ЧАСТЬ ВТОРАЯ

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

*

Глава первая

ТВЕРДЫЕ ТЕЛА. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 21. Как мы видели в первой части, для однозначной формулировки законов движения деформируемых тел нам остается только узнать взаимоотношения между тензором деформации и тензором давления. Чтобы установить это взаимоотношение, введем прежде всего гипотезу, которой мы будем все время придерживаться в дальнейшем: что давление всегда и повсюду зависит исключительно только от деформации в данный момент и в данном месте, — и обратно. Это допущение вовсе не всегда выполняется в природе: строго говоря, все твердые тела проявляют в большей или меньшей степени зависимость деформации не только от мгновенных сил, но и от той обработки, которой они подвергались ранее, а также от температуры, которая может вообще изменяться совершенно независимо от давления и деформации. Но если и поскольку тело удовлетворяет введенной нами гипотезе, мы называем его „совершенно упругим“.

Совершенно упругое тело должно, конечно, удовлетворять и такому условию: тело, которое в течение некоторого времени подвергалось каким-либо деформирующим силам, должно после прекращения этих сил перейти в то же самое состояние равновесия, которое оно занимало до приложения этих сил. Ибо нулевому давлению должна однозначно соответствовать нулевая деформация. Поэтому, если тело обнаруживает явление упругого последействия, т. е. после прекращения деформирующих сил лишь постепенно возвращается к первоначальному состоянию равновесия, то такое тело не является совершенно упругим.

Зато самая величина деформации, вызванной определенным давлением, не играет никакой роли в вопросе о совершенной упругости. В этом отношении научная терминология несколько расходится с житейским словоупотреблением, так как в обыденной жизни понятие о выдающейся упругости связано с понятием о значительной деформируемости и, например, резина считается в этом смысле более упругой, чем стекло. Напротив в научном понимании стекло более упруго, чем резина, так как далеко не в такой степени обнаруживает свойство упругого последействия.

Опыт показывает, что всякое тело можно рассматривать как совершенно упругое, если деформация его не превосходит определенной величины, которая называется „пределом совершенной упругости“. Поэтому наши дальнейшие исследования относятся ко всем телам, но только к таким деформациям, которые настолько малы, что лежат внутри предела упругости. Чтобы упростить математическую разработку, мы допустим, что деформации бесконечно малы.

§ 22. Тело, в котором все направления физически равнозначны, называется „изотропным“, а тело, в котором какие-либо направления физически отличаются от других, называется „анизотропным“. Для изотропных тел взаимоотношение между деформацией и давлением получается сразу: так как давление полностью определено деформацией, то при всякой деформации главные оси тензора давления должны совпадать с главными осями тензора деформации. Для анизотропных тел этого заключения нельзя вывести, так как здесь играют роль определенные преимущественные направления тела. Но так как мы желаем распространить наши дальнейшие соображения также и на кристаллы, т. е. на тела анизотропные, то мы должны выбрать более общий путь.

Тензор деформации характеризуется шестью компонентами x_x, x_y ... (§ 12), а тензор давления — шестью компонентами X_x, X_y ... (§ 19). Последние величины суть определенные функции первых величин. Так как компоненты деформации бесконечно малы, то можно при разложении в ряд Тейлора остановиться на первых членах. В результате получится, что компоненты давления суть *линейные* функции компонентов деформации, и притом, можно добавить, *однородные* функции, так как мы отсчитываем деформации от того состояния, которое соответствует нулевому давлению, т. е. от „естественного“ состояния тела. Тогда компоненты давления обращаются в нуль одновременно с компонентами деформации. Следовательно, общее выражение для зависимости давления от деформации может быть написано в виде шести уравнений:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y, \\ Y_y &= a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_z + a_{24}y_z + a_{25}z_x + a_{26}x_y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad 88$$

В этих уравнениях 36 постоянных a определяются материальными свойствами тела. Значки при постоянных составляются по такому правилу: цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 сопоставлены по порядку с компонентами деформации x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y и с компонентами давления X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y. Если подставить выражения (88) в уравнения движения (83), то получатся общие законы движения.

Остается еще вопрос, являются ли постоянные a совершенно независимыми друг от друга или же между ними существуют определенные соотношения, введение которых упростило бы уравнения (88). Непосредственно очевидно, что при существовании симметрии какого-либо рода в кристалле число постоянных становится меньше 36 и выражения (88) сводятся к более простым частным случаям. Но пока мы еще оставим общий случай совершенно несимметричного кристалла и подчиним его условию, которого мы до сих пор еще не вводили, но о котором мы знаем, что оно постоянно выполняется в природе. Это условие — закон сохранения энергии. Мы увидим, что введение этого закона имеет следствием общее значительное упрощение системы уравнений (88).

§ 23. Согласно принципу сохранения энергии [*1*, (393)], изменение полной энергии $L+U$ материальной системы, происшедшее в течение элемента времени dt, равно работе, совершенной за это время над системой внешними силами:

$$d(L+U) = A. \qquad 89$$

Это равенство мы применим к рассматриваемому случаю. При этом, как и в § 15, мы выделим произвольную часть всего тела и будем рассматривать ее как материальную систему.

Первая часть энергии, живая сила L, равна сумме живых сил всех элементов массы $kd\tau$ рассматриваемой части тела. Следовательно,

$$L = \frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right\} kd\tau, \qquad 90$$

где u, v, w — компоненты смещения материальной точки из ее естественного положения, а интегрирование распространяется на рассматриваемую часть тела.

О второй части энергии, потенциальной энергии U, мы знаем, что она складывается из потенциальных энергий отдельных элементов массы и поэтому выражается в виде

$$U = \int F d\tau, \qquad 91$$

где функция F, потенциальная энергия единицы объема, зависит в виду совершенной упругости тел, только от состояния деформации соответствующего элемента объема, т. е. от шести компонентов деформации, x_x, y_y, ... Так как речь идет всегда только об изменениях потенциальной энергии, а не об ее абсолютном значении, то мы можем, не ограничивая общности задачи, положить для естественного, недеформированного состояния тела $F=0$.

Наконец, что касается работы внешних сил, то последняя состоит, по § 14, из работы массовых сил, которые действуют на все элементы рассматриваемой части тела и, кроме того, из работы сил давления, которые действуют извне на точки поверхности рассматриваемой части тела. Стало быть:

$$A = \int (Xdu + Ydv + Zdw)\, kd\tau + \int (X_\nu du + Y_\nu dv + Z_\nu dw)\, d\sigma, \qquad 92$$

где первый интеграл берется по объему, а второй интеграл — по поверхности части тела.

