

соответствии с п. 715 для переменной части ω имеем

$$\frac{8}{7} \sqrt{\frac{3}{7}} \pi n \gamma \left\{ 3 \frac{r^2}{c^2} P_2(\vartheta) - \frac{11}{7} \frac{r^6}{c^6} P_6(\vartheta) + \dots \right\},$$

что указывает на почти однородную силу, действующую на маленькую подвешенную катушку. Расположение катушек в этом случае такое же, как расположение двух внешних катушек в трехкатушечном гальванометре, описанном в п. 715, см. рис. 50.

729. Если мы хотим подвесить катушку между двумя другими катушками, расположенными так близко к ней, что расстояние между взаимодействующими проводами мало по сравнению с радиусами катушек, то наиболее однородная сила получается, если радиус каждой из внешних катушек превышает радиус средней катушки на $1/\sqrt{3}$ расстояния между плоскостями средней и внешней катушек. Это следует из выражения для взаимной индукции между двумя круговыми токами, полученного в п. 705.

ГЛАВА XVI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

730. Очень многие измерения электрических величин зависят от наблюдений движения колеблющегося тела; поэтому мы уделим внимание природе этого движения, а также наилучшим методам его наблюдения.

Малые колебания тела около положения равновесия обычно аналогичны колебаниям точки, на которую действует сила, меняющаяся пропорционально расстоянию от некоторой фиксированной точки. В наших опытах в случае колеблющихся тел имеется также сопротивление движению, обусловленное рядом причин, таких как вязкость воздуха и вязкость нити подвеса. Во многих электрических приборах имеется другой источник сопротивления, а именно обратное воздействие токов, индуцируемых в проводящих контурах, расположенных вблизи колеблющихся магнитов. Эти токи индуцируются движением магнита и их действие на магнит в соответствии с правилом Ленца состоит в постоянном противодействии его движению. Во многих случаях это составляет основную часть сопротивления.

Иногда около магнита с явно выраженной целью уменьшения или полного прекращения его колебаний помещается металлический контур, называемый Демпфером. Поэтому о сопротивлении такого рода мы будем говорить как о Демпфирующем.

В случае медленных колебаний, таких, которые легко наблюдать, полное сопротивление, какими бы причинами оно ни было обусловлено, оказывается прямо пропорциональным скорости. И только когда скорость гораздо больше, чем при обычных колебаниях в электромагнитных приборах, появляются свидетельства в пользу того, что сопротивление пропорционально квадрату скорости.

Таким образом, мы должны исследовать движение тела под действием при-

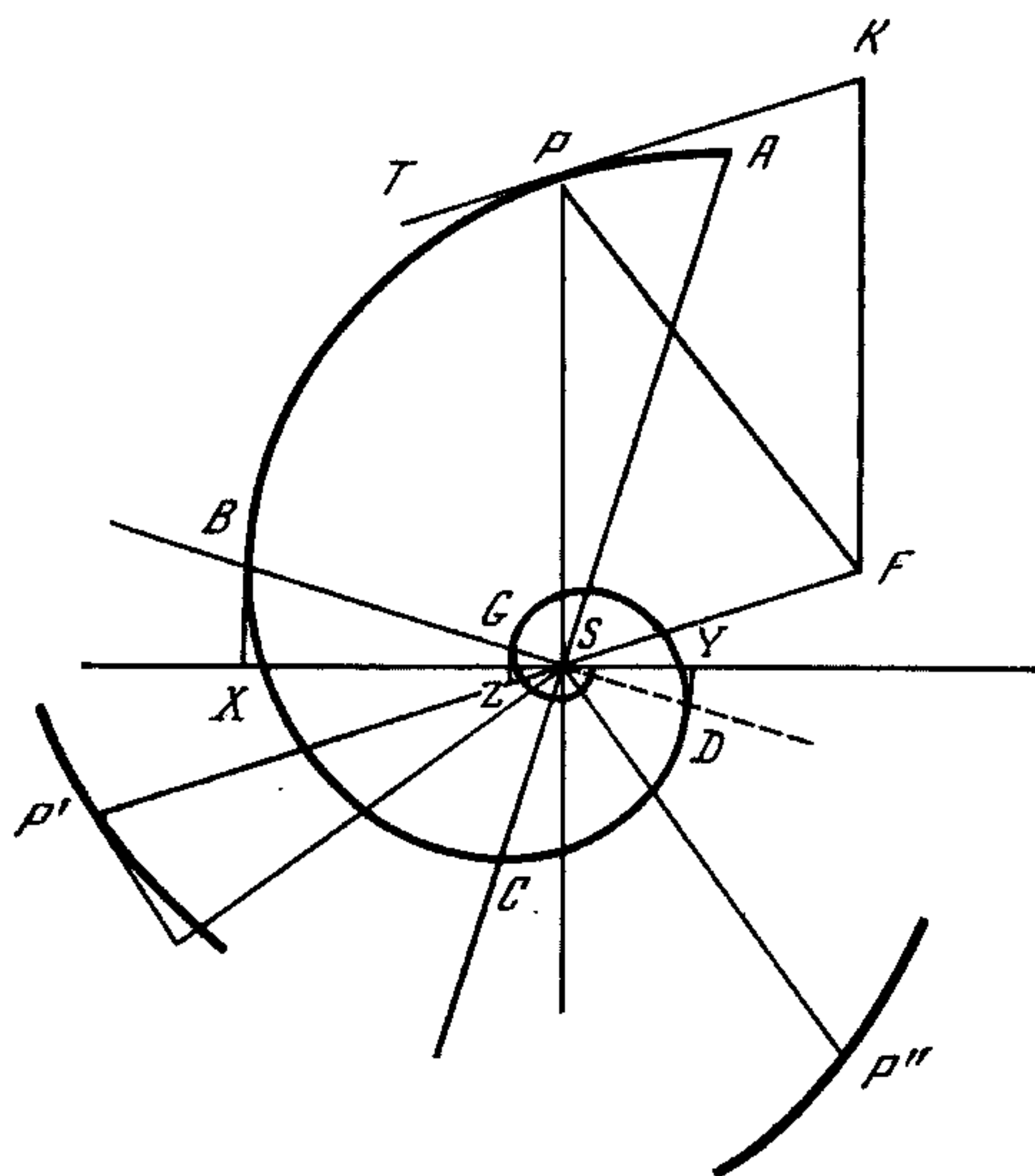


Рис. 57

мы проведем отрезок SP' , параллельный PT и равный SP , то скорость в точке P и по величине, и по направлению будет задана выражением $v = (\omega/\sin \alpha) SP'$. Таким образом, точка P' будет точкой на годографе. Но SP' есть отрезок SP , повернутый на постоянный угол $\pi - \alpha$, так что годограф, описываемый точкой P' , совпадает с исходной спиралью, повернутой вокруг полюса на угол $\pi - \alpha$.

Ускорение точки P по величине и по направлению представлено скоростью точки P' , умноженной на тот же самый фактор $\omega/\sin \alpha$.

Следовательно, если мы произведем над отрезком SP' ту же самую операцию поворота на угол $\pi - \alpha$ в новое положение SP'' , то ускорение точки P по величине и направлению будет равно $(\omega^2/\sin^2 \alpha) SP''$, где SP'' есть отрезок SP , повернутый на угол $2\pi - 2\alpha$.

Проведя отрезок PF , равный и параллельный SP'' , мы можем ускорение $(\omega^2/\sin^2 \alpha) PF$ разложить на $(\omega^2/\sin^2 \alpha) PS$ и $(\omega^2/\sin^2 \alpha) PK$.

Первая из этих составляющих есть ускорение, направленное к центру S и пропорциональное расстоянию.

Вторая составляющая направлена против скорости, и, поскольку $PK = 2 \cos \alpha P'S = -2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\omega} v$, это ускорение можно записать так: $-2 \frac{\omega \cos \alpha}{\sin \alpha} v$.

Ускорение частицы состоит, таким образом, из двух частей, первая из которых обусловлена силой притяжения μr , направленной к S и пропорциональной расстоянию, а вторая, равная $-2kv$, является сопротивлением движению, пропорциональным скорости, где $\mu = \frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha}$, $k = \omega \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

тяжения, меняющегося пропорционально расстоянию, и сопротивления, меняющегося пропорционально скорости.

731. Нижеследующее применение принципа Годографа, данное профессором Тэтом¹, позволяет нам очень простым способом исследовать движение такого рода при помощи равноугловой спирали.

Пусть требуется найти ускорение частицы, которая описывает логарифмическую или равноугловую спираль, двигаясь с постоянной угловой скоростью ω вокруг полюса.

Эта спираль обладает тем свойством, что касательная PT образует постоянный угол α с радиус-вектором PS [рис. 57].

Если скорость в точке P равна v , то $v \cdot \sin \alpha = \omega \cdot SP$. Следовательно, если

¹ Proc. R. S. Edin., Dec. 16, 1867.

Если мы положим в этих выражениях $\alpha = \pi/2$, орбита становится круговой, и мы имеем $\mu_0 = \omega_0^2$, $k = 0$.

Следовательно, если сила на единичном расстоянии остается той же самой, то $\mu = \mu_0$ и $\omega = \omega_0 \sin \alpha$, т. е. угловая скорость на различных спиралях при одном и том же законе притяжения пропорциональна синусу угла спирали.

732. Если мы рассмотрим теперь движение точки, являющейся проекцией движущейся точки P на горизонтальную линию XU , то увидим, что ее расстояние от S и ее скорость являются горизонтальными составляющими соответствующих величин для P . Следовательно, ускорение этой точки также состоит из притяжения, направленного к S и равного расстоянию от S , взятому μ раз, и торможения, равного скорости, умноженной на $2k$.

Мы имеем, таким образом, завершенную конструкцию для описания прямолинейного движения точки, происходящего под действием притяжения, пропорционального расстоянию от некоторой фиксированной точки, и сопротивления, пропорционального скорости. Движение такой точки является горизонтальной проекцией движения другой точки, которая движется с постоянной угловой скоростью вдоль логарифмической спирали.

733. Уравнение спирали $r = Ce^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}$.

Чтобы определить горизонтальное движение, положим $\varphi = \omega t$, $x = a + r \sin \varphi$, где a — значение x для точки равновесия.

Если мы проведем отрезок BSD , образующий с вертикалью угол α , то касательные BX , DY , GZ , . . . будут вертикальными, а точки X , Y , Z , . . . окажутся крайними точками последовательных осцилляций.

734. При наблюдении колеблющихся тел отмечают: (1). Показания шкалы в стационарных точках. Они называются элонгациями. (2). Моменты прохождения определенного деления шкалы в положительном или отрицательном направлении. (3). Показания шкалы в определенные моменты времени. Подобного рода наблюдения проводятся редко, лишь в случае колебаний с большим периодом².

Мы должны определить следующие величины: (1). Показание шкалы в положении равновесия. (2) Логарифмический декремент колебаний. (3). Время одного колебания.

Как определить показание шкалы в положении равновесия через три последовательные элонгации

735. Допустим, мы засекали три показания шкалы x_1 , x_2 , x_3 , соответствующие элонгациям X , Y , Z , и пусть a — показание в положении равновесия S , а r_1 — значение величины SB , тогда $x_1 - a = r_1 \sin \alpha$, $x_2 - a = -r_1 \sin \alpha e^{-\pi \operatorname{ctg} \alpha}$, $x_3 - a = r_1 \sin \alpha e^{-2\pi \operatorname{ctg} \alpha}$.

Из этих величин мы находим $(x_1 - a)(x_3 - a) = (x_2 - a)^2$. Откуда

$$a = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 + x_3 - 2x_2}.$$

Если x_3 не очень сильно отличается от x_1 , мы можем пользоваться приближенной формулой $a = (x_1 + 2x_2 + x_3)/4$.

² См. Gauss and W. Weber, *Resultate des magnetischen Vereins*, 1836. Chap. II, p. 34—50.

Как найти логарифмический декремент

736. Логарифмическим декрементом называется логарифм отношения амплитуды какого-либо колебания к амплитуде следующего за ним колебания. Если мы обозначим это отношение через ρ :

$$\rho = (x_1 - x_2) / (x_3 - x_2), \quad L = \lg \rho, \quad \lambda = \ln \rho,$$

то величина L называется обычным логарифмическим декрементом, а величина λ — неперовским логарифмическим декрементом. Очевидно, что $\lambda = L \ln 10 = \pi \operatorname{ctg} \alpha$.

Следовательно, $\alpha = \operatorname{arccotg}(\lambda/\pi)$ определяет угол логарифмической спирали.

Для определения величины λ нужно позволить телу совершить значительное число колебаний. Если c_1 — амплитуда первого, а c_n — амплитуда n -го колебания, то

$$\lambda = \frac{1}{n-1} \ln \left(\frac{c_1}{c_n} \right).$$

Если мы предположим, что точность наблюдений при малых и при больших колебаниях одинакова, то для получения наилучшего значения λ мы должны были бы дать возможность затухать колебаниям до тех пор, пока отношение c_1 к c_n не станет приближенно равным основанию натуральных логарифмов e . Это дает для n значение ближайшего к $(1/\lambda) + 1$ целого числа.

Поскольку, однако, в большинстве случаев время дорого, то лучше провести другую серию наблюдений, не дожидаясь такого значительного уменьшения амплитуды.

737. В некоторых случаях может оказаться, что мы должны определить положение равновесия по двум соседним элонгациям, когда логарифмический декремент известен из специально проведенного опыта. Тогда мы имеем

$$a = \frac{x_1 + e^\lambda x_2}{1 + e^\lambda}.$$

Время одного колебания

738. После определения показания шкалы, соответствующего точке равновесия, в эту точку шкалы или как можно ближе к ней помещается хорошо различимая метка и для нескольких последовательных колебаний замечаются моменты прохождения этой метки.

Допустим, что метка смещена в положительном направлении от точки равновесия на неизвестное, но очень малое расстояние x , и пусть t_1 — зарегистрированный момент времени первого прохождения метки в положительном направлении, а t_2, t_3, \dots — моменты последующих прохождений.

Если T — время одного колебания (полупериод), а P_1, P_2, P_3, \dots — моменты прохождения точки истинного равновесия, то

$$t_1 = P_1 + \frac{x}{v_1}, \quad t_2 = P_2 + \frac{x}{v_2}, \quad P_2 - P_1 = P_3 - P_2 = T,$$

где v_1, v_2, \dots — последовательные значения скоростей прохождения, которые на очень малых расстояниях x мы можем считать постоянными.

Если ρ есть отношение амплитуды какого-либо колебания к амплитуде последующего колебания, то

$$v_2 = -\frac{1}{\rho} v_1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{v_2} = -\rho \frac{x}{v_1}.$$

Если три прохождения наблюдались в моменты времени t_1, t_2, t_3 , мы находим

$$\frac{x}{v_1} = \frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{(\rho + 1)^2}.$$

Следовательно, время одного колебания равно

$$T = \frac{1}{2} (t_3 - t_1) - \frac{1}{2} \frac{\rho - 1}{\rho + 1} (t_1 - 2t_2 + t_3).$$

Момент второго прохождения истинной точки равновесия равен

$$P_2 = \frac{1}{4} (t_1 + 2t_2 + t_3) - \frac{1}{4} \frac{(\rho - 1)^2}{(\rho + 1)^2} (t_1 - 2t_2 + t_3).$$

Для определения этих трех величин достаточно трех прохождений, однако любое большее число прохождений можно скомбинировать по методу наименьших квадратов. Так, для пяти прохождений

$$T = \frac{1}{10} (2t_5 + t_4 - t_2 - 2t_1) - \frac{1}{10} (t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5) \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \left(2 - \frac{\rho}{1 + \rho^2} \right).$$

Момент третьего прохождения при этом равен

$$P_3 = \frac{1}{8} (t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2t_4 + t_5) - \frac{1}{8} (t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5) \frac{(\rho - 1)^2}{(\rho + 1)^2}.$$

739. Этот же метод можно распространить и на серию, состоящую из любого числа колебаний. Если колебания настолько быстрые, что невозможно регистрировать момент каждого прохождения, мы можем засекают момент каждого третьего или каждого пятого прохождения, следя за тем, чтобы направления соседних регистрируемых прохождений были противоположны. Если колебания регулярно происходят в течение большого промежутка времени, то нет необходимости вести наблюдение все это время. Мы можем начать с наблюдения достаточного числа прохождений, для того чтобы приближенно определить время одного колебания T и момент среднего прохождения P , заметив, в каком направлении — положительном или отрицательном — оно происходит. Затем можно либо продолжать считать колебания, не отмечая моменты прохождения, либо вообще не следить за прибором. Далее мы наблюдаем вторую серию прохождений и находим время одного колебания T' и момент среднего прохождения P' , замечая направление этого прохождения.

Если времена одного колебания T и T' , найденные из двух серий наблюдений, приближенно равны, мы можем перейти к более точному определению периода, комбинируя наблюдения двух серий.

Частное от деления $P' - P$ на T должно получиться очень близким к целому числу, четному или нечетному в соответствии с тем, одинаковы или противоположны направления прохождений P и P' . Если это не так, то вся серия наблюдений бесполезна, но если результат очень близок к целому числу n , то,

разделив $P' - P$ на n , мы найдем значение T , среднее для всего времени колебаний.

740. Найденное таким образом время одного колебания T является фактическим средним временем колебания; к нему необходимо вводить поправки, если мы хотим вывести из него время колебаний при бесконечно малых дугах в отсутствие затухания.

Чтобы свести наблюдаемое время к времени бесконечно малых колебаний, мы заметим, что время колебания с амплитудой c от одного состояния покоя до другого обычно можно представить в виде $T = T_1(1 + \kappa c^2)$, где κ — некоторый коэффициент, который в случае обычного маятника равен $1/64$. Амплитуды следующих друг за другом колебаний равны $c, c\rho^{-1}, c\rho^{-2}, \dots, c\rho^{1-n}$, так что полное время колебаний равно

$$nT = T_1 \left(n + \kappa \frac{c_1^2 \rho^2 - c_n^2}{\rho^2 - 1} \right),$$

где T есть время, полученное из наблюдений.

Следовательно, для нахождения времени при бесконечно малых дугах T_1 мы приближенно имеем

$$T_1 = T \left\{ 1 - \frac{\kappa}{n} \frac{c_1^2 \rho^2 - c_n^2}{\rho^2 - 1} \right\}.$$

Для получения времени T_0 в отсутствие затухания мы имеем (п. 731)

$$T_0 = T_1 \sin \alpha = T_1 \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}.$$

741. Уравнение прямолинейного движения тела под действием притяжения к некоторой неподвижной точке, пропорционального расстоянию, и силы сопротивления, меняющейся пропорционально скорости, следующее:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + \omega^2(x - a) = 0, \quad (1)$$

где x — координата тела в момент времени t , a — координата точки равновесия.

Чтобы решить это уравнение, положим

$$x - a = e^{-kt}y; \quad (2)$$

тогда

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega^2 - k^2)y = 0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения:

$$y = C \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t + \alpha), \quad \text{если } k \text{ меньше чем } \omega; \quad (4)$$

$$y = A + Bt, \quad \text{если } k \text{ равно } \omega; \quad (5)$$

$$y = C' \cosh(\sqrt{k^2 - \omega^2}t + \alpha'), \quad \text{если } k \text{ больше, чем } \omega. \quad (6)$$

Величину x можно получить из y при помощи уравнения (2). Когда k меньше ω , движение состоит из бесконечной серии последовательности колебаний с

постоянным периодом и непрерывно уменьшающейся амплитудой. С ростом k период колебаний увеличивается, а уменьшение амплитуды становится более быстрым.

Когда величина k (половина коэффициента сопротивления) становится равной или большей чем ω (корень квадратный из ускорения на единичном расстоянии от точки равновесия), движение перестает быть колебательным; за время всего движения тело может лишь один раз пройти точку равновесия, после чего оно достигает положения максимального отклонения, а затем начинает возвращаться к точке равновесия, непрерывно приближаясь к ней, но никогда ее не достигая.

Гальванометры, в которых сопротивление столь велико, что в них происходит такого рода движение, называются *апериодическими гальванометрами*. Они полезны во многих экспериментах, но особенно при телеграфной связи, где существование свободных колебаний могло бы совершенно замаскировать те движения, которые предполагается обнаруживать.

Какими бы ни были значения k и ω , величина a (показание шкалы в точке равновесия) может быть выведена из пяти показаний шкалы p, q, r, s, t , взятых через равные промежутки времени по формуле

$$a = \frac{q(rs - qt) + r(pt - r^2) + s(qr - ps)}{(p - 2q + r)(r - 2s + t) - (q - 2r + s)^2}.$$

О наблюдениях с гальванометром

742. Для измерения постоянного тока с помощью тангенс-гальванометра прибор устанавливается таким образом, чтобы плоскость его катушек была параллельна магнитному меридиану, и снимается нулевое показание шкалы. После этого через катушки пропускается ток и наблюдается отклонение магнита, соответствующее его новому положению равновесия. Обозначим его через φ .

Тогда, если H есть горизонтальная магнитная сила, G — коэффициент гальванометра, а γ — сила тока, то

$$\gamma = (H/G) \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Если коэффициент кручения нити подвеса равен τMN (см. п. 452), то мы должны пользоваться уточненной формулой

$$\gamma = (H/G) (\operatorname{tg} \varphi + \tau \varphi \operatorname{sec} \varphi). \quad (2)$$

Наилучшее значение величины отклонения

743. В некоторых гальванометрах можно по желанию менять число витков в катушке, по которым протекает ток. В других гальванометрах заданную часть тока можно отвести от гальванометра с помощью проводника, называемого шунтом. В любом из этих случаев меняется величина G , представляющая собой действие единичного тока на магнит.

Определим значение G , для которого заданная ошибка наблюдаемого отклонения соответствует наименьшей ошибке вычисленного значения силы тока.

Дифференцируя уравнение (1), находим

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{H}{G} \operatorname{sec}^2 \varphi \quad (3)$$

Исключая G ,

$$\frac{d\varphi}{d\gamma} = \frac{1}{2\gamma} \sin 2\varphi. \quad (4)$$

Это выражение имеет максимум при заданном значении γ , когда отклонение равно 45° . Поэтому величину G следовало бы регулировать до тех пор, пока произведение $G\gamma$ не станет как можно более близким к H , т. е. для сильных токов лучше не пользоваться слишком чувствительным гальванометром.

О наилучшем способе подключения тока

744. Если наблюдатель может в любой момент времени замыкать и размыкать цепь при помощи ключа, то целесообразно работать ключом таким образом, чтобы магнит подходил к положению равновесия с наименьшей возможной скоростью. Для этой цели Гаусс рекомендовал следующий метод.

Предположим, что магнит находится в положении равновесия и ток отсутствует. Наблюдалатель замыкает цепь на короткий промежуток времени, так что магнит приходит в движение в направлении нового положения равновесия. Затем наблюдатель прерывает контакт. Теперь сила направлена к первоначальному положению равновесия, и движение становится замедленным. Если сделать так, что магнит остановится точно в новом положении равновесия, и в этот момент замкнуть цепь, сохраняя контакт и далее, то магнит будет оставаться в покое в новом положении равновесия.

Пренебрежем влиянием сопротивления, а также различием между значениями полной силы в старом и новом положениях. Поскольку мы хотим, чтобы новая сила за время своего первого воздействия создала ровно столько кинетической энергии, сколько уничтожается первоначальной силой, когда контур разомкнут, то мы должны продолжать первое действие тока до тех пор, пока магнит не пройдет половину пути от первого положения равновесия до второго. Тогда, если на второй половине пути на магнит действует первоначальная сила, она в точности остановит его. Время, необходимое для прохождения от точки максимального отклонения до точки, находящейся на полпути к положению равновесия, составляет одну треть времени прохождения от состояния покоя до состояния покоя.

Поэтому оператор, предварительно установив время одного колебания от состояния покоя до состояния покоя, замыкает контакт на одну треть этого интервала времени, потом размыкает его снова на треть того же интервала и затем снова замыкает цепь уже до конца всего опыта. Магнит после этого либо будет находиться в состоянии покоя, либо будет совершать настолько малые колебания, что можно сразу же проводить наблюдения, не дожидаясь прекращения этих движений. Для подобных опытов можно использовать метроном, отрегулировав его таким образом, чтобы за время каждого колебания магнита он отстукивал трижды. Это правило несколько усложняется, когда величина сопротивления оказывается такой, что его следует принимать во внимание; однако в этом случае колебания затухают настолько быстро, что нет необходимости принимать какие-либо поправки к этому правилу.

Когда необходимо вернуть магнит в первоначальное положение, контур размыкается на одну треть времени одного колебания, затем замыкается на то же самое время и затем окончательно размыкается. Это приводит магнит в состояние покоя в его первоначальном положении.

Если необходимо снять показания при обратном включении сразу же после снятия прямых показаний, то контур размыкается на время одного колебания, а затем гальванометр включается в обратном направлении. Это приводит магнит в состояние покоя при обратном направлении тока.

Измерение при первом колебании

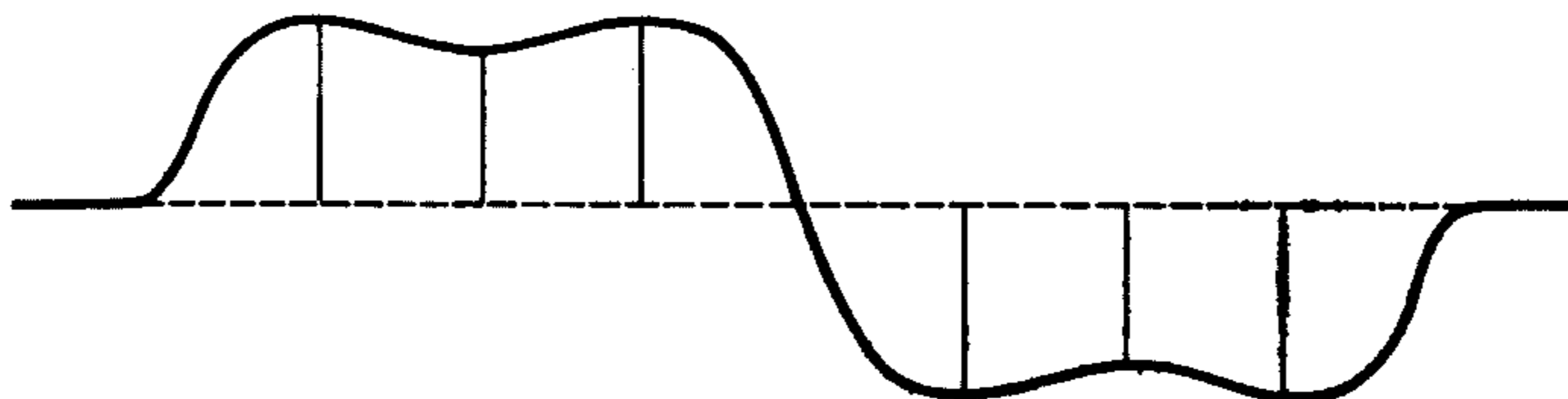
745. Когда нет времени сделать более чем одно наблюдение, ток можно измерить по максимальному отклонению при первом колебании магнита. Если сопротивление отсутствует, то постоянное отклонение φ равно половине максимального отклонения. Если же сопротивление таково, что отношение амплитуд соседних колебаний равно ρ , то отклонение φ , соответствующее точке равновесия, есть $\varphi = \frac{\vartheta_0 + \rho\vartheta_1}{1 + \rho}$, где ϑ_0 — нулевое показание шкалы, а ϑ_1 — максимальное отклонение при первом колебании.

Таким способом можно вычислить отклонение, не дожидаясь, пока магнит придет в состояние покоя в новом положении равновесия.

