

уравнение (7) примет вид

$$\frac{XS ds}{ds} = S(vc - \omega b), \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{или} \\ \text{Аналогично} \\ \text{и} \end{array} \right\} \begin{array}{l} X = vc - \omega b. \\ Y = \omega a - uc \\ Z = ub - va. \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(Уравнения} \\ \text{Электромагнитной} \\ \text{Силы)} \end{array} \quad (C)$$

Здесь X , Y , Z — составляющие электромагнитной силы, действующей на элемент проводника, деленные на объем этого элемента; u , v , ω — отнесенные к единице площади составляющие электрического тока, протекающего через элемент, и a , b , c — составляющие магнитной индукции на элементе, которые также отнесены к единице площади.

Если вектор \mathfrak{F} представляет по величине и направлению силу на единицу объема проводника, а \mathfrak{C} представляет собой электрический ток, текущий через него, то

$$\mathfrak{F} = V \cdot \mathfrak{C}. \quad (11)$$

ГЛАВА IX

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

604. Наше теоретическое обсуждение электродинамики мы начнем с предположения о том, что система контуров, несущих электрические токи, является системой динамической, где токи можно рассматривать как скорости, а координаты, соответствующие этим скоростям, не появляются в уравнениях явно. Из этого следует, что кинетическая энергия системы, поскольку она зависит от токов, является однородной квадратичной функцией токов, коэффициенты которой зависят только от формы и относительного положения контуров. Предполагая, что эти коэффициенты известны из эксперимента или еще откуда-либо, мы с помощью чисто динамических рассуждений вывели законы индукции токов и электромагнитного притяжения. При этом исследовании мы ввели понятия электрокинетической энергии системы токов, электромагнитного импульса тока и взаимного потенциала двух контуров.

Затем мы продолжили исследование поля с помощью вторичных контуров различной конфигурации, и это привело нас в результате к понятию вектора \mathfrak{A} , имеющего в любой данной точке поля определенную величину и определенное направление. Мы назвали этот вектор электромагнитным импульсом в данной точке; его можно рассматривать как интеграл по времени от электродвижущей напряженности, создаваемой в этой точке при внезапном удалении всех токов из поля. Он тождествен величине, которую мы уже изучали в п. 405 в качестве вектор-потенциала магнитной индукции. Ее составляющими, параллельными осям x , y , z , являются F , G и H . Электромагнитный импульс контура равен линейному интегралу от \mathfrak{A} по контуру.

Затем, воспользовавшись теоремой IV п. 24, мы преобразовали линейный интеграл от \mathfrak{A} в поверхностный интеграл от другого вектора \mathfrak{B} , имеющего составляющие a, b, c , и обнаружили, что как явления индукции, обусловленные движением проводника, так и явления, обусловленные электромагнитной силой, могут быть выражены через \mathfrak{B} . Мы дали вектору \mathfrak{B} название вектора магнитной индукции, поскольку его свойства идентичны свойствам линий магнитной индукции, изученным Фарадеем.

Мы установили также три системы уравнений: первая система (A) — это уравнения магнитной индукции, выражающие ее через электромагнитный импульс. Вторая система (B) — это уравнения электродвижущей напряженности, выражающие ее через движение проводника поперек линий магнитной индукции и через скорость изменения электромагнитного импульса. Третья система (C) представляла собой уравнения для электромагнитной силы, выражающие ее через токи и магнитную индукцию.

Во всех этих случаях ток следует понимать как ток истинный, т. е. включающий в себя не только ток проводимости, но также и ток, обусловленный изменением электрического смещения.

Магнитная индукция \mathfrak{B} является той величиной, которую мы уже рассматривали в п. 400. В немагнитном теле она совпадает с силой, действующей на единичный магнитный полюс, но если тело намагничено (постоянно или путем индукции), то она будет равна той силе, которая действовала бы на единичный полюс, помещенный в узкую полость внутри тела, стенки которой перпендикулярны направлению намагниченности. Составляющие \mathfrak{B} равны a, b, c .

Из уравнений (A), определяющих a, b, c , следует, что

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0.$$

В п. 403 было показано, что таким свойством обладает магнитная индукция.

605. Мы определили магнитную силу внутри магнита, в отличие от магнитной индукции, как силу, действующую на единичный полюс, помещенный внутри узкой полости, вырезанной параллельно направлению намагниченности. Эта величина обозначена через \mathfrak{H} , а ее составляющие — через α, β, γ , см. п. 398.

Если \mathfrak{I} есть интенсивность намагниченности, а A, B, C — ее составляющие, то, согласно п. 400,

$$\left. \begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A, \\ b &= \beta + 4\pi B, \\ c &= \gamma + 4\pi C. \end{aligned} \right\} \text{(Уравнения Намагниченности)} \quad (D)$$

Мы можем назвать эти уравнения уравнениями намагниченности: они указывают, что в электромагнитной системе магнитная индукция \mathfrak{B} , рассматриваемая как вектор, является суммой (в гамильтоновом смысле) двух векторов — магнитной силы \mathfrak{H} и умноженной на 4π намагниченности \mathfrak{I} , т. е.

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{I}.$$

В некоторых веществах намагниченность зависит от магнитной силы, и это выражается системой уравнений для индуцированного магнетизма, приведенной в п. 426 и 435.

606. Вплоть до этого места мы в наших исследованиях выводили все из чисто динамических соображений без какой-либо ссылки на количественные эксперименты по электричеству или магнетизму. Экспериментальные знания мы использовали только для того, чтобы распознать в абстрактных понятиях, выведенных из теории, конкретные величины, найденные из эксперимента, и дать им наименования, которые скорее бы указывали на их отношение к физике, нежели на их математическое происхождение.

Так, мы показали существование электромагнитного импульса \mathcal{M} как некоторого вектора, направление и величина которого изменяются от одной части пространства к другой; из него чисто математическим путем мы вывели магнитную индукцию \mathcal{B} , как некоторый производный вектор. Мы не получили, однако, каких-либо данных для отыскания \mathcal{M} или \mathcal{B} по распределению токов в поле. Для этой цели мы должны установить математическую связь между этими величинами и токами.

Начнем с допущения о существовании постоянных магнитов, взаимодействие которых удовлетворяет принципу сохранения энергии. Однако мы не будем делать никаких предположений относительно законов магнитной силы, кроме того предположения, которое следует из этого же принципа, а именно: необходимо, чтобы силу, действующую на магнитный полюс, можно было получить из потенциала.

Затем мы, наблюдая действие между токами и магнитами, находим, что ток действует на магнит, по-видимому, так же, как действовал бы на него другой магнит, мощность, форма и положение которого были бы соответствующим образом подобраны, и что магнит действует на ток так же, как другой ток. Нет необходимости предполагать, что эти наблюдения сопровождаются действительными измерениями сил. Поэтому их не следует рассматривать, как источник численных данных, они полезны только в постановке вопросов для нашего исследования.

Вопрос, который выдвигают эти наблюдения, состоит в следующем: поскольку магнитное поле, создаваемое электрическими токами, во многих отношениях аналогично магнитному полю, создаваемому постоянными магнитами, является ли оно аналогичным также и в отношении его связи с потенциалом?

Тот факт, что электрический контур создает в окружающем его пространстве такие же магнитные эффекты, как и ограниченная этим контуром магнитная оболочка, был установлен в п. 482—485.

Мы знаем, что в случае магнитной оболочки существует потенциал, имеющий определенное значение для всех точек вне вещества оболочки, но значения потенциала в двух соседних точках по разные стороны от оболочки отличаются на конечную величину.

Если магнитное поле в окрестности электрического тока подобно магнитному полю вблизи магнитной оболочки, то магнитный потенциал, определенный как линейный интеграл от магнитной силы, будет одинаковым для любых двух путей интегрирования при условии, что один можно трансформировать в другой путем непрерывного движения без пересечения электрического тока.

Если, однако, один путь интегрирования не может быть преобразован в дру-

гой без пересечения тока, то линейный интеграл от магнитной силы вдоль одного пути отличается от интеграла вдоль другого пути на величину, зависящую от силы тока. Магнитный потенциал, обусловленный электрическим током, является, следовательно, функцией с бесконечным рядом значений, имеющих общую разность, причем частное значение потенциала зависит от хода линии интегрирования. Внутри вещества проводника такой величины, как магнитный потенциал, не существует.

607. Считая, что магнитное действие тока обладает такого рода магнитным потенциалом, мы приступим к математическому выражению этого результата.

Во-первых, линейный интеграл от магнитной силы вдоль любой замкнутой кривой равен нулю при условии, что эта замкнутая кривая не окружает электрического тока.

Во-вторых, если ток проходит один и только один раз в положительном направлении сквозь замкнутую кривую, то линейный интеграл имеет определенное значение, которое можно использовать в качестве меры силы тока, ибо если форма замкнутой кривой меняется каким-либо непрерывным образом, не пересекая при этом тока, то линейный интеграл остается неизменным.

В электромагнитных единицах линейный интеграл от магнитной силы, взятый вдоль замкнутой кривой, численно равен протекающему сквозь замкнутую кривую току, умноженному на 4π .

Если взять в качестве такой замкнутой кривой прямоугольник со сторонами dy и dz , то линейный интеграл от магнитной силы вокруг него будет равен

$$\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) dy dz,$$

и если u , v , w являются составляющими потока электричества, ток, протекающий сквозь прямоугольник, равен $u dy dz$.

Умножая это на 4π и приравнивая результат линейному интегралу, мы получим уравнение

$$\left. \begin{array}{l} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ \text{Аналогично } 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(Уравнения} \\ \text{Электрических Токов)} \end{array} \quad (E)$$

Эти уравнения определяют величину и направление электрических токов, когда магнитная сила задана в каждой точке.

При отсутствии тока эти уравнения эквивалентны условию

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = -D\Omega,$$

т. е. во всех точках, где нет токов, магнитную силу можно получить из магнитного потенциала.

Дифференцируя уравнения (E) по x , y и z соответственно и складывая результаты, мы получаем уравнение

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

которое указывает, что ток, имеющий составляющие u , v , w , подчиняется условию движения несжимаемой жидкости и с необходимостью должен протекать по замкнутым контурам.

Это уравнение справедливо только тогда, когда u , v и w считаются составляющими электрического потока, обусловленного как изменением электрического смещения, так и истинной проводимостью.

У нас очень мало экспериментальных свидетельств, относящихся к прямому электромагнитному действию токов, обусловленному изменением электрического смещения в диэлектриках, но чрезвычайная трудность совмещения законов электромагнетизма с существованием незамкнутых электрических токов является одной из тех многих причин, по которым мы должны признать существование переходных токов, обусловленных изменением смещения. Их важность будет видна, когда мы подойдем к электромагнитной теории света.

608. Мы сейчас определили соотношения между основными величинами, относящимися к открытым Эрстедом, Ампером и Фарадеем явлениям. Для того чтобы связать их с явлениями, описанными в предыдущих частях трактата, необходимы некоторые дополнительные соотношения.

Когда электродвижущая напряженность действует на материальное тело, она производит в нем два электрических эффекта, названных Фарадеем индукцией и проводимостью; первый из этих эффектов наиболее заметен в диэлектриках, второй — в проводниках.

В настоящем трактате статическая электрическая индукция измеряется тем, что мы назвали электрическим смещением, т. е. направленной величиной или вектором, который мы обозначили через \mathfrak{D} , а его компоненты — через f , g , h .

В изотропных веществах смещение совпадает по направлению с электродвижущей напряженностью, его создающей, и пропорционально ей, по крайней мере, при малых ее значениях. Это можно выразить уравнением

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}, \quad \begin{array}{l} \text{(Уравнение} \\ \text{Электрического} \\ \text{Смещения)} \end{array} \quad (F)$$

где K — диэлектрическая способность вещества, см. п. 68.

В веществах, которые не являются изотропными, составляющие f , g , h электрического смещения \mathfrak{D} оказываются линейными функциями составляющих P , Q , R электродвижущей напряженности \mathfrak{E} .

По своей форме уравнения электрического смещения аналогичны уравнениям для токов проводимости в том виде, как они приведены в п. 298.

Эти соотношения можно выразить иначе, сказав, что в изотропных средах величина K является скаляром, а в других телах она является линейной векторной функцией, действующей на вектор \mathfrak{E} .

609. Другим эффектом электродвижущей напряженности является эффект проводимости. Законы проводимости, возникающей в результате действия электродвижущей напряженности, были установлены Омом; они объяснены во второй части этого трактата, п. 241, и могут быть сведены в уравнение

$$\mathfrak{R} = C \mathfrak{E}, \quad \text{(Уравнение Проводимости)} \quad (G)$$

где \mathfrak{E} есть электродвижущая напряженность в точке, \mathfrak{R} — плотность тока проводимости, имеющая составляющие p , q , r , C — проводимость вещества, которая

в случае изотропных веществ оказывается простой скалярной величиной, а для других веществ становится линейной векторной функцией, действующей на вектор \mathfrak{E} . Вид этой функции в декартовых координатах приведен в п. 298.

610. Одной из главных особенностей данного трактата является утверждение о том, что истинный электрический ток \mathfrak{C} (т. е. ток, от которого зависят электромагнитные явления) не совпадает с током проводимости \mathfrak{K} , и в оценке полного движения электричества должно быть учтено изменение во времени электрического смещения \mathfrak{D} ; следовательно, мы должны написать

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}} \quad (\text{Уравнение Истинного Тока}) \quad (\text{H})$$

или через составляющие

$$\left. \begin{aligned} u &= p + \frac{df}{dt}, \\ v &= q + \frac{dg}{dt}, \\ w &= r + \frac{dh}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{H}^*)$$

611. Поскольку и \mathfrak{K} , и \mathfrak{D} зависят от электродвижущей напряженности \mathfrak{E} , мы можем выразить истинный ток \mathfrak{C} через электрическую напряженность, а именно

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt} \right) \mathfrak{E}, \quad (\text{I})$$

или для случая постоянных C и K

$$\left. \begin{aligned} u &= CP + \frac{1}{4\pi} K \frac{dP}{dt}, \\ v &= CQ + \frac{1}{4\pi} K \frac{dQ}{dt}, \\ w &= CR + \frac{1}{4\pi} K \frac{dR}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I}^*)$$

612. Объемная плотность свободного электричества в любой точке находится через составляющие электрического смещения из уравнения

$$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}. \quad (\text{J})$$

613. Поверхностная плотность электричества равна

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h', \quad (\text{K})$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали, проведенной от поверхности в среду, где составляющие смещения равны f, g, h , а l', m', n' — направляющие косинусы нормали, проведенной от поверхности в среду, где эти составляющие равны f', g', h' .

614. Когда вся намагниченность среды индуцирована действующей на нее

магнитной силой, мы можем написать уравнение индуцированной намагниченности в виде

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad (L)$$

где μ есть коэффициент магнитной проницаемости, который можно рассматривать либо как скалярную величину, либо как линейную векторную функцию, действующую на \mathfrak{H} , в соответствии с тем, изотропна среда или нет.

615. Для рассматриваемых нами величин эти соотношения можно считать основополагающими. Их можно было бы скомбинировать так, чтобы исключить некоторые из величин. Однако сейчас наша задача состоит не в получении компактных математических формул, а в написании выражения для каждого соотношения, о котором мы что-либо знаем. На этой стадии исследования исключение любой величины, отражающей полезную идею, было бы скорее потерей, чем выигрышем.

Есть, однако, один очень важный результат, который мы можем получить, комбинируя уравнения (A) и (E).

Если предположить, что в поле не существует никаких магнитов, кроме электрических контуров, то исчезнет различие между магнитной силой и магнитной индукцией, которое мы сохраняли до сих пор, потому что только в намагниченном веществе эти величины отличаются одна от другой.

Согласно гипотезе Ампера, которая будет пояснена в п. 833, свойства того, что мы называем намагниченным веществом, обусловлены молекулярными электрическими контурами, так что наша теория намагничения применима только тогда, когда мы рассматриваем вещество в больших массах; если же считать, что наши математические методы могут учитывать также и явления, происходящие в пределах отдельных молекул, то они не откроют нам там ничего, кроме электрических контуров, и мы найдем, что магнитная сила и магнитная индукция повсюду совпадают. Однако для того, чтобы иметь возможность по своему желанию использовать либо электрическую, либо электромагнитную систему измерений, мы сохраним коэффициент μ , помня, что его значение равно единице в электромагнитной системе.

616. Составляющие магнитной индукции, согласно уравнениям (A) п. 591, равны

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \quad c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

Составляющие электрического тока, согласно уравнениям (E) п. 607, равны

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \quad 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.$$

Согласно нашей гипотезе, составляющие a , b , c равны соответственно $\mu\alpha$, $\mu\beta$ и $\mu\gamma$. Поэтому мы получаем (при постоянном μ)

$$4\pi\mu u = \frac{d^2G}{dx dy} - \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{d^2H}{dz dx}. \quad (1)$$

Если записать

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}, \quad (2)$$

и ¹

$$\nabla^2 = - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right), \quad (3)$$

то мы можем написать уравнение (1):

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\mu u &= \frac{dJ}{dx} + \nabla^2 F. \\ \text{Аналогично } 4\pi\mu v &= \frac{dJ}{dy} + \nabla^2 G, \\ 4\pi\mu w &= \frac{dJ}{dz} + \nabla^2 H. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} F' &= \mu \iiint \frac{u}{r} dx dy dz, \\ G' &= \mu \iiint \frac{v}{r} dx dy dz, \\ H' &= \mu \iiint \frac{w}{r} dx dy dz, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{J}{r} dx dy dz, \quad (6)$$

где r — расстояние до данной точки от элемента (x, y, z) , а интегрирование распространяется на все пространство; тогда

$$\left. \begin{aligned} F &= F' - \frac{d\chi}{dx}, \\ G &= G' - \frac{d\chi}{dy}, \\ H &= H' - \frac{d\chi}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Величина χ исчезает из уравнений (А) и не имеет отношения ни к какому физическому явлению. Если предположить, что она всюду равна нулю, то величина J также будет везде равна нулю. Тогда уравнения (5) (с опущенными штрихами) дадут правильные значения составляющих \mathfrak{A} .

§17. Поэтому мы можем принять в качестве определения \mathfrak{A} , что это есть вектор-потенциал электрического тока, так же связанный с электрическим током, как скалярный потенциал связан с материей, потенциалом которой он является, и что этот потенциал находится с помощью аналогичной процедуры интегрирования, которую можно описать так.

Пусть из данной точки проведен вектор, по величине и направлению представляющий заданный элемент тока, деленный на численное значение расстояния

¹ Отрицательный знак применяется здесь для того, чтобы сделать наши уравнения согласованными с уравнениями, в которых используются Кватернионы.

до этого элемента от данной точки. Пусть это сделано для каждого элемента электрического тока. Результирующая всех полученных таким образом векторов является потенциалом всего тока. Поскольку ток — величина векторная, его потенциал также является вектором, см. п. 422.

Когда задано распределение электрических токов, то существует одно и только одно распределение величины \mathfrak{A} , такое, при котором \mathfrak{A} всюду конечно, непрерывно, удовлетворяет уравнениям

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi\mu\mathfrak{C}, \quad \text{div} \mathfrak{A} = 0$$

и исчезает на бесконечном расстоянии от электрической системы. Это та самая величина, которая дается уравнениями (5), допускающими запись в кватернионной форме:

$$\mathfrak{A} = \mu \iiint \frac{\mathfrak{C}}{r} dx dy dz.$$

Кватернионные выражения для электромагнитных уравнений

618. Мы старались избегать в этом трактате каких-либо операций, требующих от читателя знания кватернионного исчисления. В то же время там, где это было необходимо, мы, не колеблясь, вводили понятие вектора, и когда у нас возникала возможность обозначить вектор каким-либо одним символом, мы прибегали к готическим буквам. Число различных векторов получилось столь большим, что символы, излюбленные Гамильтоном, оказались бы сразу же исчерпанными. Поэтому любая готическая буква, где бы она ни использовалась, означает гамильтоновский вектор и указывает не только на его величину, но и на его направление.

Составляющие же вектора обозначаются латинскими или греческими буквами.

Основными векторами, которые мы должны рассмотреть, являются:

	Символ вектора	Составляющие
Радиус-вектор точки	ρ	$x y z$
Электромагнитный импульс в точке	\mathfrak{A}	$F G H$
Магнитная индукция	\mathfrak{B}	$a b c$
(Полный) электрический ток	\mathfrak{C}	$u v w$
Электрическое смещение	\mathfrak{D}	$f g h$
Электродвижущая напряженность	\mathfrak{E}	$P Q R$
Механическая сила	\mathfrak{F}	$X Y Z$
Скорость точки	\mathfrak{G} или $\dot{\rho}$	$\dot{x} \dot{y} \dot{z}$
Магнитная сила	\mathfrak{H}	$\alpha \beta \gamma$
Интенсивность намагниченности	\mathfrak{I}	$A B C$
Ток проводимости	\mathfrak{K}	$p q r$

Мы имеем также следующие скалярные функции:

Электрический потенциал	Ψ
Магнитный потенциал (там, где он существует)	Ω
Электрическая плотность	e
Плотность магнитной «материи»	m

Кроме этих, мы имеем еще следующие величины, указывающие на физические свойства среды в каждой точке:

C — проводимость для электрических токов,
 K — диэлектрическая индуктивная способность,
 μ — магнитная индуктивная способность.

Эти величины в изотропных средах являются просто скалярными функциями ρ , но в общем случае они представляют собой линейные векторные операторы, действующие на векторные функции, к которым они применяются. Операторы K и μ являются, несомненно, всегда самосопряженными, вероятно, и C тоже.

619. Уравнения (А) для магнитной индукции, первое из которых $a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$, можно теперь записать в виде

$$\mathfrak{B} = V \cdot \nabla \mathfrak{A},$$

где ∇ есть оператор $i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$, а V указывают на то, что следует брать только векторную часть результата этой операции.

Так как \mathfrak{A} подчиняется условию $S \cdot \nabla \mathfrak{A} = 0$, то $\nabla \mathfrak{A}$ есть чистый вектор, и символ V не нужен.

Уравнения (В) для электродвижущей напряженности, первое из которых

$$P = cy - bz - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx},$$

принимают вид

$$\mathfrak{E} = V \cdot \mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla \Psi.$$

Уравнения (С) для механической силы, первое из которых

$$X = cv - bw + eP - m(d\Omega/dx),$$

принимают вид

$$\mathfrak{F} = V \cdot \mathfrak{E} + e\mathfrak{E} - m\nabla \Omega.$$

Уравнения (D) для намагничения, первое из которых есть $a = \alpha + 4\pi A$, принимают вид

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{J}.$$

Уравнения (E) для электрических токов, первое из которых $4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$, принимают вид

$$4\pi \mathfrak{C} = V \cdot \nabla \mathfrak{H}.$$

Уравнение для тока проводимости, по закону Ома, есть

$$\mathfrak{R} = C\mathfrak{E}.$$

Уравнение для электрического смещения

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K\mathfrak{E}.$$

Уравнение для полного тока, возникающего из-за изменения электрического смещения и из-за наличия тока проводимости, следующее:

$$\mathcal{C} = \mathcal{K} + \mathcal{D}.$$

Когда намагниченность возникает из-за магнитной индукции, то

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}.$$

Мы должны также определить электрическую объемную плотность

$$e = S \cdot \nabla \mathcal{D}$$

и магнитную объемную плотность

$$m = S \cdot \nabla \mathcal{H}.$$

Когда магнитная сила может быть вычислена через потенциал, то

$$\mathcal{H} = - \nabla \Omega.$$

ГЛАВА X

РАЗМЕРНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ

620. Любая электромагнитная величина может быть определена относительно фундаментальных единиц Длины, Массы и Времени. Если мы будем исходить из определения единицы электричества, данного в п. 65, мы можем получить определения единиц любых других электромагнитных величин, пользуясь уравнениями, куда входят и эти величины, и величины, представляющие количество электричества. Система единиц, полученная таким образом, называется Электростатической Системой.

С другой стороны, если мы будем исходить из определения единицы магнитного полюса, данного в п. 374, то для того же самого набора величин мы получим иную систему единиц, которая не совпадает с предыдущей и называется Электромагнитной Системой.

Начнем с установления общих для обеих систем связей между различными единицами, а затем уже построим таблицу размерностей единиц, соответствующих каждой системе.

621. Подлежащие рассмотрению первичные простейшие величины объединим попарно. В первых трех парах произведение двух величин в каждой из пар является величиной энергии или работы. У следующих трех пар произведение каждой пары является величиной энергии, отнесенной к единице объема.

ПЕРВЫЕ ТРИ ПАРЫ

Электростатическая пара

	Обозначение
(1). Количество электричества	e
(2). Электродвижущая сила или электрический потенциал	E

Магнитная пара

(3). Количество свободного магнетизма или мощность полюса	m
(4). Магнитный потенциал	Ω

Электрокинетическая пара

(5). Электрокинетический импульс контура	p
(6). Электрический ток	C

ВТОРЫЕ ТРИ ПАРЫ

Электростатическая пара

(7). Электрическое смещение (измеренное через поверхностную плотность)	\mathcal{D}
(8). Электродвижущая напряженность	\mathcal{E}

Магнитная пара

(9). Магнитная индукция	\mathcal{B}
(10). Магнитная сила	\mathcal{H}

Электрокинетическая пара

(11). Плотность электрического тока в точке	\mathcal{C}
(12). Вектор-потенциал электрических токов	\mathcal{A}

622. Между этими величинами существуют следующие соотношения. Прежде всего, поскольку размерность энергии равна $[L^2M/T^2]$, а размерность энергии, отнесенной к единице объема, $[M/LT^2]$, мы имеем следующие уравнения для размерностей:

$$[eE] = [m\Omega] = [pC] = \left[\frac{L^2M}{T^2} \right], \quad (1)$$

$$[\mathcal{D}\mathcal{E}] = [\mathcal{B}\mathcal{H}] = [\mathcal{C}\mathcal{A}] = \left[\frac{M}{LT^2} \right]. \quad (2)$$

Во-вторых, поскольку e , p , \mathcal{A} являются интегралами по времени от C , E и \mathcal{E} соответственно, то

$$\left[\frac{e}{C} \right] = \left[\frac{p}{E} \right] = \left[\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{E}} \right] = [T]. \quad (3)$$

В-третьих, поскольку E , Ω и p , являются линейными интегралами от \mathcal{E} , \mathcal{H} и \mathcal{A} соответственно, то

$$\left[\frac{E}{\mathcal{E}} \right] = \left[\frac{\Omega}{\mathcal{H}} \right] = \left[\frac{p}{\mathcal{A}} \right] = [L]. \quad (4)$$

Наконец, поскольку e , C и m являются поверхностными интегралами от \mathcal{D} , \mathcal{C} и \mathcal{B} соответственно, то

$$\left[\frac{e}{\mathcal{D}} \right] = \left[\frac{C}{\mathcal{C}} \right] = \left[\frac{m}{\mathcal{B}} \right] = [L^2]. \quad (5)$$

623. Эти пятнадцать уравнений не являются независимыми, и, для того чтобы получить размерности двенадцати входящих в них единиц, нам требуется еще одно дополнительное уравнение. Если, однако, мы возьмем либо e , либо m в качестве независимой единицы, можем выразить через них размерности остальных единиц:

$$\begin{aligned}
 (1). \quad [e] &= [e] = \left[\frac{L^2 M}{m T} \right]. \\
 (2). \quad [E] &= \left[\frac{L^2 M}{e T^2} \right] = \left[\frac{m}{T} \right]. \\
 (3). \text{ и } (5). \quad [p] = [m] &= \left[\frac{L^2 M}{e T} \right] = [m]. \\
 (4). \text{ и } (6). \quad [C] = [\Omega] &= \left[\frac{e}{T} \right] = \left[\frac{L^2 M}{m T^2} \right]. \\
 (7). \quad [\mathfrak{D}] &= \left[\frac{e}{L^2} \right] = \left[\frac{M}{m T} \right]. \\
 (8). \quad [\mathfrak{E}] &= \left[\frac{L M}{e T^2} \right] = \left[\frac{m}{L T} \right]. \\
 (9). \quad [\mathfrak{B}] &= \left[\frac{M}{e T} \right] = \left[\frac{m}{L^2} \right]. \\
 (10). \quad [\mathfrak{H}] &= \left[\frac{e}{L T} \right] = \left[\frac{L M}{m T^2} \right]. \\
 (11). \quad [\mathfrak{C}] &= \left[\frac{e}{L^2 T} \right] = \left[\frac{M}{m T^2} \right]. \\
 (12). \quad [\mathfrak{A}] &= \left[\frac{L M}{e T} \right] = \left[\frac{m}{L} \right].
 \end{aligned}$$

624. Зависимости первых десяти из этих величин можно показать, расположив их следующим образом:

$$\begin{array}{c|c}
 e, \mathfrak{D}, \mathfrak{H}, C \text{ и } \Omega. & E, \mathfrak{E}, \mathfrak{B}, m \text{ и } p. \\
 m \text{ и } p, \mathfrak{B}, \mathfrak{E}, E. & C \text{ и } \Omega, \mathfrak{H}, \mathfrak{D}, e.
 \end{array}$$

Величины, входящие в первую строку, получаются из e , а соответствующие им величины второй строки — из m с помощью одних и тех же операций. Нетрудно углядеть, что порядок расположения величин в первой строке в точности обратен порядку расположения величин во второй строке. Размерности первых четырех величин каждой строки содержат символ первой величины, стоящей в данной строке, в числителе, а размерности последующих четырех величин содержат этот символ в знаменателе.

Все приведенные выше соотношения справедливы независимо от того, какую систему единиц мы примем.