Теперь, чтобы осуществить требование (89) принципа сохранения энергии, составим прежде всего выражение для dL. Так как масса $kd\tau$ не зависит от времени, то мы можем непосредственно вывести из (90):

$$dL = \int\left(\frac{d^2u}{dt^2}\, du + \frac{d^2v}{dt^2}\, dv + \frac{d^2w}{dt^2}\, dw\right) kd\tau,$$

или, если подставить значения компонентов ускорения из уравнений движения (83),

$$\begin{aligned} dL = \int (Xdu + Ydv + Zdw)\, kd\tau \,- \\ -\int d\tau \cdot \left\{\begin{aligned} & du\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + \\ & + dv\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) + \\ & + dw\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial Z}\right). \end{aligned}\right\} \end{aligned} \qquad 93$$

Если теперь воспользоваться формулой преобразования (79), применив ее к каждому из девяти объемных интегралов, на которые распадается второй объемный интеграл, то мы получим, принимая во внимание (74),

$$dL=\int(X du+Y dv+Z dw)\,k\,d\tau+$$

$$+\int d\tau\cdot\left\{\begin{array}{l} X_x\dfrac{\partial du}{\partial x}+X_y\dfrac{\partial du}{\partial y}+X_z\dfrac{\partial du}{\partial z}+\\ +Y_z\dfrac{\partial dv}{\partial x}+Y_y\dfrac{\partial dv}{\partial y}+Y_z\dfrac{\partial dv}{\partial z}+\\ +Z_x\dfrac{\partial dw}{\partial x}+Z_y\dfrac{\partial dw}{\partial y}+Z_z\dfrac{\partial dw}{\partial z}+\end{array}\right\}+ \qquad 94$$

$$+\int d\sigma\cdot(X_\nu du+Y_\nu dv+Z_\nu dw).$$

Если подставить это выражение для dL в уравнение энергии (89), то последнее значительно упрощается, так как член, зависящий от работы внешних сил A и выражающийся формулой (92), сокращается с равным ему членом в левой части. Тогда в уравнении энергии останется только потенциальная энергия dU и второй объемный интеграл из (94). Последний можно еще более упростить. Прежде всего, нужно принять во внимание, что в выражениях $\frac{\partial du}{\partial x}$ и т. д. знак ∂ относится к диференцированию по пространственным координатам, а знак d — к диференцированию по времени, и поэтому оба действия совершенно независимы друг от друга. Отсюда имеем

$$\frac{\partial du}{\partial x}=d\,\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial du}{\partial y}=d\,\frac{\partial u}{\partial y},\ \text{и т. д.}$$

Если далее воспользоваться соотношениями (84) и сокращенными обозначениями (60), то уравнение энергии представится окончательно в таком виде:

$$dU+\int(X_x dx_x+Y_y dy_y+Z_z dz_z+Y_z dy_z+Z_x dz_x+Z_y dx_y)\,d\tau=0. \qquad 95$$

Здесь можно, согласно (91), написать для изменения потенциальной энергии:

$$dU=\int dF\cdot d\tau. \qquad 96$$

Строго говоря, следовало бы добавить сюда еще один член, который зависит от временного изменения величины элемента объема $d\tau$, а именно член $\int F d(d\tau)$, где первое d соответствует диференцированию по времени, а второе d — диференцированию по объему. Но этим членом нужно пренебречь на том основании, что при бесконечно малых деформациях временные изменения элемента объема, даже для конечных промежутков времени бесконечно малы по сравнению с величиной элемента объема, между тем как временные изменения потенциальной энергии F того же порядка величины, как и величина этой энергии.

Если воспользоваться (96), то можно написать выражение (95) в виде одного объемного интеграла, взятого по объему рассматриваемой части тела. Если взять часть тела бесконечно малую, в виде одного элемента объема $d\tau$, то можно отбросить знак интеграла и мы получим для каждого отдельного элемента тела:

$$-dF=X_x dx_x+Y_y dy_y+Z_z dz_z+Y_z dy_z+Z_x dz_x+X_y dx_y.$$

С другой стороны, так как F зависит от шести компонентов деформации, то мы имеем:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x_x}dx_x+\frac{\partial F}{\partial y_y}dy_y+\frac{\partial F}{\partial z_z}dz_z+\frac{\partial F}{\partial y_z}dy_z+\frac{\partial F}{\partial z_x}dz_x+\frac{\partial F}{\partial x_y}dx_y,$$

и так как компоненты деформации и их изменения не зависят друг от друга, то вообще:

$$\left.\begin{array}{lll} X_x=-\dfrac{\partial F}{\partial x_x}, & Y_y=-\dfrac{\partial F}{\partial y_y}, & Z_z=-\dfrac{\partial F}{\partial z_z},\\ Y_z=-\dfrac{\partial F}{\partial y_z}, & Z_x=-\dfrac{\partial F}{\partial z_x}, & X_y=-\dfrac{\partial F}{\partial x_y}. \end{array}\right\} \qquad 97$$

Это значит, что *компоненты тензора давления равны взятым с обратным знаком производным единственной функции компонентов деформации по этим компонентам*, совершенно подобно тому, как при центральных силах компоненты какой-нибудь силы равны взятым с обратным знаком производным единственной функции координат, — потенциала, — по этим координатам [*1* (107)]. Поэтому потенциальную энергию единицы объема F называют также *упругим потенциалом* (потенциалом упругих сил).

Согласно (88), упругий потенциал есть квадратическая функция компонентов деформации и, кроме того, функция однородная, так как, согласно сделанному нами выше допущению, не только линейные члены, но также и абсолютный член обращаются в нуль.

§ 24. Согласно полученным нами результатам, общее выражение упругого потенциала имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} F = \frac{a_{11}}{2} x_x^2 + a_{12}x_xy_y + a_{13}x_xz_z + a_{14}x_xy_z + a_{15}x_xz_x + a_{16}x_xx_y + \\ + \frac{a_{22}}{2} y_y^2 + a_{23}y_yz_z + a_{24}y_yy_z + a_{25}y_yz_x + a_{26}y_yx_y + \\ + \frac{a_{33}}{2} z_z^2 + a_{34}z_zy_z + a_{35}z_zz_x + a_{36}z_zx_y + \\ + \frac{a_{44}}{2} y_z^2 + a_{45}y_zz_x + a_{46}y_zx_y + \\ + \frac{a_{55}}{2} z_x^2 + a_{56}z_xx_y + \\ + \frac{a_{66}}{2} x_y^2. \end{aligned}\right\} \quad 98$$

Отсюда получаются, по (97), шесть компонентов давления в виде линейных однородных функций, от компонентов деформации, совершенно так, как в (88), с тем лишь различием, что теперь $a_{12} = a_{21}$ и т. д. Другими словами: существование упругого потенциала равнозначно условию, чтобы в постоянных упругости a_{ij} значки i и j можно было переставлять одни на место другого. Отсюда получается значительное упрощение общей теории, рассмотренной в § 22: упругое состояние тела зависит уже не от 36, а от 21 постоянной. Об этих постоянных можно заранее высказать еще одно определенное суждение, не входя в рассмотрение частных свойств тела: постоянные удовлетворяют условию, чтобы потенциал F был положительным при всех обстоятельствах. Дело в том, что упругий потенциал есть потенциальная энергия деформации, а последняя, при переходе тела из деформированного состояния в естественное, т. е. при переходе потенциала от значения F к значению нуль, обращается в кинетическую, т. е. положительную, энергию, откуда неизбежно следует, что она сама должна быть положительной. Это рассуждение представляет собою приложение общего закона, что устойчивому состоянию равновесия всегда соответствует минимум потенциальной энергии (*1*, § 105). Так как естественное

недеформированное состояние тела представляет собою устойчивое состояние равновесия, то потенциальная энергия в каждом деформированном состоянии больше, чем в естественном состоянии, т. е. больше нуля.

