде суммы простых периодических колебаний (194) имеет не только формально-математический, но также выдающийся физический и физиологический интерес, ввиду его значения для акустики. Если колебания струны воспринимаются воздухом и через его посредство передаются уху, то органы слуха реагируют в частности барабанной перепонке, то органы слуха реагируют на каждый член суммы (196), т. е. на каждое простое периодическое колебание, с особой чувствительностью, — с чувствительностью к соответствующему „парциальному тону". Число колебаний ν_n определяет высоту тона, постоянная амплитуды C_n — силу его, а фазовая постоянная ϑ_n не имеет акустического значения. Как показали глубокие исследования *Гельмгольца*, тому, что в акустике называется качеством тона или окраской звука (тембру), не соответствует особого физического атрибута. Тембр звука колеблющейся струны скорее всего приводится к тем численным отношениям, в которых отдельные парциальные тоны входят в колебание и которые сильно зависят, конечно, от того, как подействовали на струну. Чем многочисленнее и сильнее высокие парциальные тоны, тем звук вообще резче и пронзительнее, между тем как основной тон ($n=1$) или же отдельный парциальный тон звучат мягко и бесцветно.

Благодаря этим своеобразным акустическим воздействиям, парциальные колебания, и вместе с тем отдельные члены ряда *Фурье* для волны приобретают самостоятельное значение также и в физическом смысле. Поэтому некоторые склонны даже приписывать им самостоятельное существование уже в самом колебании струны и в воздушной волне, вызванной колебанием струны, независимо от органа слуха. Однако не следует забывать, что такое представление допустимо и даже очень целесообразно, но вовсе не необходимо. Пока мы рассматриваем колебание струны и воздушную волну, зависимость смещения материальной точки, v, от независимых переменных x и t и вместе с тем все особенности физического явления полностью представлены одной единственной функцией, и лишь при помощи некоторого произвола можно разложить эту функцию на отдельные составные части. Поэтому парциальные тоны не содержатся уже, как нечто реальное, в колебании струны или в воздушной волне, а отделяются друг от друга лишь в органе слуха.

Однако орган слуха чувствителен не только по отношению к абсолютной величине числа колебаний, но реагирует также очень характерным образом на отношение чисел колебаний двух звуковых волн, одновременно попадающих на него: если это отношение простое рациональное, т. е. может быть выражено отношением двух небольших целых чисел, то орган слуха воспринимает созвучие как приятное, гармоническое, консонирующее. Абсолютная высота обоих тонов не играет при этом роли. Поэтому расстояние между двумя различными тонами, музыкальный „интервал", измеряется в акустике не по разности, а по отношению чисел колебаний, или, что одинаково по существу, по разности их логарифмов. Чем проще это отношение, тем совершеннее созвучность (консонантность). Так как, на основании (188), числа колебаний ν_n парциальных тонов колеблющейся струны относятся между собой, как ряд натуральных чисел $1:2:3:4\cdots$, то тоны с небольшим порядковым числом консонируют с основным тоном и между собою и поэтому носят также название „гармонических обертонов".

Самый простой интервал, кроме „однозвучия" (унисона) $1:1$, есть отношение $2:1$, или „октава". Здесь созвучие обоих тонов настолько совершенно, что они часто сливаются в одно ощущение и тогда даже опытный слух с трудом может, а то вовсе не в состоянии отличить их друг от друга. Затем следует отношение $3:2$, или „квинта", далее $4:3$, или „кварта". Квинта и кварта дают вместе октаву, так как $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=2$.

Вообще, интервал, который дополняет другой интервал до октавы, называется „обращением" последнего. Поэтому кварта есть обращение квинты. Затем следует отношение $5:4$, или „большая терция", и ее обращение $8:5$ или „малая секста"; потом отношение $6:5$ или „малая терция" и ее обращение $5:3$, — „большая секста". Этим исчерпывается число интервалов, которые считаются

консонирующими, если ограничиться интервалами, которые лежат в пределах одной октавы, т. е. <2. Большие интервалы приводятся к интервалам <2 путем деления на целые степени 2.

Для обозначения тонов вся область тонов делится сперва на октавы. При этом исходят от произвольного нормального тона, установленного с общего согласия. Согласно парижскому соглашению, это тон $\nu_0=261$, или c' с одним штрихом (нота „до" первой октавы, в русском обозначении), который легко доступен для мужского и женского голоса, а также для важнейших инструментов. Затем идут с одной стороны октавы вверх до c''''', с пятью штрихами, т. е. $\nu=261\cdot2^4$, с другой стороны вниз до малого c, большого C, контра C_1 и субконтра C_{11}: $\nu=261\cdot2^{-4}$. Звуковые волны, числа колебаний которых лежат вне указанных пределов, уже не производят впечатления тона на наше ухо, а оказывают лишь механическое действие, высокие — колющее, а низкие — дергающее. Область тонов между c' (с одним штрихом) и c'' (с двумя штрихами) называется октавой с одним штрихом или первой октавой. Точно так же всякая октава носит название того c, которое ограничивает его снизу. Все тона, которые отличаются на целое число октав, обозначаются одинаковыми буквами, а положение самих октав указывается так же, как и для различных c.

Так, например, струна с основным тоном C (самая толстая струна виолончели) имеет следующие гармонические обертоны:

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
парциальный тон:	C	c	g	c'	e'	g'		c''	d''	e''

Обертоны $n=7, 11, 13, 14,\ldots$ не употребляются в современной музыке и не имеют поэтому особых обозначений. Но так называемая натуральная септима $7:4$, ближайшая к малой септиме $9:5$, благозвучнее последней; в этом можно отчетливо убедиться, если иметь возможность сравнить слухом эти два интервала. Несомненно также, что важная роль, которую играет в музыке так называемый доминант-септаккорд (основной тон, большая терция, квинта, малая септима), основана на том обстоятельстве, что интервалы этого аккорда приблизительно выражаются отношениями $4:5:6:7$.

§ 42. Консонирующие интервалы образуют основу всей практической музыки. От этого закона природы искусство не может безнаказанно отступить. Совокупность всех тонов, которую можно получить, исходя от одного нормального тона ν_0 и двигаясь определенными консонирующими интервалами, образует *натуральную* *систему тонов*. Числа колебаний тонов, принадлежащих к определенной системе, могут быть представлены при помощи простого математического выражения. Если ограничиться октавами, то числа колебаний имеют вид:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n, \qquad 197$$

где n обозначает какое-либо целое положительное или отрицательное число. Эти тоны отличаются от нормального тона на целое число октав и поэтому образуют совокупность, еще недостаточную для практической музыки. Если же присоединить к ним квинты, то получатся тоны с числами колебаний:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n \cdot 3^p, \qquad 198$$

где p также обозначает целое положительное или отрицательное число. Все тоны, числа колебаний которых могут быть выражены в виде (198), образуют *пифагорейскую* систему тонов. Последняя обнимает практически все воспроизводимые тоны и, значит, все интервалы, так как всякое число можно, хотя и не точно, но с желаемым приближением, выразить при помощи (198). Так, например, большая терция 5:4 может быть получена с практически достаточным приближением при помощи четырех квинт вверх и двух октав вниз, т. е. при помощи интервала $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{81}{64}$, так называемой пифагорейской терции, которая несколько больше, чем натуральная терция. Различие между этими двумя терциями составляет $\frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80}$, — так называемая „синтоническая комма“. Увеличив число квинт и октав, можно, конечно, получить еще лучшее совпадение. Однако в абсолютном смысле совершенно невозможно получить интервал натуральной терции при помощи квинт и октав, как бы ни увеличивать число ступеней, и в этом смысле пифагорейская система тонов является неудовлетворительной. Лучше удовлетворяет теоретической потребности система тонов, обогащенная терциями:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n \cdot 3^p \cdot 5^q, \qquad 199$$

которая действительно послужила основой для музыки на долгое время.