Как выполнить серию наблюдений

746. Наилучший способ для проведения значительного числа измерений постоянного тока состоит в том, чтобы наблюдать три элонгации при положительном направлении тока, далее разомкнуть контакт примерно на время одного

Рис. 58



колебания, с тем чтобы магнит перешел в положение отрицательного отклонения, затем изменить направление тока на противоположное и наблюдать три последовательные элонгации на отрицательной стороне, далее снова прервать контакт на время одного колебания и повторить наблюдения на положительной стороне и так далее, пока не будет произведено достаточное число наблюдений. При этом исключаются ошибки, которые могут возникнуть из-за изменения направления земной магнитной силы в течение времени наблюдения. Оператор, тщательно следя за временем замыкания и размыкания контакта, может легко регулировать размах колебаний, так чтобы сделать их достаточно малыми, но отчетливо различимыми. Движение магнита графически представлено на рис. 58, где абсцисса соответствует времени, а ордината — отклонению магнита. Если $\vartheta_1 \dots \vartheta_6$ — наблюдаемые алгебраические значения элонгаций, то отклонение магнита определяется уравнением $8\varphi = \vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \vartheta_3 - \vartheta_4 - 2\vartheta_5 - \vartheta_6$.

Метод умножения

747. В некоторых случаях, когда отклонение магнита гальванометра очень мало, может быть целесообразно увеличить визуальный эффект путем изменения направления тока в надлежащие моменты времени, с тем чтобы магнит стал

совершать колебательные движения. Для этой цели после установления времени одного колебания магнита в положительном направлении пропускается ток в течение времени T , а затем в течение равного ему промежутка времени ток пропускается в отрицательном направлении и так далее. Когда движение магнита станет видимым, мы можем менять направление тока в моменты наибольшего отклонения.

Пусть магнит находится в положении крайнего положительного отклонения ϑ_0 , а через катушку пропускается ток в отрицательном направлении. Тогда точкой равновесия будет φ , а максимальное отрицательное отклонение магнита ϑ_1 будет таким, что

$$-\rho(\varphi + \vartheta_1) = (\vartheta_0 + \varphi), \text{ или } -\rho\vartheta_1 = \vartheta_0 + (\rho + 1)\varphi.$$

Аналогично, если теперь ток сделать положительным на то время, пока магнит поворачивается в положение ϑ_2 :

$$\rho\vartheta_2 = -\vartheta_1 + (\rho + 1)\varphi, \text{ или } \rho^2\vartheta_2 = \vartheta_0 + (\rho + 1)^2\varphi,$$

и если направление тока меняется на противоположное последовательно n раз, мы находим

$$(-1)^n \vartheta_n = \rho^{-n} \vartheta_0 + \frac{\rho + 1}{\rho - 1} (1 - \rho^{-n}) \varphi,$$

откуда можно найти φ в виде

$$\varphi = (\vartheta_n - \rho^{-n} \vartheta_0) \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \frac{1}{1 - \rho^{-n}}.$$

Если число n столь велико, что величиной ρ^{-n} можно пренебречь, то это выражение принимает вид $\varphi = \vartheta_n \frac{\rho - 1}{\rho + 1}$.

Для применения этого метода при точных измерениях необходимо точно знать ρ — величину отношения амплитуд двух соседних колебаний, зависящую от сопротивлений, действующих на магнит. Неточности, возникающие из-за того, что трудно избежать неопределенности в значении ρ , обычно перевешивают преимущества больших угловых отклонений. И только когда мы хотим установить существование очень малых токов, создавая с их помощью видимое движение стрелки, этот метод действительно полезен.

Об измерении переходных токов

748. Когда ток длится только в течение небольшой доли времени колебания магнита гальванометра, общее количество электричества, перенесенное током, можно измерить через угловую скорость, сообщенную магниту за время прохождения тока; эту величину можно определить по величине максимального отклонения при первом колебании магнита.

Если мы пренебрежем сопротивлением, которое приводит к затуханию колебаний магнита, исследование становится очень простым.

Пусть γ — сила тока в произвольный момент времени, а Q — количество электричества, которое он переносит; тогда

$$Q = \int \gamma dt. \quad (1)$$

Пусть M — магнитный момент, A — момент инерции магнита вместе с подвешенной аппаратурой, а ϑ — угол, который образует магнит с плоскостью катушки; тогда

$$A \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + MH \sin \vartheta = MG\gamma \cos \vartheta. \quad (2)$$

Если время прохождения тока очень мало, мы можем произвести интегрирование по t в течение этого короткого промежутка времени, не принимая во внимание изменение ϑ , и мы найдем

$$A \frac{d\vartheta}{dt} = MG \cos \vartheta_0 \int \gamma dt + C = MGQ \cos \vartheta_0 + C. \quad (3)$$

Отсюда видно, что прохождение заряда Q создает момент количества движения магнита, равный $MGQ \cos \vartheta_0$, где ϑ_0 есть значение ϑ в момент прохождения тока. Если первоначально магнит находился в положении равновесия, мы можем положить $\vartheta_0 = 0$, $C = 0$.

Далее магнит свободно поворачивается и достигает отклонения ϑ_1 . Если сопротивление отсутствует, работа, совершаемая против магнитной силы за время этого перемещения, равна $MH(1 - \cos \vartheta_1)$.

Энергия, сообщенная магниту током, равна $\frac{1}{2} A \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2$.

Приравнивая эти величины, мы находим

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = 2 \frac{MH}{A} (1 - \cos \vartheta_1), \quad (4)$$

откуда

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 2 \sqrt{\frac{MH}{A}} \sin \frac{1}{2} \vartheta_1 = \frac{MG}{A} Q \quad (\text{согласно (3)}). \quad (5)$$

Но время T одного колебания магнита от состояния покоя до состояния покоя равно

$$T = \pi \sqrt{A/(MH)}, \quad (6)$$

и мы находим

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin \frac{1}{2} \vartheta_1, \quad (7)$$

где H — горизонтальная магнитная сила, G — коэффициент гальванометра, T — время одного колебания и ϑ_1 — величина первого максимального отклонения магнита.

749. Во многих реальных экспериментах углы максимального отклонения невелики, поэтому мы легко можем учесть действие сопротивления, ибо можем рассматривать уравнение движения как линейное уравнение.

Пусть магнит находится в положении равновесия в состоянии покоя, пусть ему мгновенно сообщена угловая скорость v , и пусть его первая элонгация равна ϑ_1 .

Уравнение движения следующее:

$$\vartheta = Ce^{-\omega_1 t \operatorname{tg} \beta} \sin \omega_1 t, \quad (8)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = C\omega_1 \sec \beta e^{-\omega_1 t \operatorname{tg} \beta} \cos (\omega_1 t + \beta) \quad (9)$$

Когда $t=0$, $\vartheta=0$ и $\frac{d\vartheta}{dt} = C\omega_1 = v$.

Когда $\omega_1 t + \beta = \frac{\pi}{2}$,

$$\vartheta = Ce^{-\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{tg} \beta} \cos \beta = \vartheta_1. \quad (10)$$

Следовательно,

$$\vartheta_1 = \frac{v}{\omega_1} e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{tg} \beta} \cos \beta. \quad (11)$$

Далее, согласно п. 741,

$$\frac{MH}{A} = \omega^2 = \omega_1^2 \sec^2 \beta, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\lambda}{\pi}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{T_1} \quad (13)$$

и в соответствии с уравнением (5)

$$v = \frac{MG}{A} Q. \quad (14)$$

Следовательно,

$$\vartheta_1 = \frac{QG}{H} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda^2}{T_1}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \quad (15)$$

и

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T_1 \vartheta_1}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}}, \quad (16)$$

что дает выражение для величины первой элонгации через количество электричества в переходном токе и наоборот; здесь T_1 есть полученное из наблюдений время одного колебания с учетом влияния реального затухания. При малых λ мы можем пользоваться приближенной формулой

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda\right) \vartheta_1. \quad (17)$$

Метод отдачи

750. Изложенный выше метод предполагает, что во время протекания через катушку переходного тока магнит находится в положении равновесия в состоянии покоя. Если мы желаем повторить опыт, мы должны ждать, пока магнит снова не окажется в состоянии покоя. В некоторых случаях, однако, когда мы можем создавать переходные токи равной интенсивности и можем делать это в любой момент времени по своему усмотрению, наиболее удобным для осуществ-

ления непрерывной серии измерений является следующий метод, описанный Вебером³.

Предположим, что мы привели магнит в состояние колебательного движения при помощи переходного тока, величина которого характеризуется значением Q_0 . Если для краткости мы запишем

$$\frac{G}{H} \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{T_1} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} = K, \quad (18)$$

то первая элонгация

$$\vartheta_1 = KQ_0 = a_1. \quad (19)$$

Мгновенно сообщенная вначале магниту скорость равна:

$$v_0 = (MG/A)Q_0. \quad (20)$$

Когда магнит, возвращаясь, проходит через точку равновесия в отрицательном направлении, его скорость равна:

$$v_1 = -v_0 e^{-\lambda}. \quad (21)$$

Следующая отрицательная элонгация будет

$$\vartheta_2 = -\vartheta_1 e^{-\lambda} = b_1. \quad (22)$$

Когда магнит снова вернется в точку равновесия, его скорость будет равна

$$v_2 = v_0 e^{-2\lambda}. \quad (23)$$

Пусть теперь в тот момент времени, когда магнит находится в нулевой точке, через катушку пропущен мгновенный ток, полный заряд в котором равен $-Q$. Это изменит скорость магнита v_2 до величины $v_2 - v$, где

$$v = (MG/A)Q. \quad (24)$$

Если Q больше, чем $Q_0 e^{-2\lambda}$, то новая скорость будет отрицательной и равной $-(MG/A)(Q - Q_0 e^{-2\lambda})$.

Магнит, таким образом, станет двигаться в противоположном направлении, и следующая элонгация будет отрицательной:

$$\vartheta_3 = -K(Q - Q_0 e^{-2\lambda}) = c_1 = -KQ + \vartheta_1 e^{-2\lambda}. \quad (25)$$

После этого магниту предоставляется возможность достигнуть положительной элонгации

$$\vartheta_4 = -\vartheta_3 e^{-\lambda} = d_1 = e^{-\lambda}(KQ - a_1 e^{-2\lambda}), \quad (26)$$

а когда он вновь придет в точку равновесия, пропускается положительный ток с общим зарядом Q . Это отбрасывает магнит обратно в положительном направлении до положительной элонгации

$$\vartheta_5 = KQ + \vartheta_3 e^{-2\lambda}, \quad (27)$$

³ Gauss and Weber, *Resultate des Magnetischen Vereins*, 1838, p. 98.

или, называя это первой элонгацией второй серии из четырех,

$$a_2 = KQ(1 - e^{-2\lambda}) + a_1 e^{-4\lambda}. \quad (28)$$

Продолжая аналогичным образом, т. е. наблюдая две элонгации + и —, затем посылая отрицательный ток и наблюдая две элонгации — и +, затем снова посылая положительный ток и так далее, мы получаем серию, состоящую из наборов по четыре элонгации, в каждой из которых

$$(d-b)/(a-c) = e^{-\lambda} \quad (29)$$

и

$$KQ = \frac{(a-b)e^{-2\lambda} + d - c}{1 + e^{-\lambda}}; \quad (30)$$

Если проведено n таких наблюдений, то логарифмический декремент мы находим из уравнения

$$\frac{\Sigma(d) - \Sigma(b)}{\Sigma(a) - \Sigma(c)} = e^{-\lambda}, \quad (31)$$

а Q — из уравнения

$$KQ(1 + e^{-\lambda})(2n - 1) = \Sigma_n(a - b - c + d)(1 + e^{-2\lambda}) - (a_1 - b_1) - (d_n - c_n)e^{-2\lambda}. \quad (32)$$

Движение магнита при использовании метода отдачи графически представлено на рис. 59, где абсцисса представляет время, а ордината — отклонение магнита в этот момент времени, см. п. 760.

Метод умножения

751. Если пропускать переходный ток каждый раз, когда магнит проходит через нулевую точку, причем всегда так, чтобы увеличивать скорость магнита, то для последовательных элонгаций ϑ_1, ϑ_2 будем иметь

$$\vartheta_2 = -KQ - e^{-\lambda}\vartheta_1, \quad (33)$$

$$\vartheta_3 = KQ - e^{-\lambda}\vartheta_2, \quad (34)$$

Предельное значение, к которому стремится элонгация после большого числа колебаний, получается, если положить $\vartheta_n = -\vartheta_{n-1}$; откуда мы находим

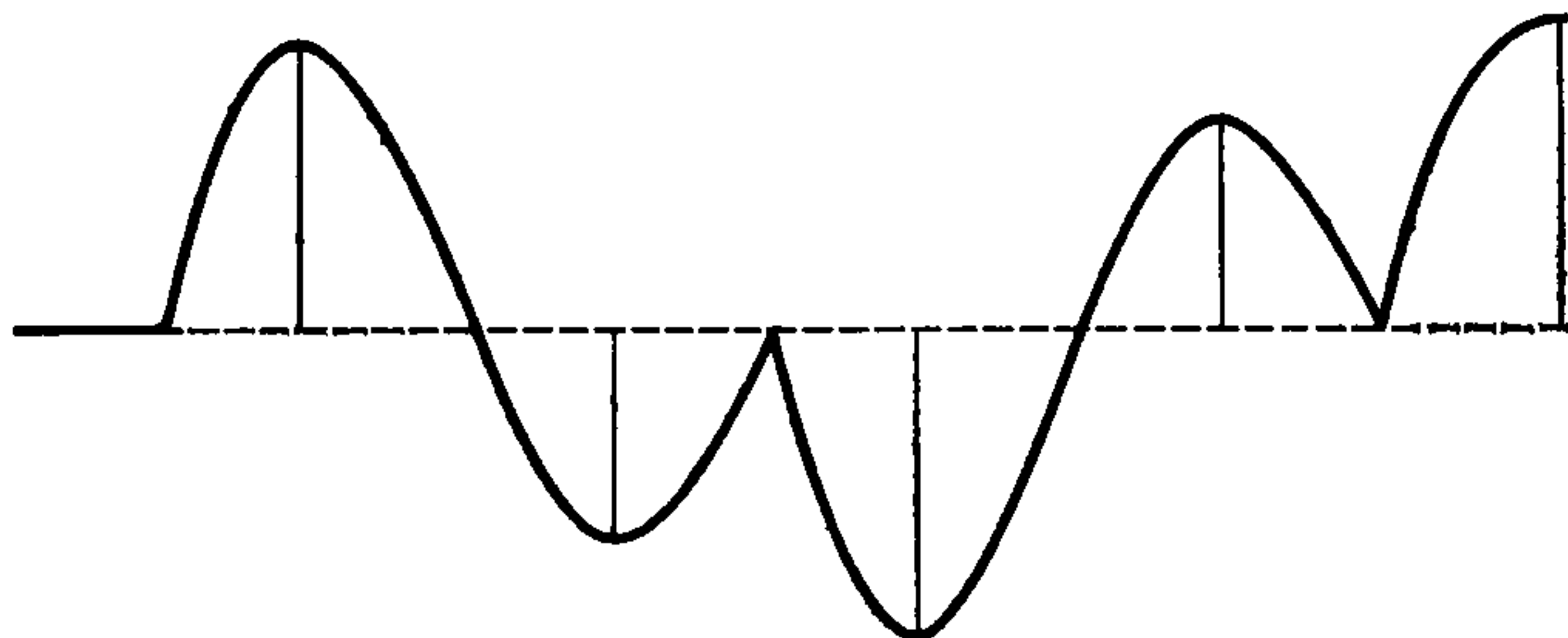
$$\vartheta = \pm \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} KQ. \quad (35)$$

Если величина λ мала, то значение предельной элонгации может быть большим, а поскольку такой опыт продолжается долго и предполагает точное определение λ (малые ошибки в λ вносят большую ошибку при определении Q), то этот метод редко используется для количественных измерений, его следует использовать для получения данных о наличии или отсутствии токов, слишком слабых для того, чтобы их можно было обнаружить непосредственно.

Во всех опытах, в которых переходные токи воздействуют на движущийся магнит гальванометра, существенно, чтобы весь ток успел пройти за то время, пока расстояние от магнита до нулевой точки составляет малую долю полной

элонгации. Период колебаний поэтому должен быть большим по сравнению с временем, необходимым для создания тока, а оператор должен постоянно следить за движением магнита, так чтобы регулировать момент прохождения тока в соответствии с моментом прохождения магнита через точку равновесия.

Рис. 59



Чтобы оценить ошибку, вносимую в связи с неспособностью оператора включить ток в необходимый момент времени, заметим, что увеличение элонгации, обусловленное импульсом, меняется как

$$e^{\varphi \operatorname{tg} \beta} \cos (\varphi + \beta),$$

о максимально, когда $\varphi=0$. Следовательно, ошибка, возникающая из-за несвоевременности включения тока, всегда будет приводить к недооценке его величины; ошибку можно оценить, сравнив с единицей косинус фазы колебания в момент прохождения тока.

ГЛАВА XVII

СРАВНЕНИЕ КАТУШЕК

Экспериментальное определение электрических постоянных катушки

752. В п. 717 мы поняли, что радиус катушки чувствительного гальванометра должен быть мал, но катушка при этом должна содержать много витков провода. Определение электрических постоянных такой катушки путем прямого измерения ее формы и размеров было бы чрезвычайно затруднительно даже при наличии доступа к каждому витку провода для его измерения. Фактически же не только большая часть витков полностью скрыта под внешними витками, но у нас даже нет уверенности в том, что давление внешних витков не изменило формы внутренних после наматывания провода.

Следовательно, электрические постоянные катушки лучше измерять путем прямого электрического сравнения с некоторой эталонной катушкой, постоянные которой известны.

Поскольку размеры эталонной катушки должны определяться из реальных измерений, она должна иметь большие размеры, с тем чтобы неизбежные ошибки измерения ее диаметра и периметра окружности оказались бы по возможности малыми по сравнению с измеряемыми величинами. Каркас, внутри которого

наматывается катушка, должен иметь прямоугольное сечение, а размеры сечения должны быть малы по сравнению с радиусом катушки. Это необходимо не столько для уменьшения поправок, связанных с конечным размером сечения, сколько для того, чтобы устранить всякую неопределенность относительно расположения тех витков катушки, которые скрыты под внешними витками¹.

Основные постоянные, которые мы хотим определить, следующие.

(1). Магнитная сила, создаваемая в центре катушки единичным током. В п. 700 эта величина обозначена через G_1 . (2). Магнитный момент катушки с единичным током. Это величина g_1 .

753. Как определить G_1 . Поскольку катушки работающих гальванометров гораздо меньше эталонной катушки, мы поместим гальванометр внутрь эталонной катушки так, чтобы их центры совпадали, а плоскости обеих катушек были вертикальны и параллельны земной магнитной силе. Таким образом, мы получили разностный гальванометр, одной из катушек которого является эталонная катушка с известным значением G_1 , тогда как для второй катушки значение этой величины G'_1 мы должны определить.

На магнит, подвешенный в центре катушки гальванометра, действуют токи обеих катушек. Если сила тока в эталонной катушке равна γ , а в катушке гальванометра γ' , и если эти токи, текущие в противоположных направлениях, производят отклонение магнита δ , то

$$H \operatorname{tg} \delta = G'_1 \gamma' - G_1 \gamma, \quad (1)$$

где H — горизонтальная магнитная сила Земли.

Если токи подобраны так, что отклонение отсутствует, мы можем найти G'_1 из уравнения

$$G'_1 = (\gamma/\gamma') G_1. \quad (2)$$

Отношение γ/γ' можно определить несколькими способами. Поскольку значение G_1 обычно для гальванометра больше, чем для эталонной катушки, мы можем построить контур таким образом, чтобы весь ток вначале протекал через эталонную катушку, а далее разделялся так, чтобы ток γ' протекал через гальванометр и катушки сопротивления с общим сопротивлением R_1 , а оставшийся ток $\gamma - \gamma'$

¹ Большие тангенс-гальванометры иногда делают с одним круговым проводящим кольцом значительной толщины, обладающим достаточной жесткостью, чтобы сохранять свою форму без какой-либо опоры. Но для эталонного гальванометра этот вариант нехорош. Распределение тока внутри проводника зависит от относительной проводимости его различных частей. Поэтому любые скрытые разрывы однородности металла могут приводить к тому, что основной поток электричества будет протекать ближе либо к внешнему, либо к внутреннему ободу кругового кольца. При этом истинный путь тока становится неопределенным. Кроме того, при однократном протекании тока по кольцу необходимо принимать особые меры для предотвращения какого-либо действия на подвешенный магнит, обусловленного током на его пути к кольцу и от кольца, ибо в этом случае ток в электродах равен току, циркулирующему по окружности. При построении многих приборов действие этой части тока, по-видимому, совсем упущено из виду.

Наиболее совершенный метод состоит в том, чтобы один из электродов изготавливать в виде металлической трубки, а другой — в виде провода, покрытого изолирующим материалом и помещенного внутри трубки концентрично ей. При таком устройстве внешнее действие электродов равно нулю (п. 683).

протекал через другой набор катушек сопротивления, общее сопротивление которых равно R_2 .

Тогда в соответствии с п. 276 мы имеем

$$\gamma' R_1 = (\gamma - \gamma') R_2, \quad (3)$$

$$\gamma / \gamma' = (R_1 + R_2) / R_2, \quad (4)$$

$$G_1' = G_1 (R_1 + R_2) / R_2. \quad (5)$$

При наличии неопределенности в фактическом значении величины сопротивления катушки гальванометра (обусловленной, скажем, неопределенностью ее температуры) можно добавить к ней катушку сопротивления, так чтобы сопротивление самого гальванометра составляло малую часть R_1 и потому вносило бы лишь небольшую неопределенность в окончательный результат.

754. Для определения g_1 — магнитного момента малой катушки, обусловленного протекающим по ней единичным током, — магнит по-прежнему остается подвешенным в центре эталонной катушки, а малая катушка перемещается параллельно самой себе вдоль общей оси обеих катушек до тех пор, пока один и тот же ток, текущий по катушкам в противоположных направлениях, перестанет отклонять магнит. Если расстояние между центрами катушек равно r , мы имеем

$$G_1 = 2 \frac{g_1}{r^3} + 3 \frac{g_2}{r^4} + 4 \frac{g_3}{r^5} + \dots \quad (6)$$

Повторяем опыт, поместив малую катушку по другую сторону от эталонной катушки; измеряя расстояние между положениями малой катушки, мы исключаем неизвестную ошибку в определении центров магнита и малой катушки и избавляемся от членов g_2, g_4, \dots

Если эталонная катушка устроена так, что можно пропустить ток через половину ее витков, задавая тем самым другое значение G_1 , мы можем определить новое значение r и, таким образом (как и в п. 454), исключить член, содержащий g_3 .

Часто, однако, оказывается возможным определить g_3 путем непосредственных, достаточно точных измерений малой катушки, что позволяет вычислить величину поправки к g_1 в соответствии с уравнением

$$g_1 = \frac{1}{2} G_1 r^3 - 2 \frac{g_3}{r^2}, \quad (7)$$

где, согласно п. 700,

$$g_3 = -\frac{1}{8} \pi a^2 (6a^2 + 3\xi^2 - 2\eta^2).$$

Сравнение коэффициентов индукции

755. Существует лишь небольшое число случаев, когда легко выполнить непосредственное вычисление коэффициентов индукции, исходя из формы и положения контуров. Для достижения достаточной степени точности необходимо, чтобы расстояние между контурами допускало точное измерение. Но

когда расстояние между контурами достаточно велико, для того чтобы ошибки измерений не приводили к большим ошибкам в результате, сама величина коэффициента индукции должна сильно уменьшиться. Однако во многих экспериментах требуется сделать коэффициент индукции большим, а это можно осуществить, только тесно сблизив контура. В этом случае метод прямых измерений неприменим, и для определения коэффициента индукции необходимо сравнение его с коэффициентом индукции пары катушек, сконструированных так, что их коэффициент индукции может быть получен путем прямых измерений и расчетов.

Это можно сделать следующим образом.

Пусть A и a будут эталонной парой катушек, а B и b — катушками, которые необходимо сравнить с ними. Соединим A и B в одну цепь и поместим электроды

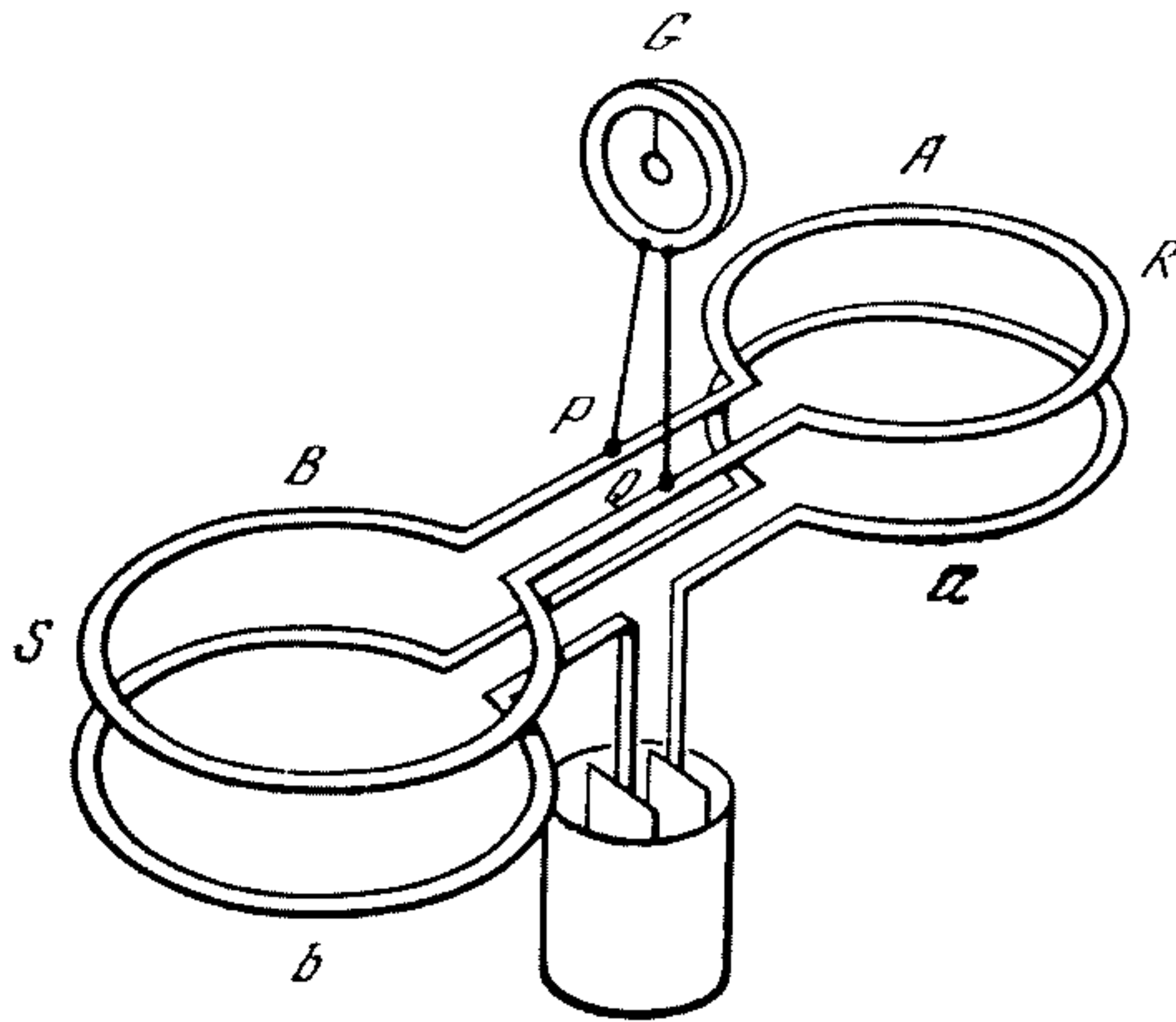


Рис. 60

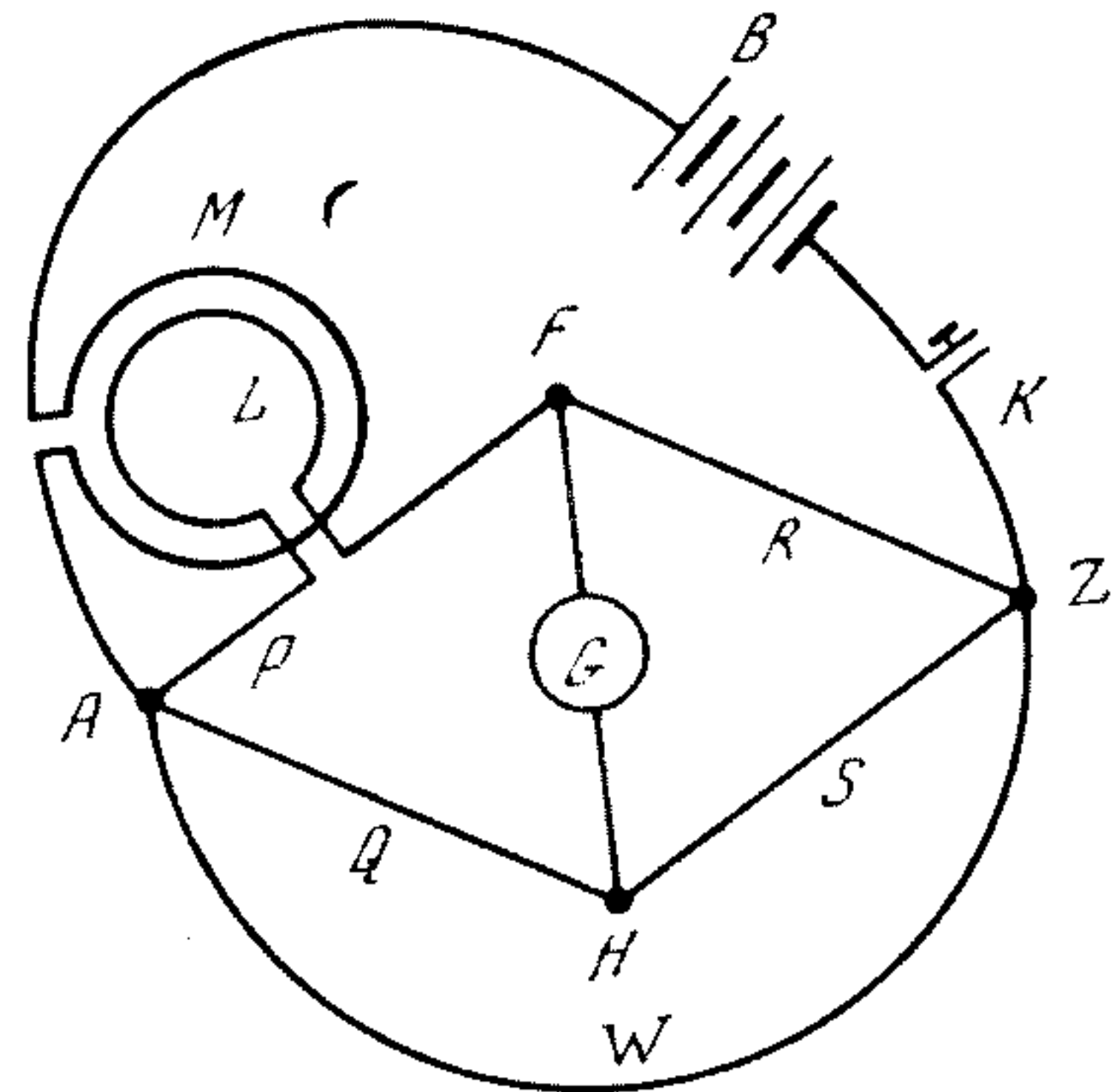


Рис. 61

гальванометра G в точках P и Q ; при этом сопротивление PAQ равно R , сопротивление QBP равно S , а K является сопротивлением гальванометра. Включим a и b в одну цепь с батареей [рис. 60].