Отсюда можно дальше заключить, что все шесть постоянных, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{66}$, положительны. Если бы, например, a_{11} было отрицательно, то достаточно было бы положить, что x_x не равно нулю, а все остальные компоненты деформации равны нулю, и получился бы отрицательный потенциал. Но и остальные постоянные a должны удовлетворять некоторым неравенствам, которых мы здесь формулировать не будем.

§ 25. На практике обычно приходится по данным внешним силам давления определять произведенное ими изменение тела. Тогда, прежде всего, возникает важный вопрос об *однозначности* решения этой задачи, т. е. вопрос, соответствует ли данным внешним силам давления вполне определенное изменение тела, или же уравнениям задачи удовлетворяют несколько различных изменений. Исследованием этого вопроса мы и займемся. При этом ограничимся случаем равновесия.

Положим, что нам даны давления, действующие извне на поверхность тела, X_ν, Y_ν, Z_ν, а также массовые силы X, Y, Z. Допустим, кроме того, что найдены три функции u, v, w, зависящие от x, y, z, такие, которые можно рассматривать как смещения точек тела x, y, z и которые удовлетворяют всем условиям равновесия, т. е. уравнениям (83) внутри тела:

$$\left.\begin{aligned} Xk &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ Yk &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ Zk &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad 99$$

и уравнениям (74) на поверхности. Во всех этих уравнениях нужно подставить вместо компонентов давления X_x, ... те значения, которые получаются из выражений для смещений u, v, w, если сперва составить, по (60), соответствующие им компоненты деформации, а затем, по (97), компоненты давления.

Положим далее, что существуют еще три другие функции u', v', w' от x, y, z, отличные от предыдущих и также удовлетворяющие условиям равновесия. В таком случае уравнения (99) и (74) действительны также и для тех компонентов давления X_x', X_y', .., которые получаются, если вычислить компоненты деформации x_x', y_y', …, по (60), из u', v', w' вместо u, v, w и подставить эти значения в (97).

Рассмотрим теперь функции

$$u_0 = u' - u, \quad v_0 = v' - v, \quad w_0 = w' - w, \tag{100}$$

зависящие от x, y, z, и исследуем то изменение тела, которое они представляют собою, если рассматривать их как компоненты смещения. Прежде всего отсюда получатся, по (60), компоненты деформации:

$$x_{x_0} = x_x' - x_x, \quad x_{y_0} = x_y' - x_y, \; \dots \tag{101}$$

затем, по (97), компоненты давления:

$$X_{x_0} = X_x' - X_x, \quad X_{y_0} = X_y' - X_y, \; \dots \tag{102}$$

С другой стороны, если вычесть уравнения (99) для компонентов давления без штрихов из таких же уравнений (99) для компонентов давления со штрихами и принять во внимание, что данные массовые силы, X, Y, Z, одинаковы в обеих системах уравнений, то получится:

$$0 = \frac{\partial X_{x_0}}{\partial x} + \frac{\partial X_{y_0}}{\partial y} + \frac{\partial X_{z_0}}{\partial z}, \; \dots \tag{103}$$

Наконец, для поверхности тела, вычтя уравнения (74) без штрихов из уравнений со штрихами, получим:

$$0 = X_{x_0} \cos(\nu x) + X_{y_0} \cos(\nu y) + X_{z_0} \cos(\nu z), \; \dots \tag{104}$$

так как заданные поверхностные давления X_ν, Y_ν, Z_ν всякий раз одинаковы.

Здесь могло бы возникнуть сомнение в том, можно ли при таком вычислении считать одинаковыми косинусы направлений в обеих системах уравнений, так как форма поверхности тела ведь различна при обоих изменениях. Однако легко убедиться, что допущенная таким образом ошибка — меньшего порядка величины. Дело в том, что косинусы направлений нормали к элементу поверхности конечны, поэтому их значения отклоняются при каком-нибудь бесконечно малом изменении тела лишь на бесконечно малую величину от тех значений, которые они имели при естественном состоянии тела, между тем как компоненты давления X_x, … отличаются при обоих изменениях на такие

величины, которые заметны по сравнению со значениями самих компонентов давления.

Уравнения (103) и (104) имеют очень наглядное физическое истолкование. Они выражают условия для такого изменения u_0, v_0, w_0, при котором внешние силы не действуют ни на элементы массы ни на поверхность тела. Таким образом поставленный выше вопрос об однозначности решения для u, v, w, при заданных внешних силах, сводится к более простому вопросу, возможно ли при отсутствии всякого внешнего воздействия такое изменение тела u_0, v_0, w_0, которое было бы отлично от нуля.

Ответ на этот вопрос можно найти при помощи следующего рассуждения. Если умножить три уравнения (103) соответственно на u_0, v_0, w_0, сложить между собой, умножить на элемент объема $d\tau$ и проинтегрировать по объему всего тела, то получится уравнение с девятью объемными интегралами, каждый из которых можно преобразовать, на основании (79), следующим образом:

$$\int u_0 \frac{\partial X_{x_0}}{\partial x} d\tau = -\int \frac{\partial u_0}{\partial x} X_{x_0} d\tau - \int u_0 X_{x_0} \cos(\nu x) d\sigma.$$

Поэтому уравнение преобразуется, принимая во внимание (104), в следующее:

$$\int (X_{x_0} x_{x_0} + Y_{y_0} y_{y_0} + Z_{z_0} z_{z_0} + Y_{z_0} y_{z_0} + Z_{x_0} z_{x_0} + X_{y_0} x_{y_0}) d\tau = 0.$$

или же, если подставить значения составляющих давления из (97):

$$\int F_0 d\tau = 0,$$

где F_0 обозначает выражение (98), если подставить значок нуль при всех компонентах деформации. Но F_0 всегда положительно и равно нулю только в предельном случае, когда энергия деформации обращается в нуль. Значит из последнего уравнения следует, что F_0 обращается в нуль для каждого элемента объема, а отсюда вытекает, что каждая из составляющих деформации x_{x_0}, x_{y_0}, … равна нулю. Другими словами: если на тело не действуют никакие внешние силы, то деформация обязательно равна нулю.

Остается еще вопрос, обращается ли при этом в нуль также изменение u_0, v_0, w_0. Для ответа нужно исследовать, обязательно ли обращаются в нуль компоненты смещения u_0, v_0, w_0, если равны нулю шесть компонентов деформации:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial u_0}{\partial x}=0, & \frac{\partial v_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial y}=0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial y}=0, & \frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial z}=0, \\ \frac{\partial w_0}{\partial z}=0, & \frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}=0. \end{array}\right\} \qquad 105$$

Как легко видеть, это вовсе не так. Можно даже получить u_0, v_0, w_0 как общие решения диференциальных уравнений (105) следующим образом. Для u_0 существуют три условия:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0{}^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}=0,$$

из которых два последние получаются диференцированием уравнений, содержащих $\frac{\partial u_0}{\partial u}$ и $\frac{\partial u_0}{\partial z}$.