Однако и эта система, подобно всем натуральным системам тонов, имеет тот практически важный недостаток, что каждая из них обнимает, строго говоря, неограниченное множество тонов,

между тем, как практическая музыка, особенно после введения инструментов с неизменными тонами (орган, пианино), вынуждена обходиться при помощи ограниченного, не очень многочисленного количества тонов. Но если произвольно оборвать систему тонов на определенных значениях чисел n, p, q, т. е. после определенного числа интервалов, то этим тоны на границах будут лишены своей роли, так как невозможно будет итти от них вперед, между тем как неограниченная возможность модулирования образует основную потребность новой музыки. Этот недостаток оказался настолько невыносимым в течение долгого времени, что было принято решение пожертвовать для устранения его абсолютной чистотой натуральной системы тонов и несколько изменить, „темперировать“, консонирующие интервалы. Из всех искусственных систем тонов наиболее употребительной оказалась так называемая *двенадцатиступенчатая темперированная система Иоганна-Себастиана Баха*. В этой системе все октавы, в качестве важнейших консонансов, абсолютно чисты, зато квинты темперированы, исходя из того обстоятельства, что двенадцать квинт, т. е. $(^3/_2)^{12}$, приблизительно равны семи октавам, т. е. 2^7. Различие составляет $(^3/_2)^{12} \cdot (^1/_2)^7 \cong \frac{74}{73}$, — так называемая „пифагорейская комма“. Если в равной мере уменьшить все эти двенадцать квинт так, чтобы они образовали ровно семь октав, то условие для интервала x темперированной квинты представится в виде уравнения:

$$x^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 1, \qquad 200$$

или же

$$x = 2^{\frac{7}{12}} = 1{,}498.$$

Таким образом различие между чистой и темперированной квинтой составляет всего

$$1{,}5 : 1{,}498 \cong \frac{886}{885},$$

и непосредственно не воспринимается даже самым опытным слухом. Если распределить двенадцать соседних тонов, которые получаются при помощи двенадцати темперированных квинт и соответствующих октав, в пределах одной октавы, например, малой октавы, от c до c', то последняя разделится на двенадцать равных интервалов по следующей схеме:

2^0	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	$2^{\frac{12}{12}}$
c	*cis = des*	*d*	*dis = es*	*e*	*f*	*fis = ges*	*g*	*gis = as*	*a*	*ais = b*	*h*	*c'*

Определенные таким способом тоны образуют темперированную систему, которая повторяется совершенно одинаковым образом в каждой октаве.

Интервал между двумя соседними тонами есть темперированный полутон:

$$2^{\frac{1}{12}} = 1,0595.$$

Темперированная большая терция состоит из четырех полутонов. Она больше натуральной терции, именно на

$$\sqrt[3]{2} \cdot \frac{4}{5} \cong \frac{126}{125},$$

но меньше пифагорейской терции, так как последний интервал меньше синтонической коммы $\frac{81}{80}$.

Вполне естественное нежелание сознательно отказаться от абсолютного соответствия природе нередко выражалось в теории консонирующих интервалов в виде возражений против темперированной настройки и в требованиях возвращения к натуральной настройке. Однако нужно иметь в виду, что вопрос о признании такой настройки в практической музыке не является предметом научного обсуждения. В искусстве решающую роль играют не теоретические основания, а единственно только фактическое эстетическое воздействие. Поэтому преимущественное положение будет занимать всегда та система тонов, которая обладает наиболее действительными художественными способами выражения. Натуральная настройка также лишь тогда восстановит свое практическое значение, когда явится художник, который в состоянии будет сказать больше и выразительнее на языке натуральной настройки, чем можно было бы выразить другими средствами.

§ 43. После этого отступления в область искусства возвратимся снова к общей акустике. Обратим сперва внимание на следующий замечательный факт: когда ухо выделяет из попадающей на него

волны отдельные парциальные тоны, оно совершает в сущности то же самое, что и математик, который по данной периодической, но произвольно сложной функции вычисляет отдельные коэффициенты соответствующего ряда *Фурье*, A_n и B_n, при помощи интегрирования, указанного в уравнениях (175). Раздражения, на которые реагирует слуховой нерв, целиком во всех подробностях заключаются в том возбуждении, которому подвергается барабанная перепонка под влиянием падающей на нее волны. Они вполне исчерпывающе изображаются при помощи единственной функции времени $f(t)$, которая дает смещение барабанной перепонки от положения равновесия в каждый момент, а при разложении звука в ухе на отдельные парциальные тоны происходит разложение функции $f(t)$ в ряд *Фурье*. Об этой удивительной способности органа слуха можно составить себе некоторое представление, если вспомнить, что опытный слух дирижера оказывается в состоянии выделить из звуковой массы хора, сопровождаемого оркестром, не только тоны и тембр отдельных инструментов, но и отдельные буквы слов, которые поются. В этом отношении ухо бесконечно превосходит глаз, так как мы всегда воспринимаем какой-нибудь цвет, — белый, зеленый, голубой, как нечто цельное и совершенно не можем определить, состоит ли этот цвет из других цветов и из каких именно.

Перед нами возникает теперь такой фундаментальный вопрос: каким образом ухо в состоянии совершать такие действия? и какие физические явления лежат в основе разложения звука на его парциальные тона? Ответ на этот вопрос дал *Гельмгольц*, исходя из допущения, что с каждым субъективным процессом,— ощущением определенного парциального тона с числом колебаний ν, — всякий раз связан объективный процесс,— маятникообразное колебание некоторого элементарного материального образования во внутреннем ухе с тем же числом колебаний ν,—и обратно. Сколько различных парциальных тонов в состоянии ощущать наш слух, столько же имеется внутри уха таких элементарных маятников, расположенных рядом, подобно струнам арфы. Когда барабанная перепонка совершает колебания $f(t)$ под влиянием падающей на нее воздушной волны, то парциальный тон ν ощущается в том случае, если тот элементарный маятник, которому свойственно число колебаний ν, совершает заметные колебания при сотрясении барабанной перепонки. Таким образом вопрос о том, содержится ли парциальный тон ν в звуковой волне $f(t)$, сводится по существу к вопросу, в состоянии ли сила, величина которой $f(t)$, привести в заметные колебания маятник с периодом колебаний $\tau = \frac{1}{\nu}$. На этот вопрос дает точный ответ общая механика следующим образом.

Маятник с определенным периодом колебаний $\tau = \frac{1}{\nu}$ может быть изображен, согласно *I* § 13, при помощи материальной точки, которая совершает небольшие колебания около положения устойчивого равновесия $x = 0$. Если колебания вызваны одним толчком, а затем происходят без нарушения извне, то они следуют уравнению движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 m\nu^2 x, \tag{201}$$

которое получается из уравнения [*I* (15)], если выразить в нем постоянную c через число колебаний ν, на основании зависимости:

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = \tau = \frac{1}{\nu}. \tag{202}$$

В этом случае маятник совершает „свободные" колебания, период которых называется поэтому „собственным" периодом колебаний маятника.