Пусть ток в A равен x , ток в B равен y , ток в гальванометре равен $x - y$ и ток в цепи батареи равен γ .

Тогда, если коэффициент индукции между A и a равен M_1 , а между B и b равен M_2 , то интегральный индукционный ток, протекающий через гальванометр при отключении батареи, равен

$$x - y = \gamma \frac{\frac{M_2}{S} - \frac{M_1}{R}}{1 + \frac{K}{R} + \frac{K}{S}}. \quad (8)$$

Подбирая сопротивления R и S такими, чтобы при замыкании или размыкании цепи батареи через гальванометр не протекал ток, можно, измерив отношение S к R , определить отношение M_2 к M_1 .

*Сравнение коэффициента самоиндукции
с коэффициентом взаимной индукции*

756. Пусть в плечо AF мостика Уитстона поставлена катушка, коэффициент самоиндукции которой мы хотим найти. Назовем его L .

В соединяющий провод между точкой A и батареей поставлена еще одна катушка. Коэффициент взаимной индукции между этой катушкой и катушкой в AF равен M . Он может быть измерен методом, описанным в п. 755.

Если ток от A к F равен x , а ток от A к H равен y , то ток через B от Z к A будет равен $x+y$ [рис. 61]. Внешняя электродвижущая сила на пути от A к F равна

$$A-F = Px + L \frac{dx}{dt} + M \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right). \quad (9)$$

Внешняя электродвижущая сила вдоль AH равна

$$A-H = Qy. \quad (10)$$

Если гальванометр, помещенный между F и H , не показывает ни постоянного ни переходного тока, то, поскольку $H-F=0$, из (9) и (10) следует

$$Px = Qy \quad (11)$$

и
$$L \frac{dx}{dt} + M \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right) = 0, \quad (12)$$

откуда
$$L = - \left(1 + \frac{P}{Q} \right) M. \quad (13)$$

Так как величина L всегда положительна, коэффициент M должен быть отрицательным, т. е. токи в катушках, помещенных в P и B , должны течь в противоположных направлениях. При выполнении эксперимента мы можем начать с регулировки сопротивлений, добиваясь равенства

$$PS = QR, \quad (14)$$

что является условием отсутствия постоянного тока, и затем установить расстояние между катушками, при котором гальванометр при подключении или отключении батареи перестанет показывать переходный ток. Если же это расстояние не поддается регулировке, мы можем избавиться от переходного тока, меняя сопротивления Q и S таким образом, чтобы их отношение оставалось неизменным.

Если эта двойная регулировка оказывается слишком трудной, можно принять третий метод. Начав с положения, при котором переходный ток, обусловленный самоиндукцией, слегка превосходит ток взаимной индукции, мы затем можем избавиться от этого неравенства, поместив между A и Z проводник с сопротивлением W . Введение W не влияет на условие отсутствия постоянного тока через гальванометр. Поэтому мы можем избавиться от переходного тока регулировкой одного лишь сопротивления W . Когда мы сделаем это, значение L будет равно

$$L = - \left(1 + \frac{P}{Q} + \frac{P+R}{W} \right) M. \quad (15)$$

Сравнение коэффициентов самоиндукции двух катушек

757. Поставим катушки в два прилегающих плеча мостика Уитстона. Пусть L и N будут коэффициентами самоиндукции катушек, помещенных соответственно в P и R , тогда условие отсутствия тока в гальванометре (см. рис. 61) будет таким:

$$\left(Px + L \frac{dx}{dt} \right) Sy = Qy \left(Rx + N \frac{dx}{dt} \right), \quad (16)$$

откуда $PS = QR$, для того чтобы не было постоянного тока, (17)

и $L/P = N/R$, для того чтобы не было переходного тока. (18)

Следовательно, соответствующей регулировкой сопротивлений можно избавиться как от постоянного, так и от переходного тока, после чего отношение L к N можно определить путем сравнения сопротивлений.

ГЛАВА XVIII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ЕДИНИЦА СОПРОТИВЛЕНИЯ

*Об определении сопротивления катушки
в электромагнитной системе единиц*

758. Сопротивление проводника определяется как отношение численного значения электродвижущей силы к численному значению тока, создаваемого ею в проводнике. Определение величины тока в электромагнитной мере можно осуществить при помощи эталонного гальванометра, если известна величина земной магнитной силы. Более сложным является определение электродвижущей силы, поскольку непосредственно вычислить ее значение мы можем лишь в том случае, когда она возникает в результате движения контура относительно известной магнитной системы.

759. Первое определение сопротивления провода в электромагнитных единицах было выполнено Кирхгоффом¹. Он взял две катушки известной конфигурации A_1 и A_2 и подсчитал их коэффициент взаимной индукции, исходя из геометрических данных относительно их формы и расположения. Эти катушки были включены в контур, содержащий также гальванометр G и батарею B ; две точки контура — точка P , расположенная между катушками, и точка Q , расположенная между батареей и гальванометром, — были соединены проводом, сопротивление которого R необходимо измерить [рис. 62].

Когда ток постоянен, он делится между сопротивлением и цепью гальванометра, вызывая некоторое постоянное отклонение гальванометра. Если теперь катушку A_1 быстро убрать от A_2 , поместив ее в такое положение, при котором коэффициент взаимной индукции между A_1 и A_2 равен нулю (п. 538), то в обоих контурах создается индукционный ток и стрелка гальванометра приобретает

¹ «Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducirten elektrischer Ströme abhängt». Pogg. Ann., LXXVI (April 1849).

некоторый импульс, приводящий к определенному кратковременному отклонению.

Сопротивление провода R находится путем сравнения стационарного отклонения, обусловленного постоянным током, и кратковременного отклонения, обусловленного током индукции.

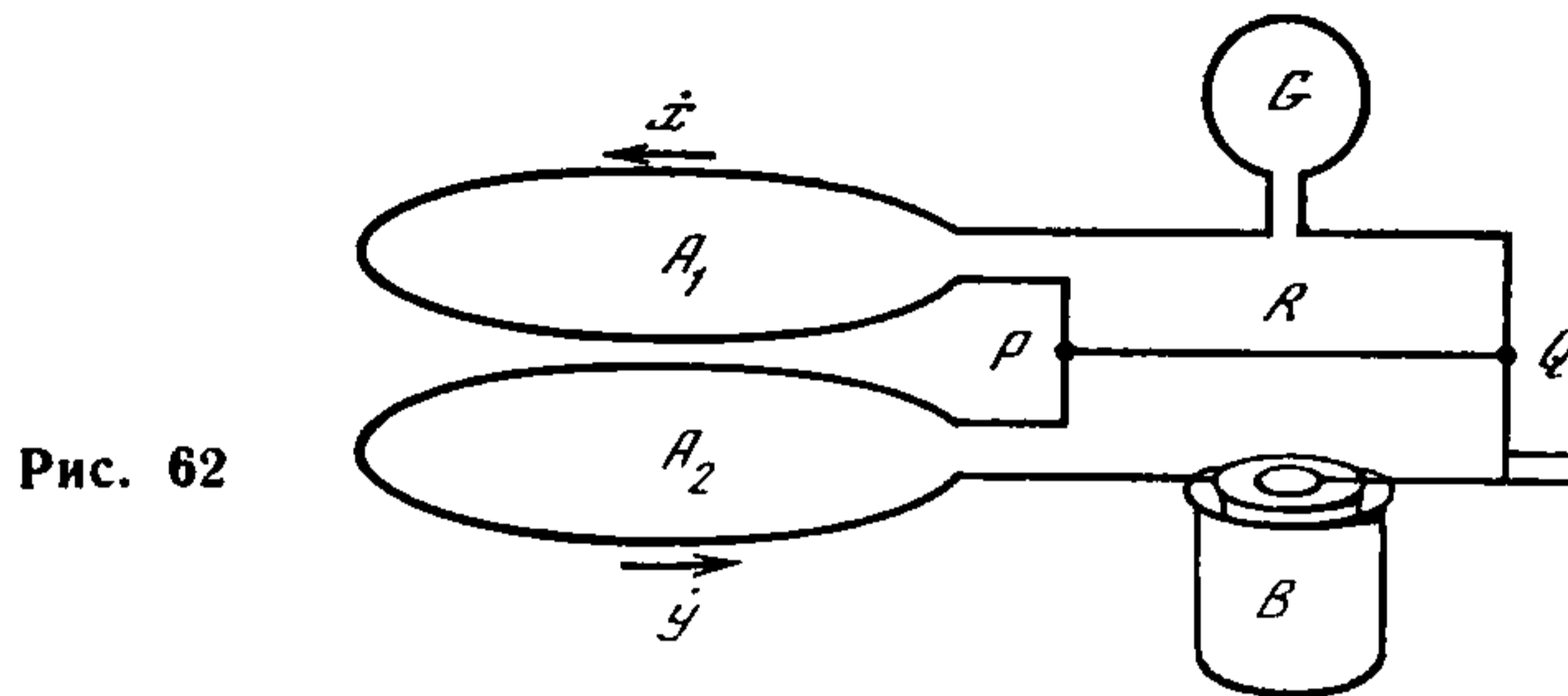


Рис. 62

Пусть сопротивление участка QGA_1P равно K , участка PA_2BQ — B , а участка PQ — R .

Пусть L , M и N — коэффициенты индукции A_1 и A_2 .

Пусть \dot{x} — ток в G , \dot{y} — ток в B ; тогда ток, текущий от P к Q , равен $\dot{x} - \dot{y}$.

Пусть E — электродвижущая сила батареи, тогда

$$(K + R)\dot{x} - R\dot{y} + \frac{d}{dt}(L\dot{x} + M\dot{y}) = 0, \quad (1)$$

$$-R\dot{x} + (B + R)\dot{y} + \frac{d}{dt}(M\dot{x} + N\dot{y}) = E. \quad (2)$$

Когда токи постоянны и все находится в состоянии покоя,

$$(K + R)\dot{x} - R\dot{y} = 0. \quad (3)$$

Если теперь из-за удаления A_1 от A_2 коэффициент M внезапно становится равным нулю, то, интегрируя по t , получим

$$(K + R)x - Ry - M\dot{y} = 0, \quad (4)$$

$$-Rx + (B + R)y - M\dot{x} = \int E dt = 0, \quad (5)$$

откуда

$$x = M \frac{(B + R)\dot{y} + R\dot{x}}{(B + R)(K + R) - R^2}. \quad (6)$$

Подставляя значение \dot{y} , выраженное из (3) через \dot{x} , находим

$$\frac{x}{\dot{x}} = \frac{M}{R} \frac{(B + R)(K + R) + R^2}{(B + R)(K + R) - R^2} \quad (7)$$

$$= \frac{M}{R} \left\{ 1 + \frac{12R^2}{(B + R)(K + R)} + \dots \right\}. \quad (8)$$

Когда и B и K велики по сравнению с R , как это имеет место в опыте Кирхгоффа, то это уравнение сводится к следующему:

$$\frac{x}{\dot{x}} = \frac{M}{R}. \quad (9)$$

Одна из этих величин — x — находится по отбросу стрелки гальванометра, обусловленному индукционным током, см. п. 768. Постоянный ток \dot{x} находится по стационарному отклонению, обусловленному этим током, см. п. 746. Величина M находится либо непосредственными расчетами, исходя из геометрических данных, либо путем сравнения с парой катушек, для которой такой расчет уже проделан, см. п. 755. Через эти три величины можно определить R в электромагнитной мере.

Эти методы требуют определения периода колебаний магнита гальванометра а также логарифмического декремента этих колебаний.

*Веберовский метод переходных токов*²

760. Катушка значительных размеров укрепляется на оси таким образом, чтобы она могла вращаться вокруг вертикального диаметра. Провод этой катушки соединен с проводом тангенс-гальванометра и образует с ним единый контур. Пусть сопротивление этого контура равно R и пусть большая катушка, ориентированная своим положительным торцом перпендикулярно магнитному меридиану, быстро повернулась на полоборота. Из-за наличия земной магнитной силы возникает индуцированный ток; полное количество электричества в этом токе, измеренное в электромагнитных единицах, будет равно

$$Q = 2g_1 H / R, \quad (1)$$

где g_1 — магнитный момент катушки, когда по ней протекает единичный ток, который в случае большой катушки можно определить непосредственно, измерив геометрические размеры катушки и подсчитав сумму площадей ее витков; H — горизонтальная составляющая земного магнетизма и R — сопротивление контура, образованного катушкой и гальванометром. Этот ток приводит в движение магнит гальванометра.

Если первоначально магнит покоился, а перемещение катушки произошло за время, составляющее малую долю периода колебаний магнита, то, пренебрегая сопротивлением движению магнита, согласно п. 748, имеем

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin(\vartheta/2), \quad (2)$$

где G — постоянная гальванометра, T — время одного колебания магнита (полупериод), ϑ — угол максимального наблюдаемого отклонения. Из этих уравнений получаем

$$R = \pi G g_1 \frac{1}{T \sin(\vartheta/2)}. \quad (3)$$

Величина H не фигурирует в этом результате при условии, что она одинакова в месте расположения катушки и в месте расположения гальванометра. Не

² *Elekt. Maasb.*; or *Pogg. Ann.*, LXXXII, p. 337—369 (1851).

следует считать, что это всегда имеет место; в этом следует убедиться, сравнивая периоды колебаний одного и того же магнита сначала в одном месте, а затем — в другом.

761. Чтобы выполнить серию наблюдений, Вебер вначале устанавливал катушку параллельно магнитному меридиану. Затем поворачивал ее положительным торцом к северу и наблюдал первую элонгацию магнита, обусловленную отрицательным током. После этого он наблюдал вторую элонгацию свободно колеблющегося магнита, а когда магнит на пути назад проходил точку равновесия, поворачивал катушку положительным торцом к югу. Это отбрасывало магнит в направлении положительного торца. Серия измерений продолжалась, как и в п. 750, и ее результат давал поправку к значению сопротивления. Таким способом устанавливалась величина сопротивления составного контура, образованного катушкой и гальванометром.

Во всех таких экспериментах для получения достаточно больших отклонений провод следует изготавливать из меди — металла, который, хотя и является наилучшим проводником, обладает тем недостатком, что его сопротивление существенно меняется при изменении температуры. Определение же температуры каждой из частей прибора также весьма затруднительно. Поэтому, чтобы обеспечить постоянство результатов, получаемых в этом опыте, сопротивление контура следует сравнивать с сопротивлением тщательно изготовленной резистивной катушки как до, так и после каждого опыта.

Веберовский метод, состоящий в наблюдении декремента колебаний магнита

762. Магнит, обладающий значительным магнитным моментом, подвешивается в центре катушки гальванометра. Измеряются период и логарифмический декремент колебаний вначале при разомкнутом, а затем при замкнутом контуре гальванометра; проводимость катушки гальванометра выводится из того сопротивления, которое токи, индуцируемые в ней движением магнита, оказывают этому движению.

Если T — наблюдаемое время одного колебания, а λ — неперовский логарифмический декремент каждого отдельного колебания, то, записав

$$\omega = \pi/T \tag{1}$$

$$\alpha = \lambda/T, \tag{2}$$

и получим уравнение движения магнита в виде

$$\varphi = Ce^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta). \tag{3}$$

Это выражает установленный из наблюдений характер движения. Мы должны сравнить его с динамическими уравнениями движения.

Пусть M — коэффициент индукции между катушкой гальванометра и подвешенным магнитом. Его можно представить в виде

$$M = G_1 g_1 P_1(\vartheta) + G_2 g_2 P_2(\vartheta) + \dots, \tag{4}$$

где коэффициенты G_1, G_2, \dots относятся к катушке, g_1, g_2, \dots — к магниту, а $P_1(\vartheta), P_2(\vartheta), \dots$ — зональные гармоники, зависящие от угла между осями катушки и магнита, см. п. 700. Располагая определенным образом катушки

гальванометра и составляя подвешенный магнит из нескольких магнитов, расположенных рядом друг с другом и на соответствующих расстояниях друг от друга, можно сделать так, что в выражении для M все члены после первого будут пренебрежимо малы по сравнению с ним. Если мы положим также $\varphi = (\pi/2) - \vartheta$, то сможем написать

$$M = Gm \sin \varphi, \quad (5)$$

где G — главный коэффициент гальванометра, m — магнитный момент магнита, φ — угол между осью магнита и плоскостью катушки, который в этом опыте всегда является малым.

Если L — коэффициент самоиндукции катушки, R — ее сопротивление, а γ — ток в катушке, то

$$\frac{d}{dt} (L\gamma + M) + R\gamma = 0, \quad (6)$$

или
$$L \frac{d\gamma}{dt} + R\gamma + Gm \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = 0. \quad (7)$$

Момент силы, с которым ток γ действует на магнит, равен $\gamma (dM/d\varphi)$, или $Gm\gamma \cos \varphi$. В этом опыте угол φ настолько мал, что мы можем положить $\cos \varphi = 1$.

Предположим, что уравнение движения при разомкнутом контуре

$$A \frac{d^2\varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = 0, \quad (8)$$

где A — момент инерции подвешенной аппаратуры; $B (d\varphi/dt)$ выражает сопротивление, возникающее из-за вязкости воздуха, нити подвеса и т. п., а $C\varphi$ выражает момент силы, возникающий из-за действия земного магнетизма, кручения устройства подвеса и т. п., который стремится возвратить магнит в положение равновесия.

Уравнение движения при учете действия тока будет

$$A \frac{d^2\varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = Gm\gamma. \quad (9)$$

Чтобы найти движение магнита, мы должны это уравнение скомбинировать с (7) и исключить γ . В результате получим линейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\left(L \frac{d}{dt} + R \right) \left(A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + C \right) \varphi + G^2 m^2 \frac{d\varphi}{dt} = 0. \quad (10)$$

Нам, однако, не придется решать это уравнение, поскольку параметрами задачи являются наблюдаемые элементы движения магнита и именно из них мы должны определить величину R .

Пусть значения α и ω в уравнении (3) равны α_0 и ω_0 , когда контур разомкнут. В этом случае сопротивление R бесконечно, и уравнение (10) сводится к (8). Таким образом, мы находим

$$B = 2A\alpha_0, \quad C = A(\alpha_0^2 + \omega_0^2). \quad (11)$$

Разрешая уравнение (10) относительно R и записывая

$$\frac{d}{dt} = -(\alpha + i\omega), \quad i = \sqrt{-1}, \quad (12)$$

мы находим

$$R = \frac{G^2 m^2}{A} \frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega - 2\alpha_0(\alpha + i\omega) + \alpha_0^2 + \omega_0^2} + L(\alpha + i\omega). \quad (13)$$

Так как величина ω обычно много больше величины α , то наилучшее значение для R можно получить, приравняв нулю члены, стоящие перед $i\omega$:

$$R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + \frac{1}{2} L \left(3\alpha - \alpha_0 - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha - \alpha_0} \right). \quad (14)$$

Мы можем также получить значение R путем приравнивания нулю членов, не содержащих i , но поскольку эти члены малы, то такое уравнение полезно только как средство проверки точности наблюдений. Из этих уравнений мы находим следующее проверочное уравнение:

$$\begin{aligned} & G^2 m^2 \{ \alpha^2 + \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2 \} \\ & = LA \{ (\alpha - \alpha_0)^4 + 2(\alpha - \alpha_0)^2 (\omega^2 + \omega_0^2) + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку член $LA\omega^2$ очень мал по сравнению с $G^2 m^2$, это уравнение дает

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \alpha_0^2 - \alpha^2 \quad (16)$$

и уравнение (14) можно записать так:

$$R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + 2L\alpha. \quad (17)$$

В этом выражении G можно определить либо в результате измерения линейных размеров катушки гальванометра, либо лучше, путем сравнения с эталонной катушкой в соответствии с методом п. 753. A является моментом инерции магнита и подвешенной вместе с ним аппаратуры; его следует находить соответствующим динамическим методом; величины ω , ω_0 , α и α_0 устанавливаются из наблюдений.

Определение величины m — магнитного момента подвешенного магнита — является наиболее трудной частью исследования, так как он подвержен влиянию температуры, земной магнитной силы, механических воздействий; поэтому необходимо проявлять особую внимательность, чтобы при измерении этой величины магнит находился точно в таких же условиях, в которых он находится во время колебаний.

Второй член в выражении для R — член, содержащий L , — менее важен, поскольку обычно он мал по сравнению с первым членом. Величину L можно определить либо расчетным путем для катушки, форма которой известна, либо из эксперимента с избыточным током индукции, см. п. 756.

Томсоновский метод вращающейся катушки

763. Этот метод был предложен Томсоном Комитету Британской Ассоциации Электрических Стандартов; эксперимент был выполнен Бэлфором Стьюартом (Balfour Stewart), Флемингом Дженкином (Fleeming Jenkin) и автором в 1863 г.³

Круглая катушка приводится во вращение с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси. В центре катушки на шелковой нити подвешивается небольшой магнит. Электрический ток в катушке индуцируется земным магнетизмом, а также подвешенным магнитом. Ток этот является периодическим; в различные интервалы времени каждого оборота он протекает через провод катушки в противоположных направлениях, но действие тока на подвешенный магнит создает постоянное отклонение от магнитного меридиана в направлении вращения катушки.

764. Пусть H — горизонтальная составляющая земного магнетизма.

Пусть γ — сила тока в катушке,

g — общая площадь, охватываемая всеми витками провода;

G — магнитная сила в центре катушки, создаваемая единичным током;

L — коэффициент самоиндукции катушки;

M — магнитный момент подвешенного магнита;

ϑ — угол между плоскостью катушки и магнитным меридианом;

φ — угол между осью подвешенного магнита и магнитным меридианом;

A — момент инерции подвешенного магнита;

$MH\tau$ — коэффициент кручения нити подвеса;

α — азимут магнита в отсутствии кручения;

R — сопротивление катушки.

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} L\gamma^2 - Hg\gamma \sin \vartheta - MG\gamma \sin (\vartheta - \varphi) + MH \cos \varphi + \frac{1}{2} A\dot{\varphi}^2. \quad (1)$$

Первый член, равный $L\gamma^2/2$, выражает энергию тока, зависящую только от самой катушки. Второй член определяется взаимодействием тока и земного магнетизма, третий — взаимодействием тока и магнетизма подвешенного магнита, четвертый — взаимодействием магнетизма подвешенного магнита и земного магнетизма, последний член выражает кинетическую энергию вещества, образующего магнит и движущуюся вместе с ним подвешенную аппаратуру.

Потенциальная энергия подвешенной аппаратуры, возникающая из-за кручения нити, равна

$$V = \frac{MH}{2} \tau (\varphi^2 - 2\varphi\alpha). \quad (2)$$

Электромагнитный импульс тока равен

$$p = \frac{dT}{d\gamma} = L\gamma - Hg \sin \vartheta - MG \sin (\vartheta - \varphi), \quad (3)$$

и если R — сопротивление катушки, то уравнение для тока имеет вид

$$R\gamma + \frac{dT}{dt} = 0, \quad (4)$$

³ См. *Report of the British Association for 1863*, p. 111—176.

или, поскольку $\vartheta = \omega t$, (5)

$$\left(R + L \frac{d}{dt}\right) \gamma = Hg\omega \cos \vartheta + MG(\omega - \dot{\varphi}) \cos(\vartheta - \varphi). \quad (6)$$

765. И из теории, и из наблюдений одинаково следует, что азимут магнита φ подвержен двум видам периодических изменений. Одно из них — свободные колебания, период которых зависит от интенсивности земного магнетизма и равен, согласно эксперименту, нескольким секундам. Другое — вынужденные колебания с периодом, равным половине периода вращения катушки и, как мы увидим далее, с необнаружимо малой амплитудой. Следовательно, при определении γ мы можем считать угол φ практически постоянным.

Таким образом, мы находим

$$\gamma = \frac{Hg\omega}{R^2 + L^2\omega^2} (R \cos \vartheta + L\omega \sin \vartheta) + \quad (7)$$

$$+ \frac{MG\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \{R \cos(\vartheta - \varphi) + L\omega \sin(\vartheta - \varphi)\} + \quad (8)$$

$$+ Ce^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9)$$

Когда вращение происходит с постоянной скоростью, последний член в этом выражении довольно быстро исчезает.