Поэтому u_0 имеет вид:

$$u_0=\lambda+\lambda_2 y+\lambda_3 z+\lambda' yz.$$

Подобным образом

$$\left.\begin{array}{l} v_0=\mu+\mu_1 x+\mu_3 z+\mu' xz, \\ w_0=\nu+\nu_1 x+\nu_2 y+\nu' xy, \end{array}\right\} \qquad 106$$

причем двенадцать коэфициентов λ, μ, ν постоянны. Далее, на основании (105):

$$\begin{array}{c} \mu_3+\mu' x+\nu_2+\nu' x=0, \\ \nu_1+\nu' y+\lambda_3+\lambda' y=0, \\ \lambda_2+\lambda' z+\mu_1+\mu' z=0. \end{array}$$

Отсюда

$$\begin{array}{lll} \lambda'=0, & \mu'=0, & \nu'=0, \\ \nu_2+\mu_3=0, & \lambda_3+\nu_1=0, & \mu_1+\lambda_2=0. \end{array}$$

Ввиду этих шести условий, выражения (106) становятся совершенно одинаковыми с выражениями (39) для самого общего бесконечно малого изменения, которому тело может подвергнуться, не претерпевая деформации, т. е. для поступательного перемещения и вращения. Это очевидно, и этот результат можно было предвидеть заранее. Мы можем поэтому высказать следующее положение: хотя внешние силы, действующие на внутренность и поверхность тела, не определяют однозначно компонентов смещения u, v, w, однако изменения тела, представляемые различными решениями задачи, отличаются друг от друга только поступательными перемещениями и вращениями всего тела и поэтому все соответствуют одинаковой деформации. В этом смысле можно сказать, что задача равновесия однозначно разрешается выведенными уравнениями. Впоследствии, при рассмотрении подобных задач мы будем произвольно выбирать те шесть постоянных, которые остаются неопределенными, так как они больше не представляют для нас интереса.

§ 26. Тела симметричной структуры. Кристаллические системы. Чтобы удобнее обозреть двадцать одну постоянную, от которых зависят упругие свойства кристалла, расположим их в виде следующей схемы:

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{array}\right\} \qquad 107$$

Однако значения отдельных постоянных a зависят вообще не только от состояния кристалла, но также и от выбора системы координат, а именно от расположения координатных осей относительно направлений, которые играют особую роль в структуре кристалла. Это следует непосредственно из того соображения, что значение упругого потенциала F, т. е. упругой энергии, ни в каком случае не может зависеть от выбора координат. Если преобразовать какую-нибудь деформацию x_x, x_y, ... к другой координатной системе x', y', z' и обозначить новые компоненты деформации при помощи штриха сверху, то, по (98):

$$\frac{a_{11}}{2} x_x{}^2+a_{12} x_x y_y+\ldots=\frac{a'_{11}}{2} x_x'^2+a_{12}' x_x' y_y'+\ldots \qquad 108$$

Далее, если выразить компоненты деформации со штрихами через компоненты без штрихов и приравнять друг к другу соответственные члены в обеих частях тождества, то получатся соотношения между постоянными со штрихами и без штрихов, которые соответствуют соотношениям между координатами двух систем. В общем случае постоянные со штрихами a' все или частью отличаются от постоянных без штрихов a.

Если кристалл обладает таким частным свойством, что при определенном изменении системы координат все a' равны соответствующим a, т. е. если постоянные a инвариантны относительно преобразования координат, то говорят, что кристаллу свойствен определенный род *симметрии*. Если существует несколько таких изменений координат, то говорят о высшей симметрии кристалла.

Каждый род условий симметрии можно выразить не только на основании инвариантности постоянных упругости a, но и другим способом: система координат остается первоначальная, зато сам кристалл подвергается такому изменению, чтобы он расположился по отношению к системе координат таким же образом, как он был бы расположен по отношению к системе координат со значками при первом способе рассмотрения, когда он предполагался неподвижным. Существование симметрии проявляется тогда в том, что кристалл и после изменения обладает теми же свойствами по всем направлениям, как и до него, или же, как говорят, что кристалл приведен к совмещению с самим собою. Оба вида определения симметрии, очевидно, вполне эквивалентны и представляют собою лишь разные формулировки одного обстоятельства. Для наших целей удобнее первая формулировка, условие инвариантности a при преобразовании координат. Им мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Кристаллы разделяются, соответственно степени симметрии, проявляемой ими, на различные классы. Согласно сказанному выше, принцип этого подразделения не является заранее установленным, однозначно определенным на основании дедукции, а, подобно всякому определению понятия, до известной степени произволен и выводится лишь из соображений целесообразности. Мы воспользуемся здесь простым давно применяемым разделением на шесть кристаллических систем. В качестве преобразования координат, удобнее всего применить вращение координатной системы.

Если все постоянные упругости a какого-нибудь кристалла инварианты по отношению к повороту координатной системы вокруг одной из осей координат на угол $\frac{2\pi}{n}$ (или если кристалл приводится к совпадению с самим собою при повороте на угол $\frac{2\pi}{n}$), то эта ось называется „осью симметрии n-го порядка“.

Очевидно, что ось симметрии не есть определенная прямая, а лишь определенное направление, так как все параллельные прямые совершенно равнозначны.

Существование оси симметрии первого порядка вовсе не является действительным условием симметрии, так как поворот координатной системы на угол 2π не изменяет ее. Кристаллы, обладающие только осями симметрии первого порядка, образуют последнюю, шестую, или *асимметричную* (*триклинническую*) систему. К ним принадлежит, например, серноκислая медь. Ее упругие свойства определяются 21 постоянной, представленными в виде схемы (107).

Если кристалл обладает только одной осью симметрии второго порядка, то он принадлежит к пятой или *моносимметричной* (*моноклинической*) системе, как, например, слюда или сода. Чтобы установить условия для упругих свойств кристалла этой системы, мы поставим, прежде всего, общий вопрос о зависимости между постоянными упругости со штрихами и постоянными упругости без штрихов a, при повороте системы координат на угол $\frac{2\pi}{2} = \pi$ вокруг оси z.

В этом случае получится:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = z.$$

Соответственным образом,

$$u' = -u, \quad v' = -v, \quad w' = w,$$

и, по (60),

$$x_x' = x_x, \quad y_y' = y_y, \quad z_z' = z_z,$$

$$y_z' = -y_z, \quad z'_x = -z_x, \quad x_y' = x_y.$$

Если подставить эти значения в тождество (108), то получится, что из 21 постоянной a' 13 постоянных равны соответствующим постоянным a без штрихов, между тем как

$$a_{14}' = -a_{14}, \quad a_{15}' = -a_{15}, \quad a_{24}' = -a_{24}, \quad a_{25}' = -a_{25},$$

$$a_{34}' = -a_{34}, \quad a_{35}' = -a_{35}, \quad a_{46}' = -a_{46}, \quad a_{56}' = -a_{56}.$$

Эти соотношения верны вообще для всякого кристалла. Если же ось z есть ось симметрии второго порядка, то все величины a инвариантны, и поэтому те из них, которые меняют свой знак при преобразовании, должны равняться нулю. Отсюда следует, по (107), такая схема упругих постоянных кристаллов моносимметрической системы:

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\ & & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66}. \end{array}\right\} \qquad 109$$

Если, кроме оси z, имеется еще одна ось симметрии второго порядка, например, ось x, то мы получим четвертую или ромбическую систему, к представителям которой относятся калийная селитра, арагонит, топаз. Подобно вышеприведенному способу, можно получить, что этой системе соответствует такая схема:

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} & 0 & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66}. \end{array}\right\} \qquad 110$$

Из построения этой схемы видно, что в данном случае и третья координатная ось, т. е. ось y, есть также ось симметрии второго порядка.