625. Единственными системами, представляющими ценность для науки, являются электростатическая и электромагнитная системы. Электростатическая система основана на определении единицы электричества, данной в п. 41, 42; она может быть выведена из уравнения $\mathfrak{E} = e/L^2$, которое означает, что в произ-

вольной точке результирующая электрическая сила \mathfrak{E} , обусловленная действием количества электричества e на расстоянии L , находится делением e на L^2 . Подставляя уравнения размерности (1) и (8), мы находим

$$\left[\frac{LM}{eT^2} \right] = \left[\frac{e}{L^2} \right], \quad \left[\frac{m}{LT} \right] = \left[\frac{M}{mT} \right],$$

откуда в электростатической системе

$$[e] = [L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}], \quad m = [L^{1/2}M^{1/2}].$$

Электромагнитная система основана на строгой аналогии в определении единицы мощности магнитного полюса, данном в п. 374, которое приводит к уравнению $\mathfrak{H} = m/L^2$, откуда

$$\left[\frac{e}{LT} \right] = \left[\frac{M}{eT} \right], \quad \left[\frac{LM}{mT^2} \right] = \left[\frac{m}{L^2} \right],$$

т. е. в электромагнитной системе

$$[e] = [L^{1/2}M^{1/2}], \quad [m] = [L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}].$$

Из этих результатов находятся размерности других величин.

626.

Таблица размерностей

	Обозначение	Размерность в	
		электростатической системе	электромагнитной системе
Количество электричества	e	$[L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}]$	$[L^{1/2}M^{1/2}]$.
Криволинейный интеграл от электрической силы	E	$[L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}]$	$[L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}]$.
Количество магнетизма			
Электрокинетический импульс тока	$\left. \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\}$	$[L^{1/2}M^{1/2}]$	$[L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}]$.
Электрический ток			
Магнитный потенциал	$\left. \begin{matrix} C \\ \Omega \end{matrix} \right\}$	$[L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}]$	$[L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}]$.
Электрическое смещение			
Поверхностная плотность	\mathfrak{D}	$[L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}]$	$[L^{-3/2}M^{1/2}]$.
Электродвижущая напряженность			
Магнитная индукция	\mathfrak{B}	$[L^{-3/2}M^{1/2}]$	$[L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}]$.
Магнитная сила	\mathfrak{H}	$[L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}]$	$[L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}]$.
Плотность тока	\mathfrak{C}	$[L^{-1/2}M^{1/2}T^{-2}]$	$[L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}]$.
Вектор-потенциал	\mathfrak{A}	$[L^{-1/2}M^{1/2}]$	$[L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}]$.

627. Мы уже рассмотрели произведения пар этих величин в том порядке, в каком они стоят. В некоторых случаях представляют научный интерес их отношения. Так:

		Обозначение	Электростатическая система	Электромагнитная система
$\frac{e}{E} =$	емкость накопителя q	$[L]$	$\left[\frac{T^2}{L}\right]$.
$\frac{P}{C} =$	{ коэффициент самоиндукции тока, или электромагнитная способ- ность }	. . . L	$\left[\frac{T^2}{L}\right]$	$[L]$.
$\frac{D}{\mathcal{E}} =$	{ удельная индуктивная способ- ность диэлектрика }	. . . K	$[0]$	$\left[\frac{T^2}{L^2}\right]$.
$\frac{B}{\mathcal{H}} =$	{ магнитная индуктивная способ- ность }	. . . μ	$\left[\frac{T^2}{L^2}\right]$	$[0]$.
$\frac{E}{C} =$	{ сопротивление проводника }	. . . R	$\left[\frac{T}{L}\right]$	$\left[\frac{L}{T}\right]$.
$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{C}} =$	{ удельное сопротивление вещества }	. . . r	$[T]$	$\left[\frac{L^2}{T}\right]$.

628. Если единицы длины, массы и времени одни и те же в двух системах, то число электростатических единиц электричества, содержащихся в одной электромагнитной единице, численно равно некоторой скорости, абсолютное значение которой не зависит от величины используемых фундаментальных единиц. Эта скорость является важной физической величиной, которую мы обозначим символом v .

*Число электростатических единиц
в одной электромагнитной единице*

Для $e, C, \Omega, \mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{E}, \dots v$.

Для $m, \rho, E, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \dots 1/v$.

Для электростатической способности, диэлектрической индуктивной способности и проводимости — v^2 .

Для электромагнитной способности, магнитной индуктивной способности и сопротивления — $1/v^2$.

Некоторые методы определения v будут даны в п. 768—780.

В электростатической системе удельная диэлектрическая индуктивная способность воздуха предполагается равной единице. Следовательно, в электромагнитной системе эта величина равна $1/v^2$.

В электромагнитной системе удельная магнитная индуктивная способность воздуха предполагается равной единице. Следовательно, в электростатической системе эта величина равна $1/v^2$.

Практическая система электрических единиц

629. Инженеры-электрики, практически занимающиеся электромагнитной телеграфией, из этих двух систем единиц больше используют электромагнитную. Если, однако, взять единицы длины, времени и массы, обычно употребляемые в других отраслях науки, такие, как метр или сантиметр, секунда и грамм, то единицы сопротивления и электродвижущей силы будут настолько малы, что для выражения величин, встречающихся в практике, придется использовать огромные числа, а единицы, выражающие количества электричества и емкости, будут так велики, что только их чрезвычайно малые доли могут когда-либо встретиться в практике. Поэтому инженеры-электрики приняли набор электрических единиц, выведенных с помощью электромагнитной системы из большой единицы длины и малой единицы массы.

Единица длины, использованная для этой цели, равна десяти миллионам метров, или примерно длине четверти земного меридиана.

Единица времени равна, как и прежде, одной секунде.

Единица массы равна 10^{-11} грамма, или одной стомиллионной части миллиграмма.

Электрические единицы, полученные из этих фундаментальных единиц, названы в честь выдающихся первооткрывателей в области электричества. Так, практическая единица сопротивления называется Ом; она представлена катушкой сопротивления, сделанной Британской Ассоциацией и описанной в п. 340. В электромагнитной системе она выражается скоростью 10 000 000 метров в секунду.

Практическая единица электродвижущей силы называется Вольт; она мало отличается от электродвижущей силы ячейки Даниэля. М-р Лэтимер Кларк (Latimer Clark) изобрел недавно очень стабильную ячейку, электродвижущая сила которой почти точно равна 1,454 Вольт.

Практическая единица емкости называется Фарада. Количество электричества, протекающее через сопротивление один Ом под действием электродвижущей

Таблица

Фундаментальные единицы	Практическая система	Доклад Б. А. 1863	Томсон	Вебер
Длина	четверть земного меридиана	метр	сантиметр	миллиметр
Время	секунда	секунда	секунда	секунда
Масса	10^{-11} грамма	грамм	грамм	миллиграмм
Сопротивление	Ом	10^7	10^9	10^{10}
Электродвижущая сила	Вольт	10^5	10^8	10^{11}
Емкость	Фарада	10^{-7}	10^{-9}	10^{-10}
Количество электричества	Фарада (заряженная до 1 Вольта)	10^{-2}	10^{-1}	10

силы в один Вольт за одну секунду, равно заряду, создаваемому в конденсаторе емкостью одна Фарада электродвижущей силой один Вольт.

Использование этих наименований оказалось более удобным, чем постоянное повторение слов «электромагнитные единицы» вместе с дополнительным указанием тех фундаментальных единиц, на которых они основаны.

Когда необходимо измерить очень большие величины, образуется крупная единица путем умножения первоначальной единицы на миллион и добавления к ее наименованию приставки *мега*.

Аналогичным образом с помощью приставки *микро* образуется малая единица, составляющая одну миллионную первоначальной единицы.

Значения этих практических единиц в различных системах, которые были приняты в разные времена, даны в таблице.

ГЛАВА XI

ОБ ЭНЕРГИИ И НАПРЯЖЕНИИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Электростатическая энергия

630. Энергию системы можно разделить на потенциальную и кинетическую.

Потенциальная энергия, обусловленная электризацией, уже была рассмотрена в п. 85. Ее можно записать так:

$$W = \frac{1}{2} \sum (e\Psi), \quad (1)$$

где e — заряд электричества в том месте, где электрический потенциал равен Ψ , а суммирование следует распространить на каждую область, где существует электризация.

Если f, g, h являются составляющими электрического смещения, то количество электричества в элементе объема $dx dy dz$ равно

$$e = \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) dx dy dz, \quad (2)$$

$$\text{а} \quad W = \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) \Psi dx dy dz, \quad (3)$$

где интегрирование следует распространить на все пространство.

631. После интегрирования этого выражения по частям с учетом того, что на бесконечно большом расстоянии r от данной точки, принадлежащей конечной заряженной системе, потенциал Ψ становится величиной бесконечно малой, имеющей порядок r^{-1} , а f, g, h становятся бесконечно малыми величинами порядка r^{-2} , выражение приводится к виду

$$W = -\frac{1}{2} \iiint \left(f \frac{d\Psi}{dx} + g \frac{d\Psi}{dy} + h \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz, \quad (4)$$

где интегрирование следует распространить на все пространство.

Если теперь вместо $-d\Psi/dx$, $-d\Psi/dy$ и $-d\Psi/dz$ мы запишем составляющие электродвижущей напряженности P , Q , R , то найдем

$$W = \frac{1}{2} \iiint (Pf + Qg + Rh) dx dy dz. \quad (5)$$

Следовательно, электростатическая энергия всего поля будет такой же самой, если мы предположим, что она имеется в каждой части поля, где есть электродвижущая напряженность и электрическое смещение, а не сосредоточена в тех местах, где находится свободное электричество.

Энергия в единице объема равна половине произведения электродвижущей напряженности и электрического смещения, умноженной на косинус угла, который образуют эти векторы.

На языке кватернионов это есть $-\frac{1}{2} S. \mathfrak{E} \mathfrak{D}$.

Магнитная энергия

632. Энергию, обусловленную намагниченностью, мы можем трактовать аналогично тому, как это сделано в случае электризации, п. 85. Если составляющие намагниченности равны A , B , C , а составляющие магнитной силы α , β , γ , то потенциальная энергия системы магнитов равна (п. 389)

$$-\frac{1}{2} \iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dx dy dz, \quad (6)$$

причем интегрирование распространяется на пространство, занятое намагниченной материей. Однако эта часть энергии будет включена в кинетическую энергию в той форме, в которой мы ее сейчас получим.

633. Мы можем преобразовать это выражение в отсутствии электрических токов следующим образом.

Мы знаем, что

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0. \quad (7)$$

Следовательно (п. 97), если

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy}, \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}, \quad (8)$$

что всегда имеет место для магнитных явлений при отсутствии токов, то

$$\iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz = 0, \quad (9)$$

где интегрирование распространяется на все пространство, или

$$\iiint (\alpha + 4\pi A) \alpha + (\beta + 4\pi B) \beta + (\gamma + 4\pi C) \gamma dx dy dz = 0. \quad (10)$$

Следовательно, энергия, обусловленная магнитной системой, равна

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dx dy dz &= \frac{1}{8\pi} \iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dx dy dz, \\ &= \frac{1}{8\pi} \iiint \mathfrak{H}^2 dx dy dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Электрокинетическая энергия

634. В п. 578 мы уже представили кинетическую энергию системы токов в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum (pi), \quad (12)$$

где p — электромагнитный импульс контура, а i — сила циркулирующего по нему тока; суммирование распространяется на все контуры.

Но мы уже доказали (п. 590), что p можно представить как линейный интеграл вида

$$p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds, \quad (13)$$

где F, G, H являются составляющими электромагнитного импульса \mathfrak{H} в точке (x, y, z) , а интегрирование распространяется на замкнутый контур s . Таким образом, мы находим

$$T = \frac{1}{2} \sum i \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds. \quad (14)$$

Если u, v, w являются составляющими плотности тока в произвольной точке проводящего контура, а S — поперечное сечение контура, то можно записать

$$i \frac{dx}{ds} = uS, \quad i \frac{dy}{ds} = vS, \quad i \frac{dz}{ds} = wS. \quad (15)$$

Мы можем также записать объем $Sds = dx dy dz$, и тогда находим

$$T = \frac{1}{2} \iiint (Fu + Gv + Hw) dx dy dz, \quad (16)$$

где интегрирование следует распространить на все части пространства, где имеются электрические токи.

635. Подставим теперь вместо u, v, w их значения, следующие из уравнений (E) п. 607, выражающих электрические токи через компоненты магнитной силы α, β, γ . Тогда имеем

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint \left\{ F \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + G \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + H \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right\} dx dy dz, \quad (17)$$

где интегрирование распространяется на часть пространства, включающую все токи.

Если проинтегрировать это выражение по частям и вспомнить, что на большом расстоянии r от системы составляющие α, β и γ являются величинами порядка r^{-3} , мы найдем, что, когда область интегрирования распространена на все пространство, выражение сводится к такому:

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint \left\{ \alpha \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + \beta \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + \gamma \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right\} dx dy dz. \quad (18)$$

Из уравнений (A) п. 591 для магнитной индукции мы можем подставить вместо величин в круглых скобках составляющие магнитной индукции a, b, c , так

что кинетическую энергию можно записать

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz, \quad (19)$$

интегрирование следует распространить на все части пространства, где магнитная сила и магнитная индукция имеют отличные от нуля значения.

Величина, стоящая в этом выражении в скобках, является произведением магнитной индукции и проекции магнитной силы на направление магнитной индукции.

На языке кватернионов это можно записать более просто: $-S \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{H}$, где \mathfrak{B} — магнитная индукция, составляющие которой равны a, b, c , а \mathfrak{H} — магнитная сила, составляющими которой являются α, β, γ .

636. Таким образом, электрокинетическая энергия системы может быть выражена в виде интеграла, который следует брать либо там, где есть электрические токи, либо по всем тем частям поля, где существует магнитная сила. Первый интеграл является естественным выражением для теории, в которой предполагается прямое воздействие токов друг на друга на расстоянии, тогда как второй интеграл соответствует теории, пытающейся объяснить действие между токами с помощью некоторого промежуточного действия в пространстве между ними. В настоящем трактате принят этот последний метод исследования, поэтому мы, естественно, принимаем второе выражение как наиболее содержательную форму представления кинетической энергии.

В соответствии с нашей гипотезой мы предполагаем, что кинетическая энергия существует в любом месте, где есть магнитная сила, т. е., вообще говоря, в каждой части поля. Количество этой энергии в единице объема равно $-\frac{1}{8\pi} S \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{H}$, причем эта энергия существует в форме какого-то вида движения материи в каждой части пространства.

Когда мы перейдем к рассмотрению открытия Фарадея, связанного с действием магнетизма на поляризованный свет, мы укажем причины нашей убежденности в том, что в каждом месте, где есть линии магнитной силы, имеется вращательное движение материи вокруг этих линий; см. п. 821.

Сравнение магнитной и электрокинетической энергии

637. В п. 423 мы нашли, что взаимная потенциальная энергия двух магнитных оболочек с мощностями ϕ и ϕ' , ограниченных соответственно замкнутыми кривыми s и s' , равна $-\phi\phi' \iint (\cos \epsilon) / r ds ds'$, где ϵ — угол между направлениями ds и ds' , r — расстояние между ними.

Мы также нашли (п. 521), что взаимная энергия двух контуров s и s' , по которым текут токи i и i' , равна $ii' \iint (\cos \epsilon) / r ds ds'$.

Если i и i' равны соответственно ϕ и ϕ' , то механическое действие между магнитными оболочками равно по величине действию между соответствующими электрическими контурами и имеет одинаковое с ним направление. В случае магнитных оболочек сила стремится уменьшить их взаимную потенциальную энергию, а в случае контуров она стремится увеличить их взаимную энергию, потому что эта энергия является кинетической.

Никаким распределением намагниченной материи невозможно воспроизвести систему, во всех отношениях соответствующую электрическому контуру, поскольку в каждой точке пространства потенциал магнитной системы однозначен, в то время как потенциал электрической системы многозначен.

Однако всегда можно при соответствующем расположении бесконечно малых электрических контуров воспроизвести систему, во всех отношениях соответствующую любой магнитной системе, при условии, что путь интегрирования, по которому мы следуем при вычислении потенциала, не проходит сквозь какой-нибудь из этих маленьких контуров. Более полно это будет объяснено в п. 833.

Действие магнитов на расстоянии совершенно равнозначно действию электрических токов. Поэтому мы попытаемся для некоторых случаев проследить оба действия, а поскольку мы не можем объяснить электрические токи с помощью магнитов, мы должны принять другую альтернативу и объяснять магниты при помощи молекулярных электрических токов.

638. В наших исследованиях магнитных явлений в части III этого трактата мы не делали никаких попыток объяснять магнитное действие на расстоянии и подходили к нему как к основополагающему опытному факту. Таким образом, мы предполагали, что энергия магнитной системы является потенциальной и что эта энергия *уменьшается*, когда части системы подчиняются магнитным силам, действующим на них.

Если, однако, считать, что свойства магнитов определяются электрическими токами, циркулирующими внутри их молекул, то их энергия является кинетической и сила их взаимодействия такова, что стремится двигать их в направлении, где при условии неизменности силы токов кинетическая энергия *возрастает*.

Этот способ объяснения магнетизма требует от нас отказа от метода, которому мы следовали в части III, рассматривая магнит как сплошное однородное тело, любая самая малая часть которого обладает того же сорта магнитными свойствами, что и все тело в целом.

Теперь мы должны считать, что магнит содержит конечное, хотя и очень большое, число электрических контуров и что он обладает существенно молекулярной структурой, отличной от непрерывной.

Если считать наш математический аппарат настолько грубым, что линия интегрирования не может проходить сквозь молекулярный контур, и если предположить, что в нашем элементе объема содержится бессчетное количество магнитных молекул, то мы снова придем к результатам, сходным с результатами главы III; если же, однако, считать наш математический аппарат более тонким, пригодным для исследования того, что происходит внутри молекул, то мы должны будем отставить старую теорию магнетизма и принять теорию Ампера, не допускающую никаких иных магнитов, кроме магнитов, состоящих из электрических токов.

Мы должны также рассматривать и магнитную и электромагнитную энергию как энергию кинетическую, приписав ей надлежащий знак, как это было сделано в п. 635.

В дальнейшем, хотя мы и можем при случае, как в п. 639 и далее, попытаться следовать старой теории магнетизма, мы обнаружим, что полностью согласованная система получается только при отказе от этой теории и принятии теории молекулярных токов Ампера, как в п. 644.

Энергия поля состоит, таким образом, только из двух частей: электростатической, или потенциальной энергии

$$W = \frac{1}{2} \iiint (Pf + Qg + Rh) dx dy dz,$$

и электромагнитной, или кинетической энергии

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz.$$

О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЭЛЕМЕНТ ТЕЛА, ПОМЕЩЕННОГО В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Силы, действующие на магнитный элемент

639. Потенциальная энергия элемента тела $dx dy dz$, намагниченного с интенсивностью, имеющей составляющие A, B, C , и помещенного в поле магнитной силы с составляющими α, β, γ , равна $-(A\alpha + B\beta + C\gamma) dx dy dz$.

Следовательно, если сила, вынуждающая элемент тела двигаться в направлении x без вращения, равна $X_1 dx dy dz$, то

$$X_1 = A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\beta}{dx} + C \frac{d\gamma}{dx}, \quad (1)$$

и если момент пары сил, стремящейся повернуть элемент вокруг оси x в направлении от y к z , равен $L dx dy dz$, то

$$L = B\gamma - C\beta. \quad (2)$$

Силы и моменты, соответствующие осям y и z , можно записать, сделав необходимые подстановки.

640. Если намагниченное тело несет электрический ток, составляющие которого равны u, v, w , то в соответствии с уравнениями (С) п. 603 появится дополнительная электромагнитная сила с составляющими X_2, Y_2, Z_2 , причем

$$X_2 = vc - wb. \quad (3)$$

Следовательно, полная сила X , возникающая из-за наличия магнетизма молекулы, а также из-за проходящего через нее тока, равна

$$X = A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\beta}{dx} + C \frac{d\gamma}{dx} + vc - wb. \quad (4)$$

Величины a, b, c являются составляющими магнитной индукции; они связаны с составляющими магнитной силы α, β, γ уравнениями, данными в п. 400:

$$a = \alpha + 4\pi A, \quad b = \beta + 4\pi B, \quad c = \gamma + 4\pi C. \quad (5)$$

Составляющие тока u, v, w можно выразить через α, β, γ с помощью уравнений п. 607;

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \quad 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \quad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}. \quad (6)$$

Следовательно,

$$X = \frac{1}{4\pi} \left\{ (a - \alpha) \frac{d\alpha}{dx} + (b - \beta) \frac{d\beta}{dx} + (c - \gamma) \frac{d\gamma}{dx} + b \left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} \right) + c \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) \right\},$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ a \frac{d\alpha}{dx} + b \frac{d\alpha}{dy} + c \frac{d\alpha}{dz} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right\}. \quad (7)$$

В соответствии с п. 403

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0. \quad (8)$$

Умножив уравнение (8) на α и разделив на 4π , мы можем добавить результат к (7), тогда получим

$$X = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{d}{dx} \left[a\alpha - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right] + \frac{d}{dy} [b\alpha] + \frac{d}{dz} [c\alpha] \right\}, \quad (9)$$

а с учетом (2)

$$L = \frac{1}{4\pi} ((b - \beta)\gamma - (c - \gamma)\beta), \quad (10)$$

$$= \frac{1}{4\pi} (b\gamma - c\beta), \quad (11)$$

где X — сила в направлении оси x , отнесенная к единице объема, а L — момент сил (на единицу объема) относительно этой оси.

*Об объяснении этих сил с помощью гипотезы
о наличии среды в напряженном состоянии*

641. Обозначим напряжение любого вида, отнесенное к единице площади, символом вида P_{hk} , где первый индекс h показывает, что нормаль к поверхности, на которую по предположению действует напряжение, параллельна оси h , а второй индекс k показывает, что направление напряжения, с которым действует часть тела, прилегающая к положительной стороне поверхности, на часть тела, прилегающую к отрицательной стороне, является направлением, параллельным оси k .

Направления h и k могут совпадать — в этом случае напряжение является нормальным. Они могут быть наклонены относительно друг друга — в этом случае напряжение является наклонным; наконец, могут быть перпендикулярны друг другу — в этом случае напряжение является тангенциальным.

Условие, при котором напряжения не создают никакого стремления к вращению элементарной части тела, есть $P_{hk} = P_{kh}$.

Однако в случае намагниченного тела такая тенденция к вращению имеется, и, следовательно, это условие, справедливое в обычной теории напряжений, оказывается невыполненным.

Рассмотрим действие напряжения на шесть сторон элементарного объема тела $dx dy dz$, взяв начало координат в его центре тяжести.

На положительную сторону поверхности $dy dz$, где значение x равно $dx/2$, действуют силы:

$$\left. \begin{aligned} \text{параллельно } x & \left(P_{xx} + \frac{1}{2} \frac{dP_{xx}}{dx} dx \right) dy dz = X_{+x}, \\ \text{параллельно } y & \left(P_{xy} + \frac{1}{2} \frac{dP_{xy}}{dx} dx \right) dy dz = Y_{+x}, \\ \text{параллельно } z & \left(P_{xz} + \frac{1}{2} \frac{dP_{xz}}{dx} dx \right) dy dz = Z_{+x}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Силы, действующие на противоположную сторону, — X_{-x} , — Y_{-x} , — Z_{-x} можно получить, сменив знак при dx . Таким же способом мы можем выразить системы трех сил, действующих на все остальные поверхности этого элемента, обозначая направление силы заглавной буквой, а поверхность, на которую она действует, индексом.

Если обозначить полную силу, действующую на элемент параллельно оси x , через $X dx dy dz$, то

$$\begin{aligned} X dx dy dz &= X_{+x} + X_{+y} + X_{+z} + X_{-x} + X_{-y} + X_{-z}, \\ &= \left(\frac{dP_{xx}}{dx} + \frac{dP_{yx}}{dy} + \frac{dP_{zx}}{dz} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

откуда
$$X = \frac{d}{dx} P_{xx} + \frac{d}{dy} P_{yx} + \frac{d}{dz} P_{zx}. \quad (13)$$

Если $L dx dy dz$ является полным моментом сил относительно оси x , стремящимся повернуть элемент в направлении от y к z , то

$$\begin{aligned} L dx dy dz &= \frac{1}{2} dy (Z_{+y} - Z_{-y}) - \frac{1}{2} dz (Y_{+z} - Y_{-z}), \\ &= (P_{yz} - P_{zy}) dx dy dz, \end{aligned}$$

откуда
$$L = P_{yz} - P_{zy}. \quad (14)$$

Сравнивая значения X и L , определяемые уравнениями (9) и (11), с теми, которые дают уравнения (13) и (14), мы находим, что, если положить

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ a\alpha - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right\}, & P_{yz} &= \frac{1}{4\pi} b\gamma, & P_{zy} &= \frac{1}{4\pi} c\beta, \\ P_{yy} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ b\beta - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right\}, & P_{zx} &= \frac{1}{4\pi} c\alpha, & P_{xz} &= \frac{1}{4\pi} a\gamma, \\ P_{zz} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ c\gamma - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right\}, & P_{xy} &= \frac{1}{4\pi} a\beta, & P_{yx} &= \frac{1}{4\pi} b\alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

то сила, обусловленная системой напряжений с такими составляющими, по своим действиям на каждый элемент тела эквивалентна в статическом смысле силам, обусловленным намагниченностью и электрическими токами.

642. Легко установить природу напряжений с такими составляющими. Возьмем в качестве оси x биссектрису угла между направлениями магнитной силы и магнитной индукции, а ось y проведем в плоскости этих направлений, направив ее в сторону магнитной силы.

Если мы положим, что численное значение магнитной силы равно \mathfrak{H} , численное значение магнитной индукции равно \mathfrak{B} и угол между их направлениями равен 2ε , то

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{H} \cos \varepsilon, & \beta &= -\mathfrak{H} \sin \varepsilon, & \gamma &= 0, \\ a &= \mathfrak{B} \cos \varepsilon, & b &= -\mathfrak{B} \sin \varepsilon, & c &= 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{4\pi} \left(+ \mathfrak{B}\mathfrak{H} \cos^2 \varepsilon - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \right), & P_{yz} &= P_{zx} = P_{zy} = P_{xz} = 0, \\ P_{yy} &= \frac{1}{4\pi} \left(- \mathfrak{B}\mathfrak{H} \sin^2 \varepsilon - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \right), & P_{xy} &= \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B}\mathfrak{H} \cos \varepsilon \sin \varepsilon, \\ P_{zz} &= \frac{1}{4\pi} \left(- \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \right), & P_{yx} &= -\frac{1}{4\pi} \mathfrak{B}\mathfrak{H} \cos \varepsilon \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, напряженное состояние можно рассматривать как составленное из:

- (1). Давления, одинакового по всем направлениям $= (1/8\pi) \mathfrak{H}^2$.
- (2). Натяжения вдоль линии, делящей пополам угол между направлениями магнитной силы и магнитной индукции $= (1/4\pi) \mathfrak{B}\mathfrak{H} \cos^2 \varepsilon$.
- (3). Давления вдоль линии, делящей пополам внешний угол между этими направлениями $= (1/4\pi) \mathfrak{B}\mathfrak{H} \sin^2 \varepsilon$.
- (4). Пары сил, стремящейся повернуть каждый элемент вещества в плоскости этих двух направлений *от* направления магнитной индукции *в* направлении магнитной силы $= (1/4\pi) \mathfrak{B}\mathfrak{H} \sin 2\varepsilon$.

Когда магнитная индукция направлена так же, как магнитная сила, что всегда имеет место в жидкостях и немагнитных твердых телах, то $\varepsilon=0$; если направить ось x вдоль магнитной силы, то

$$P_{xx} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathfrak{B}\mathfrak{H} - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \right), \quad P_{yy} = P_{zz} = -\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2, \quad (18)$$

и тангенциальное напряжение исчезает.

Напряжение, таким образом, состоит в этом случае из комбинации гидростатического давления $(1/8\pi) \mathfrak{H}^2$ и продольного натяжения $(1/4\pi) \mathfrak{B}\mathfrak{H}$ вдоль силовых линий.

643. При отсутствии намагнитченности $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, и напряжение еще больше упрощается: оно состоит из натяжения вдоль силовых линий, равного $(1/8\pi) \mathfrak{H}^2$, и давления по всем направлениям, перпендикулярным силовым линиям, также численно равным $(1/8\pi) \mathfrak{H}^2$. Составляющие напряжения в этом важном случае равны

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{8\pi} (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2), & P_{yz} &= P_{zy} = \frac{1}{4\pi} \beta\gamma, \\ P_{yy} &= \frac{1}{8\pi} (\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2), & P_{zx} &= P_{xz} = \frac{1}{4\pi} \gamma\alpha, \\ P_{zz} &= \frac{1}{8\pi} (\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2), & P_{xy} &= P_{yx} = \frac{1}{4\pi} \alpha\beta. \end{aligned} \quad (19)$$

Составляющая силы вдоль x , возникающая вследствие действия этих напряжений на элемент среды единичного объема, равна

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{dx} P_{xx} + \frac{d}{dy} P_{yx} + \frac{d}{dz} P_{zx}, \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \alpha \frac{d\alpha}{dx} - \beta \frac{d\beta}{dx} - \gamma \frac{d\gamma}{dx} \right\} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \alpha \frac{d\beta}{dy} + \beta \frac{d\alpha}{dy} \right\} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \alpha \frac{d\gamma}{dz} + \gamma \frac{d\alpha}{dz} \right\}, \\ &= \frac{1}{4\pi} \alpha \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) + \frac{1}{4\pi} \gamma \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) - \frac{1}{4\pi} \beta \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right). \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 4\pi m, \quad \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v, \quad \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w,$$

где m — плотность аустральной (южной) магнитной материи (отнесенная к единице объема), а v и w — составляющие электрических токов, отнесенных к единичным площадкам, перпендикулярным соответственно y и z . Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} X &= \alpha m + v\gamma - w\beta. \\ \text{Аналогично } Y &= \beta m + w\alpha - u\gamma, \\ Z &= \gamma m + u\beta - v\alpha. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(Уравнения Электромагнитной} \\ \text{Силы)} \end{array} \quad (20)$$

644. Если мы примем теории Ампера и Вебера относительно природы магнитных и диамагнитных тел и предположим, что магнитная и диамагнитная полярности обусловлены молекулярными электрическими токами, мы освобождаемся от воображаемой магнитной материи и находим, что $m=0$ везде, т. е.