Но если на маятник действует, кроме того, внешняя сила, то он совершает „вынужденные" колебания, согласно уравнению движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 m\nu^2 x + f(t). \tag{203}$$

Вычислим сперва вынужденные колебания для частного случая, когда внешняя сила $f(t)$ — периодическая, т. е. имеет вид:

$$f(t) = C\cos(2\pi\nu' t + \vartheta), \tag{204}$$

при том допущении, что в начальном состоянии при $t = 0$ маятник покоится в состоянии равновесия, т. е. $x = 0$ и $\frac{dx}{dt} = 0$.

Общее решение диференциального уравнения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 4\pi^2 m\nu^2 x = C\cos(2\pi\nu' t + \vartheta) \tag{205}$$

имеет вид

$$x = \alpha\cos(2\pi\nu t + \vartheta_0) + \beta\cos(2\pi\nu' t + \vartheta). \tag{206}$$

Если подставить это выражение для x в уравнение (205), то в левой части останутся только члены с β. Поэтому получится:

$$\beta = \frac{C}{4\pi^2 m(\nu^2 - \nu'^2)}, \tag{207}$$

между тем как α и ϑ_0 остаются неопределенными и поэтому представляют собою постоянные интегрирования. Если определить их значения по начальным условиям и подставить их, а также значение β, в (206), то получится искомое колебание маятника:

$$x = \frac{C}{4\pi^2 m(\nu^2 - \nu'^2)} \cdot \left\{ -\cos\vartheta\cos 2\pi\nu t + \frac{\nu'}{\nu}\sin\vartheta\sin 2\pi\nu t + \cos(2\pi\nu' t + \vartheta) \right\}. \tag{208}$$

Таким образом маятник совершает движение, которое состоит вообще из двух колебаний с двумя различными периодами, числа колебаний которых ν и ν' соответствуют собственному колебанию и внешнему возбуждающему колебанию.

Однако исключение составляет тот случай, когда период возбуждающего колебания совпадает с периодом собственного колебания, так что $\nu' = \nu$. Тогда выражение (208) принимает вид: $\frac{0}{0}$. Истинное значение последнего получится, если положить $\nu' = \nu + \Delta\nu$, разложить числитель и знаменатель по степеням $\Delta\nu$ и перейти к пределу $\Delta\nu = 0$:

$$x = \frac{C}{8\pi^2 m\nu^2} \cdot \left\{ 2\pi\nu t\sin(2\pi\nu t + \vartheta) - \sin 2\pi\nu t\sin\vartheta \right\}. \tag{209}$$

Конечно, можно и непосредственно убедиться в том, что выражение (209) удовлетворяет как начальным условиям, так и диференциальному уравнению (205) при $\nu' = \nu$.

Это движение маятника, ввиду того, что перед синусом стоит множитель t, совершенно отлично от движения, изображаемого формулой (208), не только по закону движения, но даже по порядку величины: оно не состоит из периодических колебаний, а бесконечно возрастает с течением времени. Отсюда следует, что внешняя периодическая сила с произвольно малой амплитудой C, если только период силы совпадает с собственным периодом маятника, может с течением времени произвести более значительное действие, чем любая произвольно большая сила с каким-либо другим периодом. Тогда говорят, что возбуждающая сила находится в *резонансе* с маятником. Резонанс дает объяснение многих замечательных явлений природы, — разумеется, не только в области акустики. Когда слабая звуковая волна приводит в звучание зубцы большого камертона, или когда мальчик приводит в сильное колебание пудовый колокол, или когда крепкий мост начинает совершать опасные колебания под влиянием идущих в ногу людей, то все это — явления резонанса. Естественно допустить, что подобно тому, как бывает в акустике и электродинамике, также и в химии и даже в биологии интенсивность некоторых реакций сводится по существу к явлению резонанса.

Сделаем теперь более общее допущение, что сила, колеблющая маятник, не просто периодична, а состоит из ряда простых периодических колебаний, т. е. может быть выражена при помощи ряда *Фурье*. Как нам известно, это представляет собою наиболее общий случай. Тогда колебания маятника будут бесконечно возрастать с течением времени в зависимости от того, содержится ли в ряде *Фурье* член с собственными колебаниями маятника. Величина коэфициента этого члена по сравнению с другими членами ряда *Фурье* не играет при этом роли. По тому, как маятник реагирует на возбуждающее колебание, можно определить имеется ли соответствующий член в ряде *Фурье*. Таким образом маятник служит для анализа ряда при помощи резонанса, поэтому он называется также „резонатором". Резонатор заметно отзывается только на то колебание, которое соответствует его собственному периоду, поэтому действие его избирательное, „селективное". Благодаря явлению резонанса, отдельные члены ряда *Фурье* также получают физическое значение, между тем как до сих пор физически определена была только их сумма.

Подойдем теперь еще ближе к количественному взаимоотношению между возбуждающей силой $f(t)$ и энергией вызванного ею колебания резонатора. Рассмотрим процесс в течение определенного промежутка времени. Допустим, что возбуждающая сила $f(t)$ настолько слаба, что в течение этого промежутка времени маятник колеблется почти как свободный, т. е. периодически. Тогда изменение колебательной энергии E (кинетической и потенциальной вместе) в течение элемента времени dt равно, согласно [*1* (393)]:

$$dE = \mathbf{F}_x \cdot dx = f(t) \cdot dx,$$

или

$$dE = f(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt.$$

Поэтому изменение энергии за время от t до t' равно

$$E' - E = \int_t^{t'} f(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt. \qquad 210$$

Смотря по тому, как выражаются отклонения маятника x, во время рассматриваемого промежутка времени — через $\cos 2\pi\nu t$ или через $\sin 2\pi\nu t$, производная $\frac{dx}{dt}$ пропорциональна $\sin \nu t$ или $\cos 2\pi\nu t$, а интеграл (210) принимает такой же вид, как интегралы (175), служащие для вычисления коэфициентов ряда *Фурье* для функции $f(t)$ с той лишь разницей, что там переменная интегрирования обозначена через x, а здесь через t. Представим себе длинный ряд таких маятников-резонаторов с соответственно подобранными периодами колебаний и фазами и подвергнем их одновременно действию одной и той же возбуждающей силы $f(t)$. Тогда энергия колебаний каждого маятника укажет величину соответствующего коэфициента разложения $f(t)$ в ряд *Фурье*. Согласно *Гельмгольцу*, этот процесс одинаков по существу с тем процессом, который происходит в ухе, когда каждое из слуховых волокон, отзывающееся на определенное число колебаний, воспринимает, благодаря резонансу, свой тон из колебаний барабанной перепонки и передает его чувствительным нервам. Отсюда мы видим, что слух не только производит такое разложение звуковой волны, которое, как мы видели в начале параграфа, соответствует превращению этой волны в сумму простых периодических волн, но что природа пользуется при этом тем же самым методом, как и математика. Ибо последнее уравнение (210) есть не что иное, как механическая иллюстрация математического определения коэфициентов ряда в (175). Благодаря этому, нам становится физически совершенно понятной способность уха разлагать звук на отдельные тоны.