От ромбической системы мы перейдем к третьей или *тетрагональной (квадратной)* системе (например, цирконий), если введем дальнейшее условие, что одна из координатных осей, например ось z, есть ось симметрии четвертого порядка. Повороту на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси z соответствуют формулы преобразования:

$$\begin{array}{lll} x' = y, & y' = -x, & z' = z, \\ u' = v, & v' = -u, & w' = w, \\ x_x' = y_y, & y_y' = x_x, & z_z' = z_z, \\ y_z' = -x_z, & z_x' = z_y, & x_y' = -x_y. \end{array}$$

Отсюда получим на основании (108) общие соотношения для девяти постоянных тетрагональной системы:

$$\begin{array}{lll} a_{11}' = a_{22}, & a_{12}' = a_{12}, & a_{13}' = a_{23}, \\ a_{22}' = a_{11}, & a_{23}' = a_{13}, & a_{33}' = a_{33}, \\ a_{44}' = a_{55}, & a_{55}' = a_{44}, & a_{66}' = a_{66}. \end{array}$$

Если все постоянные a со штрихами должны при этом равняться соответственным постоянным без штрихов, то

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{13} = a_{23}, \quad a_{44} = a_{55}.$$

Поэтому, согласно (98), упругий потенциал тетрагонального кристалла равен:

$$\left.\begin{array}{l} F = \frac{a_{11}}{2}(x_x^2 + y_y^2) + a_{12}x_x y_y + a_{13}(x_x + y_y) z_z + \\ \quad + \frac{a_{33}}{2} z_z^2 + \frac{a_{44}}{2}(y_z^2 + z_x^2) + \frac{a_{66}}{2} x_y^2. \end{array}\right. \qquad 111$$

Существование оси симметрии третьего, а также шестого порядка определяет вторую или *гексагональную* систему, представителями которой являются многие кристаллы, как, например, натровая селитра, известковый шпат, графит, турмалин, лед.

Наконец, первая или *правильная* система получится из тетрагональной системы, если положить, что и вторая ось, а поэтому также и третья ось суть оси симметрии четвертого порядка. Выражение для упругого потенциала правильного кристалла получится, согласно (111), в виде:

$$\left.\begin{array}{l} F = \frac{a_{11}}{2}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + a_{12}(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x) + \\ \quad + \frac{a_{44}}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2). \end{array}\right. \qquad 112$$

Упругий потенциал зависит в этом случае только от трех постоянных. К правильной системе принадлежат каменная соль, плавиковый шпат, алмаз.

§ 27. Изотропные тела. Для того чтобы тело было изотропно упругим, т. е. чтобы оно вовсе не имело преимущественных направлений, необходимо и достаточно, чтобы все его постоянные упругости были инвариантны по отношению ко всякому изменению координатной системы, или, что сводится к тому же, чтобы при всяком повороте оно приводилось к совпадению с самим собою. Чтобы установить вытекающие отсюда условия для значений постоянных упругости, проще всего отнести деформацию к главным расширениям и к направлениям главных осей расширения. Иначе говоря, мы выразим, при помощи уравнений (64), шесть компонентов деформации x_x, y_y, ... в зависимости от трех главных расширений l, m, n, и девяти косинусов направлений $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ и эти величины подставим в выражение упругого потенциала (112). В изотропном теле последний должен полностью определяться величинами l, m, n, каковы бы ни были значения косинусов направления, причем он, очевидно представляет однородную симметричную квадратичную функцию от l, m, n.

Смысл этого требования удобнее всего уяснить, если рассмотреть все однородные симметричные квадратичные функции от l, m, n. Имеется всего две такие функции, независимые друг от друга, а именно:

$$l^2+m^2+n^2,$$
$$lm+mn+nl.$$

К этим двум функциям приводятся все другие. Так например:

$$(l+m+n)^2=(l^2+m^2+n^2)+2(lm+mn+nl). \qquad 113$$

Отсюда следует, что упругий потенциал изотропного тела обладает только двумя независимыми друг от друга постоянными и, значит, имеет вид:

$$F=\frac{\lambda}{2}(l+m+n)^2+\mu(l^2+m^2+n^2), \qquad 114$$

причем λ и μ положительны.

Теперь, чтобы выразить F через составляющие деформации, x_x, x_y, $\ldots$, примем во внимание, что l, m, n суть корни уравнения третьей степени (62). Поэтому

$$l+m+n=x_x+y_y+z_z, \qquad 115$$

как коэфициент при l^2, а

$$lm+mn+nl=(y_y z_z+z_z x_x+x_x y_y)-\frac{1}{4}(y_z^2+z_x^2+x_y^2), \qquad 116$$

как коэфициент при l в упомянутом уравнении. Отсюда следует, согласно (113)

$$l^2+m^2+n^2=x_x^2+y_y^2+z_z^2+\frac{1}{2}(y_z^2+z_x^2+x_y^2)$$

(в этом можно убедиться и непосредственно при помощи (64)). Согласно (114)

$$F=\frac{\lambda}{2}(x_x+y_y+z_z)^2+\mu\left(x_x^2+y_y^2+z_z^2+\frac{y_z^2+z_x^2+x_y^2}{2}\right). \qquad 117$$

Если подставить, для сокращения, объемное расширение

$$x_x+y_y+z_z=\sigma, \qquad 118$$

то на основании (97), мы получим следующие выражения для компонентов давления изотропного упругого тела в зависимости от компонентов деформации.

$$\left.\begin{array}{ll} X_x=-\lambda\sigma-2\mu x_x, & Y_z=-\mu y_z, \\ Y_y=-\lambda\sigma-2\mu y_y, & Z_x=-\mu z_x, \\ Z_z=-\lambda\sigma-2\mu z_z, & X_y=-\mu x_y. \end{array}\right\} \qquad 119$$

Эти уравнения представляют собою то необходимое дополнение к общим уравнениям движения, о котором мы говорили в начале первой главы, в § 21.

Глава вторая

СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 28. Прежде всего займемся приложениями изложенной теории к статическим задачам о твердых телах. При этом мы ограничимся для простоты изотропными телами. Так как массовые силы, в роде тяжести, играют лишь незначительную роль в деформациях твердых тел, то мы положим их равными нулю. Тогда условия равновесия (99), относящиеся к внутренности тела, примут более простой вид:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \ \ldots \qquad 120$$

а условия для поверхности тела (74) остаются неизменными:

$$X_\nu = X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z), \ldots \qquad 121$$

Каждое смещение u, v, w представляет собою возможное в природе состояние равновесия. Соответствующие компоненты деформации x_x, x_y, ... вычисляются по (60) и приводят на основании (119) к выражениям для компонентов давления X_x, X_y, ..., которые удовлетворяют уравнениям (120). При этом деформация соответствует тем силам, действующим на поверхность тела, которые представлены компонентами давления X_ν, Y_ν, Z_ν в уравнениях (121).