Движение подвешенного магнита определяется уравнением

$$\frac{d^2T}{dt d\dot{\varphi}} - \frac{dT}{d\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad (10)$$

откуда

$$A\ddot{\varphi} - MG\gamma \cos(\vartheta - \varphi) + MH(\sin \varphi + \tau(\varphi - \alpha)) = 0. \quad (11)$$

Подставим значение γ и расположим члены в соответствии с кратностью аргумента ϑ , кроме того, из наблюдений мы знаем, что

$$\varphi = \varphi_0 + be^{-it} \cos nt + c \cos 2(\vartheta - \beta), \quad (12)$$

где φ_0 — среднее значение φ , второй член выражает постепенно затухающие свободные колебания, а третий — вынужденные колебания, возникающие из-за изменения отклоняющего тока.

Начиная с тех членов в (11), которые не содержат ϑ и должны в совокупности быть равными нулю, мы приближенно находим

$$\frac{MG\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \{Hg(R \cos \varphi_0 + L\omega \sin \varphi_0) + GMR\} = 2MH(\sin \varphi_0 + \tau(\varphi_0 - \alpha)). \quad (13)$$

Поскольку член $L \operatorname{tg} \varphi_0$ обычно мал по сравнению с Gg , решение квадратного уравнения (13) приближенно дает

$$R = \frac{Gg\omega}{2 \operatorname{tg} \varphi_0 \left(1 + \tau \frac{\varphi_0 - \alpha}{\sin \varphi_0}\right)} \left\{ 1 + \frac{GM}{gH} \sec \varphi_0 - \frac{2L}{Gg} \left(\frac{2L}{Gg} - 1\right) \operatorname{tg}^2 \varphi_0 - \right. \\ \left. - \left(\frac{2L}{Gg}\right)^2 \left(\frac{2L}{Gg} - 1\right)^2 \operatorname{tg}^4 \varphi_0 \right\}. \quad (14)$$

Если мы учтем основной член этого выражения в уравнениях (7), (8) и (11), то найдем, что значение n в уравнении (12) равно $\sqrt{\frac{HM}{A} \sec \varphi_0}$. Величина амплитуды вынужденных колебаний равна $\frac{1}{4} \frac{n^2}{\omega^2} \sin \varphi_0$. Следовательно, когда катушка совершает много оборотов за время одного свободного колебания магнита, амплитуда вынужденных колебаний магнита очень мала, и мы можем пренебречь в (11) членами, содержащими s .

766. Таким образом, сопротивление определено в электромагнитных единицах через скорость ω и отклонение φ . Величину горизонтальной составляющей земного магнетизма H нет необходимости определять при условии, что она остается постоянной во время опыта.

Чтобы найти M/H , мы должны использовать подвешенный магнит для отклонения магнита магнитометра, как описано в п. 454. В этом эксперименте значение M должно быть малым, тогда эта поправка имеет второстепенное значение.

Относительно других поправок, учет которых необходим в этом эксперименте, см. *Report of the British Association* за 1863 г., стр. 168.

Калориметрический метод Джоуля

767. Тепло, выделяемое при прохождении тока γ через проводник с сопротивлением R , согласно закону Джоуля (п. 242), равно

$$h = \frac{1}{J} \int R \gamma^2 dt, \quad (1)$$

где J — эквивалент использованной единицы тепла в динамическом измерении.

Следовательно, если за время опыта сопротивление R постоянно, то его значение равно

$$R = Jh / \int \gamma^2 dt. \quad (2)$$

Этот метод определения R включает в себя нахождение количества тепла h , производимого током в течение заданного промежутка времени, а также квадрата силы тока γ^2 .

В опытах Джоуля ⁴ величина h определялась по увеличению температуры воды в сосуде, куда был помещен проводящий провод. Поправки на излучение и т. п. находились путем проведения дополнительных опытов, при которых ток по проводу не пропусклся.

Сила тока измерялась тангенс-гальванометром. Этот метод включает в себя измерение напряженности земного магнетизма, которое производилось по способу, описанному в п. 457. Эти измерения проверялись также при помощи токовых весов, описанных в п. 726, которые измеряют непосредственно γ^2 . Наиболее прямой способ измерения $\int \gamma^2 dt$ состоит в пропускании тока через самовоздействующий электродинамометр (п. 725), показания шкалы которого пропорциональны γ^2 , и снятии показаний через равные промежутки времени. Это приближенно можно осуществить, если регистрировать показания при крайних положениях прибора в каждом колебании в продолжении всего эксперимента.

⁴ *Report on Standards of Electrical Resistance of the British Association for 1867*, p. 474—522.

ГЛАВА XIX

СРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ
С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ

*Определение числа электростатических единиц электричества
в одной электромагнитной единице*

768. Абсолютные значения электрических единиц в обеих системах зависят от принятых нами единиц длины, времени и массы; их зависимость от этих единиц различна в этих двух системах, поэтому отношение электрических единиц будет выражено различными числами в соответствии с различными единицами длины и времени.

Из таблицы размерностей п. 628 следует, что число электростатических единиц электричества, содержащихся в одной электромагнитной единице, меняется обратно пропорционально величине единицы длины и прямо пропорционально единице времени, которые мы приняли.

Следовательно, если мы определим скорость, которая численно представлена этим значением, то даже если мы примем новые единицы длины и времени, число, представляющее эту скорость, будет по-прежнему числом электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице согласно новой системе измерений.

Поэтому скорость, указывающая на связь между электростатическими и электромагнитными явлениями, представляет собой естественную величину с определенным значением; измерение этой величины является одним из наиболее важных исследований в области электричества.

Чтобы показать, что искомая величина действительно является скоростью, мы можем заметить, что в случае двух параллельных токов участок длиной a одного из них в соответствии с п. 686 испытывает притяжение $F = 2CC'a/b$, где C, C' — численные значения токов в электромагнитных единицах, а b — расстояние между ними. Если мы положим $b = 2a$, то $F = CC'$.

Количество электричества, переносимое током C за время t , равно Ct в электромагнитных единицах или nCt в электростатических единицах, если число электростатических единиц в одной электромагнитной единице равно n .

Пусть два небольших проводника заряжены количествами электричества, которые переносятся двумя токами за время t , и помещены на расстоянии r друг от друга. Отталкивание между ними будет равно $F' = \frac{CC'n^2t^2}{r^2}$.

Выберем расстояние r таким образом, чтобы это отталкивание равнялось притяжению токов; тогда $\frac{CC'n^2t^2}{r^2} = CC'$. Следовательно, $r = nt$, т. е. с течением времени t расстояние r должно увеличиваться со скоростью n . Следовательно, n является скоростью, абсолютная величина которой одна и та же, какие бы единицы мы ни приняли.

769. Чтобы получить физическое представление об этой скорости, вообразим себе плоскую поверхность, заряженную электричеством до поверхностной плотности σ и движущуюся в ее собственной плоскости со скоростью v . Эта движущаяся заряженная поверхность эквивалентна электрическому токовому листу; сила

тока, протекающего через единицу ширины поверхности, равна σv в электростатических единицах или $\sigma v/n$ в электромагнитных единицах, если n является числом электростатических единиц в одной электромагнитной единице. Если другая плоская поверхность, параллельная первой, заряжена до поверхностной плотности σ' и движется в том же направлении со скоростью v' , она будет эквивалентна второму токовому листу.

Электростатическое отталкивание между двумя заряженными поверхностями в соответствии с п. 124 равно $2\pi\sigma\sigma'$ на каждую единичную площадь противостоящих поверхностей.

Электромагнитное притяжение двух токовых листов в соответствии с п. 653 равно $2\pi i i'$ на каждую единичную площадь, причем i и i' являются поверхностными плотностями токов в электромагнитных единицах.

Но $i = \sigma v/n$, а $i' = \sigma' v'/n$, так что притяжение равно $2\pi\sigma\sigma'vv'/n^2$.

Отношение притяжения к отталкиванию равно отношению vv' к n^2 . Поскольку притяжение и отталкивание являются односторонними величинами, то величина n должна быть величиной того же рода, что и v , т. е. скоростью. Если теперь мы предположим, что скорость каждой из движущихся плоскостей равна n , притяжение будет равно отталкиванию и механического взаимодействия между плоскостями не будет. Следовательно, мы можем определить отношение электрических единиц как такую скорость, при которой две заряженные поверхности, движущиеся в одном направлении с этой скоростью, не испытывают взаимного действия. Поскольку эта скорость составляет около 300 000 километров в секунду, вышеописанный эксперимент выполнить невозможно.

770. Если удастся поверхностную плотность электричества и скорость сделать настолько большими, чтобы магнитная сила являлась измеримой величиной, мы можем, по крайней мере, подтвердить наше предположение о том, что движущееся заряженное тело эквивалентно электрическому току.

Можно принять, что заряженная поверхность в воздухе начинает разряжаться через искрение, если электрическая сила $2\pi\sigma$ достигает значения 130. Магнитная сила, обусловленная токовым листом, равна $2\pi\sigma v/n$. Горизонтальная магнитная сила составляет в Британии около 0,175. Следовательно, поверхность, заряженная до максимального значения и движущаяся со скоростью 100 метров в секунду, будет действовать на магнит с силой, составляющей около одной четырехтысячной части земной горизонтальной силы — такую величину можно измерить. Заряженная поверхность может быть поверхностью непроводящего диска, вращающегося в плоскости магнитного меридиана, а магнит можно поместить вблизи восходящей или нисходящей части диска и защитить от его электростатического действия металлическим экраном. Я не уверен, что до сих пор кто-либо пытался выполнить такой эксперимент¹.

I. Сравнение единиц электричества

771. Поскольку отношение электромагнитной единицы электричества к электростатической представлено скоростью, мы в дальнейшем будем обозначать ее символом v . Первое определение численного значения этой скорости было выполнено Вебером и Кольраушем².

¹ Sir W. Thomson, *R. S. Proc. or Reprint*, Art. XIX, p. 247—259.

² *Elektrodynamische Maasbestimmungen* and *Pogg. Ann.*, XCIX (Aug., p. 10—25, 1856).

Их метод был основан на измерении одного и того же количества электричества сначала в электростатических и затем в электромагнитных единицах.

Измеряемым количеством электричества являлся заряд Лейденской банки. В электростатических единицах он измерялся как произведение емкости банки на разность потенциалов ее обкладок. Емкость банки определялась путем сравнения с емкостью сферы, подвешенной в свободном пространстве и удаленной от других тел. Емкость такой сферы в электростатических единицах выражается ее радиусом. Таким образом, можно найти емкость банки и выразить ее в виде некоторой длины, см. п. 227.

Разность потенциалов на обкладках банки измерялась при их подсоединении к электродам электрометра, постоянные которого были тщательно определены; таким образом, становилась известной разность потенциалов E в электростатических единицах.

При умножении этой величины на емкость банки c заряд банки выражался в электростатических единицах.

Для определения заряда банки в электромагнитных единицах банка разряжалась через катушку гальванометра. Действие переходного тока на магнит гальванометра сообщало магниту определенную угловую скорость. Затем магнит поворачивался до тех пор, пока его скорость полностью не погасалась из-за противодействия земного магнетизма.

Измеряя максимальное отклонение магнита, можно определить количество электричества в токе в электромагнитных единицах, как в п. 748, по формуле $Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin \frac{1}{2} \vartheta$, где Q — количество электричества в электромагнитных единицах. Мы должны, таким образом, определить следующие величины.

Напряженность горизонтальной компоненты земного магнетизма H , см. п. 456. Главную постоянную гальванометра G , см. п. 700. Время одного колебания магнита T и отклонение ϑ , обусловленное переходным током. Значение v , полученное М. М. Вебером и Кольраушем, равняется $v = 31\,074\,0000$ метров в секунду.

Свойство твердых диэлектриков, которому дано наименование Электрическая Абсорбция, затрудняет правильную оценку емкости Лейденской банки. Кажущаяся емкость меняется в зависимости от времени, которое прошло от момента заряда или разряда банки до момента измерения потенциала; чем больше это время, тем большее значение получается для емкости банки.

Таким образом, поскольку время, необходимое для получения показания электрометра, велико по сравнению со временем, в течение которого происходит разряд через гальванометр, оценка разряда в электростатических единицах, по всей вероятности, является завышенной и полученное из нее значение v также завышено.

II. Величина v , выраженная через сопротивление

772. Два других метода определения скорости v приводят к выражению ее значения через сопротивление некоторого проводника, которое в электромагнитной системе также выражается как скорость. В эксперименте сэра Уильяма Томсона постоянный ток пропускается через провод с большим сопротивлением. Электродвижущая сила, обуславливающая ток в проводнике, измеряется электростатически путем соединения концов провода с электродами абсолютного элект-

рометра, см. п. 217, 218. Сила тока в проводе измеряется в электромагнитных единицах по отклонению подвешенной катушки электродинамометра, через которую ток проходит, см. п. 725. Сопротивление контура в электромагнитных единицах известно из его сравнения с сопротивлением эталонной катушки, т. е. с Омом. Умножая силу тока на это сопротивление, мы получаем электродвижущую силу в электромагнитных единицах, а значение v находится из сравнения этой величины с величиной электродвижущей силы в электростатических единицах.

Этот метод требует одновременного определения двух сил с помощью электрометра и электродинамометра соответственно, однако результат определяется лишь отношением этих сил.

773. Другой метод, в котором эти силы не измеряются по отдельности, а непосредственно противостоят друг другу, был использован автором этих строк. Концы катушки с большим сопротивлением соединяются с двумя параллельными дисками, один из которых является подвижным. Одна и та же разность потенциалов обуславливает ток через большое сопротивление и вызывает притяжение между двумя дисками. Одновременно через две катушки, прикрепленные одна к обратной стороне неподвижного диска, другая — к обратной стороне подвижного диска, пропускается электрический ток, который в реальном эксперименте был отличен от первичного тока. Этот ток течет через катушки в противоположных направлениях, так что они отталкивают друг друга. Путем подбора расстояния между двумя дисками притяжение точно компенсируется отталкиванием; одновременно другой наблюдатель при помощи дифференциального гальванометра с шунтами определяет отношение первичного тока ко вторичному.

В этом эксперименте единственным измерением, в котором следует использовать материальный эталон, является измерение большого сопротивления, которое должно быть определено по абсолютной величине путем сравнения с Омом. Другие измерения требуются только для определения отношений и, следовательно, могут быть выполнены в любых произвольных единицах.

Так, отношение двух сил является отношением типа равенства.

Отношение двух токов находится путем сравнения сопротивлений, при которых нет отклонения дифференциального гальванометра.

Сила притяжения зависит от квадрата отношения диаметра дисков к расстоянию между ними.

Сила отталкивания зависит от отношения диаметра катушек к расстоянию между ними.

Таким образом, значение v выражается непосредственно через сопротивления большой катушки, которое само сравнивается с Омом.

Значение v , найденное методом Томсона, равно $28,2 \text{ Ом}^3$, методом Максвелла — $28,8 \text{ Ом}^4$.

III. Электростатическая емкость в электромагнитной мере

774. Емкость конденсатора может быть установлена в электромагнитных единицах путем сравнения электродвижущей силы, которая обуславливает заряд, и количества электричества в токе разряда. С помощью гальванической батареи в

³ *Report of British Association*, 1869, p. 434.

⁴ *Phil. Trans.*, 1868, p. 643 and *Report of British Association*, 1869, p. 436.

контуре, содержащем катушку с большим сопротивлением, поддерживается ток. Конденсатор заряжается путем подключения его электродов к электродам катушки сопротивления. Ток через катушку измеряется по отклонению, которое он производит в гальванометре. Пусть это отклонение будет φ , тогда ток, согласно п. 742, равен $\gamma = (H/G) \operatorname{tg} \varphi$, где H — горизонтальная составляющая земного магнетизма, а G — главная постоянная гальванометра.

Если R — сопротивление катушки, по которой пропускается ток, то разность потенциалов на концах катушки равна $E = R\gamma$, а заряд электричества, произведенный в конденсаторе, емкость которого в электромагнитной мере равна C , будет $Q = EC$.

Отключим электроды конденсатора, а затем и гальванометра от контура, и пусть магнит гальванометра придет в состояние покоя в положении равновесия. Присоединим затем электроды конденсатора к электродам гальванометра. Через гальванометр потечет переходный ток, который вызовет отклонение магнита до крайнего положения ϑ . Тогда, согласно п. 748, если разряд равен заряду, то

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin \frac{1}{2} \vartheta.$$

Таким образом, мы получаем в качестве значения емкости конденсатора в электромагнитной мере

$$C = \frac{T}{\pi} \frac{1}{R} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \vartheta}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Емкость конденсатора, таким образом, определена через следующие величины: T — время колебания магнита гальванометра от одного состояния покоя до другого; R — сопротивление катушки; ϑ — крайний предел отклонения, произведенного разрядом; φ — постоянное отклонение, обусловленное током через катушку R . Этот метод был использован профессором Флемингом Дженкином (Fleming Jenkin) для определения емкости конденсаторов в электромагнитных единицах⁵.

Если c — емкость того же самого конденсатора в электростатических единицах, определенная путем сравнения с конденсатором, емкость которого вычислена из его геометрических данных, то $c = v^2 C$.

$$\text{Отсюда } v^2 = \pi R \frac{c}{T} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2 \sin \frac{1}{2} \vartheta}.$$

Следовательно, таким способом можно найти величину v . Она зависит от определения R в электромагнитных единицах, но, поскольку в нее входит лишь корень квадратный из R , ошибка в этом определении не так сильно влияет на величину v , как в способах, описанных в п. 772, 773.

Прерывистый ток

775. Если в цепи с батареей в произвольной точке разомкнуть провод и его концы соединить с электродами конденсатора, то в конденсатор потечет ток, сила которого уменьшается по мере возрастания разности потенциалов между

⁵ Report of British Association, 1867, p. 483—488.

обкладками конденсатора, и, когда конденсатор приобретает полный заряд, соответствующий приложенной электродвижущей силе, ток полностью прекращается.

Если теперь электроды конденсатора отсоединить от концов провода и снова присоединить их в обратном порядке, конденсатор будет разряжаться через провод, а затем снова зарядится, но противоположным образом, так что через провод будет течь переходный ток, общее количество которого равно удвоенному заряду конденсатора.

С помощью простого механизма (обычно называемого Коммутатором, или качающимся коромыслом) операцию обращения соединений конденсатора можно повторять через регулярные промежутки времени, равные T . Если этот интервал достаточно длинный, чтобы произошел полный разряд конденсатора, количество электричества, переданное проводом за каждый интервал, будет равно $2EC$, где E — электродвижущая сила, а C — емкость конденсатора.

Если магнит, включенный в контур гальванометра, нагружен так, что он качается достаточно медленно и за время одного свободного колебания магнита происходит очень много разрядов конденсатора, тогда последовательность разрядов будет действовать на магнит подобно постоянному току, сила которого равна $2EC/T$.

Если теперь конденсатор убрать и вместо него поставить катушку сопротивления и добиться, чтобы постоянный ток через гальванометр производил такое же отклонение, как и последовательность разрядов, и если сопротивление всего контура в этом случае равно R , то

$$E/R = 2EC/T, \quad (1)$$

или

$$R = T/2C. \quad (2)$$

Мы можем, таким образом, сравнить конденсатор с движущимся коммутатором с проводом определенного электрического сопротивления; для определения этого сопротивления мы можем использовать различные методы измерения сопротивлений, описанные в п. 345—357.

776. Для этой цели при использовании метода Дифференциального Гальванометра (см. п. 346) или мостика Уитстона (см. п. 347) мы можем вместо одного из проводов вставить конденсатор с его коммутатором. Предположим, что в каждом случае получено нулевое отклонение гальванометра — вначале с конденсатором и коммутатором, а затем с катушкой сопротивления R_1 вместо него. Тогда величина $T/2C$ будет измеряться сопротивлением контура, часть которого образует катушка R_1 и который полностью замыкается через оставшуюся часть проводящей системы, включая батарею. Следовательно, сопротивление R , которое мы должны вычислить, равно сопротивлению катушки R_1 вместе с сопротивлением R_2 оставшейся части системы (включая батарею), причем концы катушки сопротивления следует взять в качестве электродов системы.

В случаях дифференциального гальванометра и мостика Уитстона нет необходимости делать второй эксперимент, подставляя катушку сопротивления вместо конденсатора. Величина требуемого для этой цели сопротивления может быть найдена путем вычисления через остальные известные сопротивления системы.

Используя обозначения п. 347, предположим, что конденсатор и коммутатор вставлены вместо проводника AC в мостик Уитстона, а гальванометр, подклю-

ченный в OA , показывает нулевое отклонение. Мы знаем, что сопротивление катушки, которая, будучи помещенной в AC , дала бы нулевое отклонение, равно

$$b = c\gamma/\beta = R_1. \quad (3)$$

Другая часть сопротивления — R_2 — является сопротивлением системы проводников AO , OC , AB , BC и OB , причем точки A и C рассматриваются как электроды. Следовательно,

$$R_2 = \frac{\beta(c+a)(\gamma+\alpha) + ca(\gamma+a) + \gamma\alpha(c+a)}{(c+\alpha)(\gamma+a) + \beta(c+a+\gamma+\alpha)}. \quad (4)$$

В этом выражении a обозначает внутреннее сопротивление батареи и ее соединений; эта величина не может быть определена точно, но если сделать ее малой по сравнению с другими сопротивлениями, эта неопределенность будет лишь слегка влиять на величину R_2 .

Величина емкости конденсатора в электромагнитной мере равна

$$C = \frac{T}{2(R_1 + R_2)}. \quad (5)$$

777. Если конденсатор обладает большой емкостью, а коммутатор очень быстродействующий, то конденсатор может полностью не разряжаться при каждом переключении. Уравнение для электрического тока во время разряда следующее:

$$Q + R_2 C \frac{dQ}{dt} + EC = 0, \quad (6)$$

где Q — заряд, C — емкость конденсатора, R_2 — сопротивление остальной части системы между электродами конденсатора, E — электродвижущая сила, обусловленная включением батареи.

Следовательно,

$$Q = (Q_0 + EC)e^{-t/R_2 C} - EC, \quad (7)$$

где Q_0 — начальное значение Q .

Если τ — продолжительность контакта при каждом разряде, то количество электричества в каждом разряде равно

$$Q = 2EC \frac{1 - e^{-\tau/R_2 C}}{1 + e^{-\tau/R_2 C}}. \quad (8)$$

Положив величины c и γ в уравнении (4) большими по сравнению с β , a или α , можно сделать время, представляемое произведением $R_2 C$, настолько малым по сравнению с τ , что при вычислении значения экспоненциального выражения мы можем использовать для C выражение (5). Таким образом, мы находим

$$\frac{\tau}{R_2 C} = 2 \frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{\tau}{T}, \quad (9)$$

где R_1 — сопротивление, которое надо поставить вместо конденсатора, чтобы произвести эквивалентный эффект; R_2 — сопротивление остальной части системы, T — интервал между началом двух последовательных разрядов, τ — продолжи-

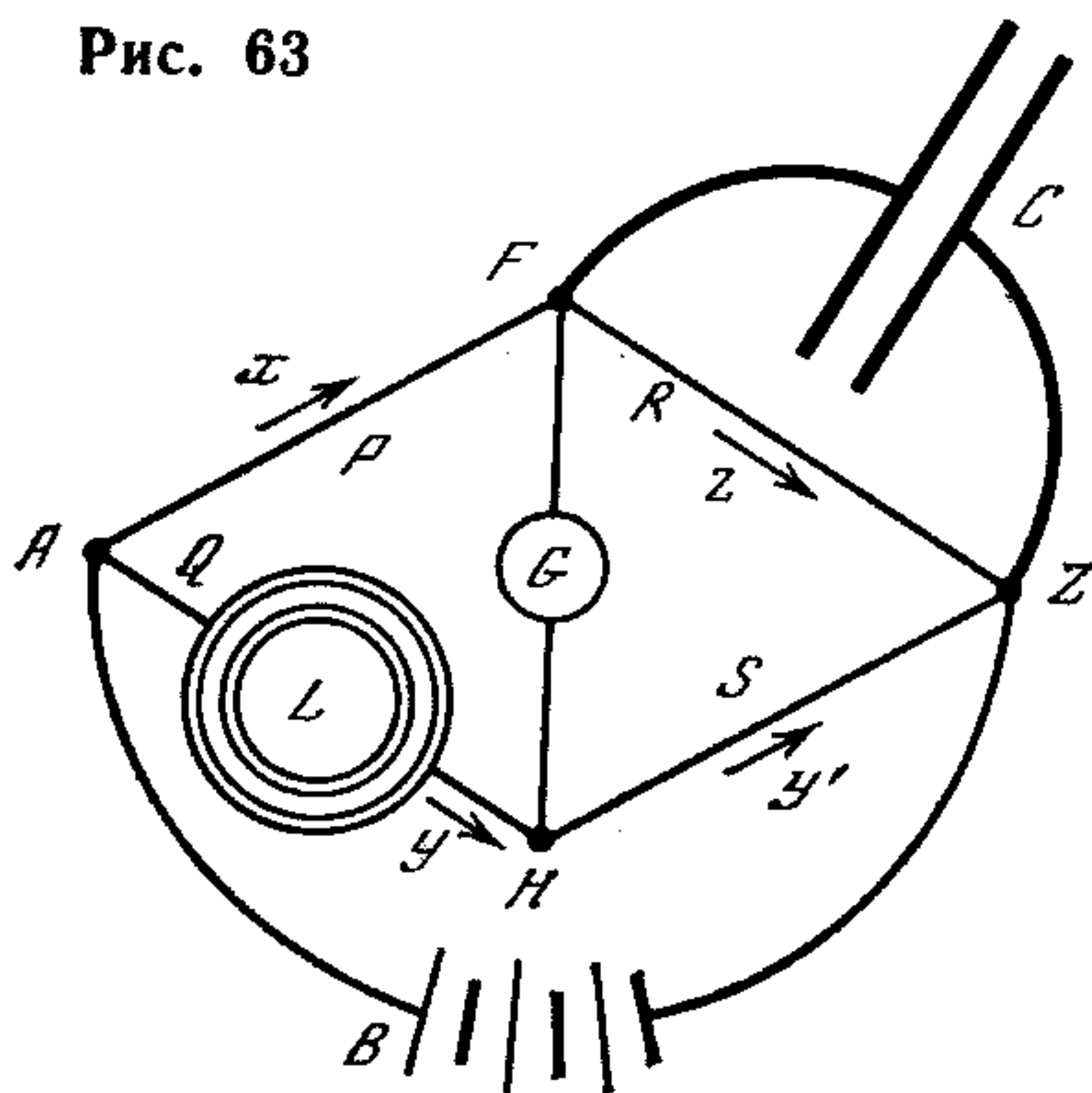
тельность контакта при каждом разряде. Таким образом, мы получаем уточненное значение для величины C в электромагнитной мере:

$$C = \frac{1}{2} \frac{T}{R_1 + R_2} \frac{1 + e^{-2 \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{\tau}{T}}}{1 - e^{-2 \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{\tau}{T}}}. \quad (10)$$

IV. Сравнение электростатической емкости конденсатора с электромагнитной емкостью самоиндукции катушки

778. Если две точки проводящего контура, сопротивление между которыми равно R , соединены с электродами конденсатора емкостью C , то при действии в контуре электродвижущей силы часть тока, вместо того чтобы проходить через сопротивление R , будет идти на заряд конденсатора. Следовательно, ток через R будет увеличиваться от нуля до своего конечного значения постепенно. Из математической теории следует, что нарастание тока через R от нуля до его конечного значения выражается формулой точно такого же вида, что и формула, определяющая величину тока, вызываемого постоянной электродвижущей силой в катушке электромагнита. Следовательно, мы можем поместить конденсатор и электромагнит в двух противоположных плечах мостика Уитстона таким образом, что ток через гальванометр всегда равен нулю, даже в момент замыкания или размыкания контура батареи.

Рис. 63



Пусть на рис. 63 P , Q , R , S будут соответственно сопротивления четырех элементов мостика Уитстона. Пусть катушка с коэффициентом самоиндукции L является частью элемента $АН$ с сопротивлением Q , и пусть электроды конденсатора емкости C присоединены через проводники с малым сопротивлением к точкам F и Z . Для простоты мы будем предполагать, что в гальванометре, электроды которого присоединены к F и H , ток отсутствует. Мы должны, таким образом, определить условие, при котором потенциал в точке F равен потенциалу в точке H . И только если мы хотим оценить степень точности метода, мы должны вычислить ток через гальванометр, когда это условие не выполнено.