Другой принципиально важный вопрос — это объяснение своеобразного созвучного действия консонирующих интервалов. По этому вопросу *Гельмгольц* также разработал теорию, согласно которой понятие консонанса возникло не из бессознательно мистического удовлетворения, которое слуховой нерв испытывает при появлении простых рациональных числовых отношений, но что и здесь также играют решительную роль вполне определенные реальные физически определимые обстоятельства, которые вызывают удовольствие в случае консонанса и неудовольствие в случае диссонанса. Кратким обсуждением этой теории мы и займемся в ближайшей главе, в которой будет итти речь об акустических звуковых волнах (§ 46).

Глава четвертая

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

§ 44. Жидкости и газы могут быть выделены как частный случай среди совершенно упругих изотропных тел (§ 21), так как в них все три главные давления (§ 20) равны. Отсюда следует, что на каждый элемент поверхности действует перпендикулярное к нему давление $X_x = Y_y = Z_z = p$, независящее от расположения элемента поверхности и положительное, если тело подвергается сжатию. Так как тангенциальные давления обращаются в нуль, то постоянная упругости в уравнениях (119) также равна нулю, и давление зависит только от объема или же от плотности:

$$p = f(k). \qquad 211$$

Вид функции f зависит от природы тела. Для капельных жидкостей p чрезвычайно сильно изменяется при изменении k, поэтому удобнее представить k в виде функции от p. Предельный случай образуют несжимаемые жидкости, для которых k постоянно. Подробнее о виде функции f мы будем говорить позднее, при обсуждении конечных деформаций (§ 56).

В интересах общности мы распространим последующие исследования как на капельные жидкости, так и на газы. Для этого мы воспользуемся обобщением уравнений (119), которое мы уже ввели в § 33, а именно мы положим, что в недеформированном состоянии ($\sigma = 0$) давление p не равно нулю, а равно p_0, так как газ в устойчивом равновесии всегда обладает конечным давлением. Тогда шесть уравнений (119) обратятся в одно уравнение:

$$p = p_0 - \lambda\sigma. \qquad 212$$

Коэфициент упругости λ зависит от сжимаемости, так как

$$-\frac{\sigma}{p - p_0} = \frac{1}{\lambda}, \qquad 213$$

и может быть вычислен при всяком состоянии вещества, если дана функция f в уравнении (211). Так как масса элемента тела объема dV, не изменяется, то для бесконечно малого расширения объема $d\sigma$ существует соотношение:

$$dV\cdot k = dV\cdot(1+\sigma)\cdot(k+dk). \qquad 213a$$

Поэтому

$$\sigma = -\frac{dk}{k},$$

и из (213):

$$\lambda = k\frac{dp}{dk}. \qquad 214$$

Так как жидкое и газообразное состояние можно рассматривать как частный случай твердого состояния, то мы выведем уравнения движения непосредственно из уравнений для твердых тел, и при этом также опустим силы тяготения. Тогда из (147) и (212) получится:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \quad k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial y}, \quad k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial z}, \qquad 215$$

или же, в векториальной форме, если еще ввести постоянную

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{dp}{dk} = a^2,$$

получится:

$$\boldsymbol{q} = a^2\cdot\operatorname{grad}\sigma. \qquad 216$$

Произведем над этим уравнением векторное действие rot (§ 13). Ввиду (65), следует:

$$\ddot{\boldsymbol{o}} = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение дважды по t, получим:

$$\boldsymbol{o} = \boldsymbol{c}_1 t + \boldsymbol{c}_2.$$

Отсюда следует, что составляющие вращения материальной частицы ξ, η, ζ, суть линейные функции времени. Значит, вращение возрастает с течением времени до бесконечности, если только вектор $\boldsymbol{c}_1$ не равен нулю. Так как мы намерены заняться бесконечно малыми колебаниями около положения равновесия и поэтому постоянное во времени вращение также не представляет для нас интереса, то мы ограничимся рассмотрением случая, когда обе постоянные c_1 и c_2 обращаются в нуль и тогда

$$\boldsymbol{O} = \operatorname{rot} \boldsymbol{q} = 0. \qquad 217$$

Общее решение этого диференциального уравнения равно:

$$\boldsymbol{q} = -\operatorname{grad} \varphi, \qquad 218$$

где φ обозначает некоторую скалярную функцию места и времени. Эта функция находится в таком же соотношении к вектору смещения $\boldsymbol{q}$, в каком потенциал U находится к силовому вектору $\mathbf{F}$, согласно I (121). Поэтому можно назвать φ „потенциалом смещения". Таким образом существование потенциала смещения равнозначно с условием, чтобы при смещении не происходило вращений. Как видно из уравнения (218), в величине потенциала смещения φ аддитивная функция времени не имеет физического значения и поэтому может быть определена только при помощи произвольного допущения.

Если потенциал смещения φ известен как функция x, y, z, t, то отсюда однозначно следуют все подробности движения. Прежде всего, из уравнения (218) получим для скорости:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -\operatorname{grad} \dot{\varphi}. \qquad 219$$

Таким образом скорость также имеет потенциал: „потенциал скорости". Далее, для объемного расширения следует из (66):

$$\sigma = \operatorname{div} \boldsymbol{q} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta\varphi, \qquad 220$$

и для изменения давления следует из (212):

$$p - p_0 = -\lambda\sigma = \lambda \cdot \Delta\varphi. \qquad 221$$

Поэтому вся задача сводится к нахождению потенциала смещения. Для этого служит следующее диференциальное уравнение, вытекающее из уравнений движения (216):

$$\operatorname{grad} \ddot{\varphi} = a^2 \cdot \operatorname{grad} \Delta\varphi,$$

которое после интегрирования по трем координатным направлениям примет вид:

$$\ddot{\varphi} = a^2\Delta\varphi. \qquad 222$$

Как легко убедиться при помощи диференцирования, уравнение (222) имеет место не только для потенциала смещения φ, но и для каждого из компонентов смещения и скорости, а также для объемного расширения σ и для давления p. Это уравнение представляет собою обобщение уравнения (155) для колебаний натянутой струны и поэтому называется также пространственным „волновым уравнением". Конечно, постоянная a также играет при этом роль скорости распространения. Однако волны, которые мы здесь будем рассматривать, существенно отличаются от волны поперечно колеблющейся струны, так как здесь упругие действия обусловливаются не вращениями, а изменениями плотности и давления.

Как уже было сказано при обсуждении проблем статики (§ 28), нас всегда меньше интересует с физической точки зрения общее решение характеристического диференциального уравнения, чем такие частные решения, которые возможно больше соответствуют известным важным процессам в природе. В дальнейшем мы займемся некоторыми такими решениями.

§ 45. Самое простое частное решение диференциального уравнения (222) получается в том случае, когда функция φ зависит только от одной пространственной переменной, например, от x. Тогда уравнение (222) приводится к простому виду (155) и поэтому представляет две волны, которые распространяются со скоростью a в направлении положительной и отрицательной оси x. Так как физическое состояние всех материальных частиц, лежащих в какой-либо плоскости, перпендикулярной к оси x, совершенно одинаково, то эти волны называются *плоскими волнами*, каждая плоскость $x = \text{const.}$ называется „волновой плоскостью", а перпендикулярное к ней направление x — „волновой нормалью". Вид волн определяется начальным состоянием и пограничными условиями. Так как потенциал смещения зависит, кроме времени, только от x, то из трех составляющих смещения только u не равно нулю. Поэтому колебания происходят в направлении распространения. Такие волны, в противоположность рассмотренным в предыдущей главе с поперечным и колебаниям струны, являются продольными.