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0, \quad (21)$$

таким образом, уравнениями электромагнитной силы становятся

$$X = v\gamma - w\beta, \quad Y = w\alpha - u\gamma, \quad Z = u\beta - v\alpha. \quad (22)$$

Это составляющие механической силы, отнесенные к единице объема вещества. Составляющие магнитной силы равны α , β , γ , а составляющие электрического тока — u , v , w . Эти уравнения идентичны полученным ранее уравнениям (С) п. 603.

645. При объяснении электромагнитной силы с помощью напряженного состояния среды мы всего лишь следуем концепции Фарадея¹ о том, что линии магнитной силы стремятся сокращаться и что эти линии отталкиваются, будучи помещенными вплотную друг к другу. Все, что мы проделали, сводится к представлению в математической форме величин натяжения вдоль линий и давления, им перпендикулярного, а также к доказательству того, что напряженное состояние, которое, по предположению, существует в среде, действительно будет давать наблюдаемые силы, действующие на проводники с электрическими токами.

Мы еще ничего не утверждали относительно способов создания и поддержания в среде этого напряженного состояния. Мы просто показали, что взаимодействие электрических токов можно представлять как зависящее от особого вида напря-

¹ *Exp. Res.*, 3266, 3267, 3268.

жения в окружающей среде, а не как прямое и мгновенное действие на расстоянии.

Любое дальнейшее объяснение напряженного состояния с использованием движения среды или чего-то иного должно рассматриваться уже как отдельный и независимый раздел теории, который может либо выстоять, либо потерпеть поражение, но не может повлиять на занимаемую нами сейчас позицию, см. п. 832.

В первой части нашего трактата, в п. 108, мы показали, что действие наблюдаемых электрических сил можно понимать как результат распространения в окружающей среде состояния напряжения. Теперь мы проделали то же самое для электромагнитных сил; остается лишь убедиться, является ли такое представление о среде, способной поддерживать это напряженное состояние, совместимым с другими известными явлениями или мы должны отставить его в сторону как бесплодное.

Мы должны предположить, что в поле, в котором имеет место и электростатическое, и электромагнитное действие, электростатическое напряжение, описанное в части I, налагается на электромагнитное напряжение, которое мы рассматриваем.

646. Если мы предположим, что полная земная магнитная сила равна 10 Британским единицам (гран, фут, секунда), чему она примерно и равна в Британии, то натяжение вдоль силовых линий равно 0,128 гран веса на квадратный фут. Максимальное магнитное натяжение, созданное Джоулем², с помощью электромагнитов составляло около 140 фунтов веса на квадратный дюйм.

ГЛАВА XII

ТОКОВЫЕ ЛИСТЫ

647. Токовый лист — это бесконечно тонкий слой проводящей материи, ограниченный с обеих сторон изолирующей средой; электрические токи могут течь по листу и не могут его покинуть нигде, за исключением некоторых точек, называемых электродами. Через электроды осуществляется ввод токов в лист и вывод их из листа.

Для того чтобы пропускать конечный электрический ток, реальный лист должен иметь конечную толщину и потому должен рассматриваться как проводник, имеющий три измерения. Однако во многих случаях практически удобно находить электрические характеристики реального проводящего листа или тонкого слоя проводов, образующих катушку, исходя из характеристик токового листа, определенного выше.

В связи с этим мы можем поверхность любой формы рассматривать как некоторый токовый лист. Выбрав одну из сторон листа в качестве положительной, мы будем считать, что любые линии, проведенные на поверхности, всегда наблюдаются с ее положительной стороны. В случае замкнутых поверхностей положитель-

² Sturgeon's *Annals of Electricity*, vol. V, p. 187 (1840); or *Philosophical Magazine*, Dec. 1851.

ной мы будем считать внешнюю сторону поверхности. См., однако, п. 294, где направление тока определено в предположении, что мы наблюдаем его с *отрицательной* стороны листа.

Функция тока

648. Выберем за начало отсчета на поверхности некоторую фиксированную точку A и проведем на поверхности линию из точки A в другую точку P . Обозначим через φ количество электричества, пересекающее эту линию слева направо в единицу времени. Величина φ называется функцией тока в точке P .

Функция тока зависит только от положения точки P ; она одинакова для любых двух линий AP произвольной формы при условии, что эти линии могут быть преобразованы одна в другую путем непрерывного перемещения, при котором не пересекаются электроды. Действительно, если две линии охватывают площадь, не содержащую электродов, то количество электричества, которое входит внутрь этой площади через одну из линий, должно выйти через другую линию.

Пусть s обозначает длину линии AP ; тогда ток, протекающий через ds слева направо, будет равен $(d\varphi/ds)ds$.

Постоянство φ на какой-либо кривой означает отсутствие тока, протекающего через эту кривую. Поэтому ее называют Линией Тока, или Линией Потока.

649. Пусть ψ есть электрический потенциал в некоторой точке листа; тогда электродвижущая сила вдоль элемента ds некоторой кривой будет равна $-(d\psi/ds) ds$ при условии, что нет никаких других электродвижущих сил, кроме той, которая обусловлена разностью потенциалов.

Если вдоль некоторой кривой величина ψ постоянна, то эту кривую называют Эквипотенциальной Линией.

650. Мы можем теперь предположить, что положение точки на листе определяется значениями φ и ψ в этой точке. Пусть ds_1 — длина элемента эквипотенциальной линии ψ , заключенного между двумя линиями тока φ и $\varphi + d\varphi$, а ds_2 — длина элемента токовой линии φ , заключенного между двумя эквипотенциальными линиями ψ и $\psi + d\psi$. Мы можем рассматривать ds_1 и ds_2 как стороны элемента листа $d\varphi d\psi$. Электродвижущая сила $-d\psi$ в направлении ds_2 создает ток $d\varphi$, пересекающий ds_1 .

Пусть сопротивление участка листа длиной ds_2 и шириной ds_1 равно $\sigma (ds_2/ds_1)$, где σ — удельное сопротивление листа на единицу площади; тогда $d\varphi = \sigma \frac{ds_2}{ds_1} d\psi$,

откуда $\frac{ds_1}{d\varphi} = \sigma \frac{ds_2}{d\psi}$.

651. Если лист состоит из вещества, одинаково хорошо проводящего во всех направлениях, то элемент ds_1 перпендикулярен ds_2 . В случае листа с однородной проводимостью величина σ постоянна, и, положив $\psi = \sigma\psi'$, мы будем иметь $\frac{\delta s_1}{\delta s_2} = \frac{\delta\varphi}{\delta\psi'}$, линии потока и эквипотенциальные линии пересекают поверхность на маленькие квадратики.

Отсюда следует, что если φ_1 и ψ'_1 являются функциями, сопряженными φ и ψ' (п. 183), то кривые φ_1 могут быть линиями потока на том листе, где кривые ψ'_1 являются соответствующими эквипотенциальными линиями. Один случай —

это, конечно, тот, в котором $\varphi_1 = \psi'$, а $\psi'_1 = -\varphi$. В этом случае эквипотенциальные линии становятся линиями тока, а линии тока — эквипотенциальными линиями¹.

Получив решение для распределения электрических токов в однородном листе произвольной формы для любого частного случая, мы можем вывести распределение токов для любого другого случая при помощи надлежащего преобразования сопряженных функций в соответствии с методом, описанным в п. 190.

652. Далее мы должны определить магнитное действие токового листа, у которого ток целиком сосредоточен на самом листе, т. е. отсутствуют электроды, подводящие и отводящие ток.

В этом случае функция тока φ имеет в каждой точке определенное значение, а линии потока являются замкнутыми и не пересекают друг друга, хотя какая-то одна линия потока может иметь самопересечение.

Рассмотрим кольцевой участок листа, расположенный между линиями потока φ и $\varphi + \delta\varphi$. Эта часть листа представляет собой проводящий контур, в котором ток силой $\delta\varphi$ циркулирует в положительном направлении вокруг участка листа, где величина φ больше данного значения. Магнитное действие этого контура совпадает с действием магнитной оболочки, имеющей мощность $\delta\varphi$ в любой точке, за исключением точек внутри вещества оболочки. Предположим, что оболочка совпадает с той частью токового листа, на которой значение φ больше, чем на заданной линии потока.

Нанося последовательно все линии потока, начиная с той, для которой значение φ максимально, и кончая линией с наименьшим значением φ , мы разделим токовый лист на семейство контуров. Заменяя каждый из них соответствующей ему магнитной оболочкой, мы находим, что магнитное действие токового листа в любой точке, не находящейся в толще листа, такое же, как действие сложной магнитной оболочки, мощность которой в любой точке равна $C + \varphi$, где C — некоторая константа.

Если токовый лист ограничен, мы должны положить на граничной кривой $C + \varphi = 0$. Если лист образует замкнутую или бесконечную поверхность, то для определения постоянной C нет никаких данных.

653. Магнитный потенциал в произвольной точке на любой из сторон токового листа дается, согласно п. 415, выражением

$$\Omega = \iint \frac{1}{r^2} \varphi \cos \vartheta dS,$$

где r — есть расстояние до данной точки от элемента поверхности dS , а ϑ — угол между направлением r и направлением нормали, проведенной с положительной стороны dS .

Это выражение дает магнитный потенциал во всех точках, не входящих в толщу листа, а мы знаем, что для точек внутри проводника, несущего ток, такого понятия, как магнитный потенциал, не существует.

Величина Ω разрывна на токовом листе, ибо если Ω_1 есть ее значение в некоторой точке непосредственно внутри токового листа, а Ω_2 — ее значение в точке,

¹ См. Thomson, *Camb. Math. Journ.*, vol. III, p. 286.

близкой к первой, но расположенной вне токового листа, то $\Omega_2 = \Omega_1 + 4\pi\phi$, где ϕ есть функция тока в этой точке листа.

Значение составляющей магнитной силы, нормальной к листу, является непрерывным, т. е. одинаковым на обеих сторонах листа. Составляющая магнитной силы, параллельная линиям тока, тоже непрерывна, но тангенциальная составляющая, перпендикулярная линиям тока на листе, разрывна. Если s — длина некоторой проведенной на листе кривой, то составляющая магнитной силы в направлении ds на отрицательной стороне листа равна $-(d\Omega_1/ds)$, а на положительной стороне $-\frac{d\Omega_2}{ds} = -\frac{d\Omega_1}{ds} - 4\pi \frac{d\phi}{ds}$.

Составляющая магнитной силы на положительной стороне превышает, таким образом, составляющую магнитной силы на отрицательной стороне на величину $4\pi(d\phi/ds)$, которая максимальна в данной точке, когда элемент ds перпендикулярен линиям тока.

*О наведении электрических токов
листе с бесконечной проводимостью*

654. Как было показано в п. 579, в любом контуре $E = \frac{dp}{dt} + Ri$, где E — приложенная электродвижущая сила, p — электрокинетический импульс (количество движения) контура, R — сопротивление контура, i — ток, текущий по нему. Если отсутствуют приложенная электродвижущая сила и сопротивление, то $dp/dt = 0$, или величина p постоянна.

Далее, в п. 588 было показано, что электрокинетический импульс контура p измеряется поверхностным интегралом от магнитной индукции, пронизывающей контур. Следовательно, в случае токового листа без сопротивления поверхностный интеграл от магнитной индукции сквозь любую замкнутую кривую, проведенную на поверхности листа, должен быть постоянным; это означает, что в каждой точке токового листа нормальная составляющая магнитной индукции остается величиной постоянной.

655. Таким образом, если благодаря перемещению магнитов или изменению текущих поблизости токов магнитное поле каким-то образом меняется, то в токовом листе возникнут такие электрические токи, что их магнитное действие совместно с действием магнитов или токов в поле будет поддерживать неизменной нормальную составляющую магнитной индукции в каждой точке листа. Если же вначале не было никакого магнитного действия и не было токов в листе, то нормальная составляющая магнитной индукции всегда будет равна нулю во всех точках листа.

Поэтому такой лист можно считать непроницаемым для магнитной индукции: линии магнитной индукции будут отклоняться им точно так же, как отклонялись бы линии потока электрического тока в бесконечной и однородной проводящей среде при введении листа такой же формы, но изготовленного из вещества с бесконечным сопротивлением.

Если лист образует замкнутую или бесконечную поверхность, то любое магнитное действие, имеющее место по одну сторону листа, не произведет никаких магнитных эффектов по другую его сторону.

Теория плоского токового листа

656. Мы уже знаем, что внешнее магнитное действие токового листа эквивалентно действию магнитной оболочки, мощность которой в каждой ее точке численно равна величине функции тока φ . Когда лист плоский, мы можем выразить все величины, необходимые для определения электромагнитных эффектов, через одну-единственную функцию P , которая является потенциалом, создаваемым слоем некоторой воображаемой материи, распределенной на этой плоскости с поверхностной плотностью φ . Величина P , разумеется, равна

$$P = \iint \frac{\varphi}{r} dx' dy', \quad (1)$$

где r — расстояние от точки (x, y, z) , в которой вычисляется P , до точки $(x', y', 0)$, лежащей на плоскости листа, в которой берется элемент интегрирования $dx' dy'$.

Для отыскания магнитного потенциала мы можем рассматривать магнитную оболочку, как бы состоящую из двух поверхностей, параллельных плоскости xy : первая плоскость (ее уравнение $z=c/2$) имеет поверхностную плотность φ/c , а вторая плоскость (ее уравнение $z=-c/2$) имеет поверхностную плотность $-\varphi/c$.

Потенциалы, обусловленные этими поверхностями, будут соответственно такими: $\frac{1}{c} P(z - \frac{c}{2})$, $-\frac{1}{c} P(z + \frac{c}{2})$, где индексы указывают на то, что в первом выражении вместо z берется $z - c/2$, а во втором $z + c/2$. Разлагая эти выражения по теореме Тейлора и складывая их, сделаем затем величину c бесконечно малой; тогда для магнитного потенциала, создаваемого листом в любой точке, расположенной вне его, получим

$$\Omega = -dP/dz. \quad (2)$$

657. Величина P симметрична относительно плоскости листа, поэтому при замене z на $-z$ она остается неизменной; магнитный потенциал Ω при замене z на $-z$ меняет знак.

На положительной поверхности листа

$$\Omega = -dP/dz = 2\pi\varphi. \quad (3)$$

На отрицательной поверхности листа

$$\Omega = -dP/dz = -2\pi\varphi. \quad (4)$$

В пределах самого листа, если магнитные эффекты возникают из-за намагниченности его вещества, магнитный потенциал изменяется непрерывно от значения, равного $2\pi\varphi$ на положительной поверхности, до значения, равного $-2\pi\varphi$ на отрицательной поверхности.

Если лист содержит электрические токи, магнитная сила внутри него не удовлетворяет условиям существования потенциала; однако сама магнитная сила в нем является совершенно определенной.

Ее нормальная составляющая

$$\gamma = -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{d^2P}{dz^2} \quad (5)$$

одна и та же как на обеих сторонах листа, так и внутри его вещества.

Если α и β являются составляющими магнитной силы, параллельными x и y на положительной поверхности, а α' , β' — аналогичные составляющие на отрицательной поверхности, то

$$\alpha = -2\pi (d\varphi/dx) = -\alpha', \quad (6)$$

$$\beta = -2\pi (d\varphi/dy) = -\beta'. \quad (7)$$

Внутри листа эти составляющие меняются непрерывно от значений α и β до значений α' и β' .

Уравнения

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = -\frac{d\Omega}{dx}, \quad \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} = -\frac{d\Omega}{dy}, \quad \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = -\frac{d\Omega}{dz}, \quad (8)$$

связывающие составляющие вектор-потенциала F , G , H , обусловленного токовым листом, со скалярным потенциалом Ω , удовлетворяются, если мы положим

$$F = \frac{dP}{dy}, \quad G = -\frac{dP}{dx}, \quad H = 0. \quad (9)$$

Эти величины мы можем получить также непосредственным интегрированием; так, для F имеем

$$\begin{aligned} F &= \iint \frac{u}{r} dx' dy' = \iint \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dy'} dx' dy', \\ &= \int \frac{\varphi}{r} dx' - \iint \varphi \frac{d}{dy'} \frac{1}{r} dx' dy'. \end{aligned}$$

Интеграл должен вычисляться для бесконечного плоского листа, а первый член на бесконечности исчезает, поэтому все это выражение сводится к его второму члену. Заменяя $\frac{d}{dy} \frac{1}{r}$ на $\frac{d}{dy'} \frac{1}{r}$ и помня, что φ зависит от x' и y' , но не зависит от x , y , z , мы получаем

$$F = \frac{d}{dy} \iint \frac{\varphi}{r} dx' dy', \quad = \frac{dP}{dy}, \quad (\text{согласно (1)}).$$

Если Ω' есть магнитный потенциал, создаваемый какой-либо магнитной или электрической системой, расположенной вне листа, мы можем записать

$$P' = -\int \Omega' dz \quad (10)$$

и тогда для составляющих вектор-потенциала, обусловленного этой системой, будем иметь

$$F' = dP'/dy, \quad G' = -dP'/dx, \quad H' = 0. \quad (11)$$

658. Определим теперь электродвижущую напряженность в произвольной точке листа, считая его неподвижным.

Пусть X и Y будут составляющими электродвижущей напряженности, параллельными соответственно x и y , тогда, согласно п. 598, имеем

$$X = -\frac{d}{dt} (F + F') - \frac{d\psi}{dx}, \quad (12)$$

$$Y = -\frac{d}{dt} (G + G') - \frac{d\psi}{dy}. \quad (13)$$

Если электрическое сопротивление листа однородно и равно σ , то

$$X = \sigma u, \quad Y = \sigma v, \quad (14)$$

где u и v — составляющие тока, выражаемые через функцию тока ϕ :

$$u = d\phi/dy, \quad v = -d\phi/dx. \quad (15)$$

Но по уравнению (3) на положительной поверхности токового листа $2\pi\phi = -dP/dz$.

Следовательно, уравнения (12) и (13) могут быть записаны в форме

$$-\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^2 P}{dy dz} = -\frac{d^2}{dy dt} (P + P') - \frac{d\psi}{dx}, \quad (16)$$

$$\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^2 P}{dx dz} = \frac{d^2}{dx dt} (P + P') - \frac{d\psi}{dy}, \quad (17)$$

где величины, стоящие во всех выражениях, соответствуют положительной поверхности листа.

Дифференцируя первое из этих уравнений по x и второе уравнение по y , а затем складывая результаты, получаем

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} = 0. \quad (18)$$

Единственным решением этого уравнения, конечным и непрерывным в любой точке плоскости и исчезающим на бесконечном расстоянии от нее, является

$$\psi = 0. \quad (19)$$

Следовательно, индуцирование электрических токов в бесконечном плоском листе с однородной проводимостью не сопровождается появлением разности электрических потенциалов между различными частями листа.

Подставляя это значение ψ и интегрируя уравнения (16) и (17), мы получаем

$$\frac{\sigma}{2\pi} \frac{dP}{dz} - \frac{dP}{dt} - \frac{dP'}{dt} = f(z, t). \quad (20)$$

Поскольку величины токов в листе найдены дифференцированием по x или y , то произвольная функция от z и t при этом исчезает, и мы не будем принимать ее в расчет.

Далее вместо $\sigma/(2\pi)$ мы будем употреблять один символ R , который представляет собой некоторую скорость; тогда уравнение, связывающее P и P' , станет таким:

$$R \frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dt} + \frac{dP'}{dt}. \quad (21)$$

659. Предположим сначала, что нет внешних магнитных систем, действующих на токовый лист. Поэтому мы можем положить $P' = 0$. Тогда приходим к случаю системы электрических токов в листе, предоставленных самим себе, но воздействующих друг на друга через взаимную индукцию и в то же самое время теряющих энергию из-за сопротивления листа. Результат выражается уравнением

$$R \frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dt}, \quad (22)$$

решением которого является

$$P = F\{x, y, (z + Rt)\}. \quad (23)$$

Следовательно, значение P в произвольной точке на положительной стороне листа с координатами x, y, z в момент времени t равно значению P в точке $x, y, (z + Rt)$ в момент времени $t = 0$.

Поэтому если в однородном плоском листе неограниченной протяженности возбуждена какая-то система токов и предоставлена затем самой себе, то производимый ею в любой точке на положительной стороне листа магнитный эффект будет таким же, как если бы эта система токов на листе поддерживалась неизменной, а сам лист двигался бы с постоянной скоростью R в направлении нормали, выходящей из отрицательной стороны. Уменьшение электромагнитных сил, возникающее из-за спадания тока в реальном случае, представляет собой точно то уменьшение сил, которое связано с увеличением расстояния в воображаемом случае.

660. Интегрируя уравнение (21) по t , получаем

$$P + P' = \int R \frac{dP}{dz} dt. \quad (24)$$

Если предположить, что сначала обе величины P и P' равнялись нулю и что магнит (или электромагнит) внезапно подвергся намагничиванию или был принесен из бесконечности, мгновенно изменив значение P' от нуля до P' , то, поскольку интеграл по времени в правой части (24) исчезает, мы должны в первое мгновение на поверхности листа получить $P = -P'$.

Таким образом, система токов, возбуждаемых в листе при мгновенном введении системы, обуславливающей значение P' , такова, что на поверхности листа она полностью нейтрализует магнитное действие этой системы.

Поэтому на поверхности листа и, следовательно, во всех точках на его отрицательной стороне начальная система токов производит действие равное, но противоположное действию магнитной системы на положительной стороне. Мы можем выразить это, сказав, что действие токов эквивалентно действию *изображения* магнитной системы, совпадающей по своему положению с исходной системой, но противоположной ей в отношении намагниченности и электрических токов. Такое изображение называется *отрицательным*.

Действие токов в листе в некоторой его точке на положительной стороне эквивалентно действию положительного изображения магнитной системы на отрицательной стороне листа, причем линии, соединяющие соответствующие точки, пересекаются с листом под прямыми углами.

Магнитное действие в некоторой точке по любую сторону от листа, обусловленное токами в этом листе, можно, следовательно, рассматривать как действие, создаваемое изображением магнитной системы, расположенным по ту сторону от листа, которая противоположна этой точке, причем изображение является положительным или отрицательным в соответствии с тем, находится точка на положительной или на отрицательной стороне листа.

661. Если лист обладает бесконечной проводимостью, то $R=0$, и правая часть уравнения (24) также равна нулю; таким образом, изображение в любой момент времени будет представлять действие текущих в листе токов.

В случае реального листа сопротивление R имеет некоторое конечное значение. Поэтому только что описанное изображение воспроизведет действие токов лишь в первый момент после мгновенного введения магнитной системы. Сразу же вслед за этим токи начнут убывать, и эффект от этого спадания будет в точности воспроизведен, если предположить, что два изображения движутся из своих первоначальных положений с постоянной скоростью R в направлении нормалей, проведенных от листа.

662. Теперь мы подготовлены к исследованию системы токов, индуцированных в листе любой системой (M) магнитов или электромагнитов, расположенных по положительную сторону от листа, когда их положения и мощности меняются произвольным образом.

Пусть P' , как и прежде, будет той функцией, из которой, пользуясь уравнениями (3), (9) и т. д., следует выводить непосредственное действие этой системы, тогда $(dP'/dt) \delta t$ окажется функцией, соответствующей системе, представляемой величиной $(dM/dt) \delta t$. Можно считать, что эта величина, равная приращению M за время δt , сама представляет магнитную систему.

Предположим, что в момент времени t по отрицательную сторону листа сформировалось положительное изображение системы $(dM/dt) \delta t$, тогда магнитное действие в любой точке с положительной стороны листа, обусловленное этим изображением, будет эквивалентно действию токов в листе, возбужденных изменением M в первый момент непосредственно после этого изменения; если изображение, как только оно возникло, начнет двигаться в отрицательном направлении z с постоянной скоростью R , то оно будет продолжать служить эквивалентом токов, индуцированных в листе.

Считая, что в каждый последующий промежуток времени формируется изображение такого рода и что сразу же после своего появления оно начинает удаляться от листа со скоростью R , мы получим дорожку изображений, последнее из которых пребывает еще в стадии формирования, в то время как все остальные двигаются подобно твердому телу, удаляясь от листа со скоростью R .

663. Обозначив через P' функцию, обусловленную произвольным действием магнитной системы, мы можем найти соответствующую функцию P , обусловленную действием токов в листе, при помощи следующего процесса, являющегося просто математическим представлением теории дорожки изображений.

Пусть P_τ есть значение функции P (обусловленной токами в листе) в точке $(x, y, z+R\tau)$ в момент времени $t - \tau$, а P'_τ — значение P' (функции, обусловленной магнитной системой) в точке $(x, y, -(z+R\tau))$ в момент времени $t - \tau$. Тогда

$$\frac{dP_\tau}{d\tau} = R \frac{dP_\tau}{dz} - \frac{dP_\tau}{dt}, \quad (25)$$

и уравнение (21) принимает вид

$$\frac{dP_{\tau}}{d\tau} = \frac{dP'_{\tau}}{dt}. \quad (26)$$

Интегрируя по τ от $\tau=0$ до $\tau=\infty$, для значения функции P получаем

$$P = - \int_0^{\infty} \frac{dP'_{\tau}}{dt} d\tau, \quad (27)$$

откуда, дифференцируя, как это делалось в уравнениях (3), (9) и т. д., находим все свойства токового листа.

664. В качестве примера рассмотренного здесь процесса возьмем случай одиночного магнитного полюса единичной мощности, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью.

Пусть в момент времени t координаты полюса равны

$$\xi = u(t - \tau), \quad \eta = 0, \quad \zeta = c + w\tau.$$

Координаты изображения полюса, сформировавшегося в момент времени $t - \tau$, будут

$$\xi = u(t - \tau), \quad \eta = 0, \quad \zeta = -(c + w(t - \tau) + R\tau),$$

и если r — расстояние от точки (x, y, z) до этого отображения, то

$$r^2 = (x - u(t - \tau))^2 + y^2 + (z + c + w(t - \tau) + R\tau)^2.$$

Чтобы получить потенциал, обусловленный дорожкой изображений, мы должны подсчитать $-\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{r}$.

Если записать $Q^2 = u^2 + (R - w)^2$, то

$$\int_0^{\infty} \frac{d\tau}{r} = -\frac{1}{Q} \log \{Qr + u(x - ut) + (R - w)(z + c + w\tau)\}$$

плюс бесконечно большой член, который, однако, пропадает при дифференцировании по времени; величина r в этом выражении находится из приведенного выше выражения для r при $\tau=0$.

Дифференцируя это выражение по t и полагая $t=0$, получаем магнитный потенциал, обусловленный дорожкой изображений,

$$\Omega = \frac{1}{Q} \frac{Q \frac{w(z+c) - ux}{r} - u^2 - w^2 + Rw}{Qr + ux + (R - w)(z + c)}.$$

Дифференцируя это выражение по x или z , мы находим составляющие (соответственно параллельные x или z) магнитной силы в любой точке, а положив в этих выражениях $x=0$, $z=c$ и $r=2c$, мы получим следующие значения состав-

ляющих силы, действующей на сам движущийся полюс:

$$X = -\frac{1}{4c^2} \frac{u}{Q+R-m} \left\{ 1 + \frac{m}{Q} - \frac{u^2}{Q(Q+R-m)} \right\}, \quad Z = -\frac{1}{4c^2} \left\{ \frac{m}{Q} - \frac{u^2}{Q(Q+R-m)} \right\}.$$

665. Пользуясь этими выражениями, мы должны помнить, что движение, предшествующее рассматриваемому моменту времени, предполагается по своей продолжительности бесконечно долгим. Поэтому не следует брать величину m положительной, ибо в этом случае полюс за конечное время должен был бы пройти сквозь лист.

Если взять скорость m отрицательной и положить $u=0$, то получим

$$X = 0 \quad \text{и} \quad Z = \frac{1}{4c^2} \frac{m}{R+m},$$

т. е. полюс, приближаясь к листу, отталкивается от него.

Положив $m=0$, находим

$$Q^2 = u^2 + R^2, \quad X = -\frac{1}{4c^2} \cdot \frac{uR}{Q(Q+R)}, \quad Z = \frac{1}{4c^2} \cdot \frac{u^2}{Q(Q+R)}.$$

Составляющая X представляет собой силу торможения, действующую на полюс в направлении, противоположном направлению его движения. При заданном значении R сила X максимальна, когда $u=1,27 R$.

Для непроводящего листа $R=\infty$ и $X=0$. Для идеально проводящего листа $R=0$ и $X=0$.

Составляющая Z представляет собой силу отталкивания полюса от листа. С ростом скорости она увеличивается и в пределе достигает значения $1/(4c^2)$, когда скорость становится бесконечной. Это же значение она принимает при $R=0$.

666. Когда магнитный полюс движется вдоль кривой, параллельной листу, вычисления становятся более сложными, но легко видеть, что ближайший участок дорожки изображений создает силу, действующую на полюс в направлении, противоположном направлению его движения. Действие участка дорожки, находящегося непосредственно позади ближайшего участка, аналогично действию магнита с осью, параллельной направлению движения полюса в предшествующий момент времени.

Поскольку ближайший полюс этого магнита одноименен с движущимся полюсом, то сила будет состоять частично из силы отталкивания, а частично из силы, параллельной прежнему направлению движения, но противоположной ему по знаку. Она может быть разложена на тормозящую силу и на силу в направлении вогнутой стороны того пути, по которому движется полюс.

667. Наше рассмотрение не предоставляет нам возможности решать задачу в случае, когда распределение токов не может быть полностью сформировано из-за наличия у проводящего листа разрывов или границ.