Здесь имеет важное значение доказанное в § 25 положение, что деформация *однозначно* определяется внешними силами. Поэтому если мы нашли каким бы то ни было способом решение условий равновесия, то мы можем быть уверены, что это единственное решение, соответствующее данным внешним силам давления. Обычно в природе задача бывает поставлена таким образом, что заданы внешние силы, а по ним требуется найти произведенную ими деформацию. Но, так как уравнения имеют

очень сложный вид, то задачу невозможно разрешить, отыскивая сперва общее решение диференциальных уравнений (120), а затем вычисляя входящие в него произвольные постоянные на основании предельных условий (121). Обычно исходят из предельных условий (121) и пытаются подобрать такое частное решение уравнений (120), которое удовлетворяло бы предельным условиям. Если попытка удается, то считается, что решение задачи найдено. Этим методом мы будем обычно пользоваться в дальнейшем.

§ 29. Рассмотрим прежде всего всестороннее равномерное, так называемое *кубическое сжатие* тела произвольной формы. На поверхность тела действует, всюду в направлении нормали, данное равномерное давление p. Поэтому

$$X_\nu = p\cos(\nu x), \quad Y_\nu = p\cos(\nu y), \quad Z_\nu = p\cos(\nu z). \qquad 122$$

Таким образом даны компоненты внешнего давления. Очевидно, мы удовлетворим предельным условиям (121), если положим, что на поверхности тела повсюду

$$\left.\begin{array}{l} X_x = Y_y = Z_z = p, \\ X_y = Y_z = Z_x = 0. \end{array}\right\} \qquad 123$$

Далее, предположим, что эти шесть уравнений представляют компоненты давления не только на поверхности, но и повсюду внутри тела. Тогда будут удовлетворены также уравнения (120). Затем мы получим из (119):

$$p = -\lambda\sigma - 2\mu x_x, \ \ldots \ y_z = 0, \ \ldots, \qquad 124$$

откуда сложением первых трех уравнений получается:

$$3p = -3\lambda\sigma - 2\mu(x_x + y_y + z_z),$$

и, согласно (118),

$$\sigma = -\frac{3p}{3\lambda + 2\mu}, \ x_x = y_y = z_z = \frac{\sigma}{3}. \qquad 125$$

Поэтому, если положить

$$u = \frac{\sigma}{3}x, \ \ v = \frac{\sigma}{3}y, \ \ w = \frac{\sigma}{3}z, \qquad 126$$

то, согласно (60), будут удовлетворены уравнения (124) и мы имеем, таким образом, решение задачи. Обобщение, получающееся вследствие того, что в выражения для u, v, w можно ввести еще некоторые постоянные, не изменяет, согласно § 25, найденной деформации.

Таким образом всестороннее равномерное давление p вызывает всестороннее равномерное сжатие объема, величины (125), не зависящее от формы тела. Поэтому постоянная $\frac{3}{3\lambda+2\mu}$ называется также „коэфициентом объемного сжатия", а обратная величина

$$\frac{p}{-\sigma}=\lambda+\frac{2}{3}\mu \tag{127}$$

называется „объемным модулем упругости" вещества.

§ 30. Вслед за объемной упругостью рассмотрим так называемую *„линейную упругость"*, т. е. исследуем равновесие тела, растягиваемого односторонне, например по направлению оси x.

Чтобы не усложнять вычисления, положим, что тело имеет вид цилиндра, параллельного оси x (проволока, стержень), длины l и произвольного поперечного сечения. Положим, что начальное сечение лежит в плоскости yz, т. е. $x=0$, и неподвижно удерживается какими-либо силами. На конечное сечение, $x=l$, действует в направлении положительной оси x внешняя сила, величина которой равна F, а на боковую поверхность цилиндра никакие внешние силы не действуют. Требуется определить произведенную деформацию.

Для того чтобы удовлетворить пограничным условиям на поверхности (121), рассмотрим прежде всего боковую поверхность цилиндра. На боковой поверхности $X_\nu=Y_\nu=Z_\nu=0$, далее $\cos(\nu x)=0$, между тем, как $\cos(\nu y)$ и $\cos(\nu z)$ могут принимать любые значения. Поэтому условия на поверхности будут удовлетворены, если мы положим:

$$X_y=Y_z=Z_x=0,\ Y_y=Z_z=0. \tag{128}$$

Предположим, что эти условия имеют место также повсюду внутри тела, так что из шести компонентов давления только X_x отлично от нуля. Тогда действительно диференциальные уравнения (120), будут удовлетворены, если, кроме того, положить, что X_x постоянно. Значение этой постоянной получится из условия на поверхности для свободного сечения $x=l$, так как условие

для неподвижного сечения $x=0$ дает только величину сил, которые удерживают сечение и которые нас здесь не интересуют.

На свободном сечении

$$\cos(\nu x)=-1,\ \cos(\nu y)=\cos(\nu z)=0,$$

поэтому, согласно (121) и (128):

$$X_\nu=-X_x,\ Y_\nu=0,\ Z_\nu=0.$$

Так как X_x постоянно, то мы имеем для результирующей всех параллельных сил давления, которые действуют на элементы свободного сечения:

$$\int X_\nu\,d\sigma=-X_x\cdot q=F, \tag{129}$$

где q обозначает площадь поперечного сечения. Отсюда

$$X_x=-\frac{F}{q}. \tag{130}$$

По составляющим давления можно найти также составляющие деформации, пользуясь уравнениями (119), следующим образом. Прежде всего,

$$y_z=z_x=x_y=0.$$

Затем получим из:

$$\frac{F}{q}=\lambda\sigma+2\mu x_x,$$
$$0=\lambda\sigma+2\mu y_y,$$
$$0=\lambda\sigma+2\mu z_z,$$

сложив эти равенства:

$$\frac{F}{q}=3\lambda\sigma+2\mu\sigma.$$

Следовательно,

$$\sigma=\frac{1}{3\lambda+2\mu}\frac{F}{q}. \tag{131}$$

Отсюда

$$x_x=\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\cdot\frac{F}{q},\quad y_y=z_z=-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\cdot\frac{F}{q}. \tag{132}$$

Эти величины дают смещения

$$u = x_x \cdot x, \quad v = y_y \cdot y, \quad w = z_z \cdot z, \qquad 133$$

т. е. полное решение задачи.

Как и следует ожидать найденная деформация связана с объемным расширением. Но величина этого расширения σ, которая получается из сравнения выражений (131) и (125), при линейном натяжении, равна лишь одной третьей части расширения при объемном натяжении. Что касается расширения отдельных осей, то оно, очевидно, положительно для оси x. Ему соответствует, по (133), смещение свободного сечения, т. е. удлинение цилиндра на величину:

$$u = x_x \cdot l = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{lF}{q}. \qquad 134$$

Таким образом удлинение пропорционально растягивающей силе, пропорционально длине и обратно пропорционально поперечному сечению цилиндра и, наконец, пропорционально постоянной материала, обратная величина которой обозначается как „линейный модуль упругости" E данного вещества:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \qquad 135$$

Но, на основании (132), растяжение по длине цилиндра связано с сжатием по каждому направлению, перпендикулярному к оси цилиндра. Величину сжатия удобнее всего рассмотреть, если составить отношение поперечного сжатия к продольному удлинению:

$$\frac{-y_y}{x_x} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \varepsilon < \frac{1}{2}. \qquad 136$$

Измерив обе постоянные, E и ε, можно вычислить λ и μ, и таким образом, определить все упругие свойства вещества.