Пусть x будет полное количество электричества, которое прошло через элемент AF за время t , а z — количество электричества, прошедшее за то же время через FZ , тогда заряд конденсатора будет $x - z$. Электродвижущая сила, действующая между электродами конденсатора, по закону Ома равна $R(dz/dt)$, так что если емкость конденсатора равна C , то

$$x - z = RC \frac{dz}{dt} \quad (1)$$

Пусть y будет полное количество электричества, которое прошло через элемент AH ; электродвижущая сила от A к H должна равняться электродвижущей силе от A к F , т. е.

$$Q \frac{dy}{dt} + L \frac{d^2y}{dt^2} = P \frac{dx}{dt}. \quad (2)$$

Поскольку ток через гальванометр отсутствует, количество электричества, прошедшее через HZ , также должно равняться y , поэтому находим

$$S \frac{dy}{dt} = R \frac{dz}{dt}. \quad (3)$$

Подставляя в (2) значение x , найденное из (1), и сравнивая с (3), мы находим в качестве условия отсутствия тока через гальванометр

$$RQ \left(1 + \frac{L}{Q} \frac{d}{dt}\right) z = SP \left(1 + RC \frac{d}{dt}\right) z. \quad (4)$$

Условие отсутствия тока в установившемся режиме имеет обычный для мостика Уитстона вид

$$QR = SP. \quad (5)$$

Дополнительное условие отсутствия тока при размыкании и замыкании соединения с батареей следующее:

$$L/Q = RC. \quad (6)$$

Здесь L/Q и RC являются постоянными времени элементов Q и R соответственно. Поэтому, если, меняя Q или R , мыотрегулируем элементы мостика Уитстона так, чтобы ток в гальванометре отсутствовал как при размыкании и замыкании контакта, так и в установившемся режиме, мы будем знать, что постоянные времени катушки и конденсатора равны.

Коэффициент самоиндукции L можно определить в электромагнитной мере путем сравнения с коэффициентом взаимной индукции двух контуров с известными геометрическими параметрами (п. 756). Эта величина имеет размерность длины.

Емкость конденсатора может быть определена в электростатической мере путем сравнения с конденсатором, геометрические данные которого известны (п. 229). Эта величина c тоже является длиной. Емкость в электромагнитной мере равна

$$C = c/v^2. \quad (7)$$

Подставляя это значение в уравнение (6), мы получаем для величины v :

$$v^2 = (c/L)QR, \quad (8)$$

где c — емкость конденсатора в электростатической мере, L — коэффициент самоиндукции катушки в электромагнитной мере, а Q и R — сопротивления в электромагнитной мере. Значение v , найденное таким методом, зависит от определения единицы сопротивления, так же как и во втором методе, п. 772, 773.

V. Сопоставление электростатической емкости конденсатора с электромагнитной емкостью самоиндукции катушки

779. Пусть C будет емкостью конденсатора, обкладки которого соединены проводом с сопротивлением R . Пусть в этот провод включены катушки L и L' и пусть L обозначает сумму их емкостей самоиндукции. Катушка L' подвешена на

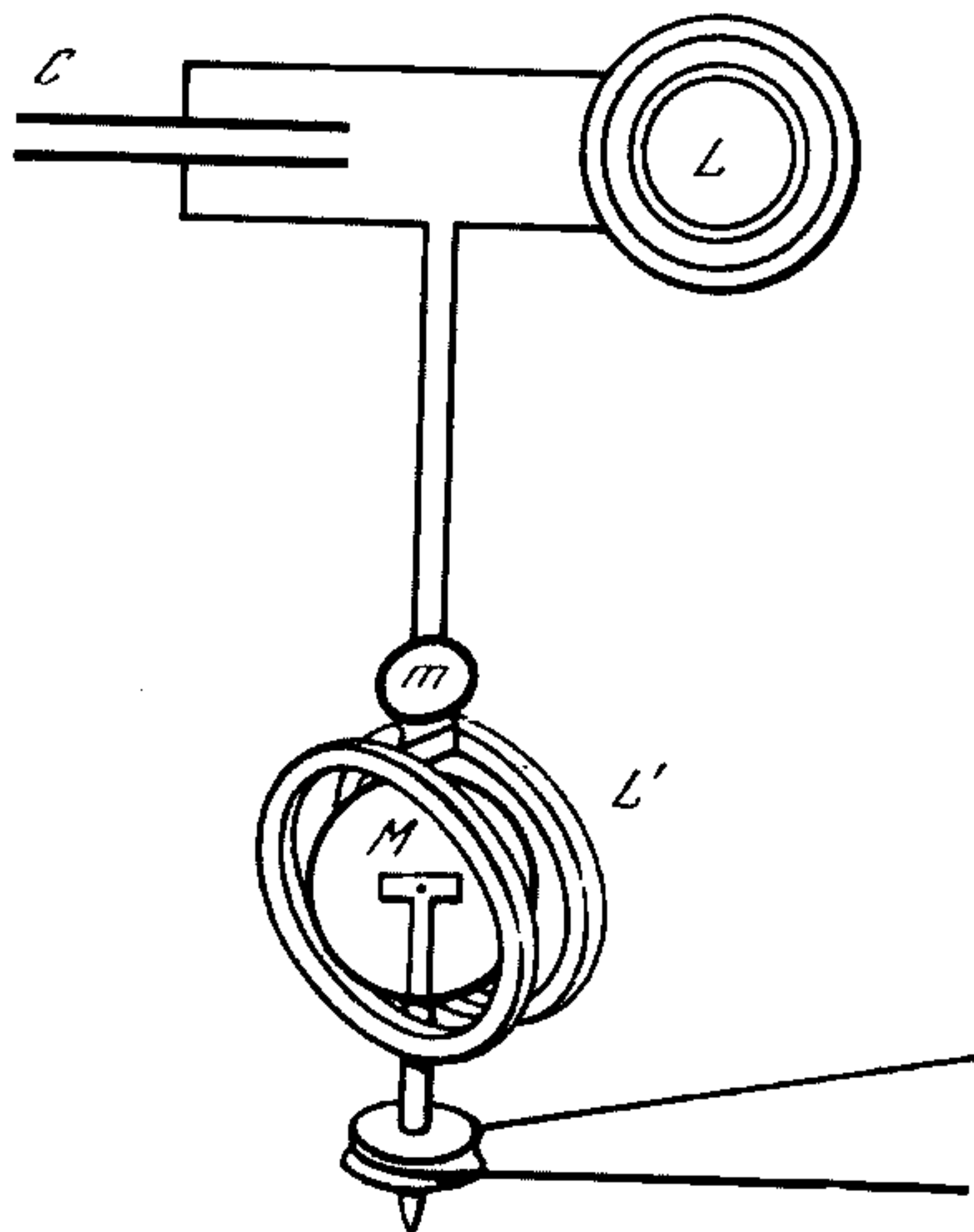


Рис. 64

двухнитевом подвесе и состоит из двух параллельных витков, расположенных в вертикальной плоскости, между которыми проходит вертикальная ось, несущая магнит M , ось которого вращается в горизонтальной плоскости между катушками LL' . Катушка L , имеющая большой коэффициент самоиндукции, закреплена. Подвешенная катушка L' защищена от потоков воздуха, вызываемых вращением магнита, путем помещения вращающихся частей внутри полой оболочки [рис. 64].

Движение магнита вызывает в катушке токи индукции, которые подвергаются воздействию со стороны магнита, так что плоскость подвешенной катушки отклоняется в направлении вращения магнита. Определим силу индуцированных токов и величину отклонения подвешенной катушки.

Пусть x будет заряд электричества на верхней обкладке конденсатора C , тогда, если E есть электродвижущая сила, которая произвела этот заряд, из теории конденсаторов имеем

$$x = CE. \quad (1)$$

Из теории электрических токов мы имеем также

$$Rx + \frac{d}{dt}(L\dot{x} + M \cos \vartheta) + E = 0, \quad (2)$$

где M — электромагнитный импульс контура L' , когда ось магнита перпендикулярна плоскости катушки, а ϑ — угол между осью магнита и нормалью к этой плоскости.

Уравнение для определения x , таким образом, следующее:

$$CL \frac{d^2x}{dt^2} + CR \frac{dx}{dt} + x = CM \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (3)$$

Если катушка находится в положении равновесия и если магнит вращается с постоянной угловой скоростью n , то

$$\vartheta = nt. \quad (4)$$

Выражение для тока состоит из двух частей, одна из которых не зависит от правой части уравнения и убывает со временем по экспоненте. Другая часть,

которую можно назвать вынужденным током, целиком определяется членом, содержащим ϑ , и может быть записана в виде

$$x = A \sin \vartheta + B \cos \vartheta. \quad (5)$$

Находя значения A и B подстановкой в уравнение (3), мы получаем

$$x = -MCn \frac{RCn \cos \vartheta - (1 - CLn^2) \sin \vartheta}{R^2C^2n^2 + (1 - CLn^2)^2}. \quad (6)$$

Момент силы, действующий со стороны магнита на катушку L' , по которой протекает ток \dot{x} , противоположен моменту, который действовал бы на магнит, если бы катушка была неподвижна, и равен

$$\Theta = \dot{x} \frac{d}{d\vartheta} (M \cos \vartheta) = M \sin \vartheta \frac{dx}{dt}. \quad (7)$$

Проинтегрировав это выражение по t в течение одного оборота и разделив на время, мы получаем для среднего значения

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{2} \frac{M^2 RC^2 n^3}{R^2 C^2 n^2 + (1 - CLn^2)^2}. \quad (8)$$

Если катушка обладает значительным моментом инерции, ее вынужденные колебания будут очень малы, а ее среднее отклонение будет пропорционально $\bar{\Theta}$.

Пусть наблюдаемые отклонения D_1, D_2, D_3 соответствуют угловым скоростям магнита n_1, n_2, n_3 ; тогда в общем случае

$$P \frac{n}{D} = \left(\frac{1}{n} - CLn \right)^2 + R^2 C^2, \quad (9)$$

где величина P — постоянна.

Исключая P и R из трех уравнений такого вида, мы находим

$$C^2 L^2 = \frac{1}{n_1^2 n_2^2 n_3^2} \frac{\frac{n_1^3}{D_1} (n_2^2 - n_3^2) + \frac{n_2^3}{D_2} (n_3^2 - n_1^2) + \frac{n_3^3}{D_3} (n_1^2 - n_2^2)}{\frac{n_1}{D_1} (n_2^2 - n_3^2) + \frac{n_2}{D_2} (n_3^2 - n_1^2) + \frac{n_3}{D_3} (n_1^2 - n_2^2)}. \quad (10)$$

Если n_2 таково, что $CLn_2^2 = 1$, для этого значения n величина n/D будет минимальной. Остальные значения n следует брать одно больше, а другое меньше чем n_2 .

Величина CL , определенная из уравнения (10), имеет размерность квадрата времени. Назовем ее τ^2 .

Если C_s является электростатической мерой емкости конденсатора, а L_m — электромагнитной мерой самоиндукции катушки, то и C_s и L_m являются длинами и произведение $C_s L_m$ равно

$$C_s L_m = v^2 C_s L_s = v^2 C_m L_m = v^2 \tau^2, \quad (11)$$

а

$$v^2 = C_s L_m / \tau^2, \quad (12)$$

где τ^2 равняется значению $C^2 L^2$, найденному из этого эксперимента. Эксперимент, предложенный здесь в качестве метода определения v , имеет ту же сущность, что

и эксперимент, описанный сэром У. Р. Гроувом (Sir W. R. Grove, *Phil. Mag.*, March 1868, p. 184). См. также замечания автора настоящего трактата по поводу этого эксперимента в майском номере за 1868 г., стр. 360—363.

VI. *Электростатическое измерение сопротивления* (см. п. 355)

780. Пусть конденсатор емкостью C разряжается через проводник с сопротивлением R , тогда, если x — заряд в произвольный момент времени,

$$\frac{x}{C} + R \frac{dx}{dt} = 0. \quad (1)$$

Следовательно,

$$x = x_0 e^{-t/(RC)}. \quad (2)$$

Если каким-либо способом мы можем осуществлять контакт на короткий промежуток времени, длительность которого точно известна, так, чтобы позволить току течь через проводник в течение времени t , и если E_0 и E_1 — показания электрометра, соединенного с конденсатором до и после этой операции, то

$$RC(\ln E_0 - \ln E_1) = t. \quad (3)$$

Если емкость C известна в электростатической мере как величина, имеющая размерность длины, то сопротивление R может быть найдено из этого уравнения в электростатической мере как величина, обратная скорости.

Если численное значение сопротивления, определенного таким образом, равно R_s , а численное значение сопротивления в электромагнитной мере равно R_m , то

$$v^2 = R_m / R_s. \quad (4)$$

Поскольку в этом эксперименте необходимо, чтобы сопротивление R было очень большим, а в электромагнитных экспериментах п. 763 и др. R должно быть малым, эксперименты следует производить на разных проводниках, а затем сопротивление этих проводников сравнивать обычными методами.

ГЛАВА XX

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА

781. В некоторых частях этого трактата предпринята попытка объяснить электромагнитные явления с помощью механического действия, передаваемого от одного тела к другому через посредство среды, находящейся в пространстве между телами. Наличие среды предполагается также и в волновой теории света. Нам следует теперь показать, что свойства электромагнитной среды идентичны свойствам светоносной среды.

Заполнять все пространство некоей новой средой всякий раз, когда возникает какое-то новое явление, требующее объяснения, — это, несомненно, заниматься философией. Однако если при изучении двух различных разделов науки идея среды вводится независимо и если свойства, которые следует приписать среде для

рассмотрения электромагнитных явлений, подобны свойствам, которые мы приписываем светоносной среде для рассмотрения световых явлений, то доводы в пользу физического существования такой среды становятся гораздо более весомыми.

Свойства тел допускают количественное измерение. Например, мы получаем численное значение некоторого свойства среды, такого, как скорость распространения возмущений в ней, которую можно вычислить на основании электромагнитных экспериментов, а также непосредственно измерить в случае света. Если выяснится, что скорость распространения электромагнитных возмущений совпадает со скоростью света, причем не только в воздухе, но и в других прозрачных средах, у нас будут веские основания считать, что свет является электромагнитным явлением; сочетание же оптических и электрических данных даст уверенность в реальности среды, подобно тому как мы обретаем уверенность в реальности других видов материи из совокупности данных различных органов чувств.

782. При излучении света светящееся тело расходует определенное количество энергии и, если свет поглощается другим телом, это тело нагревается, показывая, что оно получило энергию извне. В течение промежутка времени после того, как свет покинул первое тело, но еще не достиг второго, она должна существовать в виде энергии в промежуточном пространстве. Согласно теории излучения, передача энергии сопровождается реальным переносом от светящегося тела к освещаемому световых корпускул, несущих с собой кинетическую энергию вместе с другими видами энергии, вместилищем которых они могут служить.

Согласно волновой теории существует материальная среда, заполняющая пространство между двумя телами; благодаря взаимодействию прилегающих друг к другу частей этой среды, энергия переходит от одной ее части к другой, пока не достигнет освещаемого тела.

Таким образом, светоносная среда при прохождении света через нее служит вместилищем энергии. В волновой теории, развитой Гюйгенсом, Френелем, Юнгом, Грином и др., эта энергия считается частично потенциальной и частично кинетической. Потенциальная энергия считается обусловленной деформацией элементарных объемов среды, и, значит, мы должны рассматривать среду как упругую. Кинетическая энергия считается обусловленной колебательным движением среды, поэтому мы должны считать, что среда имеет конечную плотность.

В теории электричества и магнетизма, принятой в настоящем трактате, признается существование двух видов энергии — электростатической и электрокинетической (см. п. 630 и 636), и предполагается, что они локализованы не только в наэлектризованных или намагниченных телах, но и в каждой части окружающего пространства, где обнаруживается действие электрической или магнитной силы. Следовательно, наша теория согласуется с волновой теорией в том, что обе они предполагают существование среды, способной стать вместилищем двух видов энергии¹.

¹ «Я, со своей стороны, изучая отношение вакуума к магнитной силе и общий характер магнитных явлений, происходящих вне магнита, больше склоняюсь к мысли, что передача силы представляет собой именно такое явление, происходящее вне магнита; я считаю невероятным, что эти явления представляют собой простое притяжение и отталкивание на расстоянии. Такое действие можно считать функцией эфира, ибо вряд ли можно считать вероятным, что эфир, если он существует, нужен только для того, чтобы передавать излучение». — Фарадей, «Экспериментальные исследования», 3075.

783. Определим теперь условия распространения электромагнитных возмущений через однородную среду, которую мы будем считать покоящейся, т. е. не имеющей никакого движения, кроме того, которое может быть включено в электромагнитные возмущения.

Пусть C будет удельная проводимость среды, K — ее удельная емкость для электростатической индукции и μ — ее магнитная «проницаемость».

Чтобы получить общие уравнения для электромагнитного возмущения, мы должны выразить истинный ток \mathcal{C} через вектор-потенциал \mathcal{A} и электрический потенциал Ψ .

Истинный ток \mathcal{C} состоит из тока проводимости \mathcal{R} и изменения электрического смещения \mathcal{D} ; поскольку оба они зависят от электродвижущей напряженности \mathcal{E} , мы находим, как в п. 611,

$$\mathcal{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt} \right) \mathcal{E}. \quad (1)$$

Поскольку движение среды отсутствует, мы можем выразить электродвижущую напряженность, как в п. 599:

$$\mathcal{E} = -\dot{\mathcal{A}} - \nabla\Psi. \quad (2)$$

Следовательно,

$$\mathcal{C} = - \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{d\mathcal{A}}{dt} + \nabla\Psi \right). \quad (3)$$

Но мы можем определить связь между \mathcal{C} и \mathcal{A} другим способом, как показано в п. 616, приведенные там уравнения (4) можно записать в виде

$$4\pi\mu\mathcal{C} = \nabla^2\mathcal{A} + \nabla J, \quad (4)$$

где

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}. \quad (5)$$

Объединяя уравнение (3) и (4), мы получаем

$$\mu \left(4\pi C + K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{d\mathcal{A}}{dt} + \nabla\Psi \right) + \nabla^2\mathcal{A} + \nabla J = 0, \quad (6)$$

что можно выразить в виде следующих трех уравнений:

$$\begin{aligned} \mu \left(4\pi C + K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{dF}{dt} + \frac{d\Psi}{dx} \right) + \nabla^2 F + \frac{dJ}{dx} &= 0, \\ \mu \left(4\pi C + K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{dG}{dt} + \frac{d\Psi}{dy} \right) + \nabla^2 G + \frac{dJ}{dy} &= 0, \\ \mu \left(4\pi C + K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{dH}{dt} + \frac{d\Psi}{dz} \right) + \nabla^2 H + \frac{dJ}{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Это общие уравнения для электромагнитных возмущений.

Если мы продифференцируем эти уравнения по x , y и z соответственно и сложим, то получим

$$\mu \left(4\pi C + K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{dJ}{dt} - \nabla^2\Psi \right) = 0. \quad (8)$$

Если среда непроводящая, то $C=0$, а член $\nabla^2\Psi$, пропорциональный объемной плотности свободного электричества, не зависит от t . Следовательно, величина J должна быть либо линейной функцией t , либо постоянной, либо нулем; поэтому при рассмотрении периодических возмущений мы можем не учитывать J и Ψ .

Распространение волн в непроводящей среде

784. В этом случае $C=0$, и уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} K\mu \frac{d^2F}{dt^2} + \nabla^2 F &= 0, \\ K\mu \frac{d^2G}{dt^2} + \nabla^2 G &= 0, \\ K\mu \frac{d^2H}{dt^2} + \nabla^2 H &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В этом виде уравнения сходны с уравнениями движения несжимаемого упругого твердого тела, и при заданных начальных условиях их решение можно выразить в форме, данной Пуассоном² и примененной Стоксом³ к теории дифракции.

Запишем $V=1/\sqrt{K\mu}$. (10)

Если значения F, G, H и $dF/dt, dG/dt, dH/dt$ заданы в каждой точке пространства в момент ($t=0$), то мы можем определить их значения в любой последующий момент времени следующим образом.

Пусть O будет точка, в которой мы желаем определить F в момент времени t . Опишем сферу с центром в точке O и радиусом Vt . Найдем начальное значение F в каждой точке сферической поверхности и возьмем *среднее* от всех этих значений \bar{F} . Найдем также начальные значения dF/dt в каждой точке сферической поверхности, и пусть среднее от всех этих значений будет $d\bar{F}/dt$.

Тогда значение F в точке O в момент времени t будет равно:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{d}{dt} (\bar{F}t) + t \frac{d\bar{F}}{dt} . \\ \text{Аналогично } G &= \frac{d}{dt} (\bar{G}t) + t \frac{d\bar{G}}{dt} , \\ H &= \frac{d}{dt} (\bar{H}t) + t \frac{d\bar{H}}{dt} . \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

785. Таким образом, оказывается, что картина в точке O в произвольный момент времени зависит от той картины, которая имела место на расстоянии Vt в момент времени, предшествующий рассматриваемому и отделенному от него интервалом t , т. е. любое возмущение распространяется через среду со скоростью V .

² *Mém. de l'Acad.*, t.III, p. 130, et seq.

³ *Cambridge Transactions*, vol. IX, p. 1—62 (1849).

Предположим, что, когда t равно нулю, величины \mathfrak{H} и \mathfrak{E} равны нулю везде, за исключением некоторого объема S . Тогда их значения в точке O в момент времени t будут равны нулю, если только сферическая поверхность с центром в точке O и радиусом Vt не лежит целиком или частично внутри объема S . Если O находится вне объема S , возмущений в точке O не будет до тех пор, пока Vt не станет равным кратчайшему расстоянию от O до объема S . Тогда в точке O возникнет возмущение и будет продолжаться до тех пор, пока Vt не станет равным максимальному расстоянию от O до произвольной части S . В этот момент возмущение в O прекратится навсегда.

786. Величина V в п. 784, выражающая скорость распространения электромагнитных возмущений в непроводящей среде, в соответствии с уравнением (10) равна $1/\sqrt{K\mu}$.

Если средой является воздух и мы примем электростатическую систему измерений, то $K=1$, а $\mu=1/v^2$, так что $V=v$, т. е. скорость распространения численно равна числу электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице. Если мы примем электромагнитную систему, то $K=1/v^2$, а $\mu=1$, так что уравнение $V=v$ по-прежнему остается верным.

По теории, согласно которой свет является электромагнитным возмущением, распространяющимся в той же самой среде, через которую передаются и другие электромагнитные действия, величина V должна быть скоростью света, т. е. величиной, значения которой оценивались несколькими способами. С другой стороны, v является числом электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице; методы определения этой величины описаны в последней главе. Они совершенно независимы от методов отыскания скорости света. Следовательно, совпадение или расхождение значений V и v обеспечивает проверку правильности электромагнитной теории света.

787. В приведенной таблице основные результаты непосредственного измерения скорости света (как в воздухе, так и в межпланетном пространстве) сопоставляются с основными результатами сравнения электрических единиц:

	Скорость света (в метрах в секунду)		Отношение электрических единиц (в метрах в секунду)
Физо	314 000 000	Вебер	310 740 000
Аберация и т. д., параллаксы Солнца	308 000 000	Максвелл	288 000 000
Фуко	298 360 000	Томсон	282 000 000

Очевидно, что скорость света и отношение единиц являются величинами одного и того же порядка. Ни про одну из них нельзя сказать, что она определена с такой степенью точности, которая позволила бы нам утверждать, что одна из них больше или меньше, чем другая. Следует надеяться, что в будущих экспериментах соотношение между значениями этих двух величин может быть определено более точно.

Пока же сравнение имеющихся сейчас результатов не противоречит нашей теории, которая утверждает, что эти две величины равны, и приводит физическое обоснование этого равенства.

788. В среде, отличной от воздуха, скорость V обратно пропорциональна квадратному корню из произведения диэлектрической и магнитной индуктивной

способностей. Согласно волновой теории скорость света в различных средах обратно пропорциональна их показателям преломления.

Не существует таких прозрачных сред, для которых магнитная способность отличалась бы от магнитной способности воздуха более чем на очень малую ее долю. Следовательно, главное различие между этими средами должно зависеть от их диэлектрических способностей. Таким образом, согласно нашей теории диэлектрическая способность прозрачной среды должна равняться квадрату ее показателя преломления.

Однако значение показателя преломления различается для разных видов света: оно больше для света с более быстрыми колебаниями. Поэтому мы должны выбрать показатель преломления, который соответствует волнам с самым большим периодом, так как это единственные волны, чье движение можно сравнивать с медленными процессами, с помощью которых мы определяем способность диэлектрика.

789. Единственным диэлектриком, способность которого к настоящему времени определена с достаточной точностью, является парафин, для которого в твердом виде М. М. Гибсон (M. M. Gibson) и Барклай (Barclay) нашли ⁴

$$K=1,975. \quad (12)$$

Д-р Гладстоун (Gladstone) нашел следующие значения показателя преломления расплавленного парафина (с удельным весом 0,779) для линий *A*, *D* и *H*:

Температура	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>H</i>
54 °С	1,4306	1,4357	1,4499
57 °С	1,4294	1,4343	1,4493;

откуда я нахожу, что показатель преломления бесконечно длинных волн будет около 1,422. Корень квадратный из *K* равен 1,405. Разница между этими значениями больше, чем можно ожидать из-за ошибок измерений; это показывает, что наши теории о строении тел должны быть улучшены, прежде чем мы сможем выводить их оптические свойства из электрических. В то же время, я думаю, что совпадение этих чисел таково, что если для достаточно большого числа веществ не будет получено большее расхождение значений, найденных из оптических и электрических свойств, то мы сможем уверенно заключить, что корень квадратный из *K*, хотя он, может быть, и не является полным выражением для показателя преломления, является по крайней мере наиболее важным членом в нем.

Плоские волны

790. Ограничим теперь наше внимание рассмотрением плоских волн, фронт которых мы будем предполагать нормальным оси *z*. Все величины, изменение которых и образует такие волны, являются функциями только *z* и *t* и не зависят от *x* и *y*.

Следовательно, уравнения магнитной индукции (A) п. 591 сводятся к следующим:

$$a=-dG/dz, \quad b=dF/dz, \quad c=0, \quad (13)$$

⁴ *Phil. Trans.*, 1871, p. 573.

т. е. магнитное возмущение лежит в плоскости волны. Это согласуется с тем, что мы знаем о возмущении, образующем свет.

После подстановки $\mu\alpha$, $\mu\beta$ и $\mu\gamma$ вместо a , b и c соответственно уравнения для электрических токов п. 607 становятся такими:

$$4\pi\mu u = -\frac{db}{dz} = -\frac{d^2F}{dz^2}, \quad 4\pi\mu v = \frac{da}{dz} = -\frac{d^2G}{dz^2}, \quad 4\pi\mu w = 0. \quad (14)$$

Следовательно, электрическое возмущение также находится в плоскости волны и, если магнитное возмущение ограничено одним направлением, скажем направлением x , электрическое возмущение ограничено перпендикулярным направлением, т. е. направлением y .