Легко видеть, однако, что если полюс двигается параллельно краю листа, то токи на прилегающей к этому краю части листа ослаблены. Следовательно, силы, обусловленные этими токами, будут меньше, и поэтому не только тормозящая сила будет меньше, но, поскольку сила отталкивания минимальна на участках листа, непосредственно прилегающих к его краю, полюс будет притягиваться к краю.

Теория вращающегося диска Араго

668. Араго открыл ², что на магнит, помещенный вблизи вращающегося металлического диска, действует сила, стремящаяся заставить его следовать за движением диска, хотя в случае, когда диск покоится, взаимодействие между ним и магнитом отсутствует. Это действие вращающегося диска сначала относили даже к некоему новому виду намагниченности, пока Фарадей ³ не объяснил его при помощи электрических токов, индуцируемых в диске при его движении в поле магнитной силы.

Для того чтобы определить эти индуцированные токи, а также их воздействие на магнит, мы могли бы воспользоваться результатами, уже полученными нами для покоящегося проводящего листа, находящегося под действием движущегося магнита, и применить приведенный в п. 600 метод рассмотрения электромагнитных уравнений в движущейся системе осей координат. Однако, поскольку этот случай особо важен, мы прибегнем к прямому решению задачи, начав с предположения о том, что полюса магнита достаточно удалены от края диска и можно пренебречь влиянием ограниченности проводящего листа.

Используя те же обозначения, что и в предыдущих параграфах (п. 656—667), для составляющих электрической силы, параллельных соответственно осям x и y , находим

$$\sigma u = \gamma \frac{dy}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \quad \sigma v = -\gamma \frac{dx}{dt} - \frac{d\psi}{dy}, \quad (1)$$

где γ есть составляющая магнитной силы, нормальная к диску.

Если выразить теперь u и v через функцию тока ϕ , то

$$u = d\phi/dy, \quad v = -d\phi/dx, \quad (2)$$

и, если диск вращается с угловой скоростью ω вокруг оси z ,

$$dy/dt = \omega x, \quad dx/dt = -\omega y. \quad (3)$$

Подставляя эти величины в уравнения (1), находим

$$\sigma \frac{d\phi}{dy} = \gamma \omega x - \frac{d\psi}{dx}, \quad (4)$$

$$-\sigma \frac{d\phi}{dx} = \gamma \omega y - \frac{d\psi}{dy}. \quad (5)$$

Умножая (4) на x , а (5) на y , а затем складывая результаты, получаем

$$\sigma \left(x \frac{d\phi}{dy} - y \frac{d\phi}{dx} \right) = \gamma \omega (x^2 + y^2) - \left(x \frac{d\psi}{dx} + y \frac{d\psi}{dy} \right).$$

Умножая (4) на y , а (5) на $-x$ и затем складывая результаты, получаем

$$\sigma \left(x \frac{d\phi}{dx} + y \frac{d\phi}{dy} \right) = x \frac{d\psi}{dy} - y \frac{d\psi}{dx}. \quad (7)$$

Если выразить теперь эти уравнения через r и ϑ , где

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad (8)$$

² *Annales de Chimie et de Physique*, Tome 32, p. 213—223, 1826.

³ *Exp. Res.*, 81.

то они примут вид

$$\sigma \frac{d\varphi}{d\vartheta} = \gamma \omega r^2 - r \frac{d\psi}{dr}, \quad (9)$$

$$\sigma r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\psi}{d\vartheta}. \quad (10)$$

Уравнение (10) удовлетворяется, если мы возьмем произвольную функцию χ от r и ϑ , положив

$$\varphi = d\chi/d\vartheta, \quad (11)$$

$$\psi = \sigma r (d\chi/dr). \quad (12)$$

После подстановки этих выражений в уравнение (9) оно принимает вид

$$\sigma \left(\frac{d^2\chi}{d\vartheta^2} + r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} \right) \right) = \gamma \omega r^2. \quad (13)$$

Разделив (13) на σr^2 и восстанавливая координаты x и y , приходим к уравнению

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} = \frac{\omega}{\sigma} \gamma. \quad (14)$$

Это основополагающее уравнение теории: оно выражает связь между функцией χ и нормальной к диску составляющей магнитной силы γ .

Пусть Q — потенциал в какой-либо точке с положительной стороны диска, обусловленный воображаемой притягивающей материей, распределенной по диску с поверхностной плотностью χ .

На положительной стороне диска

$$dQ/dz = -2\pi\chi. \quad (15)$$

Поэтому левая часть уравнения (14) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} \right). \quad (16)$$

Но поскольку Q удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках, внешних относительно диска, то

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} = -\frac{d^2Q}{dz^2} \quad (17)$$

и уравнение (14) принимает вид

$$\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^3Q}{dz^3} = \omega\gamma. \quad (18)$$

Далее, поскольку Q есть потенциал, обусловленный распределением χ , то потенциал, создаваемый распределением φ или $d\chi/d\vartheta$, будет равен $dQ/d\vartheta$. Отсюда для магнитного потенциала, обусловленного токами в диске, получаем

$$\Omega_1 = -\frac{d^2Q}{d\vartheta dz}, \quad (19)$$

а для нормальной к диску составляющей магнитной силы, создаваемой токами,

$$\gamma_1 = -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{d^3Q}{d\theta dz^2}. \quad (20)$$

Если обозначить через Ω_2 магнитный потенциал, обусловленный внешними магнитами, и записать

$$P' = -\int \Omega_2 dz, \quad (21)$$

то создаваемая этими магнитами нормальная к диску составляющая магнитной силы будет равна

$$\gamma_2 = \frac{d^2P'}{dz^2}. \quad (22)$$

Помня, что $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, мы можем теперь переписать уравнение (18) в виде

$$\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^3Q}{dz^3} - \omega \frac{d^3Q}{d\theta dz^2} = \omega \frac{d^2P'}{dz^2}. \quad (23)$$

Дважды интегрируя по z и вводя вместо $\sigma/(2\pi)$ величину R , получаем

$$\left(R \frac{d}{dz} - \omega \frac{d}{d\theta} \right) Q = \omega P'. \quad (24)$$

Если выразить величины P и Q через расстояние от оси диска r и через две новые переменные ξ и ζ , такие, что

$$2\xi = z + \frac{R}{\omega} \vartheta, \quad 2\zeta = z - \frac{R}{\omega} \vartheta, \quad (25)$$

то уравнение (24) после интегрирования по ζ примет вид

$$Q = \int \frac{\omega}{R} P' d\zeta. \quad (26)$$

669. Вид этого выражения показывает, что магнитное действие токов в диске эквивалентно магнитному действию дорожки изображений магнитной системы, имеющей форму спирали.

Если магнитная система состоит из одиночного магнитного полюса единичной мощности, то спираль будет навита на поверхность цилиндра, проходящую через этот полюс и имеющую общую ось с диском. Начало спирали совпадает с положением оптического изображения полюса в диске. Расстояние между последовательными витками, параллельное оси, будет равно $2\pi(R/\omega)$. Магнитное действие дорожки изображений оказывается таким же, как если бы спираль была всюду намагничена в тангенциальном направлении к цилиндру перпендикулярно его оси с интенсивностью, при которой магнитный момент любого маленького участка спирали численно равен длине его проекции на диск.

Вычислить воздействие на магнитный полюс довольно сложно, однако легко видеть, что оно состоит из: (1) увлекающей силы, параллельной направлению движения диска; (2) силы отталкивания от диска; (3) силы, направленной в сторону оси диска.

Когда полюс находится вблизи края диска, третья из этих сил может быть подавлена силой, направленной в сторону края диска, на что указывалось в п. 667.

Араго наблюдал все эти силы и описал их в *Annales de Chimie* за 1826 г. См. также работу Феличи (Felici) в журнале Тортолини (*Tortolini's Annals*, IV, p. 173 (1853) и V, p. 35), а также работу Джокмана (Jochmann) в *Crelle's Journal*, XIII, p. 158 и 329 и *Pogg. Ann.*, XXII, p. 214 (1864). В последней работе приведены уравнения, необходимые для отыскания самоиндукции токов, но эта часть воздействия при получении последующих результатов опущена. Описанный здесь метод изображений был опубликован в *Proceedings of the Royal Society* for Feb. 15, 1872.

Сферический токовый лист

670. Пусть φ есть функция тока в какой-либо точке Q сферического токового листа, а P — потенциал, создаваемый в данной точке слоем воображаемой материи, распределенной по сфере с поверхностной плотностью φ . Требуется отыскать магнитный потенциал и вектор-потенциал токового слоя, выраженные через P .

Пусть a — радиус сферы, r — расстояние от центра до данной точки, а ρ — обратное расстояние между данной точкой и точкой на сфере Q , в которой функция тока равна φ [рис. 39].

Действие токового листа в какой-либо точке вне его вещества совпадает с действием магнитной оболочки, мощность которой в любой точке численно равна функции тока.

Взаимный потенциал магнитной оболочки и единичного полюса, помещенного в точку P , согласно п. 410, равен.

$$\Omega = \iint \varphi \frac{d\rho}{da} dS.$$

Так как ρ является однородной функцией степени -1 по r и по a , то

$$a \frac{d\rho}{da} + r \frac{d\rho}{dr} = -\rho, \text{ или } \frac{d\rho}{da} = -\frac{1}{a} \frac{d}{dr}(\rho r),$$

и

$$\Omega = - \iint \frac{\varphi}{a} \frac{d}{dr}(\rho r) dS.$$

Поскольку на поверхности интегрирования величины r и a постоянны, то

$$\Omega = -\frac{1}{a} \frac{d}{dr} \left(r \iint \varphi \rho dS \right).$$

Но поскольку P есть потенциал, обусловленный слоем воображаемой материи с поверхностной плотностью φ , то $P = \iint \varphi \rho dS$, поэтому магнитный потенциал токового листа Ω может быть выражен через P в виде

$$\Omega = -\frac{1}{a} \frac{d}{dr} (Pr).$$

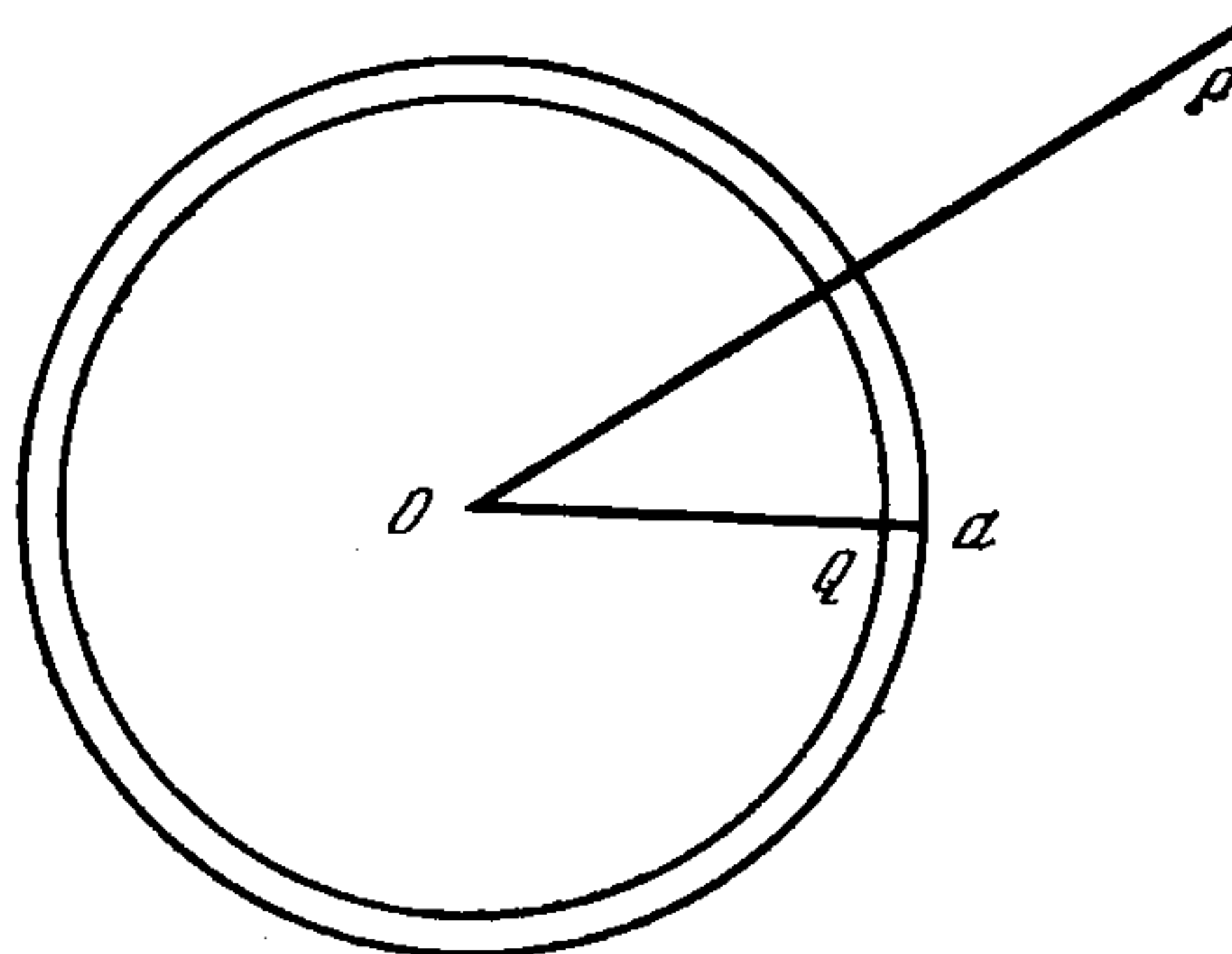


Рис. 39

671. Из приведенного в п. 416 выражения мы можем определить величину x -составляющей вектор-потенциала F :

$$F = \iint \varphi \left(m \frac{dp}{d\xi} - n \frac{dp}{d\eta} \right) dS,$$

где ξ, η, ζ — координаты элемента dS , а l, m, n — направляющие косинусы нормали.

Так как токовый лист имеет форму сферы, направляющие косинусы нормали равны $l = \xi/a, m = \eta/a, n = \zeta/a$.

$$\text{Но } \frac{dp}{d\xi} = (z - \zeta) \rho^3 = -\frac{dp}{dz} \text{ и } \frac{dp}{d\eta} = (y - \eta) \rho^3 = -\frac{dp}{dy},$$

так что

$$\begin{aligned} m \frac{dp}{d\xi} - n \frac{dp}{d\eta} &= \{ \eta (z - \zeta) - \zeta (y - \eta) \} \frac{\rho^3}{a}, \\ &= \{ z (\eta - y) - y (\zeta - z) \} \frac{\rho^3}{a} = \frac{z}{a} \frac{dp}{dy} - \frac{y}{a} \frac{dp}{dz}. \end{aligned}$$

Умножая последнее выражение на φdS и интегрируя по поверхности сферы, находим

$$F = \frac{z}{a} \frac{dP}{dy} - \frac{y}{a} \frac{dP}{dz}.$$

Аналогично

$$G = \frac{x}{a} \frac{dP}{dz} - \frac{z}{a} \frac{dP}{dx}, \quad H = \frac{y}{a} \frac{dP}{dx} - \frac{x}{a} \frac{dP}{dy}.$$

Вектор \mathfrak{A} , составляющими которого являются F, G, H , очевидно, перпендикулярен к радиус-вектору r и вектору, компоненты которого равны $dP/dx, dP/dy, dP/dz$. Если мы найдем линии пересечения сферической поверхности радиуса r с семейством эквипотенциальных поверхностей, соответствующих значениям P , меняющимся по арифметической прогрессии, то направление этих линий определит направление вектора \mathfrak{A} , а их плотность — величину этого вектора.

На языке кватернионов

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{a} V \cdot \rho \nabla P.$$

672. Если предположить, что внутри сферы величина P равна

$$P = A \left(\frac{r}{a} \right)^i Y_i,$$

где Y_i есть сферическая гармоника порядка i , то вне сферы

$$P' = A \left(\frac{a}{r} \right)^{i+1} Y_i.$$

Функция тока φ , поскольку $\left(\frac{dP}{dr} - \frac{dP'}{dr} \right)_{r=a} = 4\pi\varphi$, определяется равенством

$$\varphi = \frac{2i+1}{4\pi} \frac{1}{a} A Y_i.$$

Магнитный потенциал внутри сферы равен

$$\Omega = - (i + 1) \frac{1}{a} A \left(\frac{r}{a} \right)^i Y_i,$$

а вне сферы

$$\Omega' = i \frac{1}{a} A \left(\frac{a}{r} \right)^{i+1} Y_i.$$

Пусть, например, при помощи провода, свернутого в форме сферической оболочки, необходимо создать внутри этой оболочки однородную магнитную силу M . В этом случае магнитный потенциал оболочки представляется объемной гармоникой первого порядка и имеет вид $\Omega = -M r \cos \vartheta$, где M есть магнитная сила. Отсюда

$$A = \frac{1}{2} a^2 M \text{ и } \varphi = \frac{3}{8\pi} M a \cos \vartheta.$$

Функция тока, таким образом, пропорциональна расстоянию от экваториальной плоскости сферы, и поэтому число витков провода между любыми двумя малыми кругами должно быть пропорционально расстоянию между плоскостями этих кругов.

Если N есть полное число витков, а γ — сила тока в каждом из них, то $\varphi = \frac{1}{2} N \gamma \cos \vartheta$.

Отсюда магнитная сила внутри катушки равна $M = \frac{4\pi}{3} \frac{N\gamma}{a}$.

673. Теперь определим способ намотки провода, приводящий к созданию внутри сферы магнитного потенциала в виде объемной зональной гармоники второго порядка:

$$\Omega = -3 \frac{1}{a} A \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right).$$

Здесь

$$\varphi = \frac{5}{4\pi} \frac{A}{a} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right).$$

Если полное число витков равно N , то число витков, укладываемых между полюсом и полярным углом ϑ , будет $\frac{1}{2} N \sin^2 \vartheta$.

Плотнее всего витки расположены на широте 45° . На экваторе направление намотки меняется, и в другой полусфере витки имеют противоположное направление.

Пусть γ есть сила тока в проводе, тогда внутри оболочки

$$\Omega = - \frac{4\pi}{5} N \gamma \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right).$$

Рассмотрим теперь проводник в форме плоской замкнутой кривой, расположенный в произвольном месте внутри оболочки в плоскости, перпендикулярной ее оси. Для определения коэффициента индукции проводника мы должны найти поверхностный интеграл от $-d\Omega/dz$ по плоской площадке, ограниченной этой кривой, положив $\gamma=1$.

В этом случае

$$\Omega = -\frac{4\pi}{5a^2} N \left\{ z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right\} \text{ и } -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{8\pi}{5a^2} N \cdot z.$$

Следовательно, если S есть площадь, ограниченная замкнутой кривой, то ее коэффициент индукции равен $M = \frac{8\pi}{5a^2} NSz$.

Если ток в этом проводнике равен γ' , то, согласно п. 583, должна существовать сила Z , действующая на проводник в направлении z , равная

$$Z = \gamma\gamma' \frac{dM}{dz} = \frac{8\pi}{5a^2} NS\gamma\gamma',$$

и, поскольку это выражение не зависит от x, y, z , сила оказывается одной и той же, в какую бы часть оболочки ни был помещен данный контур.

674. Метод, предложенный Пуассоном и описанный в п. 437, может быть применен к токовым листам, если вместо тела, которое предполагается однородно намагниченным в z -направлении с интенсивностью I , взять токовый лист, имеющий форму поверхности тела и обладающий функцией тока, равной

$$\varphi = Iz. \quad (1)$$

Токи, текущие по листу, расположены в плоскости, параллельной плоскости xy ; сила тока, циркулирующего по срезу толщиной dz , равна $I dz$.

В любой точке вне токового листа магнитный потенциал, обусловленный им, равен

$$\Omega = -I (dV/dz), \quad (2)$$

где V — потенциал, создаваемый листом с единичной поверхностной плотностью.

В произвольной точке внутри оболочки потенциал равен

$$\Omega = -4\pi Iz - I (dV/dz). \quad (3)$$

Составляющие вектор-потенциала равны

$$F = I (dV/dy), \quad G = -I (dV/dx), \quad H = 0. \quad (4)$$

Эти результаты могут быть применены к различным случаям, возникающим на практике.

675. (1). Плоский электрический контур произвольной формы.

Пусть V есть потенциал, создаваемый плоским листом произвольной формы, имеющим единичную поверхностную плотность; тогда, если этот лист заменить либо на магнитную оболочку мощности I , либо на электрический ток силы I , текущий по ее границе, величины Ω и F, G, H будут иметь значения, приведенные выше.

(2). Для сплошного шара радиуса a

$$V = \frac{4\pi}{3} \frac{a^3}{r}, \quad \text{когда } r \text{ больше } a, \quad (5)$$

и

$$V = \frac{2\pi}{3} (3a^2 - r^2), \quad \text{когда } r \text{ меньше } a, \quad (6)$$

Следовательно, если такой шар намагничен параллельно направлению z с интенсивностью I , то магнитный потенциал равен

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} I \frac{a^3}{r^3} z \quad \text{вне шара} \quad (7)$$

и

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} I z \quad \text{внутри шара.} \quad (8)$$

Если вместо намагничивания обмотать шар эквидистантно расположенными круговыми витками с током так, чтобы суммарная сила тока между двумя малыми окружностями, плоскости которых находятся на единичном расстоянии друг от друга, была I , то вне шара значения Ω остается прежним, а внутри станет равным

$$\Omega = -\frac{8\pi}{3} I z. \quad (9)$$

Этот случай уже обсуждался в п. 672.

(3). Случай эллипсоида, однородно намагниченного параллельно некоторой заданной линии, тоже уже обсуждался в п. 437.

Если эллипсоид обмотан проводом по параллельным и эквидистантным плоскостям, то магнитная сила внутри него будет однородной.

(4). Цилиндрический магнит или соленоид

676. Если тело представляет собой цилиндр с сечением произвольной формы, ограниченный плоскостями, перпендикулярными его образующим, и если V_1 является потенциалом, создаваемым в точке (x, y, z) плоской площадкой, совпадающей с положительным торцом соленоида и несущей единичную поверхностную плотность, а V_2 — потенциалом, создаваемым в той же самой точке плоской площадкой, совпадающей с отрицательным торцом соленоида и тоже несущей единичную поверхностную плотность, то потенциал цилиндра, однородно и продольно намагниченного с единичной интенсивностью, создаваемый в точке (x, y, z) , будет равен

$$\Omega = V_1 - V_2. \quad (10)$$

Если вместо намагниченного цилиндра взять цилиндр, равномерно обмотанный проводом с n витками на единицу его длины и пустить по проводу ток γ , то магнитный потенциал вне соленоида будет, как и прежде, равен

$$\Omega = n\gamma (V_1 - V_2), \quad (11)$$

а внутри области, ограниченной соленоидом и его плоскими торцами,

$$\Omega = n\gamma (-4\pi z + V_1 - V_2). \quad (12)$$

Магнитный потенциал терпит разрыв на плоских торцах соленоида в то время, когда магнитная сила непрерывна.

Если расстояния r_1 и r_2 от центров инерции соответственно положительного и отрицательного плоских торцов соленоида до точки (x, y, z) очень велики по

сравнению с поперечными размерами соленоида, то можно написать

$$V_1 = A/r_1, \quad V_2 = A/r_2, \quad (13)$$

где A — площадь любого из этих сечений.

Следовательно, магнитная сила вне соленоида очень мала, а сила внутри соленоида приближается к силе, направленной параллельно оси в положительном направлении и равной $4\pi n\gamma$.

Если сечение соленоида представляет собой круг радиуса a , то значения V_1 и V_2 могут быть выражены через ряды по сферическим гармоникам, приведенным в книге Томсона и Тэта «*Натуральная философия*»⁵:

$$V = 2\pi \left\{ -rP_1 + a + \frac{1}{2} \frac{r^2}{a} P_2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{r^4}{a^3} P_4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{r^6}{a^5} P_6 - \dots \right\} \text{ при } r < a, \quad (14)$$

$$V = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{a^2}{r} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{a^4}{r^3} P_2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{a^6}{r^5} P_4 - \dots \right\} \text{ при } r > a. \quad (15)$$

В этих выражениях величина r есть расстояние до точки (x, y, z) от центра одного из круговых торцов соленоида; зональные гармоники P_1, P_2, \dots являются гармониками, соответствующими углу ϑ , который составляет с осью цилиндра радиус-вектор r .

Производная по z от первого из этих выражений терпит скачок при $\vartheta = \pi/2$; однако мы должны помнить, что внутри соленоида к магнитной силе, выведенной из этого выражения, следует добавить продольную силу $4\pi n\gamma$.

677. Теперь рассмотрим соленоид настолько длинный, что в изучаемой нами области пространства можно пренебречь членами, зависящими от расстояния до концов соленоида.

Поток магнитной индукции сквозь любую замкнутую кривую, проведенную в пределах соленоида, равен $4\pi n\gamma A'$, где A' площадь, ограничиваемая проекцией этой кривой на плоскость, нормальную к оси соленоида.

Если замкнутая кривая расположена вне соленоида, но окружает его, то поток магнитной индукции сквозь кривую равен $4\pi n\gamma A$, где A — площадь сечения соленоида. Если же замкнутая кривая не окружает соленоид, то поток магнитной индукции сквозь нее равен нулю.

Коэффициент индукции между соленоидом и проводом, n' раз обмотанным вокруг соленоида, равен

$$M = 4\pi n n' A. \quad (16)$$

Предполагая, что эти витки совпадают с n витками соленоида, мы найдем, что коэффициент самоиндукции на единичный элемент длины соленоида, взятый на достаточном удалении от его краев, равен

$$L = 4\pi n^2 A. \quad (17)$$

Вблизи концов соленоида необходимо принять во внимание члены, зависящие от воображаемого распределения магнетизма на плоских торцах соленоида. Эффект, обусловленный этими членами, состоит в том, что коэффициент индукции между соленоидом и окружающим его контуром становится меньше величины

⁵ Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, Art. 546, Ex. II.

$4\pi nA$; последняя относится к контуру, окружающему очень длинный соленоид и расположенному на большом расстоянии от обоих его концов.

Возьмем случай двух круговых коаксиальных соленоидов одинаковой длины l . Пусть радиус внешнего соленоида равен c_1 , и пусть провод намотан так, что на единицу длины соленоида приходится n_1 витков. Пусть радиус внутреннего соленоида равен c_2 , а число витков на единицу длины равно n_2 . Тогда коэффициент индукции между этими соленоидами, если пренебречь влиянием концов, будет равен

$$M = Gg, \quad (18)$$

где

$$G = 4\pi n_1 \quad (19)$$

и

$$g = \pi c_2^2 l n_2. \quad (20)$$

678. Для того чтобы определить влияние положительного конца соленоида, мы должны вычислить коэффициент индукции внешнего соленоида, обусловленный действием круглого диска, являющегося торцом внутреннего соленоида. Для этой цели возьмем второе выражение для V , заданное соотношением (15), и продифференцируем его по r . Это даст магнитную силу в радиальном направлении. Затем, умножив это выражение на $2\pi r^2 d\mu$, проинтегрируем его по μ от $\mu=1$ до $\mu=z/\sqrt{z^2+c_1^2}$. Это дает коэффициент индукции по отношению к единичному витку внешнего соленоида, расположенному на расстоянии z от положительного конца. Далее, умножив это выражение на dz , проинтегрируем его от $z=l$ до $z=0$. И, наконец, умножив полученный результат на $n_1 n_2$, найдем вклад одного из концов в общий эффект уменьшения коэффициента индукции.

Таким образом, мы находим коэффициент взаимной индукции M между двумя цилиндрами:

$$M = 4\pi^2 n_1 n_2 c_2^2 (l - 2c_1 \alpha), \quad (21)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{c_1 + l - r}{c_1} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(1 - \frac{c_1^3}{r^3}\right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} \frac{c_2^4}{c_1^4} \left(-\frac{1}{2} - 2\frac{c_1^5}{r^5} + \frac{5}{2} \frac{c_1^7}{r^7}\right) + \dots, \quad (22)$$

где для краткости величина $\sqrt{l^2 + c_1^2}$ обозначена через r .

Как ясно отсюда, при вычислении взаимной индукции двух коаксиальных соленоидов мы должны использовать в выражении (20) вместо истинной длины l некоторую подправленную длину $l - 2c_1 \alpha$, при которой соленоиды на каждом из концов предполагаются укороченными на величину αc_1 . Если длина соленоида значительно превышает его внешний радиус, то

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{128} \frac{c_2^4}{c_1^4} + \dots \quad (23)$$

679. Если соленоид состоит из многих слоев, образованных проводом такого диаметра, что в единичном интервале длины укладывается n слоев, то число слоев внутри dr равно ndr , и мы имеем

$$G = 4\pi \int n^2 dr \quad \text{и} \quad g = \pi l \int n^2 r^2 dr. \quad (24)$$

Если толщина провода постоянна, а индукция имеет место между внешней катушкой, наружный и внутренний радиусы которой равны x и y , и внутренней катушкой с наружным и внутренним радиусами y и z , то в пренебрежении влиянием концов

$$Gg = \frac{4}{3} \pi^2 l n_1^2 n_2^2 (x - y) (y^3 - z^3). \quad (25)$$

Чтобы эта величина была максимальной при заданных x и z и переменном y , необходимо

$$x = \frac{4}{3} y - \frac{1}{3} \frac{z^3}{y^2}. \quad (26)$$

Данное уравнение устанавливает наиболее выгодное соотношение между толщинами первичной и вторичной обмоток в индукционных машинах, не содержащих железных сердечников.