Величина ε очень мала для пробки, а для каучука очень велика, близка к предельной величине $^1/_2$. Для металлов и стекла можно принять ее в первом приближении равной $^1/_3$, но отдельные материалы заметно отличаются друг от друга.

Модуль линейной упругости E, размерность которого одинакова, согласно (135) и (119), с размерностью давления, имеет для металлов и стекла величину порядка:

$$E \backsim 10^{12}\left[\frac{дин}{см^2}\right] \text{ [ср. } \mathit{1} \text{ (8a)].} \qquad 136a$$

Поэтому такой же порядок величины имеют и коэфициенты упругости λ и μ.

§ 31. Теперь рассмотрим случай ***кручения***, также для цилиндра длины l, начальное сечение которого (основание цилиндра) пусть закреплено неподвижно в плоскости xy (т. е. $z = 0$), а свободное конечное сечение ($z = l$) поворачивается в своей плоскости внешними силами на некоторый угол. Положим снова, что на боковую поверхность не действуют внешние силы.

На этот раз мы пойдем путем, обратным предыдущему: будем исходить не из внешних сил, а положим, что даны деформации и по ним требуется найти силы, производящие эти деформации. Пусть деформация состоит в том, что каждое сечение цилиндра, параллельное плоскости xy, поворачивается в своей плоскости без какого-либо искажения на угол, который пропорционален расстоянию z поперечного сечения от плоскости основания. Если ω — угол поворота верхнего конечного сечения, то угол поворота какого-нибудь сечения на высоте z равен $\frac{\omega \cdot z}{l}$.

Отсюда однозначно получаются величины компонентов смещения u, v, w, причем удобнее всего ввести цилиндрические координаты:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \qquad 136b$$

Действительно: согласно вышесказанному, материальная точка x, y, z имеет после деформации координаты:

$$x + u = \rho\cos\left(\varphi + \frac{\omega z}{l}\right),$$

$$y + v = \rho\sin\left(\varphi + \frac{\omega z}{l}\right),$$

$$z + w = z.$$

Следовательно, принимая во внимание, что ω бесконечно мало:

$$u = -\frac{\omega y z}{l}, \quad v = \frac{\omega x z}{l}, \quad w = 0. \qquad 137$$

и, согласно (60):

$$x_x = 0, \qquad y_y = 0, \qquad z_z = 0,$$
$$y_z = \frac{\omega x}{l}, \qquad z_x = -\frac{\omega y}{l}, \qquad x_y = 0. \tag{138}$$

По этим компонентам деформации получаются, согласно (119), компоненты давления:

$$X_x = 0, \qquad Y_y = 0, \qquad Z_z = 0,$$
$$Y_z = -\frac{\mu\omega x}{l}, \qquad Z_x = \frac{\mu\omega y}{l}, \qquad X_y = 0. \tag{139}$$

Так как эти выражения тождественно удовлетворяют уравнениям (120) также и внутри тела, то отсюда следует, что допущенная нами деформация представляет собою возможный в природе случай равновесия, которое должно наступить всегда, когда на поверхность цилиндра действуют силы, вычисляемые на основании (121).

Рассмотрим сперва силы давления, которые действуют на боковую поверхность цилиндра и которые, согласно сделанному нами допущению, обращаются в нуль. Так как для боковой поверхности $\cos(\nu z) = 0$, между тем, как $\cos(\nu x)$ и $\cos(\nu y)$ могут принимать любые значения, то из (121), воспользовавшись (139), можно получить для всех точек боковой поверхности цилиндра:

$$X_\nu = 0, \quad Y_\nu = 0, \quad Z_\nu = \frac{\mu\omega}{l}\left[y\cos(\nu x) - x\cos(\nu y)\right]. \tag{140}$$

Отсюда мы видим, что допущенная нами деформация только в том случае совместима с дальнейшим допущением, что на боковую поверхность цилиндра не действуют внешние силы, когда во всех точках боковой поверхности:

$$y\cos(\nu x) - x\cos(\nu y) = 0.$$

Это чисто геометрическое условие. Оно означает, что направление $x : y$, т. е. направление какого-нибудь радиуса-вектора, проведенного из какой-либо точки на оси z под прямым углом к ней, совпадает с направлением $\cos(\nu x) : \cos(\nu y)$, т. е. с направлением нормали ν в конечной точке радиуса-вектора, или

другими словами, что поперечное сечение есть круг, цилиндр круговой.

Поэтому, если мы хотим сохранить наши допущения, то мы вынуждены ограничиться в дальнейших умозаключениях частным случаем *кругового цилиндра*. При этом предположении, внешнее давление, действующее на элемент конечного сечения цилиндра, равно, на основании (121) и (139), а также того обстоятельства, что здесь

$$\cos(\nu x) = 0, \qquad \cos(\nu y) = 0, \qquad \cos(\nu z) = -1,$$
$$X_\nu = -\frac{\mu\omega y}{l} \qquad Y_\nu = \frac{\mu\omega x}{l} \qquad Z_\nu = 0, \tag{141}$$

или, согласно (136b),

$$X_\nu = -\frac{\mu\omega\rho}{l}\sin\varphi, \quad Y_\nu = \frac{\mu\omega\rho}{l}\cos\varphi, \quad Z_\nu = 0.$$

Таким образом внешнее давление действует на каждый элемент верхнего свободного сечения цилиндра в плоскости сечения и перпендикулярно к направлению радиуса-вектора ρ в сторону отсчета угла кручения ω, что нетрудно понять. Все силы давления

$$X_\nu d\sigma, \quad Y_\nu d\sigma, \quad Z_\nu d\sigma,$$

которые действуют на элементы поверхности, дают на основании [*I* (306)] и так как $d\sigma = \rho d\rho d\varphi$ результирующую силу:

$$F_x = \int X_\nu d\sigma = 0, \quad F_y = \int Y_\nu d\sigma = 0, \quad F_z = \int Z_\nu d\sigma = 0$$

и результирующую пару сил:

$$\mathfrak{N}_x = \int zY_\nu d\sigma = 0, \quad \mathfrak{N}_y = \int zX_\nu d\sigma = 0, \quad \mathfrak{N}_z = \int (xY_\nu - yX_\nu)\, d\sigma,$$
$$\mathfrak{N}_z = \frac{\mu\omega}{l}\iint \rho^3 d\rho d\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{\mu\omega}{l}\cdot r^4 = N, \tag{142}$$

где r обозначает радиус цилиндра.