Но мы можем вычислить электрическое возмущение и другим путем, ибо если f , g и h являются составляющими электрического смещения в непроводящей среде, то

$$u = df/dt, \quad v = dg/dt, \quad w = dh/dt. \quad (15)$$

Если P , Q , R являются составляющими электродвижущей напряженности, то

$$f = (K/4\pi)P, \quad g = (K/4\pi)Q, \quad h = (K/4\pi)R; \quad (16)$$

и, поскольку движение среды отсутствует, уравнения (B) п. 598 становятся такими:

$$P = -dF/dt, \quad Q = -dG/dt, \quad R = -dH/dt. \quad (17)$$

Следовательно,

$$u = \frac{K}{4\pi} \frac{d^2F}{dt^2}, \quad v = -\frac{K}{4\pi} \frac{d^2G}{dt^2}, \quad w = -\frac{K}{4\pi} \frac{d^2H}{dt^2}. \quad (18)$$

Сравнивая эти величины с величинами в уравнении (14), мы находим

$$\frac{d^2F}{dz^2} = K\mu \frac{d^2F}{dt^2}, \quad \frac{d^2G}{dz^2} = K\mu \frac{d^2G}{dt^2}, \quad 0 = K\mu \frac{d^2H}{dt^2}. \quad (19)$$

Первое и второе из этих уравнений являются уравнениями распространения плоской волны, их решение имеет хорошо известный вид

$$F = f_1(z - Vt) + f_2(z + Vt), \quad G = f_3(z - Vt) + f_4(z + Vt). \quad (20)$$

Решение третьего уравнения:

$$H = A + Bt, \quad (21)$$

где A и B являются функциями z . Следовательно, величина H либо постоянна либо меняется линейно со временем. В любом случае она не может участвовать в распространении волн.

791. Отсюда видно, что направления как магнитного, так и электрического возмущений лежат в плоскости волны. Следовательно, математическая форма возмущения, будучи поперечным к направлению распространения согласуется, с формой возмущения, составляющего свет.

Если мы предположим, что $G=0$, возмущение будет соответствовать плоскополяризованному лучу света.

Магнитная сила в этом случае параллельна оси y и равна $(1/\mu)(dF/dz)$, а электрическая сила параллельна оси x и равна $-(dF/dt)$. Магнитная сила, следовательно, лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости, содержащей электродвижущую напряженность.

Значения магнитной силы и электродвижущей напряженности в данный момент в различных точках луча представлены на рис. 65 для случая простого гармонического возмущения в одной плоскости. Это соответствует лучу плоскополяризованного света, однако нам еще остается выяснить, соответствует ли плоскость поляризации плоскости магнитного возмущения или плоскости электрического возмущения, см. п. 797.

Энергия и напряжение излучения

792. Электростатическая энергия на единицу объема в произвольной точке волны в непроводящей среде равна

$$\frac{1}{2} fP = \frac{K}{8\pi} P^2 = \frac{K}{8\pi} \left(\frac{dF}{dt} \right)^2. \quad (22)$$

Электрокинетическая энергия в той же точке равна

$$\frac{1}{8\pi} b\beta = \frac{1}{8\pi\mu} b^2 = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2. \quad (23)$$

В силу уравнения (20) эти два выражения равны между собой, так что в каждой точке синусоидальной волны внутренняя энергия среды является наполовину электростатической и наполовину электрокинетической.

Пусть p будет значением любой из этих величин, т. е. либо электростатической, либо электрокинетической энергии на единицу объема; тогда из-за электростатического состояния среды имеется натяжение величины p в направлении, параллельном x , объединенное с давлением, также равным p , но параллельным y и z , см. п. 107.

Из-за электрокинетического состояния среды имеется натяжение, равное p , в направлении, параллельном y , объединенное с давлением, равным p , в направлениях, параллельных x и z , см. п. 643.

Следовательно, совместное действие электростатического и электрокинетического напряжений есть *давление*, равное $2p$, в направлении распространения волны. Но величина $2p$ выражает также и полную энергию в единице объема.

Следовательно, в среде, в которой распространяются волны, имеется давление в направлении, нормальном этим волнам, и численно равное энергии в единице объема.

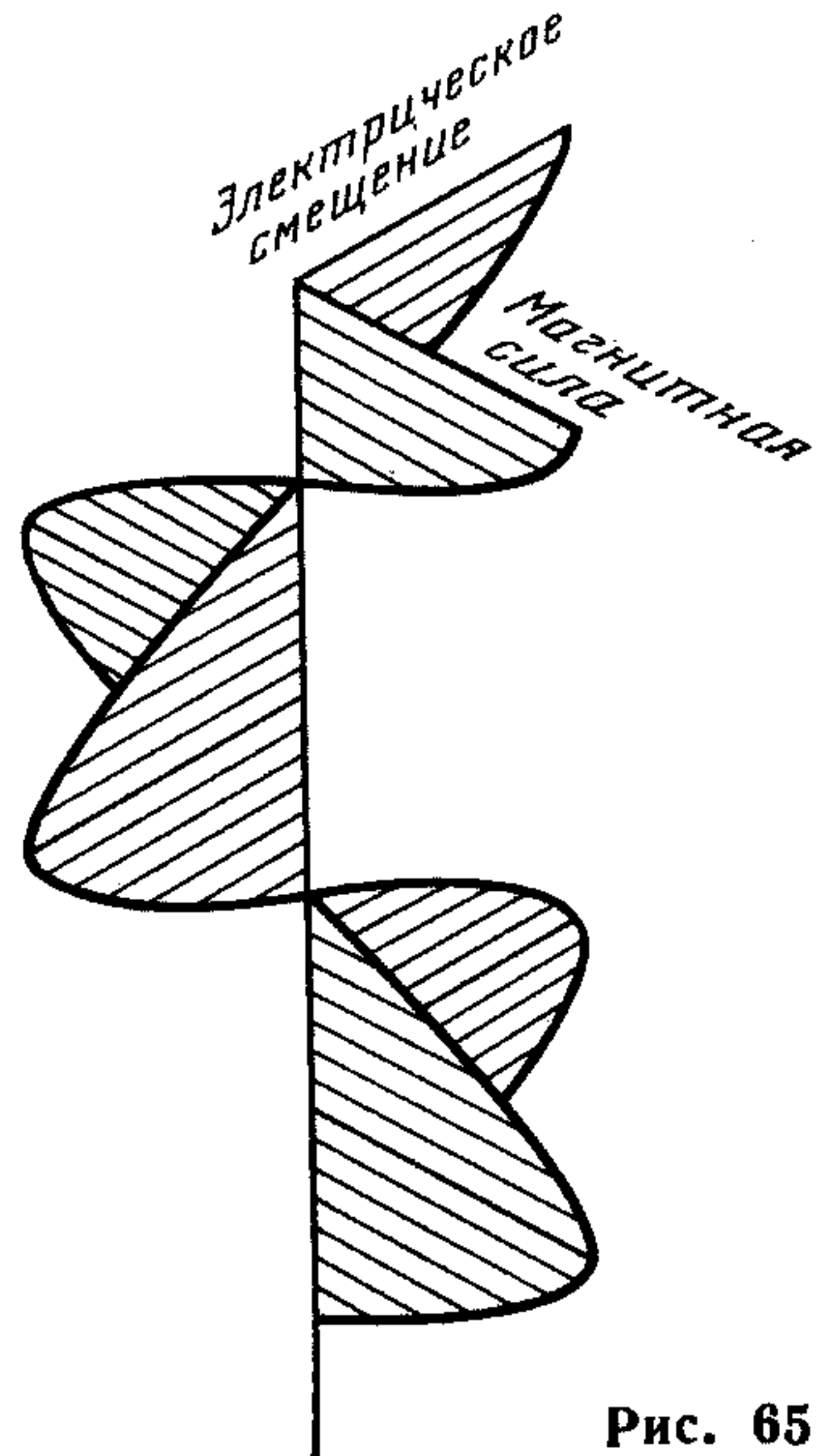


Рис. 65

793. Итак, если в сильном солнечном свете энергия света, падающего на один квадратный фут, равна 83,4 футо-фунтам в секунду, средняя энергия в одном кубическом футе солнечного света составляет около 0,000 000 088 2 футо-фунта, а среднее давление на квадратный фут равно 0,000 000 088 2 фунта веса. Плоское тело, выставленное на солнечный свет, будет испытывать это давление только на освещенной стороне и, следовательно, будет отталкиваться с той стороны, откуда падает свет. По-видимому, гораздо большую энергию излучения можно получить с помощью сконцентрированных лучей электрической лампы. Такие лучи, падающие на тонкий металлический диск, искусно подвешенный в вакууме, возможно, смогут произвести механический эффект, поддающийся наблюдению. Когда возмущение какого-либо вида состоит из членов, включающих синусы или косинусы углов, меняющихся во времени, то максимальная энергия равна удвоенной средней энергии. Следовательно, если P является той максимальной электродвижущей напряженностью, а β — той максимальной магнитной силой, которые вовлечены в процесс распространения света, то

$$\frac{K}{8\pi} P^2 = \frac{\mu}{8\pi} \beta^2 = \text{средней энергии в единице объема.} \quad (24)$$

Согласно данным Пуье (Pouillet), на которые ссылается Томсон (*Trans. R. S. E.*, 1854), для энергии солнечного света, выраженной в электромагнитных единицах, это дает: $P=60\,000\,000$, или около 600 ячеек Даниэля на метр; $\beta=0,193$, т. е. заметно больше, чем одна десятая горизонтальной магнитной силы в Англии.

Распространение плоских волн в кристаллической среде

794. При расчете (основанном на данных обычных электромагнитных экспериментов) электрических явлений, возникающих в результате периодических возмущений и происходящих миллионы миллионов раз в секунду, мы уже подвергли нашу теорию очень серьезной проверке, даже в предположении, что средой является воздух или вакуум. Но если мы попытаемся расширить нашу теорию на случай плотных сред, то будем вовлечены не только во все обычные трудности молекулярной теории, но и в более глубокую тайну связи свойств молекул со свойствами электромагнитной среды.

Во избежание этих трудностей мы будем предполагать, что в некоторых средах удельная способность для электростатической индукции различна в разных направлениях, или, другими словами, электростатическая индукция, вместо того чтобы быть пропорциональной электродвижущей напряженности и направленной в ту же сторону, связана с ней системой линейных уравнений, аналогичных тем, которые даны в п. 297. Можно показать, как и в п. 436, что система коэффициентов должна быть симметричной, так что при соответствующем выборе осей, уравнения принимают вид

$$f = \frac{1}{4\pi} K_1 P, \quad g = \frac{1}{4\pi} K_2 Q, \quad h = \frac{1}{4\pi} K_3 R, \quad (1)$$

где K_1 , K_2 и K_3 — главные индуктивные способности среды. Поэтому уравнения распространения возмущений следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{d^2 G}{dx dy} - \frac{d^2 H}{dz dx} &= K_1 \mu \left(\frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{d^2 \Psi}{dx dt} \right), \\ \frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{d^2 G}{dx^2} - \frac{d^2 H}{dy dz} - \frac{d^2 F}{dx dy} &= K_2 \mu \left(\frac{d^2 G}{dt^2} + \frac{d^2 \Psi}{dy dt} \right), \\ \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{d^2 H}{dy^2} - \frac{d^2 F}{dz dx} - \frac{d^2 G}{dy dz} &= K_3 \mu \left(\frac{d^2 H}{dt^2} + \frac{d^2 \Psi}{dz dt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

795. Если l , m , n — направляющие косинусы нормали к волновому фронту, а V — скорость волны, причем

$$lx + my + nz - Vt = \omega, \quad (3)$$

и если мы обозначим через F'' , G'' , H'' , Ψ'' вторые производные по ω от F , G , H , Ψ соответственно и положим

$$K_1 \mu = \frac{1}{a^2}, \quad K_2 \mu = \frac{1}{b^2}, \quad K_3 \mu = \frac{1}{c^2}, \quad (4)$$

где a , b , c — три главные скорости распространения, то уравнения становятся следующими:

$$\left. \begin{aligned} \left(m^2 + n^2 - \frac{V^2}{a^2} \right) F'' - lmG'' - nlH'' + V\Psi'' \frac{l}{a^2} &= 0, \\ -lmF'' + \left(n^2 + l^2 - \frac{V^2}{b^2} \right) G'' - mnH'' + V\Psi'' \frac{m}{b^2} &= 0, \\ -nlF'' - mnG'' + \left(l^2 + m^2 - \frac{V^2}{c^2} \right) H'' + V\Psi'' \frac{n}{c^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

796. Если мы обозначим

$$\frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = U, \quad (6)$$

то из этих уравнений получим

$$VU(VF'' - l\Psi'') = 0, \quad VU(VG'' - m\Psi'') = 0, \quad VU(VH'' - n\Psi'') = 0. \quad (7)$$

Отсюда либо $V=0$ — в этом случае волна вообще не распространяется, либо $U=0$, что приводит для V к уравнению, данному Френелем, либо величины, стоящие в скобках, обращаются в нуль, и в этом случае вектор с компонентами F'' , G'' , H'' нормален к волновому фронту и пропорционален объемной плотности электричества. Поскольку среда является непроводником, плотность электричества в любой данной точке постоянна и, следовательно, возмущения, определяемые этими уравнениями, являются непериодическими и не могут образовать волну. Мы можем поэтому при исследовании волны положить $\Psi''=0$.

797. Скорость распространения волны, таким образом, полностью определяется уравнением $U=0$, или

$$\frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = 0. \quad (8)$$

Имеются два, и только два, значения V^2 , соответствующих данному направлению волнового фронта.

Если λ , μ , ν являются направляющими косинусами электрического тока с составляющими u , v , w , то

$$\lambda:\mu:\nu::\frac{1}{a^2} F'':\frac{1}{b^2} G'':\frac{1}{c^2} H''. \quad (9)$$

Тогда

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0, \quad (10)$$

т. е. ток лежит в плоскости волнового фронта и его направление в волновом фронте определяется уравнением

$$\frac{l}{\lambda} (b^2 - c^2) + \frac{m}{\mu} (c^2 - a^2) + \frac{n}{\nu} (a^2 - b^2) = 0. \quad (11)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями, данными Френелем, если мы определим плоскость поляризации как плоскость, проходящую через луч перпендикулярно плоскости электрического возмущения.

Согласно этой электромагнитной теории двойного преломления волна продольного возмущения, которая представляет одну из основных трудностей обычной теории, не существует и не требуется никакого нового предположения для того, чтобы учесть тот факт, что луч, поляризованный в главной плоскости кристалла, преломляется обычным образом⁵.

Связь между электрической проводимостью и непрозрачностью

798. Если среда вместо того, чтобы быть идеальным изолятором, является проводником, проводимость которого на единицу объема равна C , возмущение будет состоять не только из электрических смещений, но и из токов проводимости, в которых энергия преобразуется в тепло, так что волновое движение поглощается средой.

Если возмущение выражается периодической функцией, мы можем записать

$$F = e^{-pz} \cos (nt - qz), \quad (1)$$

так как это удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = \mu K \frac{d^2 F}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt} \quad (2)$$

при условии, что

$$q^2 - p^2 = \mu K n^2 \quad (3)$$

и

$$2pq = 4\pi\mu C n. \quad (4)$$

Скорость распространения равна

$$V = n/q, \quad (5)$$

а коэффициент поглощения равен

$$p = 2\pi\mu C V. \quad (6)$$

⁵ Стокс. «Доклад о двойном преломлении»; *Brit. Assoc. Report*, 1862, p. 253.

Пусть R будет в электромагнитной мере сопротивлением пластинки длиной l , шириной b и толщиной z :

$$R = l / (bzC). \quad (7)$$

Доля падающего света, пропускаемая этой пластинкой, равна

$$e^{-2pz} = e^{-4\pi\mu \frac{l}{b} \frac{V}{R}}. \quad (8)$$

799. Наиболее прозрачные твердые тела являются хорошими изоляторами, а все хорошие проводники весьма непрозрачны. Имеется, однако, много исключений из правила, гласящего, что чем больше непрозрачность тела, тем больше его проводимость.

Электролиты проводят электрический ток, и все же многие из них прозрачны. Мы можем, однако, предположить, что в случае быстропеременных сил, которые имеют место при распространении света, электрическая сила действует в одну сторону в течение столь короткого промежутка времени, что она не способна произвести полное разделение соединенных молекул. Когда во время второй половины колебания электрическая сила действует в противоположном направлении, она просто обращает все то, что было сделано в течение первой половины. Таким образом, здесь нет истинного прохождения тока, нет потерь электрической энергии и, следовательно, нет поглощения света.

800. Золото, серебро и платина являются хорошими проводниками и все-таки, будучи прокатаны в очень тонкие пластинки, они пропускают через себя свет. Из экспериментов, проведенных мною с кусочком золотого листа, сопротивление которого определил м-р Хокин (Hoskin), следует, что прозрачность листа гораздо больше, чем это совместимо с нашей теорией, если только не предположить, что потери энергии меньше, когда электрические силы меняют знак каждую половину светового колебания, чем в случае, когда они действуют в течение заметных промежутков времени, как это имеет место в наших обычных экспериментах.

801. Рассмотрим далее среду, в которой проводимость велика по сравнению с индуктивной способностью.

В этом случае мы можем опустить члены, содержащие K в уравнениях п. 783, и эти уравнения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 F + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt} &= 0, \\ \nabla^2 G + 4\pi\mu C \frac{dG}{dt} &= 0, \\ \nabla^2 H + 4\pi\mu C \frac{dH}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Каждое из этих уравнений имеет ту же форму, что и уравнение диффузии тепла, данное в «Трактате о Теплоте» Фурье.

802. Например, из первого уравнения следует, что F -составляющая вектор-потенциала будет меняться во времени и пространстве так же, как меняется во времени и пространстве температура однородного твердого тела при условии, что начальные и граничные условия для этих двух случаев приведены в соответ-

ствие друг с другом, а величина $4\pi C$ численно равна обратной термометрической проводимости вещества, иначе говоря, количеству единиц объема вещества, которое было бы нагрето на один градус теплом, проходящим через единичный куб вещества в единицу времени, у которого температура двух противоположных граней отличается на градус, в то время как остальные грани для тепла непроницаемы⁶.

Различные задачи теплопроводности, решения которых дал Фурье, могут быть преобразованы в задачи диффузии электромагнитных величин, однако следует помнить, что F, G, H являются составляющими вектора, тогда как температура в задаче Фурье является величиной скалярной.

Возьмем один из случаев, для которого Фурье дал полное решение⁷, это случай бесконечной среды, начальное состояние которой задано.

Состояние в произвольной точке среды в момент времени t находится путем взятия среднего от состояния каждой части среды, причем вес, приписываемый каждой части при взятии среднего, равен $e^{-(\pi\mu Cr^2)/t}$, где r — расстояние от этой части до рассматриваемой точки. В случае векторных величин это среднее наиболее удобно брать, рассматривая каждую составляющую вектора отдельно.

803. Прежде всего мы должны заметить, что в этой задаче теплопроводность среды Фурье следует брать обратно пропорциональной электропроводности нашей среды, таким образом, время, требуемое для достижения заданной стадии в процессе диффузии, тем больше, чем выше электропроводность. Это утверждение не будет казаться парадоксальным, если мы вспомним результат п. 655, состоящий в том, что среда с бесконечной проводимостью образует непреодолимый барьер для процесса диффузии магнитной силы.

Далее, время, необходимое для достижения заданного состояния в процессе диффузии, пропорционально квадрату линейных размеров системы.

Здесь нет определенной скорости, которую можно было бы определить, как скорость диффузии. Если мы попытаемся измерить эту скорость, установив время, необходимое для образования возмущения заданной величины на заданном расстоянии от источника возмущения, мы получим, что чем меньше выбранное значение возмущения, тем большей будет оказываться скорость, поскольку, как бы велико ни было расстояние и как бы мало ни было время, величина возмущения будет математически отличаться от нуля.

Эта особенность диффузии отличает ее от распространения волн, которое происходит с определенной скоростью. Никаких возмущений в данной точке не возникает до тех пор, пока волна не достигнет этой точки, а когда волна пройдет через нее, возмущение прекращается навсегда.

⁶ См. Maxwell's *Theory of Heat*, p. 235 first edition, p. 255 fourth edition.

⁷ *Traité de la Chaleur*, Art. 384.

Уравнение, определяющее температуру v в точке (x, y, z) спустя время t как функцию начальной температуры $f(\alpha, \beta, \gamma)$ в точке (α, β, γ) , следующее:

$$v = \iiint \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{2^3 V k^3 \pi^3 t^3} e^{-\left(\frac{(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2}{4kt}\right)} f(\alpha, \beta, \gamma),$$

где k — термометрическая проводимость.

804. Исследуем теперь процесс, который имеет место, когда электрический ток возникает и продолжает течь по прямому проводу, а окружающая его среда обладает конечной электрической проводимостью (сравните с п. 660).

Когда ток начинается, его первое действие состоит в том, чтобы создать ток индукции в областях среды, близких к проводу. Направление этого тока противоположно направлению первоначального тока и в первый момент его общая величина равна величине первоначального тока, так что электромагнитное действие на более удаленные участки среды вначале равно нулю; оно возрастает до своего конечного значения по мере затухания тока индукции из-за электрического сопротивления среды.

Но по мере затухания тока индукции вблизи провода дальше в среде возникает новый индукционный ток, так что пространство, занятое индукционным током, непрерывно расширяется, а интенсивность тока непрерывно уменьшается.

Это явление диффузии и затухания тока индукции в точности аналогично диффузии тепла от участка среды, вначале более горячего или более холодного, чем остальные. Однако, поскольку ток является векторной величиной и в противоположных точках контура имеет противоположные направления, мы должны помнить, что при вычислении любой данной составляющей тока индукции нужно сравнивать эту задачу с такой задачей, в которой равные количества тепла и холода диффундируют из соседних мест; в этом случае действие на отдаленные точки будет иметь меньший порядок величины.

805. Если в прямом проводе поддерживается постоянный ток, то токи индукции, которые зависят от начального изменения состояния, будут постепенно диффундировать и угасать, оставив среду в неизменном состоянии, которое аналогично неизменному состоянию потока тепла. В этом состоянии мы имеем

$$\nabla^2 F = \nabla^2 G = \nabla^2 H = 0 \quad (2)$$

во всей среде, кроме части, занятой проводом, в которой

$$\nabla^2 F = 4\pi i, \quad \nabla^2 G = 4\pi v, \quad \nabla^2 H = 4\pi w. \quad (3)$$

Этих уравнений достаточно, чтобы определить значения F , G , H во всей среде. Они показывают, что нет других токов, кроме тока в контуре, и что магнитные силы просто обусловлены токами в контуре согласно обычной теории. Скорость, с которой устанавливается это неизменное состояние, настолько велика, что не может быть измерена нашими экспериментальными методами, кроме, возможно, случая очень большого количества высокопроводящей среды, такой, как, например, медь.

З а м е ч а н и е. В своей работе, опубликованной в «Анналах» Поггендорфа (*Pogg. Ann.*, July, 1867), Лоренц вывел из уравнений Кирхгофа для электрических токов (*Pogg. Ann.*, CII, 1856) путем добавления некоторых членов, не влияющих ни на какие экспериментальные результаты, новую систему уравнений, показывающую, что распределение силы в электромагнитном поле может быть представлено как возникающее из взаимодействия прилегающих друг к другу элементов и что волны, образованные поперечными электрическими токами, могут распространяться со скоростью, сравнимой со скоростью света в непроводящей среде. Поэтому он рассматривает возмущения, составляющие свет, как идентич-

ные с возмущениями электрических токов и показывает, что проводящая среда должна быть непрозрачной для таких излучений.

Эти выводы сходны с выводами настоящей главы, хотя они получены совсем другим методом. Приведенная в этой главе теория впервые была опубликована в *Phil. Trans.* за 1865 г., стр. 459—512.

ГЛАВА XXI

МАГНИТНОЕ ДЕЙСТВИЕ НА СВЕТ

806. Наиболее важным шагом в установлении связи между явлениями электрическими и магнитными и явлениями световыми должно быть открытие какого-либо примера, в котором одна совокупность явлений влияла бы на другую. В поисках таких явлений мы должны руководствоваться любым знанием из числа уже полученных нами и относящихся к математической или геометрической форме величин, которые мы желаем сравнивать. Так, если мы будем пытаться, как пыталась миссис Сомервилль (Somerville), намагнитить стрелку с помощью света, мы должны помнить, что различие между магнитным севером и югом — это просто вопрос о направлении, а направление тотчас же сменится на противоположное, когда мы сделаем противоположными некоторые соглашения относительно использования математических знаков. В магнетизме нет ничего аналогичного тем явлениям электролиза, которые позволяют нам отличать положительное электричество от отрицательного, замечая, что кислород появляется на одном полюсе элемента, а водород — на другом.

Поэтому, заставив свет падать на один из концов стрелки, мы не должны ожидать, что этот конец станет полюсом определенного направления, поскольку два полюса не различаются между собой, как отличается свет от темноты.

Мы можем ожидать лучшего результата, заставив падать на стрелку циркулярно поляризованный свет: правополяризованный — на один конец и левополяризованный — на другой, ибо в некотором смысле про эти два вида света можно сказать, что они относятся друг к другу как полюса магнита. Однако даже здесь эта аналогия несовершенна, поскольку при объединении два луча не нейтрализуют друг друга, а дают плоскополяризованный луч.

Фарадей, который был знаком с методом изучения напряжений, производимых поляризованным светом в прозрачных твердых телах, проделал много экспериментов в надежде обнаружить какое-либо воздействие на поляризованный свет при его прохождении через среду, где существует электролитическая проводимость или диэлектрическая индукция¹. Однако он не смог обнаружить никаких воздействий такого рода, хотя эксперименты производились в оптимальных — для обнаружения эффектов натяжения — условиях, а именно: электрическая сила или ток образовывали с направлением луча прямой угол, а с плоскостью

¹ *Experimental Researches*, 951—954 and 2216—2220.

поляризации — угол сорок пять градусов. Фарадей, варьируя эти эксперименты многочисленными способами, так и не открыл никакого воздействия на свет, обусловленного электролитическими токами или статической электрической индукцией.

Однако он преуспел в установлении связи между светом и магнетизмом; эксперименты, в которых он это сделал, описаны в девятнадцатой серии его «*Экспериментальных исследований*». Это открытие Фарадея будет взято нами в качестве отправной точки для дальнейшего углубления в природу магнетизма, и поэтому мы опишем явление, которое он наблюдал.

807. Луч плоскополяризованного света пропускается через прозрачную диамагнитную среду, а плоскость его поляризации на выходе из среды устанавливается путем наблюдения положения анализатора, при котором луч отсекается. Затем прикладывается магнитная сила, которая действует таким образом, что направление магнитной силы внутри прозрачной среды совпадает с направлением луча. Свет тотчас же появляется вновь, но при повороте анализатора на определенный угол свет опять отсекается. Это показывает, что действие магнитной силы состоит в повороте плоскости поляризации вокруг луча, взятого в качестве оси, на определенный угол, измеряемый углом, на который надо повернуть анализатор, чтобы отсечь свет.

808. Угол, на который поворачивается плоскость поляризации, пропорционален: (1). Расстоянию, которое луч проходит внутри среды. Следовательно, плоскость поляризации меняется непрерывно от ее положения на входе до ее положения на выходе. (2). Величине составляющей магнитной силы в направлении луча. (3). Степень вращения зависит от природы среды. До сих пор не наблюдалось никакого вращения, когда средой являлся воздух или любой другой газ.

Эти три утверждения объединяются в одно, более общее, которое гласит, что угловое вращение численно равно величине, на которую возрастает магнитный потенциал от точки, где луч входит в среду, до точки, где он выходит из нее, умноженной на коэффициент, который для диамагнитных сред обычно положителен.

809. В диамагнитных веществах вращение плоскости поляризации происходит в направлении, в котором должен циркулировать ток, создающий магнитную силу, направленную так же, как и действительно существующая в среде магнитная сила.

Вердье (Verdet), однако, обнаружил, что в некоторых ферромагнитных средах (например, сильный раствор перхлорида железа в древесном спирте или в эфире) вращение происходит в направлении, противоположном току, который создавал бы магнитную силу.

Это показывает, что различие между ферромагнитными и диамагнитными веществами не возникает просто из «магнитной проницаемости», которая в одном случае больше, а в другом меньше, чем у воздуха; свойства этих двух классов тел действительно противоположны.

Способность, приобретаемая веществом под действием магнитного поля поворачивать плоскость поляризации света, не точно пропорциональна его диамагнитной или ферромагнитной намагниченности. В действительности есть исключения из того правила, что вращение положительно для диамагнитных и отрицательно для ферромагнитных веществ, поскольку нейтральный хромат соды является диамагнитным, но производит отрицательное вращение.