При наличии железного сердечника радиуса z величина G остается прежней, но

$$g = \pi l \int n^2 (r^2 + 4\pi k z^2) dr, \quad (27)$$

$$= \pi l n^2 \left(\frac{y^3 - z^3}{3} + 4\pi k z^2 (y - z) \right). \quad (28)$$

Если значение y задано, то величина z , соответствующая максимуму g , равна

$$z = \frac{2}{3} y \frac{12\pi k}{12\pi k + 1}. \quad (29)$$

Когда число k велико, как в случае железа, то приближенно $z = 2y/3$.

Если теперь зафиксировать значение x , а y и z сделать переменными, мы получим, что при больших k максимум Gg достигается, если

$$x : y : z :: 4 : 3 : 2. \quad (30)$$

Коэффициент самоиндукции на единицу длины длинного соленоида, внешние и внутренние радиусы которого равны x и y и который содержит длинный железный сердечник радиуса z , равен

$$\begin{aligned} & 4\pi \int_y^x \left\{ \pi \int_\rho^x n^2 (\rho^2 + 4\pi k z^2) dr + \pi \int_y^\rho n^2 (r^2 + 4\pi k z^2) dr \right\} n^2 d\rho, \\ & = \frac{2}{3} \pi^2 n^4 (x - y)^2 (x^2 + 2xy + 3y^2 + 24\pi k z^2). \end{aligned} \quad (31)$$

680. До сих пор мы считали провод однородным по толщине. Теперь же мы установим закон, по которому должна изменяться толщина провода в различных слоях, чтобы при заданном сопротивлении первичной и вторичной обмотки величина коэффициента взаимной индукции могла достигать максимума.

Пусть сопротивление на единицу длины провода, n витков которого укладываются в единице длины соленоида, равно ρn^2 .

Сопротивление всего соленоида равно

$$R = 2\pi \rho l \int n^4 r dr. \quad (32)$$

При заданном R величина G имеет максимум при условии

$$\frac{dG}{dr} = C \frac{dR}{dr},$$

где C — некоторая постоянная.

Отсюда следует, что величина n^2 пропорциональна $1/r$, или что толщина провода наружной катушки должна быть пропорциональна корню квадратному из радиуса слоя.

Для того чтобы при заданном значении R величина g была максимальной, нужно

$$n^2 = C \left(r + \frac{4\pi k z^2}{r} \right). \quad (33)$$

Следовательно, при отсутствии железного сердечника толщина провода внутренней катушки должна быть обратно пропорциональна корню квадратному из радиуса слоя, а при наличии железного сердечника, обладающего высокой восприимчивостью к намагничиванию, закон изменения толщины провода был бы более близок к прямой пропорциональности корню квадратному из радиуса слоя.

Бесконечный соленоид

681. Если объемное тело образовано вращением плоской площадки A вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но ее не пересекающей, то оно будет иметь форму кольца. Пусть такое кольцо обмотано проводом, витки которого располагаются в плоскости, проходящей через ось кольца; тогда функция тока проволочного слоя будет равна $\varphi = (1/2\pi)n\gamma\vartheta$, где n — полное число витков, а ϑ — азимутальный угол, отсчитываемый вокруг оси кольца.

Если Ω — магнитный потенциал внутри кольца, а Ω' — вне его, то

$$\Omega - \Omega' = -4\pi\varphi + C = -2n\gamma\vartheta + C.$$

Снаружи кольца потенциал Ω' должен удовлетворять уравнению Лапласа и исчезать на бесконечном расстоянии. Как следует из природы самой задачи, этот потенциал должен быть функцией только угла ϑ . А единственным значением Ω' , удовлетворяющим этим условиям, является ноль. Следовательно, $\Omega' = 0$, $\Omega = -2n\gamma\vartheta + C$.

Магнитная сила в любой точке, находящейся внутри кольца, перпендикулярна плоскости, проходящей через ось, и равна величине $2n\gamma/r$, где r — расстояние от оси. Вне кольца магнитная сила отсутствует.

Если форма замкнутой кривой задана координатами текущей точки z , r и ϑ , как функция ее расстояния s от некоторой фиксированной точки, то поток магнитной индукции сквозь эту замкнутую кривую можно найти интегрированием вдоль нее вектор-потенциала, составляющие которого равны

$$F = 2n\gamma xz/r^2, \quad G = 2n\gamma yz/r^2, \quad H = 0.$$

Таким образом, мы находим

$$2n\gamma \int_0^s \frac{z}{r} \frac{dr}{ds} ds,$$

интеграл берется вдоль кривой при условии, что она целиком лежит внутри коль-

ца. Если же кривая целиком находится вне кольца, но охватывает его, то поток магнитной индукции сквозь кривую равен

$$2n\gamma \int_0^{s'} \frac{z'}{r'} \frac{dr'}{ds'} ds' = 2n\gamma a,$$

где a есть «линейная» величина $\int_0^{s'} \frac{z'}{r'} \frac{dr'}{ds'} ds'$, а штрихованные координаты относятся не к замкнутой кривой, а к одиночному витку соленоида.

Таким образом, поток магнитной индукции сквозь любую замкнутую кривую, охватывающую кольцо, всюду одинаков и равен $2n\gamma a$. Если же замкнутая кривая не охватывает кольцо, поток магнитной индукции сквозь нее равен нулю.

Пусть второй провод обмотан вокруг кольца произвольным образом и, не обязательно соприкасаясь с ним, охватывает его n' раз. Поток индукции сквозь этот контур равен $2nn'\gamma a$, и, следовательно, коэффициент индукции M одной катушки на другую равен $M=2nn'a$.

Поскольку это выражение совершенно не зависит от конкретной формы или положения вторичного контура, то при протекании токов через проводники между ними не будет действовать никакой механической силы. Совмещая вторичный провод с первичным, мы получаем для коэффициента самоиндукции кольцевой катушки выражение $L=2n^2a$.

ГЛАВА XIII

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ТОКИ

Цилиндрические проводники

682. Существует очень важный класс электрических систем, где токи текут по круглым проводам почти однородного сечения, причем провода либо прямые, либо такие, что радиус кривизны оси провода очень велик по сравнению с радиусом поперечного сечения провода. Для того чтобы подготовиться к математическому исследованию таких систем, мы начнем со случая, когда контур состоит из двух очень протяженных параллельных проводников и двух небольших кусков, соединяющих их концы. Мы сосредоточим свое внимание на части контура, удаленной от концов проводников настолько, что никаких ощутимых изменений в распределении силы не вносит тот факт, что провода не являются бесконечно длинными.

Выберем ось z параллельной направлению проводников; тогда в рассматриваемой области поля из-за симметрии системы все будет зависеть только от величины H — составляющей вектор-потенциала, параллельной z .

Составляющие магнитной индукции, согласно уравнению (A), равны

$$a=dH/dy, \tag{1}$$

$$b=-dH/dx, \quad c=0. \tag{2}$$

Для общности мы будем предполагать, что коэффициент магнитной индукции равен μ , так что $a = \mu\alpha$, $b = \mu\beta$, где α и β — составляющие магнитной силы.

Уравнения (E) для электрических токов (п. 607) дают

$$u = 0, \quad v = 0, \quad 4\pi\omega = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}. \quad (3)$$

683. Если ток является функцией расстояния r от оси z , то, написав

$$x = r \cos \vartheta \quad \text{и} \quad y = r \sin \vartheta \quad (4)$$

и обозначив магнитную силу через β , в направлении, в котором ϑ , отсчитывается перпендикулярно плоскости, проходящей через ось z , мы будем иметь

$$4\pi\omega = \frac{d\beta}{dr} + \frac{1}{r}\beta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(\beta r). \quad (5)$$

Если C представляет собой полный ток, протекающий через сечение, ограниченное окружностью радиуса r , которая лежит в плоскости xy и имеет центр в начале координат, то

$$C = \int_0^r 2\pi r \omega dr = \frac{1}{2} \beta r. \quad (6)$$

Таким образом, отсюда видно, что магнитная сила в некоторой заданной точке, обусловленная токами, текущими в цилиндрических слоях с общей осью z , зависит только от полной силы тока, протекающего через слои, лежащие между данной точкой и этой осью, и не зависит от распределения тока по различным цилиндрическим слоям.

Пусть, например, проводник представляет собой однородный провод радиуса a , а полный ток через него равен C , тогда при равномерном распределении тока по всем частям сечения его плотность ω будет постоянной, причем

$$C = \pi\omega a^2. \quad (7)$$

Ток, протекающий через круговое сечение радиуса r при значениях r меньших a , равен $C' = \pi\omega r^2$. Поэтому в любой точке, расположенной внутри провода,

$$\beta = 2C'/r = 2Cr/a^2. \quad (8)$$

Вне провода

$$\beta = 2C/r. \quad (9)$$

В самом веществе провода магнитный потенциал отсутствует, так как внутри проводника, несущего электрический ток, магнитная сила не удовлетворяет условиям существования потенциала.

Вне провода магнитный потенциал равен

$$\Omega = -2C\vartheta. \quad (10)$$

Предположим, что вместо провода взят проводник в виде металлической трубки, внешний и внутренний радиусы которой соответственно равны a_1 и a_2 , тогда для тока C , протекающего по такому трубчатому проводнику, имеем

$$C = \pi\omega (a_1^2 - a_2^2). \quad (11)$$

Внутри трубки магнитная сила равна нулю. В металле трубки, где радиус r изменяется от a_1 до a_2 ,

$$\beta = 2C \frac{1}{a_1^2 - a_2^2} \left(r - \frac{a_2^2}{r} \right), \quad (12)$$

а вне трубки величина

$$\beta = 2C/r, \quad (13)$$

т. е. остается той же самой, что и при протекании тока по сплошному проводу
684. Магнитная индукция в любой точке равна $b = \mu\beta$, и поскольку, согласно уравнению (2),

$$b = -dH/dr, \quad (14)$$

то

$$H = -\int \mu\beta dr. \quad (15)$$

Значение H вне трубки равно

$$A - 2\mu_0 C \ln r, \quad (16)$$

где μ_0 есть значение μ в области, лежащей вне трубки, A — постоянная, зависящая от места подключения замыкающей цепь возвратного тока.

Внутри вещества трубки

$$H = A - 2\mu_0 C \ln a_1 + \frac{\mu C}{a_1^2 - a_2^2} (a_1^2 - r^2 + 2a_2^2 \ln \frac{r}{a_1}). \quad (17)$$

В области, расположенной внутри трубки, величина H постоянна и равна

$$H = A - 2\mu_0 C \ln a_1 + \mu C \left(1 + \frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \ln \frac{a_2}{a_1} \right). \quad (18)$$

685. Пусть контур замыкается обратным током, текущим по трубке или по проводу, параллельному первому, прямому току, причем оси двух токов расположены на расстоянии b . Чтобы определить кинетическую энергию системы, мы должны вычислить интеграл

$$T = \frac{1}{2} \iiint H\omega dx dy dz. \quad (19)$$

Если мы ограничимся рассмотрением только той части системы, которая находится между двумя плоскостями, перпендикулярными осям проводников и разнесенными на расстояние l одна от другой, то это выражение окажется таким:

$$T = \frac{1}{2} l \iint H\omega dx dy. \quad (20)$$

Если пометить штрихами величины, относящиеся к обратному току, то мы можем записать это так:

$$\frac{2T}{l} = \iint H\omega' dx' dy' + \iint H'\omega dx dy + \iint H\omega dx dy + \iint H'\omega' dx' dy'. \quad (21)$$

Поскольку действие тока на любую точку вне трубки такое же, как если бы такой же ток был сосредоточен на оси трубки, то среднее значение H по сечению

обратного тока равно $A - 2\mu_0 C \ln b$, а среднее значение H' по сечению прямого тока равно

$$A' - 2\mu_0 C' \ln b.$$

Поэтому в выражении для T первые два члена могут быть записаны:

$$AC' - 2\mu_0 CC' \ln b, \quad A'C - 2\mu_0 CC' \ln b.$$

Интегрируя два последних члена обычным путем, складывая результаты и помня, что $C + C' = 0$, мы получим величину кинетической энергии T . Записав ее как $LC^2/2$, где L — коэффициент самоиндукции системы двух проводников, для величины L системы длиной l найдем

$$\frac{L}{l} = 2\mu_0 \ln \frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2} \mu \left[\frac{a_1^2 - 3a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} + \frac{4a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \ln \frac{a_1}{a_2} \right] + \frac{1}{2} \mu' \left[\frac{a_1'^2 - 3a_2'^2}{a_1'^2 - a_2'^2} + \frac{4a_2'^4}{(a_1'^2 - a_2'^2)^2} \ln \frac{a_1'}{a_2'} \right]. \quad (22)$$

Если проводники представляют собой сплошные провода, то a_2 и a_2' равны нулю и

$$\frac{L}{l} = 2\mu_0 \ln \frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2} (\mu + \mu'). \quad (23)$$

Только в случае железных проводов при вычислении их самоиндукции необходимо принимать во внимание магнитную индукцию. В остальных случаях мы можем положить μ_0 , μ и μ' равными единице. Чем меньше радиусы проводов и чем больше расстояния между ними, тем больше величина их самоиндукции.

*Как найти силу отталкивания X
между двумя участками проводов*

686. Согласно п. 680, для силы, стремящейся увеличить b , мы получаем

$$X = \frac{1}{2} \frac{dL}{db} C^2 = 2\mu_0 \frac{l}{b} C^2, \quad (24)$$

что при $\mu_0 = 1$, как это имеет место для воздуха, согласуется с формулой Ампера.

687. Если длина проводов значительно превышает расстояние между ними, мы можем использовать коэффициент самоиндукции для отыскания натяжения проводов, возникающего под действием тока.

Обозначив это натяжение через Z , имеем

$$Z = \frac{1}{2} \frac{dL}{dl} C^2 = C^2 \left\{ \mu_0 \ln \frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{\mu + \mu'}{4} \right\}. \quad (25)$$

В одном из экспериментов Ампера параллельные проводники состоят из двух корытцев с ртутью, соединенных друг с другом с помощью провода в виде плавающего мостика. Ток вводится с конца одного из корытцев и течет вдоль него до тех пор, пока не достигнет одного из концов плавающего провода, затем по плавающему мостику он переходит во второе корытце и по нему возвращается обрат-

но; плавающий мостик, двигаясь вдоль корытца, удлиняет тем самым участок ртути, по которому течет ток [рис. 40].

Профессор Тэт упростил электрические условия этого опыта, заменив провод плавающим стеклянным сифоном, заполненным ртутью, чтобы ток на всем своем пути тек по ртути.

Этот опыт иногда приводят в качестве доказательства того, что два элемента тока, текущего вдоль одной и той же прямой линии, отталкиваются и что тем самым формула Ампера, указывающая на такое отталкивание между коллинеарными элементами, более правильна, чем формула Грассмана (Grassmann), которая

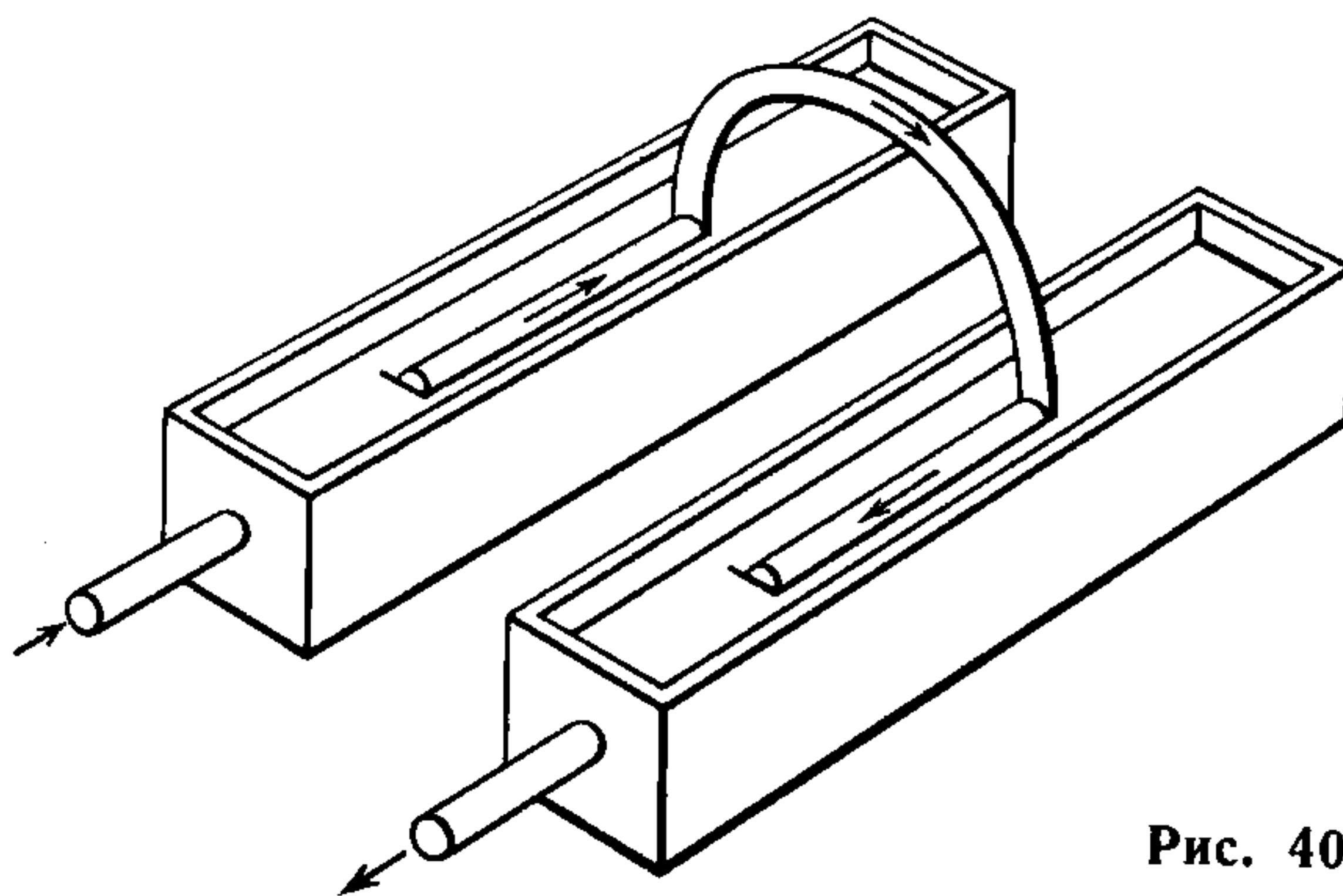


Рис. 40

не дает никакого действия между элементами, расположенными вдоль одной и той же прямой линии; п. 526.

Однако ясно, что, поскольку и формула Ампера, и формула Грассмана для замкнутых контуров приводят к одинаковым результатам и поскольку на опыте мы имеем дело только с замкнутыми контурами, никакие экспериментальные данные не могут создать преимуществ ни одной из этих теорий перед другой.

В самом деле, как уже показано, обе формулы приводят к одному и тому же значению силы отталкивания, из которого следует, что расстояние b между двумя параллельными проводниками является важным параметром.

Когда длина проводников не очень сильно превышает расстояние между ними, выражение для величины L несколько усложняется.

688. По мере уменьшения расстояния между проводниками уменьшается и величина L . Предел этого уменьшения наступает, когда проводники приходят в контакт, т. е. $b = a_1 + a_1'$. В этом случае, если $\mu_0 = \mu = \mu' = 1$,

$$L = 2l \left\{ \ln \frac{(a_1 + a_1')^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2} \right\}. \quad (26)$$

Эта величина минимальна, если $a_1 = a_1'$; тогда

$$L = 2l [\ln 4 + (1/2)] = 2l (1,8863) = 3,7726l. \quad (27)$$

Это является наименьшим значением величины самоиндукции сдвоенного круглого провода общей длиной $2l$.

Так как обе части провода должны быть изолированы друг от друга, то фактически величина самоиндукции никогда не достигает этого предельного значения. Используя широкие плоские металлические полосы вместо круглых проводов, коэффициент самоиндукции можно уменьшать сколько угодно.

Об электродвижущей силе, необходимой для создания тока переменной плотности вдоль цилиндрического проводника

689. Когда ток в проводе имеет переменную плотность, то электродвижущая сила, возникающая в результате индукции тока на самого себя, различна на разных участках сечения провода, являясь в общем случае функцией как расстояния от оси провода, так и времени. Если бы мы предположили, что цилиндрический проводник состоит из пучка проводов, образующих один и тот же контур, и ток задается однородным в любой части сечения пучка, то метод вычисления, использованный выше, был бы применим строго. Если, однако, мы рассмотрим цилиндрический проводник как сплошное тело, внутри которого токи, подчиняясь действию электродвижущих сил, могут течь беспрепятственно, то плотность тока не будет одинаковой на различных расстояниях от оси цилиндра и сами электродвижущие силы будут зависеть от распределения тока в различных цилиндрических слоях провода.

В этом случае вектор-потенциал H , плотность тока ω и электродвижущую напряженность в любой точке следует рассматривать как функцию времени и расстояния от оси провода.

Полный ток S , протекающий через сечение провода и полную электродвижущую силу E , действующую вдоль контура, следует рассматривать, как переменные, связь между которыми мы и должны установить.

Предположим, что величина H равна

$$H = S + T_0 + T_1 r^2 + \dots + T_n r^{2n} + \dots, \quad (1)$$

где S, T_0, T_1, \dots — функции времени.

Тогда из уравнения

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} = -4\pi\omega \quad (2)$$

мы находим

$$-\pi\omega = T_1 + \dots + n^2 T_n r^{2n-2} + \dots \quad (3)$$

Если удельное сопротивление вещества (на единицу объема) обозначить через ρ , то электродвижущая напряженность в любой точке равна $\rho\omega$, что можно выразить через электрический потенциал и через вектор-потенциал H при помощи уравнения (B), п. 598:

$$\rho\omega = -\frac{d\Psi}{dz} - \frac{dH}{dt}, \quad (4)$$

или

$$-\rho\omega = \frac{d\Psi}{dz} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT_0}{dt} + \frac{dT_1}{dt} r^2 + \dots + \frac{dT_n}{dt} r^{2n} + \dots \quad (5)$$

Сравнивая в уравнениях (3) и (5) коэффициенты при одинаковых степенях r , получаем

$$T_1 = \frac{\pi}{\rho} \left(\frac{d\Psi}{dz} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT_0}{dt} \right), \quad (6)$$

$$T_2 = \frac{\pi}{\rho} \frac{1}{2^2} \frac{dT_1}{dt}, \quad (7)$$

$$T_n = \frac{\pi}{\rho} \frac{1}{n^2} \frac{dT_{n-1}}{dt}. \quad (8)$$

Следовательно, мы можем написать

$$\frac{dS}{dt} = - \frac{d\Psi}{dz}, \quad (9)$$

$$T_0 = T, \quad T_1 = \frac{\pi}{\rho} \frac{dT}{dt}, \quad \dots \quad T_n = \frac{\pi^n}{\rho^n} \frac{1}{(n!)^2} \frac{d^n T}{dt^n}. \quad (10)$$

690. Для нахождения полного тока C нам следует проинтегрировать ω по всему сечению провода радиуса a :

$$C = 2\pi \int_0^a \omega r dr. \quad (11)$$

Подставляя значения $\pi\omega$ из уравнения (3), получаем

$$C = - (T_1 a^2 + \dots + n T_n a^{2n} + \dots). \quad (12)$$

Величина H в любой точке вне провода определяется только полным током C и не зависит от характера его распределения внутри провода. Поэтому можно принять значение H на поверхности провода равным AC , где A — постоянная величина, которую следует вычислять с учетом общей конфигурации контура. Полагая $H = AC$ при $r = a$, мы получаем

$$AC = S + T_0 + T_1 a^2 + \dots + T_n a^{2n} + \dots \quad (13)$$

Если далее записать $\pi a^2 / \rho = \alpha$, где α — величина проводимости на единицу длины провода, то мы будем иметь

$$C = - \left(\alpha \frac{dT}{dt} + \frac{2\alpha^2}{1^2 \cdot 2^2} \frac{d^2 T}{dt^2} + \dots + \frac{n\alpha^n}{(n!)^2} \frac{d^n T}{dt^n} + \dots \right), \quad (14)$$

$$AC - S = T + \alpha \frac{dT}{dt} + \frac{\alpha^2}{1^2 \cdot 2^2} \frac{d^2 T}{dt^2} + \dots + \frac{\alpha^n}{(n!)^2} \frac{d^n T}{dt^n} + \dots \quad (15)$$

Чтобы исключить из этих уравнений T , мы должны вначале обратить ряд (14). Таким образом, получаем

$$\alpha \frac{dT}{dt} = -C + \frac{1}{2} \alpha \frac{dC}{dt} - \frac{1}{6} \alpha^2 \frac{d^2 C}{dt^2} + \frac{7}{144} \alpha^3 \frac{d^3 C}{dt^3} - \frac{39}{2880} \alpha^4 \frac{d^4 C}{dt^4} + \dots$$

Из (14) и (15) мы также имеем

$$\alpha \left(A \frac{dC}{dt} - \frac{dS}{dt} \right) + C = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{1}{6} \alpha^3 \frac{d^3 T}{dt^3} + \frac{1}{48} \alpha^4 \frac{d^4 T}{dt^4} + \frac{1}{720} \alpha^5 \frac{d^5 T}{dt^5} + \dots$$

Из последних двух уравнений находим

$$\alpha \left(A \frac{dC}{dt} - \frac{dS}{dt} \right) + C + \frac{1}{2} \alpha \frac{dC}{dt} - \frac{1}{12} \alpha^2 \frac{d^2C}{dt^2} + \frac{1}{48} \alpha^3 \frac{d^3C}{dt^3} - \frac{1}{180} \alpha^4 \frac{d^4C}{dt^4} + \dots = 0. \quad (16)$$

Если l — полная длина контура, R — его полное сопротивление, E — электродвижущая сила, обусловленная источниками, отличными от самоиндукции тока, то

$$\frac{dS}{dt} = \frac{E}{l}, \quad \alpha = \frac{l}{R}, \quad (17)$$

$$E = RC + l \left(A + \frac{1}{2} \right) \frac{dC}{dt} - \frac{1}{12} \frac{l^2}{R} \frac{d^2C}{dt^2} + \frac{1}{48} \frac{l^3}{R^2} \frac{d^3C}{dt^3} - \frac{1}{180} \frac{l^4}{R^3} \frac{d^4C}{dt^4} + \dots \quad (18)$$

Первый член в правой части этого уравнения, равный RC , выражает электродвижущую силу, необходимую для преодоления сопротивления в соответствии с законом Ома.

Второй член, равный $l \left(A + \frac{1}{2} \right) \frac{dC}{dt}$, выражает электродвижущую силу, которую следовало бы создать для увеличения электрокинетического импульса контура в предположении, что во всех точках сечения провода сила тока одинакова.

Остальные члены выражают поправки к этой величине, возникающие из-за того факта, что сила тока различна на разных расстояниях от оси провода. Реальная система токов обладает большей степенью свободы, чем гипотетическая система, в которой по всему сечению поддерживается однородное распределение токов. Следовательно, электродвижущая сила, которая требуется для быстрого изменения силы тока, несколько меньше той, которая была бы необходима в рамках этой гипотезы.

Отношение между временным интегралом электродвижущей силы и временным интегралом тока равно

$$\int E dt = R \int C dt + l \left(A + \frac{1}{2} \right) C - \frac{1}{12} \frac{l^2}{R} \frac{dC}{dt} + \dots \quad (19)$$

Если ток вначале имеет постоянное значение C_0 , затем в течение некоторого времени увеличивается до величины C_1 и затем остается постоянным, равным C_1 , то члены, содержащие производные от C , исчезают на обоих пределах и

$$\int E dt = R \int C dt + l \left(A + \frac{1}{2} \right) (C_1 - C_0), \quad (20)$$

т. е. величина импульса электродвижущей силы такая же, как если бы ток был однороден по сечению провода.