Отсюда мы делаем обратное заключение: если на верхнее основание кругового цилиндра, нижнее основание которого подвижно, действует пара сил с вращающим моментом N, лежащая в плоскости верхнего основания, то цилиндр испытывает кручение рассмотренного вида, причем верхнее основание поворачивается на угол:

$$\omega = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{lN}{\mu r^4}. \qquad 142a$$

Следовательно, угол кручения пропорционален длине цилиндра и вращающему моменту пары сил и обратно пропорционален четвертой степени радиуса и постоянной материала, которую поэтому называют также „модулем кручения" вещества.

§ 32. Как же закручивается цилиндр *некругового*, например, эллиптического сечения, если на верхнее основание его действует та же пара сил N, причем на боковую поверхность не действуют внешние силы? Этим вопросом мы займемся теперь подробнее.

Прежде всего ясно, что в данном более общем случае придется несколько изменить простые допущения относительно деформации, сделанные в начале предыдущего параграфа, согласно которым каждое сечение поворачивается в своей плоскости без какого-либо искажения: ибо эти допущения годятся, как мы видели, только для кругового цилиндра. Какого рода должно быть это изменение, легко найти следующим образом. Хотя простая деформация, изображаемая уравнениями (137), и непригодна для цилиндра с произвольным поперечным сечением, однако она представляет собою возможный в природе случай равновесия, как мы заключили из того, что уравнения (120) удовлетворяются внутри цилиндра. Значит, она необходимо наступает тогда, когда соответствующие внешние силы действуют на поверхность цилиндра. Каковы эти внешние силы, которые должны действовать на боковую поверхность цилиндра, можно найти непосредственно из уравнений (140), подставив в последнее уравнение значение косинусов направления внутренней нормали, обусловленные видом сечения цилиндра. Следовательно, внешняя сила давления на боковую поверхность всегда параллельна оси z, т. е. она действует вверх или вниз, смотря по тому, положительна или отрицательна величина Z_ν.

Вообще, можно написать:

$$Z_\nu = \frac{\mu\omega}{l} \cdot r \sin \delta, \qquad 143$$

где δ обозначает угол между внешней нормалью в какой-нибудь точке боковой поверхности цилиндра и радиусом-вектором $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, лежащем в соответствующем сечении; угол этот

положителен, если внешняя нормаль представляется повернутой вокруг оси z в положительном направлении относительно радиуса-вектора. Понятно, что для кругового сечения $\delta = 0$, но для эллиптического сечения, большая и малая ось которого совпадают с осями x и y, δ и вместе с ним Z_ν (при положительном ω) положительны в первом и третьем квадрантах и отрицательны во втором и четвертом квадрантах. Поэтому, если закручивается эллиптический цилиндр, расположенный согласно допущению, то для того чтобы поперечные сечения только поворачивались в своей плоскости, необходимо, чтобы на боковую поверхность действовали внешние сдвигающие силы, направленные в первом и третьем квадрантах вверх, а во втором и четвертом квадрантах вниз. Отсюда непосредственно следует, что в том случае, когда таких внешних сил *не имеется*, соответствующие точки боковой поверхности претерпевают смещение *в обратном* направлении, вследствие чего первоначально плоские сечения загибаются в первом и третьем квадрантах вниз ($w < 0$), а в двух других квадрантах вверх ($w > 0$). Остаются на прежней высоте ($w = 0$), только те точки боковой поверхности, в которых длина радиуса-вектора получает максимальное или минимальное значение при обходе периметра сечения ($\delta = 0$), т. е., для эллипса вершины, а остальные поднимаются или опускаются.

Чтобы получить общие правила о направлении закручивания, независимо от выбора системы координат, положения неподвижного основания, знака ω и направления внешнего вращающего момента, действующего на свободное основание цилиндра, полезно остановиться на различии между видами винтовых линий. Если точка движется по винтовой линии, то она совершает одновременно вращение и поступательное движение, поперек к плоскости вращения. Если винтовая линия такова, что при движении по винту или, что одинаково по существу, при вращении винта в неподвижной гайке, положительная ось вращения (*1* § 83) совпадает с направлением поступательного движения, как например, в обыкновенном штопоре, то винтовая линия называется правым винтом, в противоположном случае — левым винтом. При этом условии безразлично, в каком направлении точка пробегает винтовую линию или вращается винт: вместе с направлением вращения изменяется как направление поступательного движения, так и направление положительной оси вращения.

Вернемся теперь к нашему случаю и рассмотрим какое-нибудь волокно цилиндра, которое первоначально было параллельно оси кручения. После деформации оно примет форму винтовой линии. С другой стороны, точки на периметре первоначально плоского сечения цилиндра образуют после деформации волновую линию. В таком случае существует следующее общее правило; те части этой волновой линии, которые примыкают к минимальным значениям радиуса-вектора r, образуют отрезки того же рода, как и ранее рассмотренные волокна цилиндра; если последние — правые винты, то и эти части такие же. Для частей волновой линии, соседних с максимальными значениями r, действительно обратное.

Так, например, в рассмотренном выше примере эллиптического сечения волокна цилиндра образуют, при принятых обозначениях, правые винтовые линии. Поэтому крайняя волновая линия проходит у концов малой оси как правый винт, т. е. поднимается при переходе от первого квадранта ко второму и от третьего к четвертому, совершенно так, как было установлено выше.

Для количественного решения задачи требуется рассмотреть аналитические условия. В согласии с результатами приведенных выше рассуждений, можно следующим образом обобщить выражения (137) компонентов смещения для эллиптического цилиндра с полуосями a и b:

$$u = -\frac{\omega yz}{l}, \quad v = \frac{\omega xz}{l}, \quad w = -Cxy, \qquad 144$$

где C обозначает положительную постоянную. Это значение w выражает найденное выше свойство, что w отрицательно в первом и третьем квадрантах и положительно во втором и четвертом. Таким образом действительно удовлетворяются как условия (120) для внутренней части цилиндра, так и (121) для боковой поверхности, — первые тождественно, а вторые если положить:

$$C = \frac{\omega}{l} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \qquad 145$$

Итак, мы имеем также полное решение задачи о кручении эллиптического цилиндра. Выражение (142) для внешнего вращающего момента при круговом цилиндре обобщается, согласно (121), следующим образом:

$$N = \frac{\pi\mu\omega}{l} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \qquad 146$$

Глава третья

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

§ 33. В основу излагаемой нами сейчас второй части этой книги мы положили общее допущение, что движение постоянно связано с бесконечно малыми деформациями. Такое движение не может, очевидно, быть односторонним, а должно попеременно совершаться в различных направлениях, т. е. должно происходить „колебание“ тела, при котором смещения и вместе с ними деформации постоянно изменяют свой знак. Таким образом мы имеем здесь дело с колебательными явлениями в упругих твердых телах, которые мы будем считать для простоты изотропными. Основные законы такого движения установлены уже в первой главе. Они формулированы в уравнениях движения (83), которые мы можем написать следующим образом, опустив силы тяготения:

$$\left.\begin{aligned} k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad 147$$

далее, в поверхностных условиях (74) и, наконец, в соотношениях (119) между тензором давления и тензором деформации в изотропном веществе.

Наиболее интересные случаи колебательных явлений подобного рода относятся к таким телам, которые имеют размеры неодинакового порядка величины по всем трем измерениям пространства, а простираются преимущественно по двум или по одному измерению пространства. Это дает, понятно, значительное упрощение законов движения, так как уменьшается число