Плоские волны можно приблизительно осуществить, заключив жидкость или газ, например воздух, в длинный достаточно узкий цилиндр. Такой цилиндр служит „трубой", нормальные сечения суть волновые плоскости, а колебания воздуха происходят исключительно в продольном направлении, которое мы примем за ось x, по тем же законам, с которыми мы познакомились при изучении колебаний струны. Поэтому мы можем и не останавливаться на подробностях. Только введение пограничных условий требует особого обсуждения. Конец какой-либо трубы может быть открыт или закрыт. В последнем случае на конце $u=0$, так как воздух не может ни войти в стенку сосуда, ни выйти из нее. Это пограничное условие соответствует струне, закрепленной на одном конце. А в первом случае у открытого сечения, на основании принципа равенства действия и противодействия, давление колеблющегося в струне воздуха на внешний атмосферный воздух p, равно давлению атмосферы на воздух в трубе, следовательно постоянно $=p_0$, т. е. $\sigma=0$, или плотность постоянна во времени. Отсюда однозначно получаются законы колебаний воздуха в открытых и закрытых трубах.

Если труба *закрыта с обоих концов*, то мы имеем, как в § 40, стоячие колебания вида (194), где нужно только подставить u вместо v. Колебания могут быть вызваны сотрясением извне или при помощи небольшого отверстия для дутья. На каждом конце трубы находится узел смещения u и скорости $\dot{u}$. Положение остальных узлов для n-го парциального колебания дано в (196а). Посредине между двумя соседними узлами находится пучность. Что касается объемного расширения, то на основании (194) получается:

$$\sigma=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} nC_n \sin\left(\frac{n\pi at}{l}+\vartheta_n\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}. \qquad 223$$

Отсюда видно, что объемное расширение, а вместе с тем и колебание давления, имеют пучность на обоих концах трубы и что узлы объемного расширения $\sigma=0$, т. е. те места, в которых плотность и давление остаются постоянными, совпадают с пучностями смещения и скорости, посредине между узлами последних.

Представим себе, что колеблющаяся труба разрезана в таком узле расширения $\sigma=0$, и отверстие сообщается со свободной атмосферой. Это совершенно не нарушает колебаний ни в одной из половин трубы, так как установленное выше предельное условие осуществлено в отверстии. Отсюда следует закон колебаний в открытой или частью открытой трубе.

Если труба *открыта с обоих концов*, то на каждом конце находится узел объемного расширения и пучность смещения. Ряд парциальных тонов такой же, как у закрытой с обоих концов трубы или у струны, закрепленной на обоих концах, только узлы и пучности поменялись ролями. При основном колебании σ имеет единственную пучность, u имеет единственный узел посредине трубы.

Совершенно иной закон парциальных тонов получается для трубы, *закрытой с одного конца* и открытой с другого. Здесь смещение u имеет на одном конце узел, а на другом конце пучность. Поэтому в такой трубе главное колебание не имеет посредине ни узла, ни пучности. Для главного колебания в этом случае вся длина трубы равна расстоянию между узлом и пучностью, т. е. равна половине расстояния между двумя соседними узлами в более длинной трубе, которая совершает такое же стоячее колебание. Таким образом труба, закрытая на одном конце, обладает таким же основным колебанием, как и труба, открытая с двух концов, или закрытая с двух концов, но двойной длины. Для обертонов трубы, закрытой на одном конце, длина трубы содержит нечетное кратное расстояния между узлом и пучностью. Отсюда следует, что числа колебаний парциальных тонов относятся как нечетные целые числа $1:3:5:7$.

§ 46. В открытом воздухе также могут быть приблизительно осуществлены плоские волны, если звуковая волна занимает сравнительно небольшое пространство и точка воздействия (*1*, § 35) достаточно удалена от источника звука. Тогда расстояние x между точкой воздействия и источником звука представляет собою нормаль к волне, и для простого тона с числом колебаний $\nu=\frac{1}{\tau}$ и длиной волны λ мы имеем, как и в (190), частное решение уравнения (222) в виде:

$$\varphi=C\cos\left\{2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)+\vartheta\right\}, \qquad 224$$

где между τ, ν и λ существуют соотношения (189). Сложив несколько таких частных решений, мы получим более общее решение, которое соответствует тому случаю, когда несколько звуковых волн одновременно попадает в ухо по одному направлению. Особый интерес представляет случай, когда взаимодействуют два тона одинаковой интенсивности и с мало отличающимися числами колебаний ν и ν'. Тогда мы имеем для колебания в точке, которую мы примем для простоты за начало координат:

$$\varphi=C\cos(2\pi\nu t+\vartheta)+C\cos(2\pi\nu' t+\vartheta'),$$

или

$$\varphi=2\,C\cos\left(2\pi\frac{\nu'-\nu}{2}t+\frac{\vartheta'-\vartheta}{2}\right)\cdot\cos\left(2\pi\frac{\nu'+\nu}{2}t+\frac{\vartheta'+\vartheta}{2}\right). \qquad 225$$

Если $\nu' - \nu$ мало по сравнению с ν, то первый косинус в (225) медленно изменяется с течением времени, и пройдет много колебаний отдельных тонов, пока заметно изменится его величина. Поэтому колебание (225) действует на ухо так же, как колебание одного тона с переменной амплитудой

$$C_t = 2C \cos\left(2\pi \frac{\nu' - \nu}{2} t + \frac{\vartheta' - \vartheta}{2}\right) \qquad 226$$

и числом колебаний $\frac{\nu' + \nu}{2}$, равным среднему арифметическому из чисел колебаний отдельных тонов. В этом случае слышится определенный тон, интенсивность которого колеблется медленно и периодически между нулем и максимумом. Эти колебания интенсивности называются „биениями" обоих совпадающих тонов, их максимумы называются „толчками" биений. Частота биений зависит от времени между двумя последовательными нулевыми значениями C_t, число их составляет $\nu' - \nu$ в единицу времени. Чем ближе друг к другу оба тона, тем медленнее и отчетливее становятся биения. Когда тона расходятся, биения становятся частыми и менее заметными. Поэтому биения представляют прекрасное средство, для того чтобы испытать при помощи слуха не только различие двух почти одинаковых тонов, но также отклонение от полного консонанса двух музыкальных тонов, близких к консонансу. Ибо при двух почти консонирующих музыкальных тонах (звучаниях) возникают биения, конечно, не основных тонов, но отдельных пар, содержащихся в звучаниях парциальных тонов. Так, например, при расстроенной октаве первый обертон более низкого звука дает биения с основным тоном более высокого звука, при расстроенной квинте второй обертон более низкого звука дает биения с первым обертоном более высокого звука. Поэтому значительно легче настроить инструменты в натуральной системе тонов, чем в темперированной системе.