О среднем геометрическом расстоянии между двумя фигурами на плоскости¹

691. При вычислении электромагнитного действия тока, текущего вдоль прямого проводника любого заданного сечения, на другой ток, текущий по параллель-

¹ *Trans. R. S. Edin., 1871—2.*

ному проводнику, сечение которого также задано, мы должны найти интеграл

$$\iiint \ln r \, dx \, dy \, dx' \, dy',$$

где $dx \, dy$ есть элемент площади в первом сечении, $dx' \, dy'$ — элемент площади во втором сечении, r — расстояние между этими элементами; интегрирование про-

Рис. 41

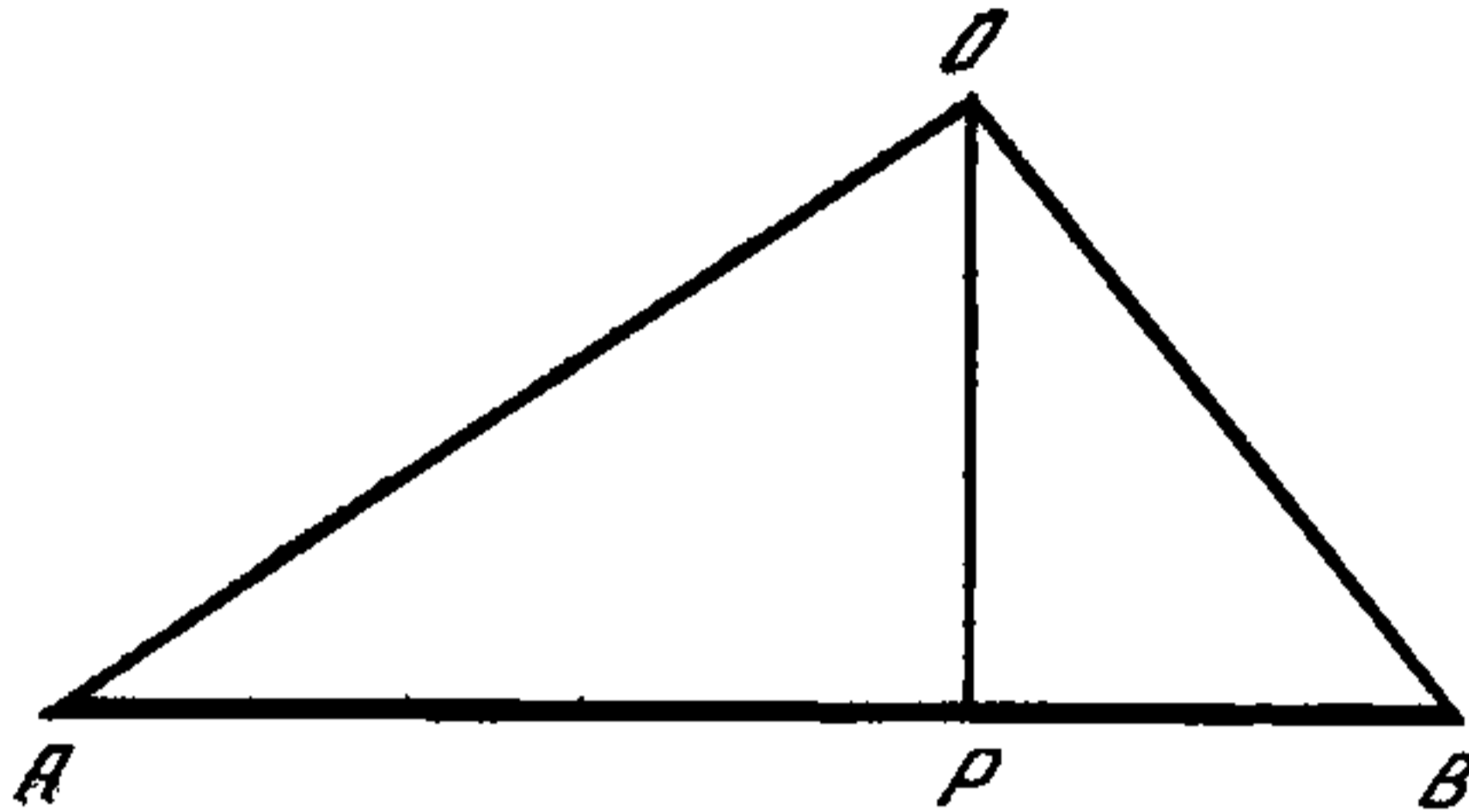


Рис. 42

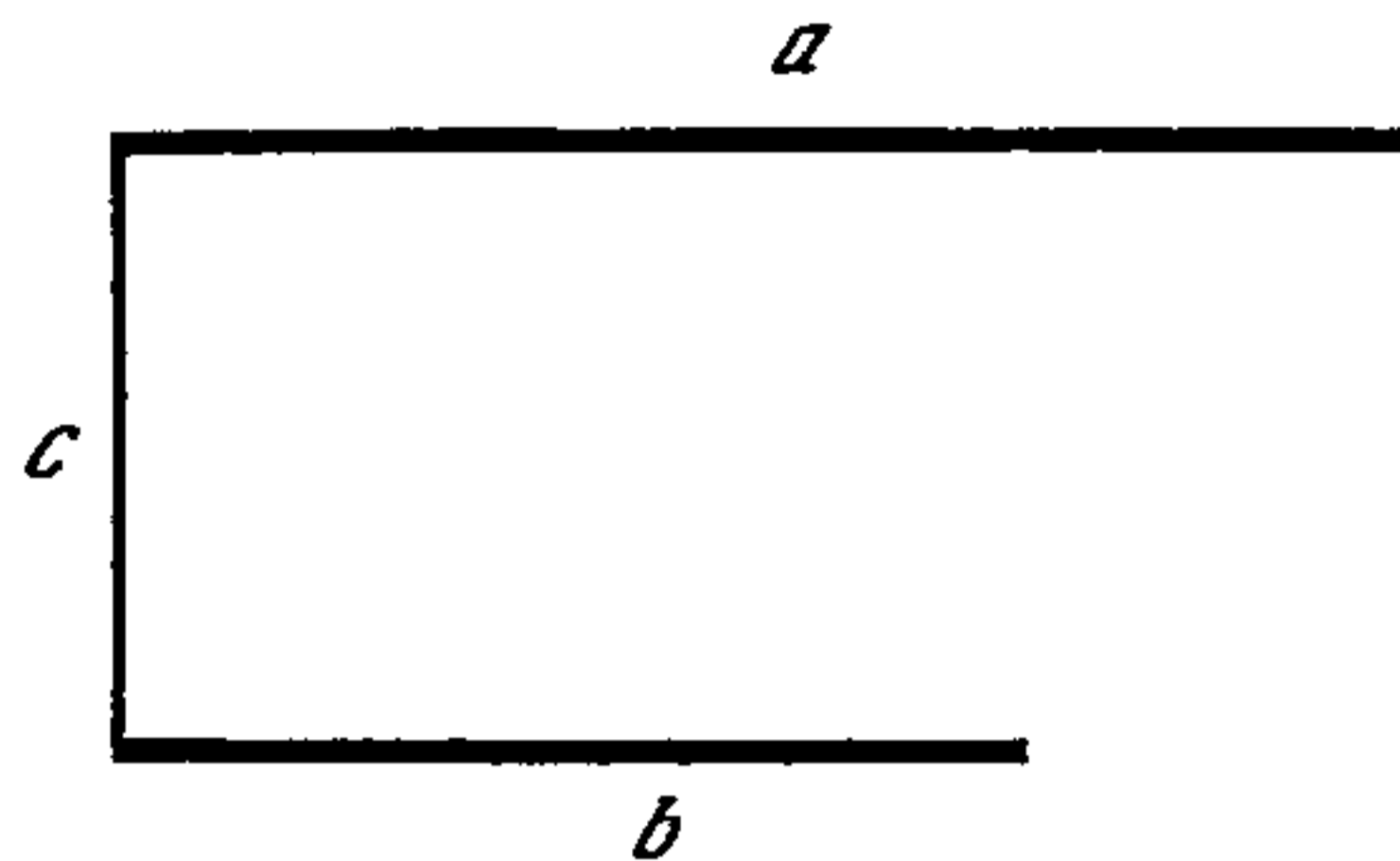


Рис. 44

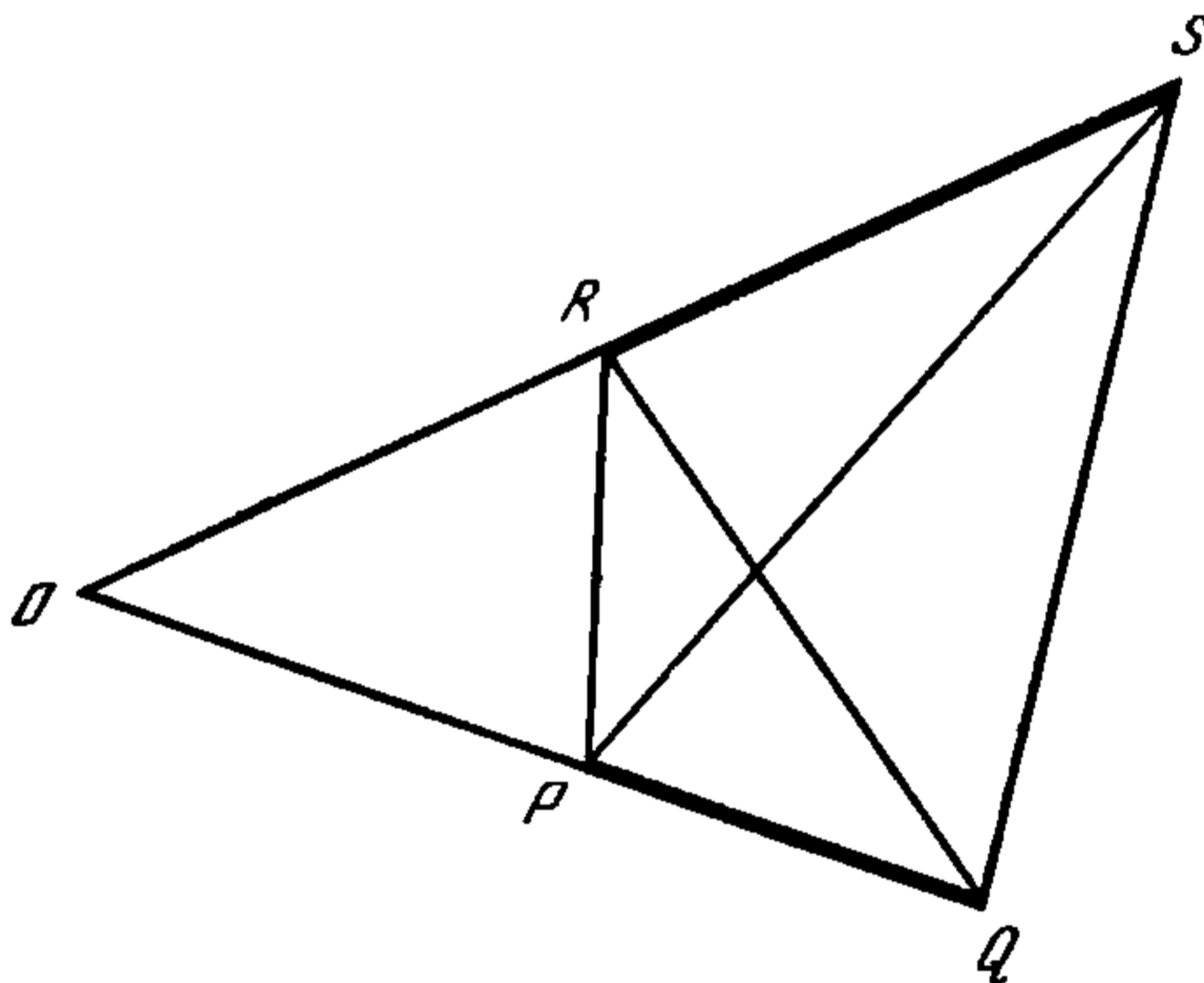
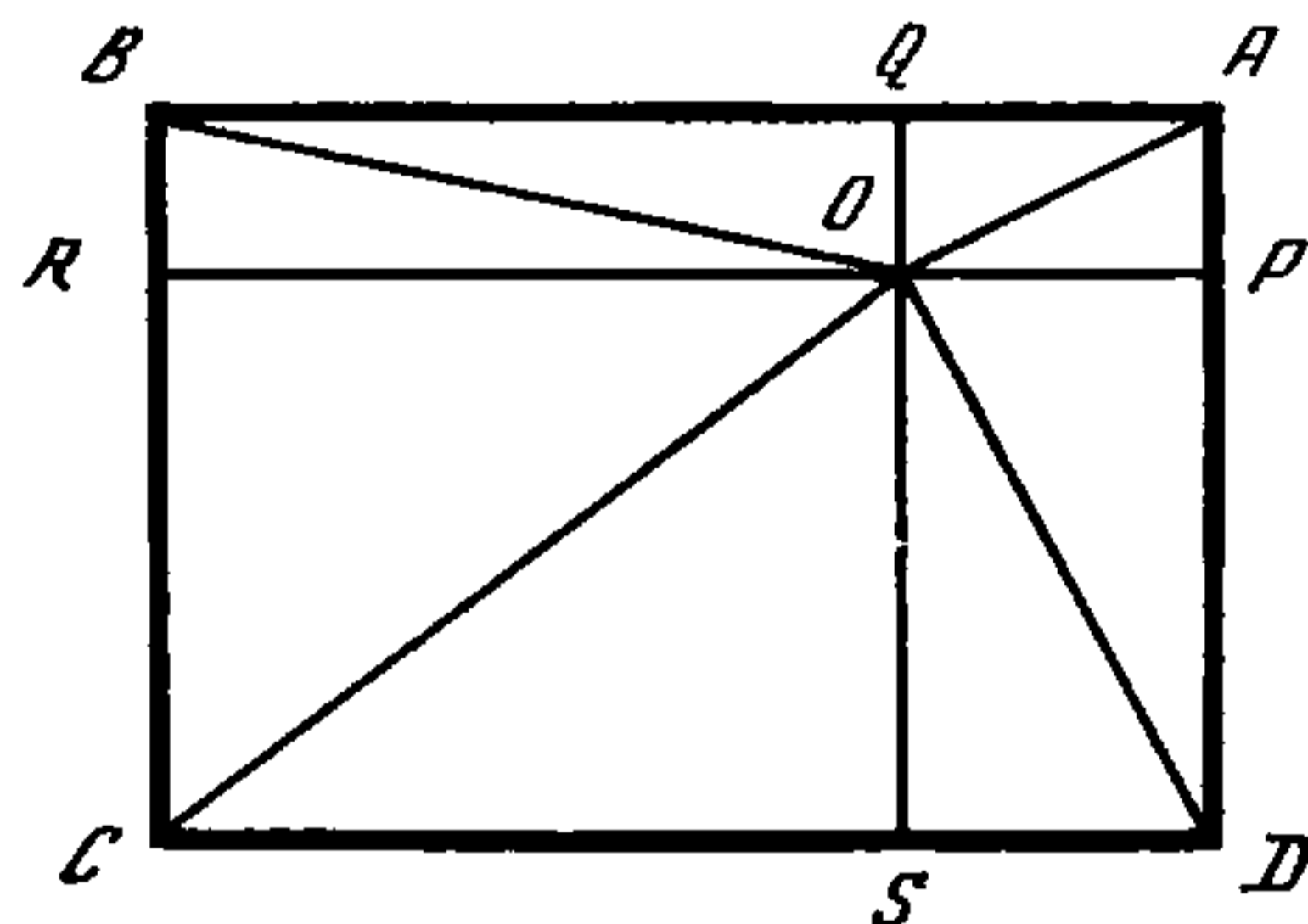


Рис. 43



изводится вначале по всем элементам первого сечения, а затем по всем элементам второго сечения.

Если мы введем теперь некоторую длину R , такую, что интеграл равен $A_1 A_2 \ln R$, где A_1 и A_2 — площади двух сечений, то эта длина R останется неизменной, какую бы единицу длины мы ни приняли и какую бы систему логарифмов ни использовали.

Если предположить, что сечения разделены на элементы одинакового размера, то логарифм от R , умноженный на число пар элементов, будет равен сумме логарифмов расстояний между всеми парами элементов. Следовательно, величину R можно рассматривать как среднее геометрическое всех расстояний между парами элементов. Очевидно, что величина R должна быть промежуточной между наибольшим и наименьшим значениями r .

Если R_A и R_B — средние геометрические расстояния фигур A и B до третьей фигуры C , а R_{A+B} — среднее геометрическое расстояние суммы этих двух фигур до C , то

$$(A+B) \ln R_{A+B} = A \ln R_A + B \ln R_B.$$

При помощи этого соотношения мы можем найти расстояние R для сложной фигуры по известным значениям R для ее частей.

692.

ПРИМЕРЫ

(1). Пусть R — среднее расстояние от точки O до отрезка AB , а OP — перпендикуляр к AB [рис. 41]; тогда

$$AB (\ln R + 1) = AP \ln OA + PB \ln OB + OP \widehat{AOB}.$$

(2). Для двух отрезков (рис. 42) длиной a и b , проведенных в одну сторону из концов отрезка длиной c перпендикулярно ему, имеем

$$\begin{aligned} ab (2 \ln R + 3) = & (c^2 - (a-b)^2) \ln \sqrt{c^2 + (a-b)^2} + c^2 \ln c + \\ & + (a^2 - c^2) \ln \sqrt{a^2 + c^2} + (b^2 - c^2) \ln \sqrt{b^2 + c^2} \\ & - c(a-b) \operatorname{arctg} (a-b)/c + ac \operatorname{arctg} (a/c) + bc \operatorname{arctg} (b/c). \end{aligned}$$

(3). Для двух отрезков PQ и RS (рис. 43), направления которых пересекаются в точке O ,

$$\begin{aligned} PQ \cdot RS (2 \ln R + 3) = & \ln PR (2OP \cdot OR \sin^2 O - PR^2 \cos O) \\ & + \ln QS (2OQ \cdot OS \sin^2 O - QS^2 \cos O) \\ & - \ln PS (2OP \cdot OS \sin^2 O - PS^2 \cos O) \\ & - \ln QR (2OQ \cdot OR \sin^2 O - QR^2 \cos O) \\ & - \sin O \{OP^2 \cdot \widehat{SPR} - OQ^2 \cdot \widehat{SQR} + OR^2 \cdot \widehat{PRQ} - OS^2 \cdot \widehat{PSQ}\}. \end{aligned}$$

(4). Для точки O и прямоугольной площадки $ABCD$ (рис. 44). Пусть OP , OQ , OR , OS перпендикулярны к его сторонам, тогда

$$\begin{aligned} AB \cdot AD (2 \ln R + 3) = & 2OP \cdot OQ \ln OA + 2OQ \cdot OR \ln OB + 2OR \cdot OS \ln OC + \\ & + 2OS \cdot OP \ln OD + OP^2 \widehat{DOA} + OQ^2 \cdot \widehat{AOB} + \\ & + OR^2 \cdot \widehat{BOC} + OS^2 \cdot \widehat{COD}. \end{aligned}$$

(5). Нет необходимости в том, чтобы две фигуры были различны, ибо мы можем найти среднее геометрическое расстояние между каждой парой точек одной и той же фигуры; так, для отрезка прямой длины a

$$\ln R = \ln a - (3/2), \text{ или } R = ae^{-3/2}, R = 0,22313a.$$

(6). Для прямоугольной площадки, стороны которой равны a и b ,

$$\begin{aligned} \ln R = & \ln \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{1}{6} \frac{a^2}{b^2} \ln \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2} \ln \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} + \\ & + \frac{2}{3} \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \frac{2}{3} \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \frac{25}{12}. \end{aligned}$$

Когда этот прямоугольник является квадратом со стороной a ,

$$\ln R = \ln a + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{25}{12}, R = 0,44705a.$$

(7). Среднее геометрическое расстояние между точкой и линией окружности равно наибольшей из двух величин: величины расстояния от данной точки до центра окружности и радиуса этой окружности.

(8). Таким образом, среднее геометрическое расстояние любой фигуры от некоторого кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями, равно ее среднегеометрическому расстоянию от центра кольца, если эта фигура целиком расположена вне кольца; если же она вся лежит внутри кольца, то

$$\ln R = \frac{a_1^2 \ln a_1 - a_2^2 \ln a_2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{1}{2},$$

где a_1 и a_2 — внешний и внутренний радиусы кольца. В этом случае R не зависит от формы фигуры, находящейся внутри кольца.

(9). Среднее геометрическое расстояние всех пар точек в кольце находится из уравнения

$$\ln R = \ln a_1 - \frac{a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \ln \frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{4} \frac{3a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 - a_2^2}.$$

Для круглой площадки радиуса a это выражение принимает вид

$$\ln R = \ln a - (1/4), \text{ или } R = ae^{-1/4}, R = 0,7788 a.$$

Для линии окружности $R = a$.

693. При вычислении коэффициента самоиндукции катушки однородного сечения, радиус кривизны которой значительно превышает размеры поперечного сечения, мы сначала, пользуясь только что описанным методом, определяем средние геометрические расстояния между всеми парами точек сечения катушки, а затем подсчитываем коэффициент взаимной индукции между двумя линейными проводниками заданной формы, помещенными на этом расстоянии друг от друга.

Это и будет коэффициентом самоиндукции для единичного полного тока в катушке, если он распределен однородно по всем точкам сечения.

Но если в катушке имеется n витков, мы должны полученный коэффициент помножить на n^2 ; тогда мы получим коэффициент самоиндукции в предположении, что все сечение катушки полностью заполнено витками проводящего провода.

Однако провод имеет цилиндрическую форму и покрыт изолирующим материалом, поэтому ток не распределен равномерно по сечению, а сконцентрирован в определенных его частях; это увеличивает коэффициент самоиндукции. Помимо этого, токи в соседних проводах не оказывают на ток в данном проводе того же самого действия, что при однородном распределении.

Поправки, возникающие при учете всех этих соображений, могут быть найдены методом среднегеометрического расстояния. Они пропорциональны длине всего провода в катушке и могут быть выражены как некоторые численные величины, на которые мы должны умножать длину провода, с тем чтобы получить поправку к коэффициенту самоиндукции.

Пусть диаметр провода равен d , провод покрыт изолирующим материалом и свернут в катушку. Мы будем предполагать, что сечения проводов располагают-

ся в квадратном порядке, как это показано на рис. 45, и что расстояние между осью любого провода и осью провода, соседнего с ним, как по ширине, так и по глубине катушки равно D . Очевидно, что D больше d .

Вначале мы должны определить превышение самоиндукции на единицу длины цилиндрического провода диаметра d по сравнению с проводом квадратного сечения со стороной, равной D , т. е.

$$2 \ln \frac{R \text{ (для квадрата)}}{R \text{ (для окружности)}} = 2 \left(\ln \frac{D}{d} + \frac{4}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{11}{6} \right) = 2 \left(\ln \frac{D}{d} + 0,1380606 \right).$$

Индуктивное действие ближайших восьми круглых проводов на рассматриваемый провод меньше, чем действие соответствующих восьми квадратных проводов на квадратный провод, помещенный в середине в $2 \cdot (0,01971)$ раза.

Поправками на влияние проводов, находящихся на больших расстояниях, можно пренебречь и общий корректирующий множитель записать в виде $2[\ln(D/d) + 0,11835]$.

Окончательное значение самоиндукции поэтому равно

$$L = n^2 M + 2l[\ln(D/d) + 0,11835],$$

где n — число витков, l — длина провода, M — взаимная индукция двух контуров, имеющих форму среднего провода катушки и помещенных на расстояние R друг от друга, R — среднегеометрическое расстояние между парами точек сечения; D — расстояние между следующими друг за другом проводами, d — диаметр провода.

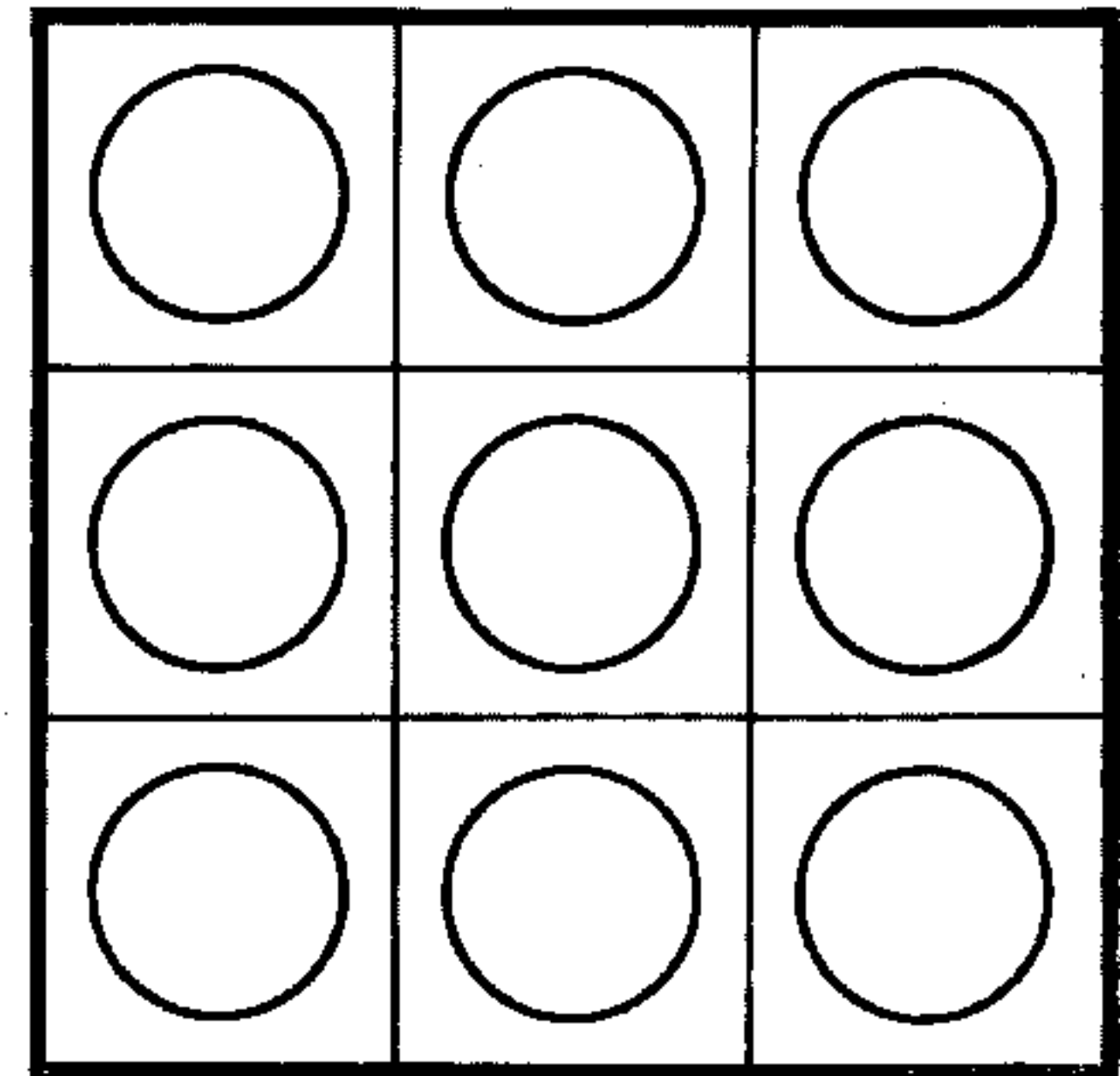


Рис. 45

ГЛАВА XIV

КРУГОВЫЕ ТОКИ

Магнитный потенциал кругового тока

694. Магнитный потенциал, создаваемый в некоторой заданной точке контуром, несущим единичный ток, численно равен телесному углу с вершиной в этой точке, опирающемуся на контур, см. п. 409, 485.

В случае кругового контура телесный угол является телесным углом конуса второго порядка; для точки, находящейся на оси окружности, конус будет прямым. Если точка не находится на оси, конус является эллиптическим; его телесный угол равен площади сферического эллипса, вырезаемого им на сфере единичного радиуса.

Эта площадь может быть выражена в конечном виде через эллиптические интегралы третьего рода. Мы увидим, однако, что более удобно разложить ее в виде бесконечного ряда по сферическим гармоникам, поскольку те удобства, которые сопутствуют выполнению математических операций с общим членом такого ряда,

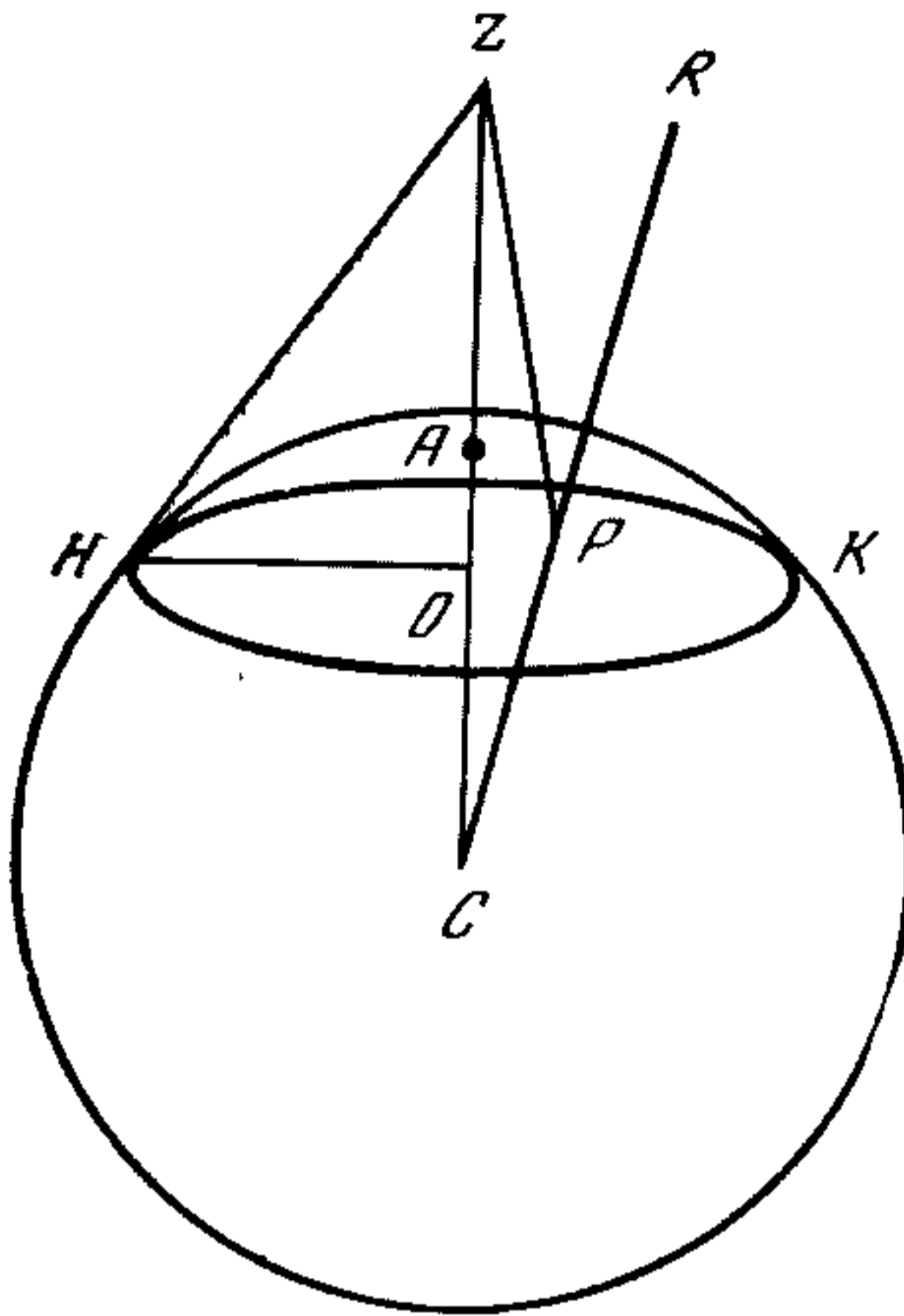


Рис. 46

с избытком перевешивают хлопоты, связанные с подсчетом числа членов ряда, достаточного для обеспечения практической точности.