810. Существуют другие вещества, которые независимо от приложения магнитной силы заставляют поворачиваться плоскость поляризации вправо или влево при прохождении луча через вещество. В некоторых из них это свойство относится к оси, как в случае кварца. В других это свойство не зависит от направления луча в пределах среды, как в скипидаре, растворе сахара и т. п. Во всех этих веществах, однако, если плоскость поляризации какого-то луча скручена, подобно правостороннему винту, она по-прежнему будет скручена в виде правостороннего винта, если луч пропускается через среду в противоположном направлении. Направление, в котором наблюдатель должен повернуть свой анализатор, чтобы погасить луч при введении среды на пути луча, одинаково относительно наблюдателя независимо от того, приходит ли к нему луч с севера или с юга. Направление вращения в пространстве, конечно, меняется на противоположное при обращении направления луча. Но когда это вращение производится магнитным действием, его направление одно и то же, независимо от того, идет ли луч на север или на юг. Вращение всегда происходит в направлении тока, который создает (или создал бы) действительное магнитное состояние поля, если среда принадлежит к средам положительного класса, и в противоположном направлении, если среда принадлежит к средам отрицательного класса.

Из этого следует, что если луч света после прохождения через среду с севера на юг отражается зеркалом и возвращается через среду с юга на север, вращение будет удваиваться, если оно является результатом магнитного действия. Когда же вращение зависит только от природы среды, как в скипидаре и др., отраженный луч при прохождении обратно через среду выходит в той же плоскости, в какой он вошел в нее, — вращение во время первого прохождения через среду точно обращается на противоположное во время второго прохождения.

811. Физическое объяснение этого явления представляет значительные трудности, про которые едва ли можно сказать, что они преодолены к настоящему времени как для магнитного вращения, так и для вращения, которое некоторые среды производят сами по себе. Мы можем, однако, подготовить путь для такого объяснения на основе анализа наблюдаемых фактов.

В кинематике существует хорошо известная теорема, что два однородных круговых колебания одинаковой амплитуды, имеющие один и тот же период и лежащие в одной и той же плоскости, но вращающиеся в противоположных направлениях, будучи соединены вместе, эквивалентны прямолинейному колебанию. Период этого колебания равен периоду круговых колебаний, его амплитуда удвоена, а его направление находится на линии, соединяющей точки, в которых встречаются две частицы, совершающие круговые колебания в противоположных направлениях по одному и тому же кругу. Следовательно, если фаза одного из круговых колебаний ускоряется, направление прямолинейных колебаний будет поворачиваться в сторону, соответствующую направлению этого кругового колебания, но на угол, равный половине угла ускорения фазы.

Можно также доказать при помощи непосредственного оптического эксперимента, что два луча света, имеющих равные интенсивности и циркулярно поляризованные в противоположных направлениях, после их соединения превращаются в один плоскополяризованный луч и что если любыми способами ускорить фазу одного из циркулярно поляризованных лучей, то плоскость поляризации результирующего луча поворачивается на половину угла опережения фазы.

812. Мы можем, следовательно, выразить явление вращения плоскости поляризации следующим образом. Плоскополяризованный луч падает на среду. Это эквивалентно двум циркулярно поляризованным лучам: одному — правостороннему, другому — левостороннему (по отношению к наблюдателю). После прохождения через среду луч по-прежнему плоскополяризован, но плоскость поляризации повернута, скажем, вправо (по отношению к наблюдателю). Следовательно, из двух циркулярно поляризованных лучей тот, который является правосторонним, при прохождении через среду должен иметь фазу, ускоренную по отношению к другому лучу.

Другими словами, правополяризованный луч совершает большее число колебаний и, следовательно, имеет меньшую длину волны в среде, чем левополяризованный луч, имеющий тот же самый период.

Этот способ констатации того, что имеет место, совершенно не зависит от любой теории света, ибо хотя мы и используем такие термины как длина волны, круговая поляризация и др., которые в наших умах могут ассоциироваться с частной формой волновой теории, само рассуждение не зависит от этих ассоциаций, а зависит только от фактов, доказанных экспериментом.

813. Рассмотрим далее конфигурацию одного из этих лучей в данный момент. Любое волновое движение, круговое в каждой точке, может быть представлено спиралью или винтом. Если винт поворачивать вокруг оси без продольного перемещения, каждая частица будет описывать окружность; в то же время распространение волнового движения будет представлено видимым продольным перемещением подобно расположенных частей резьбы винта. Легко увидеть, что если винт правосторонний, а наблюдатель помещен на том конце, по направлению к которому идет волновое возмущение, то ему движение винта будет казаться левосторонним, иначе говоря, противоположным направлению движения стрелок часов. Поэтому такой луч был назван вначале французскими авторами, а теперь и всем научным миром, левосторонним циркулярно поляризованным лучом.

Правосторонний циркулярно поляризованный луч аналогичным образом представляется левовинтовой спиралью. На рис. 66 правовинтовая спираль *A* на правой стороне рисунка представляет левосторонний луч, а левовинтовая спираль *B* слева представляет правосторонний луч.

814. Рассмотрим теперь два таких луча, которые имеют одну и ту же длину волны в среде. Они геометрически подобны во всех отношениях, но один из них является *перверсией* другого, т. е. он аналогичен своему изображению в зеркале. Пусть, однако, один из лучей, скажем *A*, имеет более короткий по сравнению с другим период вращения. Если движение целиком обусловлено силами,

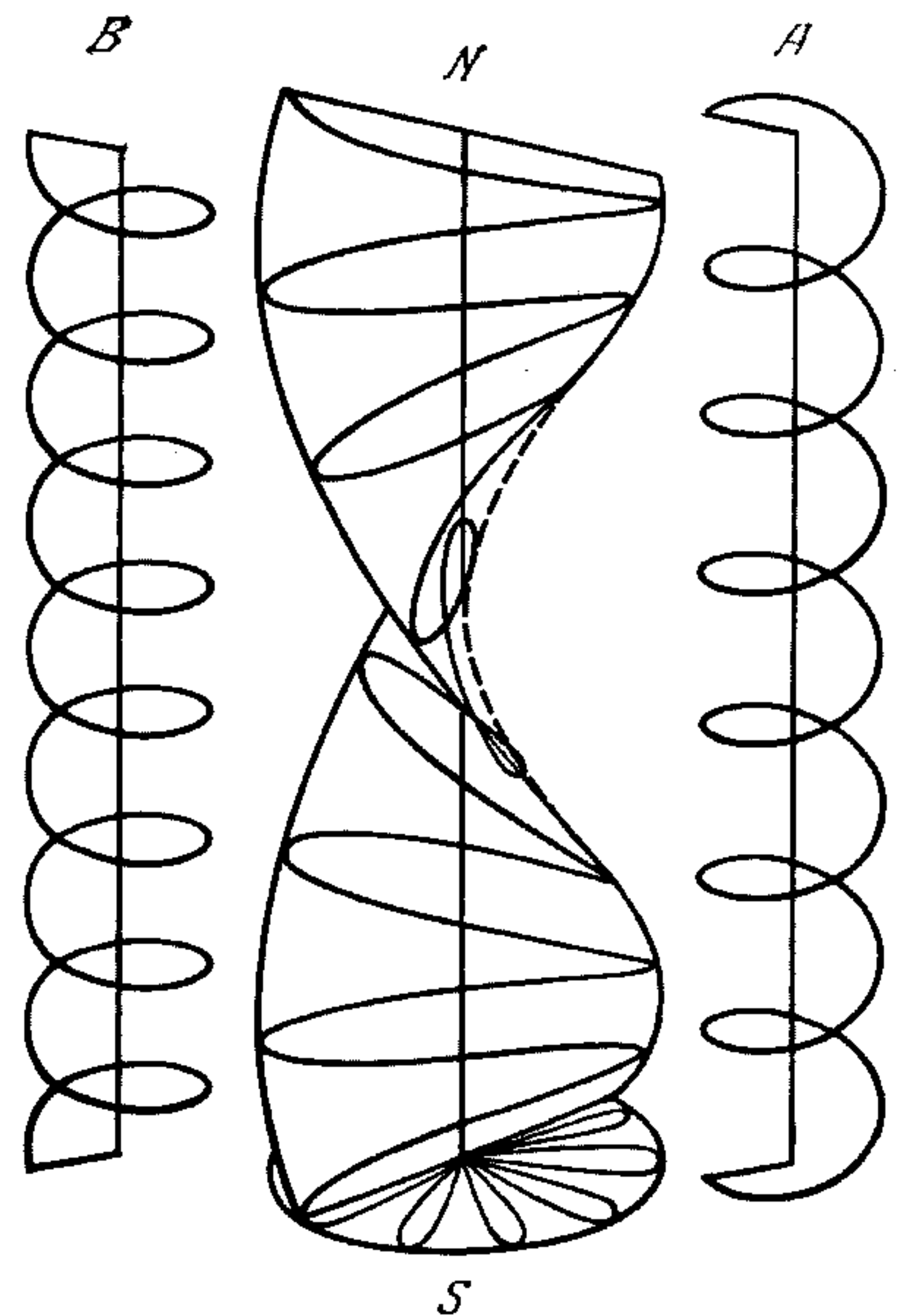


Рис. 66

вступающими в игру из-за смещения, то это будет свидетельствовать о том, что при одинаковом смещении для конфигурации вида A вовлечены большие силы, чем для конфигурации вида B . Следовательно, в этом случае левосторонний луч будет ускоряться по отношению к правостороннему лучу, причем это будет иметь место и когда лучи идут от N к S , и когда они идут от S к N .

Таким образом, это дает объяснение явления, производимого скипидаром и др. В таких средах смещение, вызываемое циркулярно поляризованным лучом, вовлекает большие восстанавливающие силы в случае конфигурации вида A , чем в случае конфигураций вида B . Силы, следовательно, зависят только от конфигурации, но не от направления движения.

Но в диамагнитной среде, на которую действует магнетизм в направлении SN , из двух винтов A и B всегда с большей скоростью вращается тот, движение которого, если смотреть от S к N , выглядит как движение по часовой стрелке. Следовательно, при направлении лучей от S к N правосторонний луч B будет двигаться быстрее, а при направлении лучей от N к S быстрее будет двигаться левосторонний луч A .

815. Если ограничить наше внимание лишь одним лучом, то спираль B имеет одну и ту же конфигурацию независимо от того, представляет ли она луч, идущий от S к N или от N к S . Но в первом случае луч движется быстрее, а следовательно, и спираль вращается быстрее. Таким образом, один из способов вращения спирали вовлекает большие силы, чем другой. Силы, следовательно, зависят не только от конфигурации луча, но также от направления движения его индивидуальных частей.

816. Возмущение, составляющее свет, независимо от того, какой может быть его физическая природа, является по своему характеру вектором, перпендикулярным направлению луча. Это доказано фактом интерференции двух лучей света, дающей при определенных условиях темноту, вместе с фактом отсутствия такой интерференции в случае двух лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. Действительно, поскольку интерференция зависит от углового положения плоскостей поляризации, возмущение должно быть величиной направленной, т. е. вектором, а поскольку интерференция прекращается, когда плоскости поляризации расположены под прямым углом друг к другу, вектор, представляющий возмущение, должен быть перпендикулярен линии пересечения этих плоскостей, т. е. направлению луча.

817. Возмущение, будучи вектором, может быть разложено на составляющие, параллельные x и y , если ось z параллельна направлению луча. Пусть этими составляющими будут ξ и η , тогда в случае луча однородного циркулярно поляризованного света

$$\xi = r \cos \vartheta, \quad \eta = r \sin \vartheta, \quad (1)$$

где

$$\vartheta = nt - qz + \alpha. \quad (2)$$

В этих выражениях r обозначает величину вектора, а ϑ — угол, который он образует с направлением оси x .

Период возмущения τ таков, что

$$n\tau = 2\pi. \quad (3)$$

Длина волны возмущения λ такова, что

$$q\lambda = 2\pi. \quad (4)$$

Скорость распространения равна n/q .

Фаза возмущения равна α , когда и t и z обращаются в нуль.

Циркулярно поляризованный свет является правосторонним или левосторонним в соответствии с тем, является величина q отрицательной или положительной.

Его колебания происходят в положительном или отрицательном направлении вращения в плоскости (x, y) в соответствии с тем, является ли величина n положительной или отрицательной.

Свет распространяется в положительном или отрицательном направлении оси z в соответствии с тем, являются n и q величинами одного знака или противоположных знаков.

Во всех средах n меняется с изменением q , причем dn/dq всегда того же знака, что и n/q .

Следовательно, если для данного численного значения n величина n/q больше при положительных n , чем при отрицательных, то отсюда вытекает, что для значения q , заданного по величине и по знаку, положительное значение n будет больше, чем отрицательное.

Как раз это и наблюдается в диамагнитной среде, на которую действует магнитная сила γ в направлении z . Из двух циркулярно поляризованных лучей с данным периодом ускоряется тот, у которого направление вращения в плоскости (x, y) положительно. Следовательно, из двух левосторонних циркулярно поляризованных лучей, имеющих одинаковую длину волны в среде, более короткий период имеет тот луч, у которого направление вращения в плоскости xy положительно, т. е. луч, который распространяется в положительном направлении z от юга к северу. Таким образом, мы должны учитывать тот факт, что, когда в уравнениях системы заданы q и r , уравнениям будут удовлетворять два значения n , одно положительное, другое отрицательное, причем положительное значение больше по абсолютной величине, чем отрицательное.

818. Мы можем получить уравнения движения из рассмотрения потенциальной и кинетической энергий среды. Потенциальная энергия системы V зависит от конфигурации среды, т. е. от относительного положения ее частей. В том случае, когда она зависит от возмущения, обусловленного циркулярно поляризованным светом, она должна быть функцией только амплитуды r и коэффициента кручения q . Она может быть различной для отрицательных и положительных значений q , равных по абсолютной величине, и, вероятно, так оно и есть в случае сред, которые сами по себе вращают плоскость поляризации.

Кинетическая энергия системы T является однородной функцией вторых степеней скоростей системы, причем коэффициенты перед различными членами являются функциями координат.

819. Рассмотрим динамическое условие того, что луч может иметь постоянную интенсивность, т. е. величина r может оставаться постоянной.

Уравнение Лагранжа для силы по координате r становится таким:

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dr} - \frac{dT}{dr} + \frac{dV}{dr} = 0. \quad (5)$$

Поскольку величина r постоянна, первый член исчезает. Мы, следовательно, имеем уравнение

$$-\frac{dT}{dr} + \frac{dV}{dr} = 0, \quad (6)$$

в котором величина q предполагается заданной, и нам следует определить значение угловой скорости $\dot{\vartheta}$, которое мы можем обозначить через ее фактическое значение n .

Один член в кинетической энергии T содержит n^2 , другие члены могут содержать произведения величины n на другие скорости, а остальные члены не зависят от n . Потенциальная энергия V вообще не зависит от n . Уравнение (6), следовательно, имеет вид

$$An^2 + Bn + C = 0. \quad (7)$$

Будучи квадратным, это уравнение дает два значения n . Из эксперимента следует, что оба значения являются действительными, одно из них положительно, а другое отрицательно, причем положительное значение по абсолютной величине больше отрицательного. Следовательно, если A положительно, то B и C отрицательны, поскольку если n_1 и n_2 являются корнями уравнения, то

$$A(n_1 + n_2) + B = 0. \quad (8)$$

Коэффициент B , таким образом, отличен от нуля, по крайней мере тогда, когда на среду действует магнитная сила. Поэтому мы должны рассмотреть выражение Bn , являющееся той частью кинетической энергии, которая содержит первую степень n — угловую скорость возмущения.

820. Каждый член в T является членом второго порядка относительно скорости. Следовательно, член, содержащий n , должен включать в себя еще какую-то скорость. Этой скоростью не может быть \dot{r} или \dot{q} поскольку в рассматриваемом нами случае r и q постоянны. Следовательно, это есть скорость, существующая в среде независимо от того движения, которое составляет свет. Она также должна быть скоростью по отношению к n в том смысле, чтобы при ее умножении на n получалась скалярная величина, поскольку только скалярные величины могут входить в T , значение которого само по себе является скаляром. Следовательно, эта скорость должна иметь то же направление, что и n , или противоположное направление, т. е. она должна быть *угловой скоростью* относительно оси z .

Опять-таки, эта скорость не может быть независимой от магнитной силы, ибо если бы она была отнесена к фиксированному относительно среды направлению, то поворот среды на 180° изменил бы явление, а это не имеет места.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что эта скорость неизменно сопутствует магнитной силе в тех средах, которые обнаруживают магнитное вращение плоскости поляризации.

821. До сих пор мы были вынуждены пользоваться языком, который, возможно, содержал слишком много намеков на обычную гипотезу движения в волновой теории. Легко, однако, сформулировать наш результат в свободной от этой гипотезы форме.

Что бы ни представлял собой свет, в каждой точке пространства что-то происходит — либо смещение, либо вращение, или нечто такое, что даже не поддается

ся воображению, но что несомненно по своей природе является вектором, т. е. направленной величиной, ориентированной нормально к направлению луча. Это полностью доказано явлениями интерференции.

В случае циркулярно поляризованного света величина этого вектора остается всегда одной и той же, а его направление вращается вокруг направления луча, совершая один оборот за период волны. Существующая неопределенность относительно того, лежит ли этот вектор в плоскости поляризации или перпендикулярен к ней, не распространяется на наше представление о направлении его вращения в правостороннем и левостороннем циркулярно поляризованном свете соответственно. Направление вращения и угловая скорость этого вектора точно известны, хотя физическая природа вектора и его абсолютное направление в данный момент не определены.

Когда луч циркулярно поляризованного света падает на среду, находящуюся под действием магнитной силы, на его распространение в среде влияет отношение направления вращения света к направлению магнитной силы. Из этого мы заключаем (в соответствии с аргументацией п. 817), что в среде под действием магнитной силы происходит некоторое вращательное движение, ось которого лежит в направлении магнитных сил, и что скорость распространения циркулярно поляризованного света при совпадении направлений его колебательного вращения с магнитным вращением среды отлична от скорости распространения, когда эти направления противоположны.

Единственное сходство, которое мы можем проследить между средой, через которую распространяется циркулярно поляризованный свет, и средой, через которую проходят линии магнитной силы, состоит в том, что в обоих случаях имеется вращательное движение вокруг оси. Но здесь сходство кончается: вращение в оптическом явлении есть вращение вектора, представляющего собой некоторое возмущение. Этот вектор всегда перпендикулярен направлению луча и поворачивается вокруг него известное число раз в секунду. В магнитном явлении то, что вращается, не обладает свойствами, по которым можно различить его стороны; так что мы не можем определить, сколько поворотов совершается в секунду.

Следовательно, в магнитном явлении нет ничего, что соответствует длине волны и распространению волны в оптическом явлении. Среда, в которой действует постоянное магнитное поле, не заполнена благодаря наличию силы волнами, распространяющимися в одном направлении, как в случае, когда через эту среду распространяется свет. Единственное сходство между оптическим и магнитным явлениями состоит в том, что в каждой точке среды существует нечто такое, что имеет природу угловой скорости относительно оси, направленной вдоль магнитной силы.

О гипотезе молекулярных вихрей

822. Изучение действия магнетизма на поляризованный свет приводит, как мы уже видели, к выводу о том, что часть явления, происходящего в среде под действием магнитной силы, составляет нечто, относящееся к той же математической категории величин, что и угловая скорость, ось которой направлена вдоль магнитной силы.

Эта угловая скорость не может быть скоростью какой-либо части среды, имеющей заметные размеры и вращающейся как единое целое. Мы должны, следовательно, представлять его как вращение очень маленьких объемов среды, каждый из которых вращается вокруг своей собственной оси. Это и составляет гипотезу молекулярных вихрей.

Движение этих вихрей, хотя оно, как мы показали (п. 575), и не влияет заметно на видимые движения больших тел, может быть таким, чтобы воздействовать на то колебательное движение, от которого, согласно волновой теории, зависит распространение света. Смещения среды во время распространения света будут производить возмущение вихрей, а возмущенные таким образом вихри могут воздействовать на среду и этим влиять на характер распространения луча.

823. В том состоянии неведения относительно природы вихрей, в котором мы пребываем сейчас, невозможно установить закон, который связывает смещение среды с изменением вихрей. Поэтому мы будем предполагать, что изменение вихрей, вызванное смещением среды, подчинено тем же условиям, которые, как показал Гельмгольц в своем великом труде, посвященном Вихревому движению², регулируют изменение вихрей идеальной жидкости.

Правило Гельмгольца можно сформулировать следующим образом. Пусть P и Q будут две соседние частицы на оси вихря, тогда, если вследствие движения жидкости эти частицы окажутся в точках P', Q' , линия $P'Q'$ будет представлять новое направление оси вихря, а его сила изменится в отношении $P'Q'$ к PQ .

Следовательно, если α, β, γ обозначают составляющие силы вихря, а ξ, η, ζ — смещение среды, значения α, β и γ станут равными

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \alpha \frac{d\xi}{dx} + \beta \frac{d\xi}{dy} + \gamma \frac{d\xi}{dz}, \\ \beta' &= \beta + \alpha \frac{d\eta}{dx} + \beta \frac{d\eta}{dy} + \gamma \frac{d\eta}{dz}, \\ \gamma' &= \gamma + \alpha \frac{d\zeta}{dx} + \beta \frac{d\zeta}{dy} + \gamma \frac{d\zeta}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Теперь мы предположим, что то же самое условие выполнено при небольших смещениях среды, в которых α, β, γ представляют не составляющие силы обычного вихря, а составляющие магнитной силы.

824. Составляющие угловой скорости элемента среды равны

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Следующий шаг в нашей гипотезе состоит в предположении, что кинетическая энергия среды содержит член вида

$$2C(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3). \quad (3)$$

² *Crelle's Journal*, vol. IV (1858), p. 25—55. Перевод Тэта. *Phil. Mag.*, June, p. 485—151, 1867.

Это эквивалентно предположению, что угловая скорость, приобретаемая элементом среды при распространении света, есть величина, которая может входить в комбинации с тем движением, которым объясняются магнитные явления.

Для того чтобы получить уравнения движения среды, мы должны выразить ее кинетическую энергию через скорость ее частей, составляющими которой являются $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$. Таким образом, мы интегрируем по частям и находим

$$2C \iiint (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3) dx dy dz = C \iint (\gamma\dot{\eta} - \beta\dot{\zeta}) dy dz + C \iint (\alpha\dot{\zeta} - \gamma\dot{\xi}) dz dx + \\ + C \iint (\beta\dot{\xi} - \alpha\dot{\eta}) dx dy + C \iiint \left\{ \dot{\xi} \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + \dot{\eta} \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + \dot{\zeta} \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right\} dx dy dz. \quad (4)$$

Двойные интегралы относятся к ограничивающей поверхности, которую можно предполагать расположенной на бесконечном расстоянии. Поэтому мы можем при исследовании того, что имеет место внутри среды, ограничиться рассмотрением тройного интеграла.

825. Часть кинетической энергии в единице объема, выражаемая этим тройным интегралом, может быть записана в виде

$$4\pi C (\dot{\xi}u + \dot{\eta}v + \dot{\zeta}w), \quad (5)$$

где u , v , w являются составляющими электрического тока в том виде, как они даны в уравнениях (E) п. 607.

Из этого следует, что наша гипотеза эквивалентна предположению о том, что скорость частицы среды с составляющими $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ является величиной, которая может входить в комбинации с электрическим током, составляющие которого u , v , w .

826. Если вернуться к выражению под знаком тройного интеграла в (4), подставив вместо значений α , β , γ значения α' , β' , γ' , данные уравнениями (1), и записать

$$\frac{d}{dh} \text{ вместо } \alpha \frac{d}{dx} + \beta \frac{d}{dy} + \gamma \frac{d}{dz}, \quad (6)$$

то выражение под знаком интеграла станет таким:

$$C \left\{ \dot{\xi} \frac{d}{dh} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) + \dot{\eta} \frac{d}{dh} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) + \dot{\zeta} \frac{d}{dh} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \right\}. \quad (7)$$

В случае волн в плоскости, нормальной к оси z , смещения являются функциями только z и t , так что $d/dh = \gamma d/dz$, и это выражение сводится к следующему:

$$C\gamma \left(\frac{d^2\xi}{dz^2} \dot{\eta} - \frac{d^2\eta}{dz^2} \dot{\xi} \right). \quad (8)$$

Кинетическая энергия на единицу объема постольку, поскольку она зависит от скоростей смещения, может теперь быть записана в виде

$$T = \frac{1}{2} \rho (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + C\gamma \left(\frac{d^2\xi}{dz^2} \dot{\eta} - \frac{d^2\eta}{dz^2} \dot{\xi} \right), \quad (9)$$

где ρ — плотность среды.

827. Составляющие X и Y приложенной силы, отнесенные к единице объема, могут быть выведены отсюда при помощи уравнений Лагранжа, п. 564. Заметим, что, опуская двойные интегралы по ограничивающей поверхности и дважды интегрируя по частям по z , можно показать, что

$$\iiint \frac{d^2\xi}{dz^2} \dot{\eta} dx dy dz = \iiint \xi \frac{d^3\eta}{dz^2 dt} dx dy dz.$$

Следовательно,

$$\frac{dT}{d\xi} = C\gamma \frac{d^3\eta}{dz^2 dt}.$$

Таким образом, выражения для сил следующие:

$$X = \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2C\gamma \frac{d^3\eta}{dz^2 dt}, \quad (10)$$

$$Y = \rho \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2C\gamma \frac{d^3\xi}{dz^2 dt}. \quad (11)$$

Эти силы возникают вследствие действия всей остальной среды на рассматриваемый элемент; в случае изотропной среды они должны иметь форму, указанную Коши:

$$X = A_0 \frac{d^2\xi}{dz^2} + A_1 \frac{d^4\xi}{dz^4} + \text{и т. д.}, \quad (12)$$

$$Y = A_0 \frac{d^2\eta}{dz^2} + A_1 \frac{d^4\eta}{dz^4} + \text{и т. д.} \quad (13)$$

828. Если мы теперь возьмем случай циркулярно поляризованного луча, для которого

$$\xi = r \cos (nt - qz), \quad \eta = r \sin (nt - qz), \quad (14)$$

мы найдем для кинетической энергии в единице объема

$$T = \frac{1}{2} \rho r^2 n^2 - C\gamma r^2 q^2 n \quad (15)$$

и для потенциальной энергии в единице объема

$$V = \frac{1}{2} r^2 (A_0 q^2 - A_1 q^4 + \dots) = \frac{1}{2} r^2 Q, \quad (16)$$

где Q является функцией q^2 .

Условие свободного распространения луча, данное уравнением (6) в п. 819, следующее:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dV}{dr}, \quad (17)$$

что дает

$$\rho n^2 - 2C\gamma q^2 n = Q, \quad (18)$$

откуда можно найти величину n как функцию q .

Но в случае луча с заданным волновым периодом, на который действует магнитная сила, мы должны определить величину $dq/d\gamma$ при постоянном n , выражен-

ную через dq/dn при постоянном γ . Дифференцируем (18):

$$(2\rho n - 2C\gamma q^2) dn - \left(\frac{dQ}{dq} + 4C\gamma qn \right) dq - 2Cq^2 n d\gamma = 0. \quad (19)$$

Таким образом, находим

$$\frac{dq}{d\gamma} = - \frac{Cq^2 n}{\rho n - C\gamma q^2} \frac{dq}{dn}. \quad (20)$$

829. Если λ — длина волны в воздухе, v — скорость распространения в воздухе, а i — соответствующий показатель преломления в среде, то

$$q\lambda = 2\pi i, \quad n\lambda = 2\pi v. \quad (21)$$

Изменение значения q , обусловленное магнитным действием, в каждом случае составляет чрезвычайно малую часть от его собственного значения, так что мы можем записать

$$q = q_0 + \frac{dq}{d\gamma} \gamma, \quad (22)$$

где q_0 — значение q при равной нулю магнитной силе. Угол ϑ , на который поворачивается плоскость поляризации при прохождении слоя среды толщиной s , равен полусумме положительного и отрицательного значений qs , причем знак результата меняется, поскольку в уравнениях (14) знак q отрицательный. Таким образом, мы получаем

$$\vartheta = -c\gamma \frac{dq}{d\gamma}, \quad (23)$$

$$= \frac{4\pi^2 C}{v\rho} c\gamma \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right) \frac{1}{1 - 2\pi C\gamma \frac{i^2}{v\rho\lambda}}. \quad (24)$$

Второй член в знаменателе этой дроби примерно равен углу поворота плоскости поляризации при прохождении через слой среды с толщиной, равной половине длины волны, деленной на π . Следовательно, во всех реальных случаях это величина, которой мы можем пренебречь по сравнению с единицей.