Эти биения по *Гельмгольцу* и составляют физическую основу для противоположения консонанса и диссонанса. Ибо для всех органов чувств установлен факт, что прерывистые раздражения, при известной частоте, действуют назойливо, утомительно, неприятно. Достаточно вспомнить, например, чтение при мигающем освещении или некоторые виды световой рекламы. Подобным же образом и слуховой нерв страдает от трескучих, щелкающих, тремолирующих звуков, если частота следования их достигает определенной степени. Если она заметно превзойдена,

то ухо уже не в состоянии различить отдельные толчки, и неприятное чувство ослабевает. Если, с другой стороны, биения становятся очень медленными, то слуху легче следовать за повышением и понижением силы звука; в тот момент, когда интервал между двумя постепенно сближающимися тонами переходит в созвучие, и биения становятся все медленнее, теряясь в бесконечности, слух испытывает облегчение, а иногда даже своего рода наслаждение.

Такие же явления, как и при созвучии двух тонов, происходят согласно изложенному и при совпадении обертонов двух консонирующих звучаний. Поэтому неприятное чувство при слушании диссонирующего интервала и удовольствие при слушании консонирующего интервала могут быть также приведены в связь с появлением и исчезновением неприятно действующих биений. Согласно этой точке зрения, гармония, основанная на консонансе, лишается своего мистического характера, и особый характер соответствующего слухового ощущения сводится к физико-физиологическим процессам.

§ 47. Можно получить еще одно довольно простое решение волнового уравнения (222), если предположить, что потенциал смещения зависит, кроме времени, только от расстояния

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

между точкой воздействия (x, y, z) и началом координат. Тогда согласно [*1* (110)]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \frac{x^2}{r^3}.$$

Аналогичные выражения получаются для $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$. Поэтому $\Delta\varphi$ преобразуется следующим образом:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi), \qquad 227$$

а волновое уравнение (222) можно написать в таком виде:

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}. \qquad 228$$

Последнее уравнение имеет такой же вид, как и (155) и поэтому имеет общее решение, согласно (157):

$$r\varphi = f(r+at) + g(r-at). \tag{229}$$

Это — две *шаровые волны* (сферические волны), из которых одна распространяется внутрь, а другая — наружу, обе со скоростью a. Но, в отличие от плоских волн, здесь распространяется неизменным не потенциал смещения, а произведение его на r.

Рассмотрим сперва шаровую волну, распространяющуюся наружу, т. е. положим $f=0$. Тогда

$$\varphi = \frac{1}{r}\cdot g(r-at). \tag{230}$$

Для того чтобы волновая функция g была конечной необходимо, чтобы, при $r=0$, φ было бесконечно велико. Стало быть, начало координат есть особенная точка этой волны. Поэтому при реализации волны начало координат должно быть исключено из области колеблющейся жидкости (воздуха). В действительности, в этом месте находится источник звука. Можно представить себе, например, что источником звука служит шар, окруженный со всех сторон жидкостью и сделанный из какого-нибудь упругого твердого вещества. Под влиянием какого-нибудь внутреннего механизма объем этого шара попеременно увеличивается и уменьшается по какому-нибудь закону, — так называемый „пульсирующий" шар. Последний передает свои колебания непосредственно примыкающей к нему жидкости. Это пограничное условие определяет вид волновой функции g. С другой стороны, величина смещения $\boldsymbol{q}$ на границе получается из потенциала смещения, на основании (218) и (230). Смещение происходит в радиальном направлении, поэтому такие шаровые волны продольны. Величина смещения убывает с увеличением расстояния от источника звука.

Можно обобщить частное решение (230) волнового уравнения (222), сложив несколько таких решений. Потенциал смещения выразится в виде:

$$\varphi = \frac{1}{r_1}g_1(r_1-at) + \frac{1}{r_2}g_2(r_2-at) + \ldots \tag{231}$$

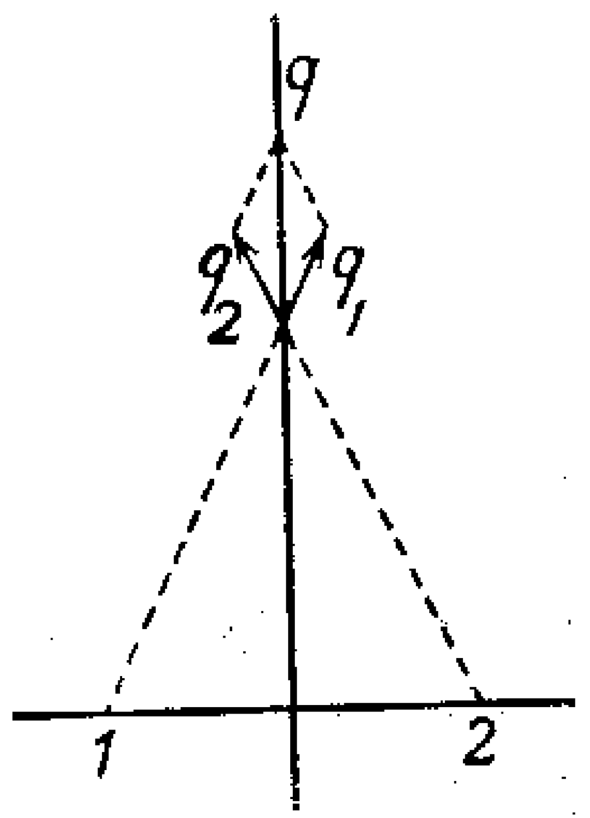
где $r_1, r_2, \ldots$ — расстояния точки воздействия от некоторых неподвижных центров; $g_1, g_2, \ldots$ — некоторые функции одного аргумента. Это движение жидкости вызывается взаимодействием

нескольких шаров, пульсирующих в ней по любым законам, если шары так далеки друг от друга, что можно пренебречь возмущениями, которые претерпевают пограничные условия на поверхности какого-либо шара под влиянием волны, исходящей из других шаров.

Возьмем в частном случае два шара и положим $g_1 = g_2 = g$. Тогда получится:

$$\varphi = \frac{1}{r_1}g(r_1-at) + \frac{1}{r_2}g(r_2-at). \tag{232}$$

Этот случай может быть осуществлен также другим интересным образом. Проведем плоскость симметрии обоих центров $r_1=0$ и $r_2=0$, т. е. такую плоскость, которая перпендикулярна к прямой, соединяющей оба центра, в ее середине. Тогда для каждой точки воздействия, лежащей в этой плоскости симметрии, смещение $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2$ произойдет в этой же плоскости, так как равнодействующая обоих равных друг другу радиальных смещений $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ делит пополам угол между ними (черт. 9). Если в плоскости симметрии поместить твердую стену, то это нисколько не нарушит процесса движения, так как предельное условие для твердой стены, чтобы компонент смещения в направлении нормали к стене обратился в нуль, уже осуществлено повсюду. Следовательно, движение будет происходить совершенно одинаковым образом, если поместить твердую стену и вовсе удалить половину пространства с источником звука 2. Или, другими словами: твердая плоская стена, противопоставленная источнику звука, действует совершенно так же, как и зеркальное изображение источника звука относительно стены.



Черт. 9.