Будем считать для общности, что начало координат расположено в произвольной точке оси окружности, т. е. на линии, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости.

Пусть точка O (рис. 46) является центром окружности, расположенная на оси точка C выбрана за начало координат, а точка H находится на самой окружности.

Проведем сферу радиусом CH с центром в точке C . Рассматриваемая нами окружность будет лежать на сфере, являясь ее малой окружностью с «угловым радиусом» α .

Обозначим $CH=c$, $OC=b=c \cos \alpha$, $OH=a=c \sin \alpha$.

Пусть A будет полюсом сферы, а Z — какой-нибудь точкой на оси и пусть $CZ=z$. Пусть R — произвольная точка в пространстве: $CR=r$, $ACR=\vartheta$.

Пусть P — точка пересечения сферы отрезком CR .

Магнитный потенциал, создаваемый круговым током, равен потенциалу, создаваемому ограниченной этим током магнитной оболочкой с единичной мощностью. Поскольку форма поверхности оболочки безразлична (лишь бы она была ограничена данной окружностью), мы можем предположить, что она совпадает с поверхностью сферы.

В п. 670 мы показали, что если V есть потенциал, создаваемый слоем материи с единичной поверхностной плотностью, распределенной по участку поверхности сферы, ограниченному ее малой окружностью, то потенциал ω , создаваемый магнитной оболочкой, которая ограничена этой же окружностью и имеет единичную мощность, равен $\omega = -\frac{1}{c} \frac{d}{dr} (rV)$.

Мы должны, таким образом, прежде всего найти V .

Пусть заданная точка Z находится на оси окружности, тогда та часть потенциала в Z , которая создается элементом dS , расположенным на сферической поверхности в точке P , равна dS/ZP .

Это выражение можно разложить в один из двух следующих рядов по сферическим гармоникам:

$$\frac{dS}{c} \left\{ P_0 + P_1 \frac{z}{c} + \dots + P_i \frac{z^i}{c^i} + \dots \right\},$$

или

$$\frac{dS}{z} \left\{ P_0 + P_1 \frac{c}{z} + \dots + P_i \frac{c^i}{z^i} + \dots \right\},$$

первый ряд сходится при значениях z меньших c , а второй — при z больших c . Записав $dS = -c^2 d\mu d\varphi$ и интегрируя по φ в пределах от 0 до 2π и по μ — от

$\cos \alpha$ до 1, находим

$$V = 2\pi c \left\{ \int_{\cos \alpha}^1 P_0 d\mu + \dots + \frac{z^i}{c^i} \int_{\cos \alpha}^1 P_i d\mu + \dots \right\}, \quad (1)$$

или

$$V' = 2\pi \frac{c^2}{z} \left\{ \int_{\cos \alpha}^1 P_0 d\mu + \dots + \frac{c^i}{z^i} \int_{\cos \alpha}^1 P_i d\mu + \dots \right\}. \quad (1')$$

Для P_i имеем характеристическое уравнение

$$i(i+1)P_i + \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{dP_i}{d\mu} \right] = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\mu}^1 P_i d\mu = \frac{1-\mu^2}{i(i+1)} \frac{dP_i}{d\mu}. \quad (2)$$

Это выражение утрачивает смысл при $i=0$, но поскольку $P_0=1$, то

$$\int_{\mu}^1 P_0 d\mu = 1 - \mu. \quad (3)$$

Так как функция $dP_i/d\mu$ возникает на каждом этапе этого исследования, мы будем обозначать ее сокращенно через P'_i . Величины P'_i , соответствующие нескольким значениям i , даны в п. 698.

Теперь мы можем написать значение V в произвольной точке R , на оси или не на оси, путем замены r на z и умножения каждого из членов на зональную гармонику по ϑ того же порядка. Действительно, потенциал V должен допускать разложение в ряд по зональным гармоникам по ϑ с соответствующими коэффициентами. При $\vartheta=0$ каждая из зональных гармоник обращается в единицу, и точка R лежит на оси. Следовательно, эти коэффициенты являются членами разложения V для точки, расположенной на оси. Таким образом, мы получаем два ряда:

$$V = 2\pi c \left\{ 1 - \cos \alpha + \dots + \frac{\sin^2 \alpha}{i(i+1)} \frac{r^i}{c^i} P'_i(\alpha) P_i(\vartheta) + \dots \right\}, \quad (4)$$

или

$$V' = 2\pi \frac{c^2}{r} \left\{ 1 - \cos \alpha + \dots + \frac{\sin^2 \alpha}{i(i+1)} \frac{c^i}{r^i} P'_i(\alpha) P_i(\vartheta) + \dots \right\}. \quad (4')$$

695. Теперь мы можем, согласно методу п. 670, найти величину потенциала контура ω из уравнения

$$\omega = -\frac{1}{c} \frac{d}{dr} (Vr). \quad (5)$$

Отсюда получаем два ряда:

$$\omega = -2\pi \left\{ 1 - \cos \alpha + \dots + \frac{\sin^2 \alpha}{i} \frac{r^i}{c^i} P'_i(\alpha) P_i(\vartheta) + \dots \right\} \quad (6)$$

или

$$\omega' = 2\pi \sin^2 \alpha \left\{ \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} P_1'(\alpha) P_1(\vartheta) + \dots + \frac{1}{i+1} \frac{c^{i+1}}{r^{i+1}} P_i'(\alpha) P_i(\vartheta) + \dots \right\}. \quad (6')$$

Ряд (6) сходится при всех значениях r меньших c , а ряд (6') сходится для всех значений r больших c . На поверхности сферы, где $r=c$, оба ряда дают одно и то же значение ω , если ϑ превышает α , т. е. для точек, не занятых магнитной оболочкой; если же величина ϑ меньше α , т. е. для точек, находящихся на магнитной оболочке,

$$\omega' = \omega + 4\pi. \quad (7)$$

Если принять центр окружности O за начало координат, мы должны положить $\alpha = \pi/2$, и тогда ряды станут такими:

$$\omega = -2\pi \left\{ 1 + \frac{r}{c} P_1(\vartheta) + \dots + (-)^s \frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{2 \cdot 4 \dots 2s} \frac{r^{2s+1}}{c^{2s+1}} P_{2s+1}(\vartheta) + \dots \right\}, \quad (8)$$

$$\omega' = +2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} P_1(\vartheta) + \dots + (-)^s \frac{1 \cdot 3 \dots (2s+1)}{2 \cdot 4 \dots (2s+2)} \frac{c^{2s+2}}{r^{2s+2}} P_{2s+1}(\vartheta) + \dots \right\}, \quad (9)$$

где все гармоники являются гармониками нечетного порядка¹.

О потенциальной энергии двух круговых токов

696. Предположим вначале, что две магнитные оболочки, эквивалентные этим токам, представляют собой участки двух концентричных сфер, имеющих радиусы c_1 и c_2 , причем c_1 больше c_2 (рис. 47). Предположим также, что оси обеих оболочек совпадают и что α_1 и α_2 — это углы с вершинами в центре S , опирающиеся на радиус первой оболочки и на радиус второй оболочки соответственно.

Пусть ω_1 — потенциал, создаваемый первой оболочкой в произвольной точке, находящейся на этой же оболочке; тогда работа, необходимая для удаления второй оболочки на бесконечное расстояние, выражается величиной следующего поверхностного интеграла:

$$M = - \iint \frac{d\omega_1}{dr} dS,$$

¹ Величина телесного угла, опирающегося на окружность, может быть получена более непосредственным путем, а именно:

Телесный угол, опирающийся на окружность, с вершиной в точке Z , находящейся на оси, как легко показать, равен

$$\omega = 2\pi \left(1 - \frac{z - c \cos \alpha}{HZ} \right).$$

Разлагая это выражение по сферическим гармоникам, находим

$$\omega = 2\pi \left\{ (\cos \alpha + 1) + (P_1(\alpha) \cos \alpha - P_0(\alpha)) \frac{z}{c} + \dots + (P_i(\alpha) \cos \alpha - P_{i-1}(\alpha)) \frac{z^i}{c^i} + \dots \right\},$$

$$\omega' = 2\pi \left\{ (P_0(\alpha) \cos \alpha - P_1(\alpha)) \frac{c}{z} + \dots + (P_i(\alpha) \cos \alpha - P_{i+1}(\alpha)) \frac{c^{i+1}}{z^{i+1}} + \dots \right\},$$

эти разложения ω справедливы для точек на оси при z меньших и больших c соответственно. Легко показать, что эти результаты совпадают с полученными в тексте.

распространенного на всю вторую оболочку. Следовательно,

$$M = \int_{\mu_2}^1 \frac{d\omega_1}{dr} 2\pi c_2^2 d\mu_2,$$

$$= 4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 c_2^2 \left\{ \frac{1}{c_1} P_1'(\alpha_1) \int_{\mu_2}^1 P_1(\vartheta) d\mu_2 + \dots + \frac{c_2^{i-1}}{c_1^i} P_i'(\alpha_1) \int_{\mu_2}^1 P_i(\vartheta) d\mu_2 + \dots \right\},$$

или, подставляя значения интегралов из уравнения (2) п. 694,

$$M = 4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 c_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P_1'(\alpha_1) P_1'(\alpha_2) + \dots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P_i'(\alpha_1) P_i'(\alpha_2) + \dots \right\}.$$

697. Предположим теперь, что ось одной из оболочек повернута относительно точки C , взятой за центр, и составляет с осью другой оболочки угол ϑ (рис. 48).

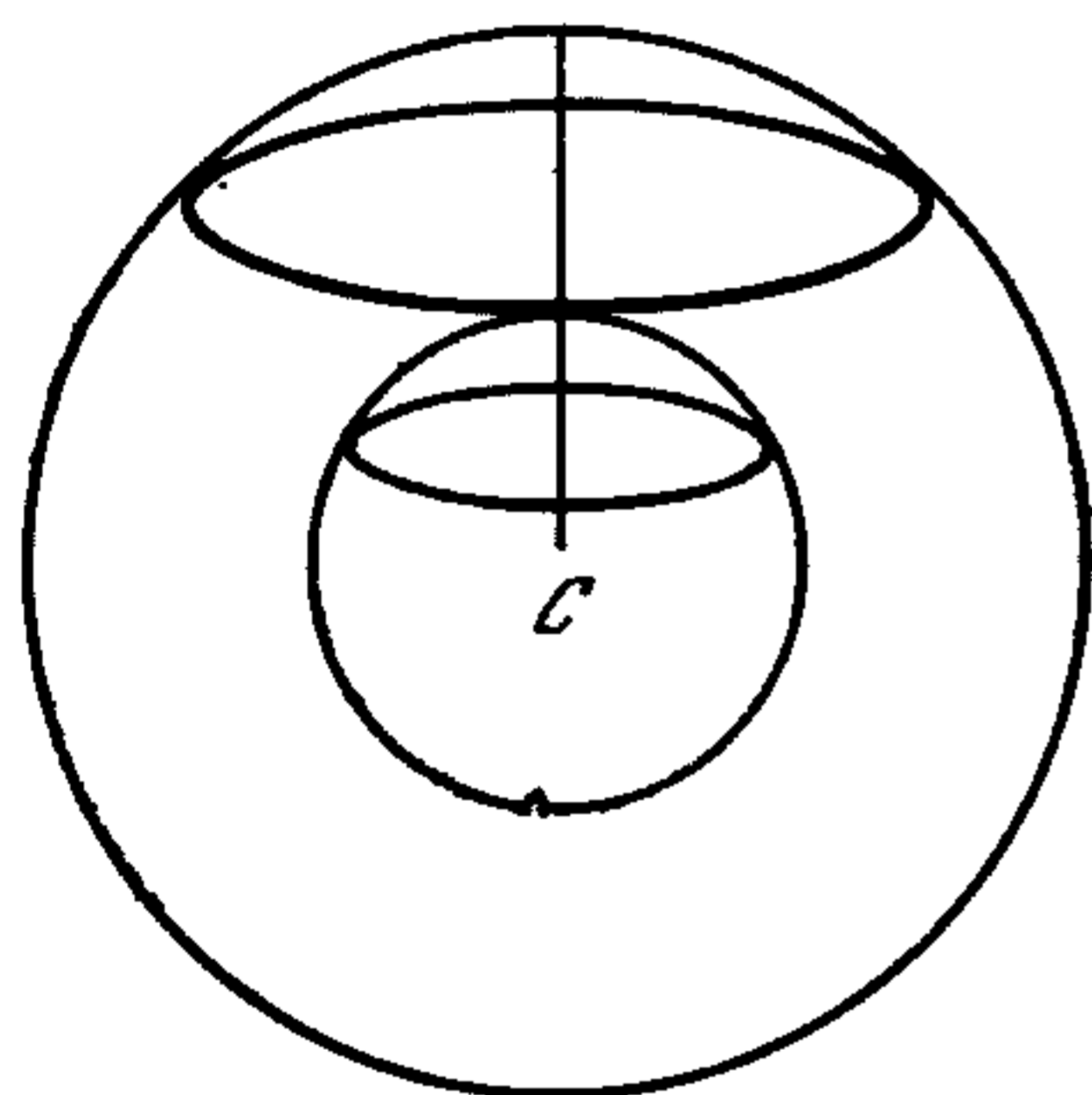


Рис. 47

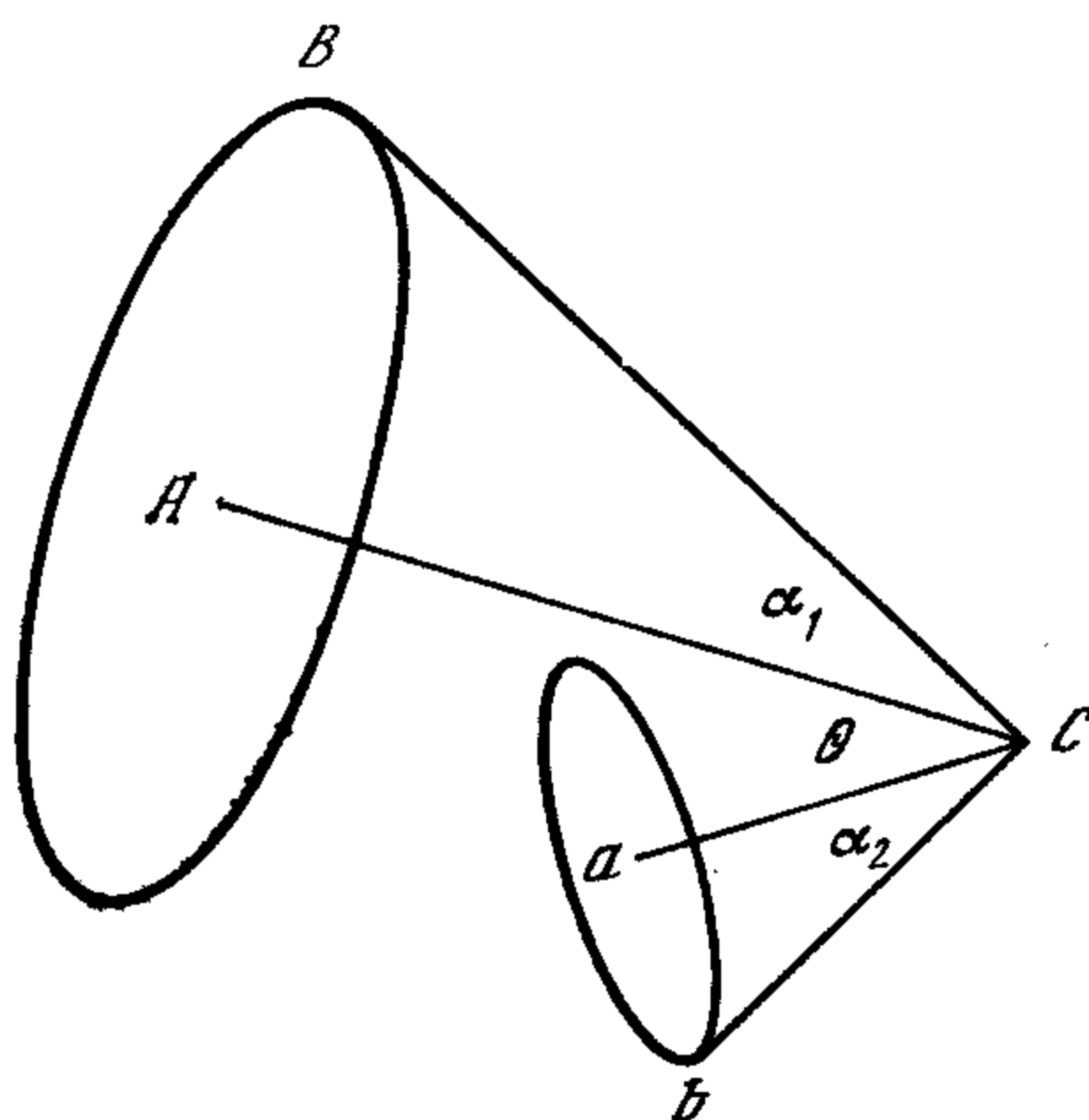


Рис. 48

Нам нужно только ввести в выражение для M зональные гармоники по ϑ , и мы найдем более общую формулу для M :

$$M = 4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 c_2^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P_1'(\alpha_1) P_1'(\alpha_2) P_1(\vartheta) + \dots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P_i'(\alpha_1) P_i'(\alpha_2) P_i(\vartheta) \right\}.$$

Это и есть величина потенциальной энергии, обусловленной взаимным действием двух круговых токов единичной силы, расположенных так, что нормали, проходящие через центры кругов, пересекаются друг с другом в точке C под углом ϑ , причем расстояния от периметров окружностей до точки C равны c_1 и c_2 , и c_1 больше c_2 .

Если какое-то смещение dx меняет значение M , то сила, действующая в направлении этого смещения, есть $X = dM/dx$.

Например, если ось одной из оболочек может свободно вращаться вокруг точки C , вызывая изменение ϑ , то момент силы, стремящийся увеличить ϑ , равен Θ , где $\Theta = dM/d\vartheta$.

Выполняя дифференцирование и помня, что

$$\frac{dP_i(\vartheta)}{d\vartheta} = -\sin \vartheta P'_i(\vartheta),$$

где P'_i имеет тот же смысл, что и в предыдущих уравнениях, получим

$$\Theta = -4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 \sin \vartheta c_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P'_1(\alpha_1) P'_1(\alpha_2) P'_1(\vartheta) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P'_i(\alpha_1) P'_i(\alpha_2) P'_i(\vartheta) \right\}.$$

698. В связи с тем что в этих вычислениях часто встречаются величины P'_i , может оказаться полезной следующая таблица выражений для функций P'_i первых шести порядков; в этой таблице вместо $\cos \vartheta$ фигурирует μ и ν вместо $\sin \vartheta$:

$$P'_1 = 1,$$

$$P'_2 = 3\mu,$$

$$P'_3 = \frac{3}{2} (5\mu^2 - 1) = 6 \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \nu^2 \right),$$

$$P'_4 = \frac{5}{2} \mu (7\mu^2 - 3) = 10\mu \left(\mu^2 - \frac{3}{4} \nu^2 \right),$$

$$P'_5 = \frac{15}{8} (21\mu^4 - 14\mu^2 + 1) = 15 \left(\mu^4 - \frac{3}{2} \mu^2 \nu^2 + \frac{1}{8} \nu^4 \right),$$

$$P'_6 = \frac{21}{8} \mu (33\mu^4 - 30\mu^2 + 5) = 21\mu \left(\mu^4 - \frac{5}{2} \mu^2 \nu^2 + \frac{5}{8} \nu^4 \right).$$

699. Иногда удобно представить ряды для M как функции некоторых «линейных» величин следующим образом.

Пусть a — радиус малого контура, b — расстояние от начала координат до плоскости контура и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Пусть A , B и C — соответствующие величины для большого контура.

Тогда ряды для M могут быть записаны в виде

$$M = 1.2.\pi^2 \frac{A^2}{C^3} a^2 \cos \vartheta + 2.3.\pi^2 \frac{A^2 B}{C^5} a^2 b \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) + \\ + 3.4.\pi^2 \frac{A^2 \left(B^2 - \frac{1}{4} A^2 \right)}{C^7} a^2 \left(b^2 - \frac{1}{4} a^2 \right) \left(\cos^3 \vartheta - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \right) + \dots$$

Если положить $\vartheta = 0$, то две окружности будут параллельными и будут иметь общую ось. Для того чтобы определить притяжение между ними, мы можем продифференцировать M по b . В результате найдем

$$\frac{dM}{db} = \pi^2 \frac{A^2 a^2}{C^4} \left\{ 2.3 \frac{B}{C} + 2.3.4 \frac{B^2 - \frac{1}{4} A^2}{C^3} b + \dots \right\}.$$

700. Чтобы вычислить действие катушки прямоугольного сечения, мы должны найденное выражение проинтегрировать по радиусу катушки A и по расстоянию

B от ее плоскости до начала координат, распространив интегрирование на всю ширину и высоту катушки.

В некоторых случаях непосредственное интегрирование наиболее удобно, однако существуют и другие случаи, когда к более полезным результатам приводит следующий метод аппроксимации.

Пусть P — произвольная функция x и y , требуется найти значение \bar{P} , где

$$\bar{P}_{xy} = \int_{-\frac{1}{2}x}^{+\frac{1}{2}x} \int_{-\frac{1}{2}y}^{+\frac{1}{2}y} P dx dy.$$

В этом выражении \bar{P} есть среднее значение P внутри пределов интегрирования.

Обозначим через P_0 значение P при $x=0$ и $y=0$, тогда, разлагая P по теореме Тейлора, получим

$$P = P_0 + x \frac{dP_0}{dx} + y \frac{dP_0}{dy} + \frac{1}{2} x^2 \frac{d^2P_0}{dx^2} + \dots$$

Проинтегрировав это выражение в прежних пределах и разделив результат на xy , мы получим для \bar{P} :

$$\bar{P} = P_0 + \frac{1}{24} \left(x^2 \frac{d^2P_0}{dx^2} + y^2 \frac{d^2P_0}{dy^2} \right) + \frac{1}{1920} \left(x^4 \frac{d^4P_0}{dx^4} + y^4 \frac{d^4P_0}{dy^4} \right) + \frac{1}{576} x^2 y^2 \frac{d^4P_0}{dx^2 dy^2} + \dots$$

Рассмотрим катушку, у которой внешний и внутренний радиусы соответственно равны $A + \xi/2$ и $A - \xi/2$, а расстояние плоскостей намотки до начала координат лежит в пределах от $B + \eta/2$ до $B - \eta/2$. В этом случае ширина катушки равна η , ее глубина — ξ ; пусть эти величины малы по сравнению с A или C .

Для того чтобы подсчитать магнитное действие данной катушки, мы можем выписать последовательные члены рядов (6) и (6') п. 695 в следующем виде:

$$\begin{aligned} G_0 &= \pi \frac{B}{C} \left(1 + \frac{1}{24} \frac{2A^2 - B^2}{C^4} \xi^2 - \frac{1}{8} \frac{A^2}{C^4} \eta^2 + \dots \right), \\ G_1 &= 2\pi \frac{A^2}{C^3} \left\{ 1 + \frac{1}{24} \left(\frac{2}{A^2} - 15 \frac{B^2}{C^4} \right) \xi^2 + \frac{1}{8} \frac{4B^2 - A^2}{C^4} \eta^2 + \dots \right\}, \\ G_2 &= 3\pi \frac{A^2 B}{C^5} \left\{ 1 + \frac{1}{24} \left(\frac{2}{A^2} - \frac{25}{C^2} + \frac{35A^2}{C^4} \right) \xi^2 + \frac{5}{24} \frac{4B^2 - 3A^2}{C^4} \eta^2 + \dots \right\}, \\ G_3 &= 4\pi \frac{A^2 \left(B^2 - \frac{1}{4} A^2 \right)}{C^7} + \frac{\pi}{24} \frac{\xi^2}{C^{11}} \{ C^4 (8B^2 - 12A^2) + 35A^2 B^2 (5A^2 - 4B^2) \} + \\ &+ \frac{5}{8} \frac{\pi \eta^2}{C^{11}} A^2 \{ A^4 - 12A^2 B^2 + 8B^4 \}, \\ &\dots, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \pi a^2 && + \frac{1}{12} \pi \xi^2 \\
 g_2 &= 2\pi a^2 b && + \frac{1}{6} \pi b \xi^2, \\
 g_3 &= 3\pi a^2 \left(b^2 - \frac{1}{4} a^2 \right) + \frac{\pi}{8} \xi^2 (2b^2 - 3a^2) + \frac{\pi}{4} \eta^2 a^2, \\
 &\dots, \dots
 \end{aligned}$$

Величины G_0, G_1, G_2, \dots относятся к большой катушке. Значение ω для точек, где r меньше C , равно

$$\omega = -2\pi + 2G_0 - G_1 r P_1(\vartheta) - G_2 r^2 P_2(\vartheta) - \dots$$

Величины g_1, g_2, \dots относятся к малой катушке. Значения ω' в точках, где r больше C , равны

$$\omega' = g_1 \frac{1}{r^2} P_1(\vartheta) + g_2 \frac{1}{r^3} P_2(\vartheta) + \dots$$

Потенциал одной из этих катушек по отношению к другой в том случае, когда общий ток, протекающий через сечение каждой катушки, равен единице, следующий

$$M = G_1 g_1 P_1(\vartheta) + G_2 g_2 P_2(\vartheta) + \dots$$

Как найти M через эллиптические интегралы

701. Когда расстояние между периметрами двух кругов соизмеримо с радиусом меньшего из них, приведенные здесь ряды не сходятся достаточно быстро. В любом случае, однако, мы можем найти выражение M для двух параллельных окружностей через эллиптические интегралы.

Действительно, пусть b — длина линии, соединяющей центры окружностей, пусть эта линия перпендикулярна плоскостям обеих окружностей и пусть A и a — радиусы окружностей; тогда

$$M = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds',$$

где интегрирование проводится по обеим замкнутым кривым.

В этом случае

$$r^2 = A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa \cos(\varphi - \varphi'), \quad \varepsilon = \varphi - \varphi', \quad ds = a d\varphi, \quad ds' = A d\varphi',$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Aa \cos(\varphi - \varphi') d\varphi d\varphi'}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa \cos(\varphi - \varphi')}} = -4\pi \sqrt{Aa} \left\{ \left(c - \frac{2}{c} \right) F + \frac{2}{c} E \right\},$$

где $c = \frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + b^2}}$, а F и E — полные эллиптические интегралы модуля c .

Отсюда, помня, что

$$\frac{dF}{dc} = \frac{1}{c(1-c^2)} \{E - (1-c^2)F\}, \quad \frac{dE}{dc} = \frac{1}{c} (E - F)$$

и что c есть функция b , мы находим

$$\frac{dM}{db} = \frac{\pi}{\sqrt{Aa}} \frac{bc}{1-c^2} \{(2-c^2)E - 2(1-c^2)F\}.$$

Если обозначить через r_1 и r_2 наибольшее и наименьшее значения r , т. е. $r_1^2 = (A+a)^2 + b^2$, $r_2^2 = (A-a)^2 + b^2$,

и через γ — угол, у которого $\cos \gamma = r_2/r_1$, то

$$\frac{dM}{db} = -\pi \frac{b \sin \gamma}{\sqrt{Aa}} \{2F_\gamma - (1 + \sec^2 \gamma) E_\gamma\},$$

где F_γ и E_γ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, модули которых равны $\sin \gamma$.

Если $A=a$, то $\operatorname{ctg} \gamma = b/2a$ и

$$\frac{dM}{db} = -2\pi \cos \gamma \{2F_\gamma - (1 + \sec^2 \gamma) E_\gamma\}.$$

Величина — dM/db характеризует притяжение двух параллельных круговых контуров, в каждом из которых сила тока равна единице.

Ввиду важности величины M для электромагнитных вычислений значения $\lg(M/4\pi\sqrt{Aa})$, являющегося функцией c и, следовательно, только γ , протабулированы в интервале углов γ от 60 до 90 градусов через b' .

Второе выражение для M

Другое выражение для M , иногда более удобное, получается, если положить $c_1 = (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)$; в этом случае

$$M = 8\pi \sqrt{Aa} \frac{1}{\sqrt{c_1}} \{F(c_1) - E(c_1)\}.$$

Как проводить линии магнитной силы для кругового тока

702. Линии магнитной силы лежат, очевидно, в плоскостях, проходящих через ось окружности; вдоль каждой из этих линий величина M постоянна.

Вычислим величину $K_\vartheta = \frac{\sin \vartheta}{(F_{\sin \vartheta} - E_{\sin \vartheta})^2}$ из таблицы Лежандра для достаточно большого числа значений ϑ .

Нанесем на листе бумаги оси прямоугольной системы координат x и z ; построим окружность с центром в точке $x = (a/2)(\sin \vartheta + \operatorname{cosec} \vartheta)$ с радиусом $(a/2) \cdot (\operatorname{cosec} \vartheta - \sin \vartheta)$. Для всех точек этой окружности величина c_1 будет равна $\sin \vartheta$. Следовательно, для всех точек этой окружности

$$M = 8\pi \sqrt{Aa} \frac{1}{\sqrt{K_\vartheta}}, \quad A = \frac{1}{64\pi^2} \frac{M^2 K_\vartheta}{a}.$$

Теперь A является тем значением x , для которого была найдена величина M . Таким образом, если мы проведем линию, на которой $x = A$, она пересечет окружность в двух точках, имеющих заданное значение M .

Задавая последовательно значения величины M , меняющиеся по закону арифметической прогрессии, для A получим последовательность квадратов. Поэтому

му рисуя, семейство линий, параллельных z , на которых x принимает найденные значения A , мы получим, что точки, в которых эти линии пересекаются с окружностью, будут именно теми точками, в которых эту окружность пересекают соответствующие линии силы.