Записав

$$4\pi^2 C / (v\rho) = m, \quad (25)$$

мы можем назвать m коэффициентом магнитного вращения среды, величина которого должна быть определена из наблюдения. Обнаружено, что он положителен для большинства диамагнитных и отрицателен для некоторых парамагнитных сред. Мы имеем, таким образом, в качестве конечного результата нашей теории

$$\vartheta = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right), \quad (26)$$

где ϑ — угол поворота плоскости поляризации, m — константа, определяемая наблюдением среды, γ — интенсивность составляющей магнитной силы в направлении луча, s — длина луча в пределах среды, λ — длина волны света в воздухе, i — показатель преломления среды.

830. Единственная проверка, которой к настоящему времени подвергнута эта теория, состоит в сравнении значений ϑ для различных типов света, проходящих их

через одну и ту же среду и находящихся под действием одной и той же магнитной силы.

Это было сделано для значительного числа сред М: Вердые ³ (M. Verdet), который пришел к следующим результатам.

(1) Магнитное вращение плоскостей поляризации лучей различного цвета примерно следует закону обратного квадрата длины волны.

(2). Точный закон явления всегда таков, что произведение вращения на квадрат длины волны возрастает от наименее преломляемого к наиболее преломляемому концу спектра.

(3). Вещества, для которых это возрастание наиболее заметно, обладают также наибольшей относительной дисперсией.

Он также нашел, что в растворе винной кислоты, которая сама по себе производит вращение плоскости поляризации, магнитное вращение ни в коей мере не пропорционально естественному вращению.

В дополнении к этой же работе ⁴ Вердые дал результаты самых тщательных экспериментов с бисульфидом углерода и креозотом — двумя веществами, для которых отклонение от закона обратного квадрата длины волны весьма заметно. Он также сравнил эти результаты с числами, даваемыми тремя различными формулами:

$$(I) \quad \vartheta = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right),$$

$$(II) \quad \vartheta = mc\gamma \frac{1}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right),$$

$$(III) \quad \vartheta = mc\gamma \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right).$$

Первая из этих формул (I) — это та, которую мы уже получили, — уравнение (26) п. 829. Вторая (II) — это та, которая получается при подстановке в уравнения движения (10), (11) п. 826 членов вида $d^3\eta/dt^3$ и $-d^3\xi/dt^3$ вместо $d^3\eta/dz^2dt$ и $-d^3\xi/dz^2dt$. Я не уверен, что эта форма уравнений была предложена какой-либо физической теорией. Третья формула (III) вытекает из физической теории Неймана ⁵, в которой уравнения движения содержат члены вида $d\eta/dt$ и $-d\xi/dt$ ⁶.

Очевидно, что значения ϑ , даваемые формулой (III), даже приближенно не пропорциональны обратному квадрату длины волны. Значения ϑ , даваемые фор-

³ Recherches sur les propriétés optiques développées dans les corps transparents par l'action du magnétisme, 4^{me} partie. *Comptes Rendus*, t. LVI, p. 630, (6 April, 1863).

⁴ *Comptes Rendus*, LVII, p. 670 (19 Oct., 1863).

⁵ «Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizationis per vires electricas vel magneticas declinetur». *Halis Saxonum*, 1858.

⁶ Эти три вида уравнений движения впервые были предложены сэром Дж. В. Эйри (Phil. Mag. June 1846, p. 477) в качестве средства для исследования явлений, только что открытых Фарадеем. Мак-Куллах (Mac Cullagh) перед этим предложил уравнения, содержащие члены вида d^3/dz^3 , для того чтобы математически представить явления, происходящие в кварце. Эти уравнения были предложены Мак-Куллахом и Эйри «не как уравнения, дающие механическое объяснение явлений, а как уравнения, показывающие, что явления можно объяснить при помощи уравнений, которые выглядят так; как будто их можно вывести из некоторого разумного механического предположения, хотя никакого такого предположения не было сделано».

мулами (I) и (II), удовлетворяют этому условию и довольно хорошо согласуются с наблюдаемыми значениями для сред с умеренной относительной дисперсией. Однако для бисульфида углерода и креозота значения, даваемые (II), очень сильно отличаются от наблюдаемых. Значения, даваемые формулой (I), лучше согласуются с наблюдением, но, хотя это согласие несколько лучше для бисульфида углерода, значения для креозота все еще отличаются на величины, существенно превышающие те, которые можно было бы приписать любым ошибкам измерений.

Магнитное вращение плоскости поляризации (по Вердье)

БИСУЛЬФИД УГЛЕРОДА при 24, 9° С

Линии спектра	C	D	E	F	G
Наблюдаемое вращение	592	768	1000	1234	1704
Вычисленное по I	589	760	1000	1234	1713
» » II	606	772	1000	1216	1640
» » III	943	967	1000	1034	1091

Вращение луча $E = 25^{\circ}28'$

КРЕОЗОТ ПРИ 24, 3° С

Линии спектра	C	D	E	F	G
Наблюдаемое вращение	573	758	1000	1241	1723
Вычисленное по I	617	780	1000	1210	1603
» » II	623	789	1000	1200	1565
» » III	976	993	1000	1017	1041

Вращение луча $E = 21^{\circ}58'$

Мы так слабо знаем детали молекулярного строения тел, что маловероятно, чтобы можно было построить какую-либо удовлетворительную теорию, относящуюся к такому частному явлению, как магнитное воздействие на свет, до тех пор, пока с помощью индукции, опирающейся на набор различных случаев, где будет обнаружено, что наблюдаемые явления зависят от действий, в которых участвуют молекулы, мы не познаем нечто более определенное о тех свойствах, которые следует приписать молекуле для того, чтобы удовлетворить условиям наблюдаемых фактов.

Очевидно, что изложенная на предыдущих страницах теория является предварительной, покоящейся пока что на недоказанных гипотезах относительно природы молекулярных вихрей и способа воздействия на них смещения среды. Поэтому мы должны считать, что любое совпадение с наблюдаемыми фактами имеет гораздо меньшее научное значение в теории магнитного вращении плоскости поляризации, нежели в электромагнитной теории света, которая, хотя и включает гипотезы об электрических свойствах сред, но не опирается на предположения относительно строения их молекул.

831. *Примечание.* Все содержание этой главы можно рассматривать как развитие чрезвычайно важного замечания сэра Уильяма Томсона в «Трудах Королевского Общества» за июнь 1856 г.: «Магнитное влияние на свет, обнаруженное Фарадеем, зависит от направления движения движущихся частиц. Например, в среде, обладающей этой способностью, частицы, расположенные на прямой линии, параллельной линиям магнитной силы, будучи смещены спираль-

но относительно этой линии как оси и затем пущены тангенциально с такой скоростью, чтобы они вращались по окружностям, будут иметь разные скорости в соответствии с тем, происходит ли их движение в одном направлении (совпадающем с условным направлением гальванического тока в намагничивающей катушке) или в противоположном направлении. Но упругая реакция среды должна быть одинаковой при одинаковых смещениях, каковы бы ни были скорости и направления движения частиц, т. е. силы, которые уравниваются центробежной силой круговых движений, должны быть равны, в то время как световые движения не равны. Таким образом, абсолютные круговые движения либо равны друг другу, либо сообщают равные центробежные силы тем частицам, которые рассматривались нами первоначально. Из этого следует, что световые движения являются лишь компонентами полного движения и что меньшая световая составляющая в одном направлении, объединенная с движением, существующим в среде в отсутствие света, дает равный результат с большим световым движением в противоположном направлении, объединенным с тем же несветовым движением. Я думаю, что не только нельзя понять как-нибудь иначе (нежели с помощью этого динамического объяснения) тот факт, что циркулярно поляризованный свет с одним и тем же свойством (т. е. правовинтовой или левовинтовой) при прохождении через намагниченное стекло параллельно линиям магнитной силы распространяется с различными скоростями в соответствии с тем, совпадает ли его направление с направлением на северный магнитный полюс или противоположно ему, но я верю, что можно показать невозможность какого-либо другого объяснения этого факта. Отсюда следует, что оптическое открытие Фарадея является демонстрацией реальности объяснения Ампером первичной природы магнетизма и дает определение намагниченности в динамической теории тепла. Введение принципа сохранения момента количества движения («сохранения площадей») в механическое рассмотрение гипотезы Ранкина (Rankine) о «молекулярных вихрях», по-видимому, указывает на линию, перпендикулярную плоскости результирующего вращательного импульса («неизменная плоскость») тепловых движений, как на магнитную ось намагниченного тела и предлагает их результирующий момент количества движения в качестве определенной меры «магнитного момента». Объяснение всех явлений электромагнитного притяжения или отталкивания и электромагнитной индукции следует искать просто в инерции и давлении материи, движения которой образуют тепло. Является или не является эта материя электричеством, является или не является она непрерывной жидкостью, заполняющей промежутки между молекулярными ядрами, или это просто сгруппированы сами молекулы; или вся материя является непрерывной, и молекулярная неоднородность состоит в конечных вихревых или других относительных движениях близлежащих частей тела — все это невозможно решить и, по-видимому, напрасно делать какие-либо предположения при настоящем состоянии науки.

Теория молекулярных вихрей, которую я в значительной степени разработал, опубликована в *Phil. Mag.* за март, апрель и май 1861 г. и январь и февраль 1862 г.

Я думаю, что у нас есть хорошие основания полагать, что какое-то явление вращения имеет место в магнитном поле; в этом вращении участвует большое число очень маленьких порций вещества, вращающихся каждая вокруг своей собственной оси, причем эта ось параллельна направлению магнитной силы, и вра-

щения этих вихрей зависят одно от другого, будучи связаны посредством некоторого механизма.

Попытку, которую я сделал, представив себе работающую модель такого механизма, не следует принимать за нечто большее, чем она является на самом деле, а именно демонстрацией того, что можно представить себе такой механизм, способный производить связь, механически эквивалентную связи частей электромагнитного поля. Задача определения механизма, необходимого для установления данных видов связи между движениями частей системы, всегда допускает бесконечное число решений. Некоторые из них могут быть более грубыми или более сложными, чем другие, но все они должны удовлетворять условиям механизма в целом.

Большую ценность, однако, представляют следующие результаты теории:

(1). Магнитное поле является результатом действия центробежной силы вихрей.

(2). Электромагнитная индукция токов является результатом действия сил, вступающих в игру при изменении скоростей вихрей.

(3). Электромагнитная сила возникает при напряжениях связывающего механизма.

(4). Электрическое смещение возникает при упругой реакции связывающего механизма.

ГЛАВА XXII

ОБЪЯСНЕНИЕ ФЕРРОМАГНЕТИЗМА И ДИАМАГНЕТИЗМА МОЛЕКУЛЯРНЫМИ ТОКАМИ

Об электромагнитных теориях магнетизма

832. Мы уже видели (п. 380), что действие магнитов друг на друга может быть точно представлено притяжениями и отталкиваниями воображаемого вещества, называемого магнитной материей. Мы привели доводы, почему не следует предполагать, что эта магнитная материя перемещается от одной части магнита к другой на заметное расстояние, как это кажется на первый взгляд, когда мы намагничиваем стержень. Мы пришли к гипотезе Пуассона о том, что магнитная материя сосредоточена строго в отдельных молекулах магнитного вещества, причем намагниченной является такая молекула, в которой противоположные виды магнитной материи более или менее разделены в направлении противоположных полюсов молекулы, но таким образом, что ни одна часть любого из видов магнитной материи фактически не может быть отделена от молекулы (п. 430).

Эти аргументы полностью устанавливают тот факт, что намагниченность есть явление, относящееся не к большим массам железа, а к молекулам, иначе говоря, к частям вещества настолько малым, что мы никаким механическим способом не можем разделить одну из них надвое, так чтобы получить северный полюс отдельно от южного полюса. Однако для установления природы магнитной молекулы несомненно требуются дополнительные исследования. Мы уже видели (п. 442),

что имеются сильные основания полагать, что акт намагничивания железа или стали не состоит в намагничивании молекул, из которых они образованы, но что эти молекулы уже являются магнитными даже в ненамагниченном железе, при этом их оси базразлично ориентированы во всех направлениях. Акт намагничивания состоит в повороте молекул таким образом, что их оси либо все становятся параллельными одному направлению, либо, по крайней мере, отклоняются к этому направлению.

833. Тем не менее мы все еще не пришли ни к какому объяснению природы магнитной молекулы, т. е. мы еще не нашли ее сходства с какой-либо другой более известной нам вещью. Поэтому нам следует рассмотреть гипотезу Ампера о том, что магнетизм молекулы обусловлен электрическим током, постоянно циркулирующим по некоторому замкнутому пути внутри молекулы.

Можно точно имитировать действие любого магнита в точках, внешних по отношению к нему, с помощью листа электрических токов, соответствующим образом распределенных по внешней поверхности магнита. Но действие магнита в точках внутри него совершенно отлично от действия электрических токов в соответствующих точках. Поэтому Ампер заключил, что если магнетизм следует объяснять при помощи электрических токов, эти токи должны циркулировать в пределах молекул магнита и не должны течь от одной молекулы к другой. Поскольку мы не можем экспериментально измерить магнитное действие в какой-либо точке внутри молекулы, эта гипотеза не может быть опровергнута таким же путем, как мы можем опровергнуть гипотезу о токах заметной протяженности внутри магнита.

Кроме того, мы знаем что электрический ток, проходя от одной части проводника к другой, испытывает сопротивление и порождает тепло, так что если бы токи обычного вида протекали вокруг частей магнита заметных размеров, то имелся бы постоянный расход энергии, необходимый для их поддержания, а магнит бы являлся постоянным источником тепла. Ограничивая контуры молекулами, о сопротивлении внутри которых ничего неизвестно, мы можем, не боясь впасть в противоречие, утверждать, что ток, циркулирующий внутри молекулы, не испытывает сопротивления.

Следовательно, по теории Ампера все явления магнетизма обусловлены электрическими токами, и если бы мы могли измерять магнитную силу внутри магнитной молекулы, мы обнаружили бы, что она подчиняется точно тем же законам, что и сила в области, окруженной любым другим электрическим контуром.

834. При рассмотрении силы внутри магнитов мы предполагали, что измерения выполняются в небольшой полости, образованной в веществе магнита (п. 395). Мы, таким образом, пришли к необходимости рассмотрения двух различных величин, магнитной силы и магнитной индукции, каждую из которых предполагается измерять в пространстве, из которого удалена магнитная материя. Мы не предполагали, что можем проникнуть внутрь магнитной молекулы и наблюдать силу внутри нее.

Если мы принимаем теорию Ампера и рассматриваем магнит не как непрерывное вещество, намагниченность которого меняется от точки к точке в соответствии с каким-то легко устанавливаемым законом, но как множество молекул, внутри каждой из которых циркулирует система электрических токов, создающих очень сложное распределение магнитной силы, то направление магнитной силы

внутри молекулы будет обычно противоположно направлению средней силы в ее окрестности, а магнитный потенциал, если он вообще существует, является функцией, степень кратности которой определяется числом молекул в магните.

835. Но мы обнаружим, что, несмотря на видимую сложность, которая вытекает просто из существования множества более простых частей, математическая теория магнетизма значительно упрощается, если принять теорию Ампера и распространить наши математические представления на внутренние части молекул.

Прежде всего два определения магнитной силы сводятся к одному — к определению магнитной силы для пространства вне магнита. Далее, составляющие магнитной силы везде удовлетворяют условию, которому подчиняются составляющие индукции, а именно

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0. \quad (1)$$

Другими словами, распределение магнитной силы имеет ту же природу, что и распределение скорости несжимаемой жидкости, или, как мы это выразили в п. 25, магнитная сила не имеет конвергенции.

Наконец, три векторные функции — электромагнитный импульс, магнитная сила и электрический ток — более просто связаны друг с другом. Все они являются векторными функциями, не имеющими конвергенции, и получаются последовательно одна из другой при помощи одной и той же операции пространственного дифференцирования, которая была обозначена Гамильтоном символом ∇ .

836. Но теперь мы рассматриваем магнетизм с физической точки зрения, поэтому мы должны исследовать физические свойства молекулярных токов. Мы предполагаем, что ток циркулирует в молекуле и что он не испытывает сопротивления. Если L — коэффициент самоиндукции молекулярного контура, а M — коэффициент взаимной индукции между этим контуром и каким-то другим, и если γ есть сила тока в молекуле, а γ' — сила тока в другом контуре, то уравнение для тока γ следующее:

$$\frac{d}{dt}(L\gamma + M\gamma') = -R\gamma; \quad (2)$$

а так как, согласно предположению, сопротивление отсутствует, то $R=0$ и, интегрируя, мы получаем

$$L\gamma + M\gamma' = \text{constant} = L\gamma_0 \text{ (скажем)}. \quad (3)$$

Предположим, что площадь проекции молекулярного контура на плоскость, перпендикулярную оси молекулы, равна A , причем эта ось определена как нормаль к плоскости, на которой проекция максимальна. Если действие других токов обуславливает магнитную силу X в направлении, наклон которого к оси молекулы равен ϑ , то величина $M\gamma'$ равняется $XA \cos \vartheta$, и в качестве уравнения тока мы имеем

$$L\gamma + XA \cos \vartheta = L\gamma_0, \quad (4)$$

где γ_0 есть значение γ при $X=0$.

Таким образом, получается, что сила молекулярного тока полностью зависит от его первичного значения γ_0 и от интенсивности магнитной силы, обусловленной другими токами.

837. Если мы предположим, что первичный ток отсутствует и весь ток целиком обусловлен индукцией, тогда

$$\gamma = -(XA/L) \cos \vartheta. \quad (5)$$

Отрицательный знак показывает, что направление индуцированного тока противоположно направлению индуцирующего тока, а его магнитное действие таково, что внутри контура он действует против направления магнитной силы. Другими словами, молекулярный ток действует как небольшой магнит, полюса которого повернуты в сторону одноименных полюсов индуцирующего магнита.

Это действие противоположно действию молекул железа, находящихся под магнитным воздействием. Следовательно, молекулярные токи в железе не возбуждаются индукцией. Но в диамагнитных веществах действие такого рода наблюдается, и это действие является объяснением диамагнитной полярности, которое впервые было дано Вебером.

Веберовская теория диамагнетизма

838. Согласно теории Вебера в молекулах диамагнитных веществ существуют некоторые каналы, по которым электрический ток может циркулировать без сопротивления. Очевидно, что если мы предположим, что эти каналы пересекают молекулу во всех направлениях, это эквивалентно тому, что молекула считается идеальным проводником.

Если начать с предположения о линейном контуре внутри молекулы, то сила тока задается уравнением (5).

Магнитный момент тока равен произведению его силы на площадь контура, т. е. γA , а составляющая его в направлении намагничивающей силы равна $\gamma A \cos \vartheta$, или, согласно (5),

$$-(XA^2/L) \cos^2 \vartheta. \quad (6)$$

Если в единице объема имеется n таких молекул, а их оси распределены безразлично по всем направлениям, тогда среднее значение $\cos^2 \vartheta$ будет равно $1/3$, а интенсивность намагниченности вещества будет

$$-\frac{1}{3} \frac{nXA^2}{L}. \quad (7)$$

Следовательно, неймановский коэффициент намагниченности равен

$$\kappa = -\frac{1}{3} \frac{nA^2}{L}. \quad (8)$$

Намагничивание вещества, таким образом, происходит в направлении, противоположном магнитной силе, или, другими словами, вещество является диамагнитным. Намагниченность точно так же пропорциональна намагничивающей силе и не стремится к конечному пределу, как в случае обычной магнитной индукции (см. п. 442 и далее).

839. Если оси молекулярных каналов ориентированы не безразлично во всех направлениях, а с преобладанием в некоторых из них, то сумма $\sum (A^2/L) \cos^2 \vartheta$, распространенная на все молекулы, будет иметь различные значения в зависимости от направления линии, от которой измеряется ϑ , распределение этих значений в

различных направлениях будет подобно распределению значений моментов инерции относительно осей, проходящих через одну и ту же точку в различных направлениях.

Такое распределение сможет объяснить описанные Плюкером обусловленные наличием осей в теле магнитные явления, которые Фарадей назвал Магнитокристаллическими (см. п. 435).

840. Рассмотрим теперь, что будет, если вместо того, чтобы считать, что электрический ток в молекуле протекает внутри определенного канала, предположить, что вся молекула является идеальным проводником.

Начнем со случая тела, форма которого является ациклической, иначе говоря, которое не имеет форму кольца или дырявого тела, и предположим, что это тело со всех сторон покрыто тонкой оболочкой идеально проводящей материи.

В п. 654 мы уже доказали, что замкнутый лист идеально проводящей материи произвольной формы, первоначально свободный от токов, становится под действием магнитной силы токовым листом, действие которого обеспечивает равенство нулю магнитной силы в каждой точке внутри объема, ограниченного листом.

Мы можем лучше понять этот случай, если учтем, что распределение магнитной силы в окрестности такого тела подобно распределению скорости несжимаемой жидкости в окрестности непроницаемого тела той же формы.

Очевидно, что если другие проводящие оболочки помещены внутри первой, то токи в них возбуждаться не будут, поскольку они не подвержены действию магнитной силы. Следовательно, в твердом идеально проводящем материале действие магнитной силы состоит в возбуждении системы токов, которые полностью сосредоточены на поверхности тела.

841. Если проводящее тело имеет форму сферы радиуса r , можно показать, что его магнитный момент равен $-r^3 X/2$. Если в среде распределено некоторое количество таких сфер, так что в единице объема объем проводящего вещества равен k' , тогда, полагая в уравнении (17) п. 314 $k_1 = \infty$, $k_2 = 1$ и $p = k'$, мы находим коэффициент магнитной проницаемости, как величину соответствующую обратно сопротивлению в том параграфе, а именно

$$\mu = \frac{2 - 2k'}{2 + 2k'}, \quad (9)$$

откуда мы получаем для магнитного коэффициента Пуассона

$$k = -\frac{1}{2} k' \quad (10)$$

и для неймановского коэффициента намагниченности через индукцию

$$\kappa = -\frac{3}{4\pi} \frac{k'}{2 + k'}. \quad (11)$$

Поскольку математическая концепция идеально проводящих тел ведет к результатам, сильно отличающимся от всех явлений, которые мы можем наблюдать в обычных проводниках, продолжим исследование несколько дальше.

842. Возвращаясь к случаю проводящего канала в форме замкнутой кривой, ограничивающей площадь A , как в п. 836, мы имеем для момента электро-

магнитных сил, стремящихся увеличить угол ϑ :

$$\gamma\gamma' \frac{dM}{d\vartheta} = -\gamma X A \sin \vartheta. \quad (12)$$

$$= \frac{X^2 A^2}{L} \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (13)$$

Эта сила положительна или отрицательна в зависимости от того, больше или меньше прямого угла угол ϑ . Следовательно, магнитная сила, действующая на идеально проводящий канал, стремится повернуть его ось перпендикулярно линии магнитной силы, т. е. так, чтобы плоскость канала стала параллельной линиям силы.

Действие подобного рода можно наблюдать, помещая медную монетку или колечко между полюсами электромагнита. В момент возбуждения магнита плоскость кольца поворачивается в аксиальном направлении, но эта сила исчезает по мере того, как затухают токи из-за сопротивления меди¹.

843. Пока мы рассмотрели лишь случай, в котором молекулярные токи полностью возбуждаются внешней магнитной силой. Изучим теперь отношение веберовской теории магнитоэлектрической индукции молекулярных токов к амперовой теории обычного магнетизма. Согласно Амперу и Веберу, молекулярные токи в магнитных веществах не возбуждаются внешней магнитной силой, но существуют там заранее, а сама молекула находится под воздействием магнитной силы и отклоняется из-за ее электромагнитного действия на проводящий контур, в котором течет ток. Когда Ампер разрабатывал эту гипотезу, индукция электрических токов еще не была известна, и он не делал никаких предположений относительно существования или определения силы молекулярных токов.

Мы, однако, теперь вынуждены применять к этим токам те же законы, которые применял Вебер к своим токам в диамагнитных молекулах. Мы должны лишь предположить, что первоначальное значение тока γ , когда нет воздействия магнитной силы, не равно нулю, а равно γ_0 . Если магнитная сила X действует на молекулярный ток, обтекающий площадь A , ось которой наклонена под углом ϑ к линии магнитной силы, то сила тока равна

$$\gamma = \gamma_0 - (XA/L) \cos \vartheta, \quad (14)$$

а момент пары сил, стремящихся повернуть молекулу так, чтобы увеличить угол ϑ , равен

$$-\gamma_0 X A \sin \vartheta + (X^2 A^2 / 2L) \sin 2\vartheta. \quad (15)$$

Следовательно, если в исследованиях п. 443 положить

$$A\gamma_0 = m, \quad (A/L\gamma_0) = B, \quad (16)$$

то уравнение равновесия становится таким:

$$X \sin \vartheta - BX^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = D \sin (\alpha - \vartheta). \quad (17)$$

¹ См. Faraday, *Exp. Res.*, 2310.

Составляющая магнитного момента тока в направлении X равна

$$\gamma A \cos \vartheta = \gamma_0 A \cos \vartheta - \frac{X A^2}{L} \cos^2 \vartheta, \quad (18)$$

$$= m \cos \vartheta (1 - BX \cos \vartheta). \quad (19)$$

844. Эти условия отличаются от условий веберовской теории магнитной индукции членами, содержащими коэффициент B . Если произведение BX мало по сравнению с единицей, результаты будут приближаться к результатам веберовской теории магнетизма. Если произведение BX велико по сравнению с единицей, результаты будут приближаться к результатам веберовской теории диамагнетизма.

Далее, чем больше первоначальное значение молекулярного тока γ_0 , тем меньше будет становиться B , а если L велико, это также будет уменьшать B . Если ток течет по кольцевому каналу, значение L зависит от $\ln(R/r)$, где R — радиус средней линии канала, а r — радиус его сечения. Следовательно, чем меньше сечение канала по сравнению с его площадью, тем больше будет коэффициент самоиндукции L и тем ближе будут согласовываться явления с первоначальной веберовской теорией. Здесь, однако, будет то отличие, что при увеличении намагничивающей силы X временный магнитный момент не только достигает максимума, но и уменьшается при дальнейшем увеличении X .

Если когда-нибудь экспериментально будет доказано, что временная (индуцированная) намагниченность какого-либо вещества вначале возрастает, а затем уменьшается по мере непрерывного увеличения намагничивающей силы, доказательство существования этих молекулярных токов будет, я думаю, почти несомненным.

845. Если молекулярные токи в диамагнитных веществах ограничены определенными каналами и если молекулы способны отклоняться, подобно молекулам магнитных веществ, тогда по мере увеличения намагничивающей силы диамагнитная полярность всегда будет возрастать, однако не так быстро, как намагничивающая сила, если последняя велика. Малая абсолютная величина диамагнитного коэффициента показывает, однако, что отклоняющая сила, действующая на каждую диамагнитную молекулу, должна быть малой по сравнению с силой, действующей на магнитную молекулу, так что любой результат, обусловленный этим отклонением, вряд ли будет заметен.

Если, с другой стороны, молекулярные токи в диамагнитных телах могут течь через все вещество молекул, то диамагнитная полярность будет строго пропорциональна намагничивающей силе; ее величина дает возможность определить весь объем, занятый идеально проводящими массами, а если мы знаем число молекул, — определить размер каждой из них.