Теперь рассмотрим шаровую волну, распространяющуюся внутрь и представленную функцией $f(r+at)$ в уравнении (229). Ее можно представить себе осуществленной при помощи большого тонкостенного полого шара, наполненного воздухом, который попеременно сжимается и растягивается каким-либо внешним механизмом. Все подробности процесса однозначно определены уравнением (229) в связи с начальными и пограничными условиями. Особый интерес представляет здесь такой вопрос: что произойдет с какой-нибудь заданной распространяющейся внутрь шаровой волной, когда она достигнет центра шара $r=0$? Чтобы ответить на этот вопрос, допустим, что в начальный момент, $t=0$, существует только одна идущая внутрь волна $f(r)$ произвольного заданного вида. Так как центр шара находится в жидкости, то для него также имеет место уравнение (229). Так как в природе не встречается бесконечно больших смещений, то при $r=0$ потенциал смещения также конечен, и мы имеем во всякий момент:

$$0=f(at)+g(-at),$$

или, если написать $at-r$ вместо at:

$$0=f(at-r)+g(r-at).$$

Подставив это выражение в (229), получим:

$$r\varphi=f(at+r)-f(at-r). \tag{233}$$

Таким образом в центре шара происходит своего рода отражение шаровой волны, подобно тому явлению, которое мы рассмотрели в § 37 в связи с уравнением (168). Волна, распространяющаяся внутрь, превращается в противоположную волну, распространяющуюся наружу, или, как можно выразиться, шаровая волна проходит сама сквозь себя в центре шара. Уравнение (233) не находится в противоречии со сделанным нами допущением, что в начале движения имеется только одна волна, распространяющаяся внутрь. Ибо функция $f(r)$, которая изображает вид волны при $t=0$, определена только для положительных значений r, между тем, как в уравнении (233) рассматриваются также отрицательные значения аргумента $at-r$. Поэтому достаточно лишь допустить, что функция f равна нулю при всех отрицательных значениях аргумента, и мы можем однозначно вывести из уравнения (233) весь ход движения для данного случая.

Действительно, тогда при $t=0$:

$$r\varphi=f(r),$$

и волна, распространяющаяся наружу, также исчезает при всех значениях $t<\frac{r}{a}$. Это значит, что отраженная волна попадает на точку воздействия r лишь после того, как пройдет путь от центра шара до точки воздействия, со скоростью a.

§ 48. Теория шаровых волн дает нам еще одно решение общего волнового уравнения (222) для неограниченной со всех сторон жидкости. Проинтегрируем сперва это уравнение по некоторому объему жидкости, обозначив элемент объема через $d\tau$. Тогда получим, принимая во внимание преобразование (82):

$$\int\ddot{\varphi}\,d\tau=-a^2\int\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\cdot d\sigma. \tag{234}$$

Возьмем в качестве области интегрирования шар с центром в начале координат и радиусом r, и введем полярные координаты ρ, ϑ, ϕ (I (92)). Тогда, согласно [*1* (93)]:

$$d\tau=\rho^2\,d\rho\,d\Omega, \tag{235}$$

причем для сокращения мы обозначили

$$\sin\vartheta\cdot d\vartheta\cdot d\phi=d\Omega, \tag{236}$$

$d\Omega$ — „телесный угол“ конуса, определенного диференциалами $d\vartheta$ и $d\phi$. Он измеряется участком поверхности, который вырезывается конусом из поверхности шара с центром в начале координат и радиусом равным единице. Далее,

$$d\sigma=r^2\cdot d\Omega, \qquad \nu=-\rho. \tag{237}$$

Следовательно,

$$\iint\ddot{\varphi}\rho^2d\rho d\Omega=a^2r^2\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_r d\Omega. \tag{238}$$

Интегрирование по Ω производится в обеих частях уравнения от $\vartheta=0$ до $\vartheta=\pi$ и от $\phi=0$ до $\phi=2\pi$, кроме того, в левой части по ρ от 0 до r. Значок ρ в правой части показывает, что после диференцирования нужно подставить $\rho=r$.

Введем теперь *среднее значение* потенциала смещения на определенном расстоянии ρ от начала, т. е. сумму произведений значений φ во всех элементах поверхности шара на площади этих элементов, разделенную на сумму всех элементов площади, т. е. на поверхность всего шара:

$$\frac{1}{4\pi\rho^2}\int\varphi\rho^2d\Omega=\frac{1}{4\pi}\int\varphi d\Omega=\bar{\varphi}. \tag{239}$$

Тогда можно написать предыдущее уравнение в таком виде:

$$\int_0^r \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial t^2} \rho^2 d\rho = a^2 r^2 \left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \rho}\right)_r,$$

Если продиференцировать его по r, то получится:

$$r^2 \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial r}\right) = a^2 \left(2r \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial r^2}\right),$$

где нужно полагать, что в выражение $\overline{\varphi}$ подставлено r вместо ρ. Но это уравнение одинаково с волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 (r\overline{\varphi})}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\overline{\varphi})}{\partial r^2} \qquad 240$$

и дает нам такую теорему: при любом колебательном процессе в жидкости законы шаровых волн имеют место для средних значений потенциала смещения, отнесенных к поверхности шара, описанного около любой точки жидкости, принятой за начало. В частности, для шаровых волн $\overline{\varphi} = \varphi$, и (240) совпадает с (228).

Интересное следствие получается из (240), если применить его к предельному случаю несжимаемой жидкости, для которой, согласно (215), скорость распространения a становится равной ∞. Тогда полное уравнение (222) переходит в уравнение $\Delta\varphi = 0$, т. е. в уравнение *Лапласа* [*1* (129)], а уравнение (240) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 (r\overline{\varphi})}{\partial r^2} = 0,$$

общее решение которого равно:

$$r\overline{\varphi} = A + Br,$$

или

$$\overline{\varphi} = \frac{A}{r} + B. \qquad 241$$

Так как, при $r = 0$, $\overline{\varphi}$ конечно, то $A = 0$, и

$$\overline{\varphi} = B. \qquad 242$$

Это значит, что функция φ, которая удовлетворяет уравнению *Лапласа*, например, потенциальная функция тяготеющих масс вне этих масс, обладает таким свойством, что средние значения ее на поверхностях ряда концентрических шаров равны между собою, стало быть, равны значению в центре. Отсюда следует также, что функция не может иметь абсолютного максимума или абсолютного минимума ни в одной точке пространства, а на основании (*1*, § 41) вытекает, что вне системы тяготеющих масс никогда не может существовать места абсолютно устойчивого или абсолютно неустойчивого равновесия.

§ 49. Мы можем пользоваться законом, выраженным в уравнении (240), для того чтобы вычислить по заданному начальному состоянию, потенциал смещения какой-нибудь массы жидкости, занимающей достаточно большой объем, в любой точке жидкости, принятой за начало координат, для любого момента времени.

Прежде всего, из (240) следует общий интеграл:

$$r\overline{\varphi} = f(r + at) + g(r - at),$$

или, так как $\overline{\varphi}$ остается конечным при $r = 0$, совершенно подобно (233) для шаровых волн:

$$r\overline{\varphi} = f(at + r) - f(at - r). \qquad 243$$

Вид функции f получается однозначно из условий начального состояния. Для характеристики его мы можем допустить, что при $t = 0$ потенциал смещения φ, а также его производная по времени $\dot{\varphi}$ даны как функции места. Ибо φ определяется, кроме несущественной аддитивной постоянной, по смещению q из (218), а $\dot{\varphi}$ определяется по скорости $\dot{q}$ из (219).

Поэтому напишем:

$$\varphi_0 = F(r, \vartheta, \psi), \quad \dot{\varphi}_0 = \Phi(r, \vartheta, \psi), \qquad 244$$

полагая, что F и Φ даны. Тогда нужно считать заданными функциями r также:

$$\overline{\varphi}_0 = \overline{F}(r), \quad \overline{\dot{\varphi}}_0 = \overline{\Phi}(r). \qquad 245$$

С другой стороны, продиференцировав (243) по t, получим:

$$r\overline{\dot{\varphi}} = af'(at + r) - af'(at - r). \qquad 246$$

Следовательно при $t=0$, на основании (243), (246) и (245):

$$r\overline{F} = f(r) - f(-r), \tag{247}$$

$$r\overline{\Phi} = af'(r) - af'(-r). \tag{248}$$

Интегрирование последнего уравнения дает:

$$\frac{1}{a}\int r\overline{\Phi}\,dr = f(r) + f(-r).$$

Отсюда, в связи с (247):

$$f(\pm r) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a}\int r\overline{\Phi}\,dr \pm r\overline{F}\right\}. \tag{249}$$

Таким образом функция f определена для всех положительных и отрицательных значений аргумента, а вместе с тем, согласно (243), $\overline{\varphi}$ непосредственно дано как функция r и t. Аддитивная постоянная в интеграле совершенно произвольна и не оказывает влияния на значение $\overline{\varphi}$.

Из выражения $\overline{\varphi}$ при произвольном r и произвольном t можно вывести также значение $\varphi_t(0)$ при $r=0$. Так как, согласно (243),

$$\varphi_t(0) = \overline{\varphi}(0) = \lim_{r=0}\frac{f(at+r) - f(at-r)}{r} = 2f'(at),$$

и, согласно (249),

$$f'(\pm r) = \frac{1}{2}\left\{\frac{r}{a}\overline{\Phi}(r) \pm \frac{d[r\overline{F}(r)]}{dr}\right\},$$

то для всех положительных значений t следует:

$$\varphi_t(0) = t\overline{\Phi}(at) + \frac{d[t\overline{F}(at)]}{dt}. \tag{250}$$

Это уравнение дает потенциал смещения φ в какой-нибудь точке жидкости в какой-нибудь момент t, в зависимости от значений (244) для φ и $\dot\varphi$ при $t=0$ на поверхности шара, описанного вокруг точки радиусом at. Например, если колебания вызываются возмущением равновесия, которое сначала ограничено замкнутой областью жидкости, „очагом возмущения“, то какая-нибудь точка, находящаяся вне очага возмущения, подвергнется

волне возмущения лишь по истечении промежутка времени, необходимого для того, чтобы расстояние до ближайшей точки очага возмущении могло быть пройдено со скоростью a. С другой стороны, движение прекратится вполне лишь по истечении промежутка времени, в течение которого может быть пройдено со скоростью a расстояние до самой отдаленной точки очага возмущения. То же самое относится и к точке, лежащей внутри очага возмущения. Итак, начальное возмущение распространяется во все стороны от очага с начальной скоростью a, а внутри жидкости образуется непрерывно увеличивающаяся область покоя, начиная с той точки, расстояние которой от наиболее удаленной точки очага возмущения наименьшее.

Уравнение (250) относится не только к потенциалу смещения, но и к каждому компоненту смещения или скорости, а также к объемному расширению и давлению, и вообще к каждой величине, которая удовлетворяет волновому уравнению (222).

§ 50. В заключение исследуем влияние, которое оказывает *движение* источника звука или наблюдателя на высоту слышимого тона. Существование такого влияния следует из того, что высота тона обусловлена числом волн, попадающих в ухо в течение единицы времени, а это число зависит от того, остается ли неизменным расстояние между наблюдателем и источником звука, или изменяется. Но было бы неправильно предположить, что высота тона зависит только от относительного движения источника звука и наблюдателя. Положим, например, что источник звука неподвижен, а наблюдатель удаляется от него со скоростью звука; тогда наблюдатель вовсе ничего не услышит, так как звуковые волны не достигают его. Но зато звуковые волны всегда достигнут наблюдателя, если он сам неподвижен, а источник звука удаляется от него с любой скоростью. Основание для этого различия состоит не в том, что оно имеет какое-либо отношение к абсолютному движению, — „абсолютное“ движение вообще не имеет смысла, — а в следующем обстоятельстве: при распространении звука играет существенную роль та среда, в которой звук распространяется, например, воздух, и поэтому необходимо принимать во внимание движение относительно воздуха. Правила, которые определяют это явление, обычно формулируются под названием „принципа *Допплера*“, хотя мы имеем здесь дело, очевидно, не с принципом, а просто с элементарными правилами кинематики.

Допустим, что источник звука Q, который испускает в единицу времени ν_0 колебаний и наблюдатель B оба движутся вдоль оси x, первый со скоростью q_0, второй — со скоростью q относительно воздуха, который мы считаем неподвижным. Источник звука находится с положительной стороны (справа) от B. Тогда в случае $q > q_0$ наблюдатель приближается к источнику звука. Каково будет число колебаний тона, слышимого теперь наблюдателем?

Черт. 10.

Рассмотрим сперва частный случай, когда источник Q неподвижен, а наблюдатель B приближается к нему со скоростью q. В единицу времени наблюдатель проходит расстояние $BB' = q$. Если бы он оставался в B, то за это время до него дошло бы ν_0 волн. Но так как он двигался навстречу волнам, то, кроме этих ν_0 волн до него дошли также все те волны, которые укладываются на расстоянии BB', т. е. $\frac{q}{\lambda_0}$, или, согласно (189), $\frac{q\nu_0}{a}$ волн. Следовательно, число колебаний слышимого тона равно

$$\nu_0\left(1 + \frac{q}{a}\right) = \frac{a+q}{\lambda_0} \qquad 251$$

Теперь сделаем более общее допущение, что источник звука Q также движется направо со скоростью q_0. Тогда источник придет по истечении единицы времени в точку Q' причем $QQ' = q_0$. Из звуковых волн, которые вышли в течение этого времени от источника по направлению к B, первая волна прошла расстояние a от Q, а последняя находится в точке Q'. Все это расстояние $a + q_0$ равномерно заполнено волнами. Так как имеется всего ν_0 волн, то длина волны равна $\frac{a+q_0}{\nu_0} = \lambda$. Если подставить эту длину волны λ в уравнение (251) вместо λ_0, то мы получим число колебаний слышимого тона:

$$\nu = \frac{a+q}{a+q_0}\cdot\nu_0. \qquad 252$$

Полученная формула представляет собою общее выражение принципа *Допплера* для рассмотренного случая. Если, например, наблюдатель и источник звука движутся с одинаковой скоростью, так что расстояние между ними остается постоянным, то $\nu = \nu_0$, и движение не оказывает влияния на высоту тона. Но если

расстояние между наблюдателем и источником изменяется, то получаются различные результаты в зависимости от того, неподвижен ли наблюдатель или источник. Если наблюдатель удаляется от неподвижного источника со скоростью звука, то $q = -a$, и $q_0 = 0$, следовательно $\nu = 0$. Если же источник удаляется от неподвижного наблюдателя со скоростью звука, то $q_0 = a$, $q = 0$, следовательно $\nu = \frac{\nu_0}{2}$, в согласии со сказанным выше.

Только в том случае, если q и q_0 малы по сравнению с a, то в первом приближении имеем:

$$\nu = \left(1 + \frac{q - q_0}{a}\right)\nu_0. \qquad 253$$

Тогда уже играет роль только разность скоростей, т. е. относительное движение источника звука и наблюдателя.