Если положить $m = 8\pi a$ и $M = nm$, то $A = x = n^2 K \theta a$.

Величину n мы можем назвать индексом линии силы.

Вид этих линий показан на рис. XVIII в конце тома. Они воспроизведены с рисунков, данных сэром У. Томсоном в его статье о «Вихревом движении»².

703. Если положение окружности, ось которой известна, считать заданным через расстояние b от ее центра до какой-либо фиксированной точки на оси и через ее радиус a , то коэффициент индукции M окружности по отношению к произвольной системе, состоящей из магнитов или токов, подчиняется следующему уравнению:

$$\frac{d^2 M}{da^2} + \frac{d^2 M}{db^2} - \frac{1}{a} \frac{dM}{da} = 0. \quad (1)$$

Чтобы доказать это, посмотрим, какое число линий магнитной силы будет пересекать окружность, если менять a или b .

(1). Пусть a становится равным $a + \delta a$, а b остается постоянным. При такой вариации окружность, расширяясь, прочертит в своей плоскости кольцевую площадку шириной δa .

Если через V обозначить магнитный потенциал в произвольной точке, а ось y направить параллельно оси окружности, то магнитная сила, перпендикулярная плоскости кольца, будет равна $-dV/dy$.

Для того чтобы найти поток магнитной индукции через эту кольцевую поверхность, мы должны взять интеграл $-\int_0^{2\pi} a \delta a \frac{dV}{dy} d\vartheta$, где ϑ есть угловое положение точки на кольце.

Но эта величина представляет собой вариацию M , обусловленную изменением a , т. е. $(dM/da) \delta a$. Отсюда

$$\frac{dM}{da} = - \int_0^{2\pi} a \frac{dV}{dy} d\vartheta. \quad (2)$$

(2). Пусть b принимает значение $b + \delta b$, а a остается постоянным. При такой вариации окружность прочерчивает цилиндрическую поверхность радиуса a длиной δb .

Магнитная сила, перпендикулярная к этой поверхности, равна в любой точке величине $-dV/dr$, где r — расстояние от оси.

Отсюда

$$\frac{dM}{db} = \int_0^{2\pi} a \frac{dV}{dr} d\vartheta. \quad (3)$$

² *Trans. R. S. Edin.*, vol. XXV, p. 217 (1869).

Дифференцируя уравнение (2) по a и уравнение (3) по b , получаем

$$\frac{d^2M}{da^2} = - \int_0^{2\pi} \frac{dV}{dy} d\vartheta - \int_0^{2\pi} a \frac{d^2V}{dr dy} d\vartheta, \quad (4)$$

$$\frac{d^2M}{db^2} = \int_0^{2\pi} a \frac{d^2V}{dr dy} d\vartheta. \quad (5)$$

Следовательно,

$$\frac{d^2M}{da^2} + \frac{d^2M}{db^2} = - \int_0^{2\pi} \frac{dV}{dy} d\vartheta = - \frac{1}{a} \frac{dM}{da}, \quad \text{согласно (2)}. \quad (6)$$

Переносим последний член в левую часть, мы получаем уравнение (1).

*Коэффициент индукции двух параллельных окружностей
в случае, когда расстояние между их дугами мало
по сравнению с радиусами обеих окружностей*

704. Для этого случая мы могли бы получить величину M из разложения приведенных выше эллиптических интегралов при близких к единице значениях их модуля. Однако метод, который последует далее, представляет собой более непосредственное применение электрических принципов.

Первое приближение

Пусть радиусы окружностей равны a и $a+c$, а расстояние между их плоскостями равно b ; тогда кратчайшее расстояние между дугами окружностей равно $r = \sqrt{c^2 + b^2}$.

Мы должны найти поток магнитной индукции сквозь одну из окружностей, обусловленный единичным током, протекающим по другой окружности.

Мы начнем с предположения, что обе окружности лежат в одной плоскости. Рассмотрим малый элемент δs окружности, радиус которой равен $a+c$. В точке, находящейся в плоскости окружности на расстоянии ρ от середины δs и в направлении, образующим с направлением δs угол ϑ , магнитная сила, обусловленная элементом δs , перпендикулярна плоскости окружности и равна $(1/\rho^2) \sin\vartheta \delta s$.

Чтобы вычислить поверхностный интеграл от этой силы по поверхности, лежащей внутри окружности радиуса a , мы должны найти значение интеграла

$$2\delta s \int_{\vartheta_1}^{\pi/2} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\sin\vartheta}{\rho} d\vartheta d\rho,$$

где r_1 и r_2 являются корнями уравнения

$$r^2 - 2(a+c) \sin\vartheta r + c^2 + 2ac = 0,$$

а именно

$$r_1 = (a + c) \sin \vartheta + \sqrt{(a + c)^2 \sin^2 \vartheta - c^2 - 2ac},$$

$$r_2 = (a + c) \sin \vartheta - \sqrt{(a + c)^2 \sin^2 \vartheta - c^2 - 2ac}$$

и

$$\sin^2 \vartheta_1 = \frac{c^2 + 2ac}{(c + a)^2}.$$

Когда c мало по сравнению с a , мы можем положить

$$r_1 = 2a \sin \vartheta, \quad r_2 = c / \sin \vartheta.$$

Интегрируя по ρ , имеем

$$2\delta s \int_{\vartheta_1}^{\frac{1}{2}\pi} \ln \left(\frac{2a}{c} \sin^2 \vartheta \right) \cdot \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$= 2\delta s \left[\cos \vartheta \left\{ 2 - \ln \left(\frac{2a}{c} \sin^2 \vartheta \right) \right\} + 2 \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right]_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} = 2\delta s \left(\ln \frac{8a}{c} - 2 \right) \quad (\text{приближенно}).$$

Таким образом, для всей индукции получаем

$$M_{ac} = 4\pi a \left(\ln \frac{8a}{c} - 2 \right).$$

Так как магнитная сила в произвольной точке, расстояние от которой до искривленного провода мало по сравнению с его радиусом кривизны, приблизительно такая же, что и магнитная сила прямого провода, мы можем (п. 684) подсчитать разность между потоком индукции через окружность радиуса $a - c$ и окружность A по формуле

$$M_{aA} - M_{ac} = 4\pi a \{ \ln c - \ln r \}.$$

Откуда приближенно при условии, что радиус r мал по сравнению с a , находим величину потока индукции между A и a :

$$M_{Aa} = 4\pi a (\ln 8a - \ln r - 2).$$

705. Поскольку взаимная индукция между двумя витками одной и той же катушки представляет собой весьма важную величину для расчетов экспериментальных результатов, я опишу сейчас метод, с помощью которого приближение к M для данного случая может быть осуществлено с любой требуемой степенью точности.

Мы будем предполагать, что величина M представлена в виде

$$M = 4\pi \left\{ A \ln \frac{8a}{r} + B \right\},$$

где

$$A = a + A_1 x + A_2 \frac{x^2}{a} + A_2' \frac{y^2}{a} + A_3 \frac{x^3}{a^2} + A_3' \frac{xy^2}{a^2} + \dots$$

$$+ a^{-(n-1)} \{ x^n A_n + x^{n-2} y^2 A_n' + x^{n-4} y^4 A_n'' + \dots \} + \dots$$

и

$$B = -2a + B_1x + B_2 \frac{x^2}{a} + B'_2 \frac{y^2}{a} + B_3 \frac{x^3}{a^2} + B'_3 \frac{xy^2}{a^2} + \dots,$$

a и $a+x$ — радиусы окружностей, а y — расстояние между их плоскостями.

Нам нужно определить значения коэффициентов A и B . Очевидно, что они могут содержать только четные степени y , потому что при изменении знака y величина M должна остаться неизменной.

Другой набор условий мы получаем из свойства взаимности коэффициента индукции, который остается тем же самым независимо от того, какую из окружностей мы берем в качестве первичной. Поэтому величина M должна остаться той же самой, когда в приведенных выше выражениях мы подставим $a+x$ вместо a и $-x$ вместо x .

Приравнявая коэффициенты при одинаковых сочетаниях x и y , мы находим таким способом следующие условия взаимности:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - A_1, & B_1 &= 1 - 2 - B_1 \\ A_3 &= -A_2 - A_3, & B_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} A_1 + A_2 - B_2 - B_3, \\ A'_3 &= -A'_2 - A'_3, & B'_3 &= A'_2 - B'_2 - B'_3; \\ (-)^n A_n &= A_2 + (n-2) A_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} A_4 + \dots + A_n, \\ (-)^n B_n &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} A_1 - \frac{1}{n-2} A_2 + \dots + (-)^n A_{n-1} + \\ &+ B_2 + (n-2) B_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} B_4 + \dots + B_n. \end{aligned}$$

Из общего уравнения для M , п. 703,

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{d^2 M}{dy^2} - \frac{1}{a+x} \frac{dM}{dx} = 0$$

мы получаем другой ряд условий:

$$\begin{aligned} 2A_2 + 2A'_2 &= A_1, & 2A_2 + 2A'_2 + 6A_3 + 2A'_3 &= 2A_2; \\ n(n-1) A_n + (n+1) n A_{n+1} + 1 \cdot 2 A'_n + 1 \cdot 2 A'_{n+1} &= n A_n, \\ (n-2)(n-3) A'_n + (n-1)(n-2) A'_{n+1} + 3 \cdot 4 A''_n + 3 \cdot 4 A''_{n+1} &= (n-2) A'_n, \dots; \\ 4A_2 + A_1 &= 2B_2 + 2B'_2 - B_1 = 4A'_2, \\ 6A_3 + 3A_2 &= 2B'_2 + 6B_3 + 2B'_3 = 6A'_3 + 3A'_2, \\ (2n-1) A_n + (2n+2) A_{n+1} &= (2n-1) A'_n + (2n+2) A'_{n+1} = \\ &= n(n-2) B_n + (n+1) n B_{n+1} + 1 \cdot 2 B'_n + 1 \cdot 2 B'_{n+1}. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения и подставляя значения коэффициентов, мы приводим ряд для M к виду

$$\begin{aligned} M &= 4\pi a \ln \frac{8a}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{x^2 + 3y^2}{16a^2} - \frac{x^3 + 3xy^2}{32a^3} + \dots \right\} + \\ &+ 4\pi a \left\{ -2 - \frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{3x^2 - y^2}{16a^2} - \frac{x^3 - 6xy^2}{48a^3} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Как найти форму катушки, у которой при заданной длине и толщине провода коэффициент самоиндукции максимален

706. Опуская поправки, приведенные в п. 705, мы в соответствии с результатами п. 693 находим

$$L = 4\pi n^2 a [\ln(8a/R) - 2],$$

где n — число витков провода, a — средний радиус катушки, R — среднегеометрическое расстояние поперечного сечения катушки от самого себя, см. п. 691. Если это сечение всюду подобно самому себе, то расстояние R пропорционально его линейным размерам, а n меняется как R^2 .

Так как полная длина провода равна $2\pi an$, то a меняется обратно пропорционально n . Следовательно,

$$\frac{dn}{n} = 2 \frac{dR}{R} \quad \text{и} \quad \frac{da}{a} = -2 \frac{dR}{R},$$

и мы находим условие, при котором L может иметь максимум:

$$\ln \frac{8a}{R} = \frac{7}{2}.$$

Если катушка имеет круговое поперечное сечение радиуса c , то, согласно п. 692, $\ln(R/c) = -(1/4)$ и $\ln(8a/c) = (13/4)$, откуда $a = 3,22 c$, или, для того чтобы такая катушка имела максимальный коэффициент самоиндукции, ее средний радиус должен превышать радиус поперечного сечения катушки в 3,22 раза. Этот результат был получен Гауссом³.

Если каркас, на который наматывается катушка, имеет квадратное поперечное сечение, средний диаметр катушки должен в 3,7 раз превышать сторону квадрата.

ГЛАВА XV

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРИБОРЫ

Гальванометры

707. Гальванометр — это прибор, позволяющий регистрировать или измерять электрический ток по его магнитному действию.

Когда этот прибор предназначен для обнаружения существования слабого тока, его называют чувствительным гальванометром.

Когда он предназначен для измерения тока в стандартных единицах с максимальной точностью, его называют эталонным гальванометром.

Все гальванометры основаны на принципе Швайгеровского умножителя (Schweigger's Multiplier), в котором ток пропускается через провод, намотанный таким образом, чтобы он многократно проходил вокруг некоторой открытой области пространства, где подвешен магнит, и создавал в этой области электромагнитную силу, интенсивность которой измеряется при помощи магнита.

³ Werke, Göttingen edition, 1867, Bd. V, p. 622.

У чувствительных гальванометров катушка устроена таким образом, что ее витки занимают положение, при котором они максимально воздействуют на магнит. Поэтому витки укладываются плотно друг к другу, чтобы быть ближе к магниту.

Эталонные гальванометры конструируются так, чтобы размеры и относительное положение всех неподвижных частей были бы точно известны, а небольшие неточности в определении положения подвижных частей вносили бы в расчеты возможно меньшую ошибку.

При создании чувствительного гальванометра мы стремимся сделать поле магнитной силы, в которое подвешивается магнит, по возможности более интенсивным. При конструировании эталонного гальванометра мы хотим сделать поле электромагнитной силы около магнита как можно более однородным и должны знать точное значение его интенсивности при заданной силе тока в катушке.

Об эталонных гальванометрах

708. В эталонном гальванометре сила тока должна быть определена через силу, с которой он воздействует на подвешенный магнит. Но распределение магнетизма внутри магнита, равно как и положение его центра в подвешенном состоянии, не могут быть установлены со сколько-нибудь высокой степенью точности. Поэтому необходимо сконструировать катушку так, чтобы она создавала поле силы, очень близкое к однородному во всей той области, где может находиться магнит при возможных перемещениях. Следовательно, размеры катушки должны в общем случае значительно превышать размеры магнита.

При надлежащем размещении нескольких катушек можно создать внутри них существенно более однородное поле силы, чем при использовании только одной катушки; при этом и размеры прибора могут быть уменьшены, и его чувствительность повышена. Однако ошибки в измерении линейных размеров вносят большую неопределенность в значения электрических постоянных малых приборов, нежели больших. Поэтому лучше определять электрические постоянные небольших приборов не путем непосредственного измерения их размеров, а при электрическом сравнении с большими эталонными приборами, для которых размеры известны более точно, см. п. 752.

Во всех эталонных гальванометрах используются круглые катушки. Каркас, на который должна быть намотана катушка, вытачивается очень тщательно. Его ширина делается равной некоторому целому числу n диаметров провода с покрытием. В боковой стенке каркаса просверливается отверстие для ввода провода; через это отверстие пропускается один конец провода, образующий внутреннее сочленение к катушке. К каркасу прикрепляется деревянная ось, и он помещается в токарный станок, см. рис. 49. К деревянной оси в той же части периметра, где вводится провод, прикрепляется конец длинной нити. Все это затем приводится во вращение, и провод плавно и ровно укладывается на дно каркаса до тех пор, пока оно полностью не покроется n витками. При этом нить тоже n раз наматывается на деревянную ось; на ее n -м витке вбивается гвоздик.

Витки нити следует наматывать так, чтобы их легко было сосчитать. После этого замеряется внешний периметр первого слоя намотки и начинается новый слой, и так до тех пор, пока не будет намотано нужное число слоев. Назначение

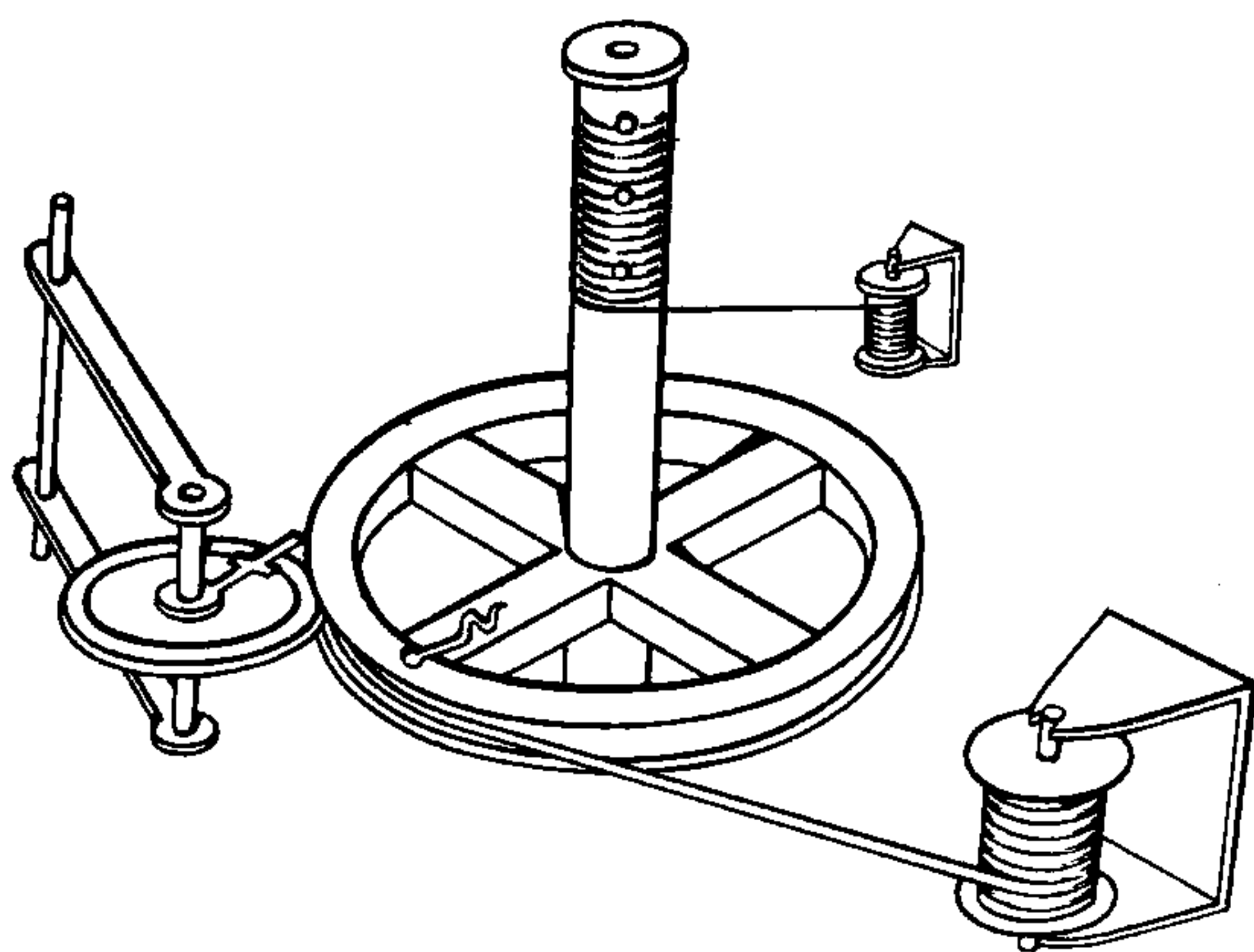


Рис. 49

нити состоит в том, чтобы можно было сосчитать число витков. Если по какой-то причине мы должны размотать часть катушки, то нить тоже разматывается, и мы не потеряем счет действительному числу витков катушки. Гвоздики служат для того, чтобы различать число витков в каждом слое.

Измерение периметра каждого слоя контролирует регулярность намотки и позволяет вычислять электрические постоянные катушки. Действительно, если взять среднее арифметическое от периметра каркаса и внешнего слоя и добавить

к нему периметры всех промежуточных слоев, а затем разделить сумму на число слоев, то получится средний периметр, откуда можно получить величину среднего радиуса катушки. Периметр каждого слоя можно измерить с помощью стальной рулетки, а еще лучше — с помощью градуированного колесика, которое катится по катушке, когда она поворачивается в процессе намотки. Цена делений на рулетке или на колесике должна быть установлена путем сравнения с прямолинейной шкалой.

709. Момент силы, с которой единичный ток в катушке воздействует на подвешенную часть аппаратуры, можно выразить в виде ряда

$$G_1 g_1 \sin \vartheta + G_2 g_2 \sin \vartheta P'_2(\vartheta) + \dots,$$

где коэффициенты G относятся к катушке, коэффициенты g — к подвешенной аппаратуре, ϑ — угол между осью катушки и осью подвешенной аппаратуры, см. п. 700.

Если подвешенная часть аппаратуры представляет собой длинный стержневой магнит длиной $2l$, однородно намагниченный в продольном направлении с единичной мощностью и прикрепленный к подвесу за середину, то $g_1 = 2l$, $g_2 = 0$, $g_3 = 2l^3$, Значения этих коэффициентов для стержневого магнита длины $2l$, намагниченного любым другим способом, оказываются меньшими, чем при однородном намагничении.

710. Если прибор используется как тангенс-гальванометр, то катушка закрепляется таким образом, чтобы плоскость ее была вертикальна и параллельна направлению земной магнитной силы. Уравнение равновесия магнита в этом случае

$$mg_1 H \cos \vartheta = m\gamma \sin \vartheta \{G_1 g_1 + G_2 g_2 P'_2(\vartheta) + \dots\},$$

где mg_1 — магнитный момент магнита, H — горизонтальная составляющая земной магнитной силы, γ — сила тока в катушке. Когда длина магнита мала по сравнению с радиусом катушки, то всеми членами по G и g после первого можно пренебречь, и мы находим $\gamma = (H/G_1) \operatorname{ctg} \vartheta$.

Обычно измеряется угол отклонения магнита δ , который является дополнительным к ϑ , так что $\operatorname{ctg} \vartheta = \operatorname{tg} \delta$.

Ток, таким образом, пропорционален тангенсу угла отклонения, поэтому прибор называют тангенс-гальванометром.

При другом методе все устройство может вращаться вокруг вертикальной оси; его поворачивают до тех пор, пока магнит не окажется в равновесии, при котором его ось параллельна плоскости катушки. Если угол между плоскостью катушки и магнитным меридианом равен δ , то уравнение равновесия следующее:

$$mg_1 H \sin \delta = m\gamma \left\{ G_1 g_1 - \frac{3}{2} G_3 g_3 + \dots \right\},$$

откуда $\gamma = \frac{H}{(G_1 - \dots)} \sin \delta$.

Поскольку ток измеряется через синус угла отклонения, то прибор, используемый в таком режиме, называется синус-гальванометром.

Метод синусов может быть применен лишь в том случае, когда ток меняется настолько плавно, что его можно считать постоянным в течение всего времени регулировки прибора и установления магнита в равновесии.

711. Теперь нам надо рассмотреть устройство катушек эталонного гальванометра.

Простейшим является гальванометр, в котором имеется лишь одна катушка, а в центре ее подвешен магнит.

Пусть A — средний радиус катушки, ξ — ее высота, η — ширина, а n — число витков; тогда значения коэффициентов равны

$$G_1 = \frac{2\pi n}{A} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \frac{\xi^2}{A^2} - \frac{1}{8} \frac{\eta^2}{A^2} \right\}, \quad G_2 = 0.$$

$$G_3 = -\frac{\pi n}{A^3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{A^2} - \frac{5}{8} \frac{\eta^2}{A^2} \right\}, \quad G_4 = 0, \dots$$

Основная поправка возникает из-за G_3 . Ряд $G_1 g_1 + G_3 g_3 P'_3(\vartheta)$ приближенно принимает вид

$$G_1 g_1 \left(1 - 3 \frac{1}{A^2} \frac{g_3}{g_1} \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \right).$$

Когда магнит намагничен однородно и $\vartheta = 0$, поправочный множитель сильнее всего отличается от единицы. В этом случае он равен $1 - 3(l^2/A^2)$. При $\operatorname{tg} \vartheta = 2$, т. е. когда угол отклонения равен $\operatorname{arctg}(1/2)$, или $26^\circ 34'$, этот множитель обращается в нуль. Поэтому некоторые экспериментаторы проводят свои опыты так, чтобы сделать наблюдаемое отклонение максимально близким к этому углу. Однако самый лучший метод состоит в использовании такого короткого по сравнению с радиусом катушки магнита, что можно вообще пренебречь всеми поправками.

Подвешенный магнит тщательно устанавливается так, чтобы центр его как можно точнее совпадал с центром катушки. Если, однако, регулировка несовершенна и координаты центра магнита относительно центра катушки равны

x, y, z (z измеряется параллельно оси катушки), то корректирующий множитель равен

$$\left(1 + \frac{3}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{A^2}\right).$$

Для катушки большого радиуса при тщательно проведенной установке магнита мы можем считать эти поправки неощутимыми.

Прибор Гогейна (Gaugain)

712. Чтобы избавиться от поправок, связанных с величиной G_3 , Гогейн сконструировал такой гальванометр, для которого этот член уменьшается до нуля; это достигается путем подвешивания магнита не в центре катушки, а в точке ее оси, отстоящей от центра на половину радиуса катушки. Формула для G_3 такова:

$$G_3 = 4\pi \frac{A^2 \left(B^2 - \frac{1}{4} A^2\right)}{C^7},$$

и поскольку для этой конструкции $B=A/2$, то $G_3=0$.

Эта конструкция могла бы считаться улучшенной по сравнению с предыдущей, если бы мы были уверены в том, что центр подвешенного магнита находится точно в найденной таким образом точке. Однако положение центра магнита всегда обладает некоторой неопределенностью, и эта неопределенность вводит корректирующий множитель неизвестной величины, зависящий от G_2 вида $\left(1 - \frac{6}{5} \frac{z}{A}\right)$, где z — неизвестное превышение расстояния центра магнита от плоскости катушки. Эта поправка зависит от первой степени z/A . Таким образом, катушка Гогейна с эксцентрически подвешенным магнитом подвержена гораздо большим неточностям, чем прежняя конструкция.

Прибор Гельмгольца

713. Гельмгольц преобразовал гальванометр Гогейна в более надежный прибор, поместив на том же расстоянии по другую сторону от магнита вторую катушку, одинаковую с первой.

Размещая эти катушки симметрично по обе стороны от магнита, мы сразу же избавляемся от всех членов четного порядка.

Пусть A — средний радиус любой из катушек; расстояние между их средними плоскостями также берется равным A . Магнит подвешивается в средней точке их общей оси. Коэффициенты равны:

$$G_1 = \frac{16\pi n}{5\sqrt{5}} \frac{1}{A} \left(1 - \frac{1}{60} \frac{\xi^2}{A^2}\right),$$

$$G_2 = 0, \quad G_3 = 0,0512 \frac{\pi n}{3\sqrt{5} A^5} (31\xi^2 - 36\eta^2),$$

$$G_4 = 0, \quad G_5 = -0,73728 \frac{\pi n}{\sqrt{5} A^5},$$

где n обозначает число витков в обеих катушках, вместе взятых.

Из этих результатов следует, что если каркас катушки с намоткой по Φ имеет прямоугольное сечение высотой ξ и шириной η , то величина G_3 с учетом по-

правки на конечные размеры сечения будет малой, а при отношении ξ^2 к η^2 , равном 36 к 31, она обращается в ноль.

Поэтому совсем не обязательно стараться наматывать катушку на коническую поверхность, как это делалось некоторыми изготовителями приборов, ибо соответствующим условиям можно удовлетворить с помощью катушек прямоугольного сечения, которые могут быть изготовлены с гораздо большей точностью, чем катушки, намотанные на конус с широким раствором.

Расположение катушек в двойном гальванометре Гельмгольца представлено на рис. 53 в п. 725.

Поле силы, создаваемое двойной катушкой в плоскости ее сечения, представлено на рис. XIX в конце данного тома.

Четырехкатушечный гальванометр

714. Комбинируя четыре катушки, можно избавиться от коэффициентов G_2 , G_3 , G_4 , G_5 и G_6 . При любой симметричной комбинации мы избавляемся от коэффициентов четных порядков. Пусть четыре катушки будут параллельны окружностям, принадлежащими одной и той же сфере, а соответствующие им углы равны ϑ , φ , $\pi - \varphi$ и $\pi - \vartheta$.

Пусть число витков в первой и четвертой катушках равно n , а во второй и третьей — pn . Тогда условие того, что для этой комбинации $G_2=0$, дает

$$n \sin^2 \vartheta P'_3(\vartheta) + pn \sin^2 \varphi P'_3(\varphi) = 0, \quad (1)$$

а условие того, что $G_5=0$, дает

$$n \sin^2 \vartheta P'_5(\vartheta) + pn \sin^2 \varphi P'_5(\varphi) = 0. \quad (2)$$

Полагая

$$\sin^2 \vartheta = x \quad \text{и} \quad \sin^2 \varphi = y \quad (3)$$

и выражая P'_3 и P'_5 (п. 698) через эти величины, получим в качестве уравнений (1) и (2)

$$4x - 5x^2 + 4py - 5py^2 = 0, \quad (4)$$

$$8x - 28x^2 + 21x^3 + 8py - 28py^2 + 21py^3 = 0. \quad (5)$$

Дважды вычитая (4) из (5) и деля на 3, получаем

$$6x^2 - 7x^3 + 6py^2 - 7py^3 = 0. \quad (6)$$

Следовательно, из (4) и (6) имеем

$$p = \frac{x}{y} \frac{5x-4}{4-5y} = \frac{x^2}{y^2} \frac{7x-6}{6-7y},$$

и мы получаем

$$y = \frac{4}{7} \frac{7x-6}{5x-4}, \quad \frac{1}{p} = \frac{32}{49x} \frac{7x-6}{(5x-4)^3}.$$

Как x , так и y являются квадратами синусов углов и должны поэтому лежать в пределах от 0 до 1. Следовательно, либо x лежит между 0 и $4/7$, при этом y находится между $6/7$ и 1, а $1/p$ — между ∞ и $49/32$, или же x лежит между $6/7$ и 1, при этом y находится между 0 и $4/7$, а $1/p$ — между 0 и $32/49$.

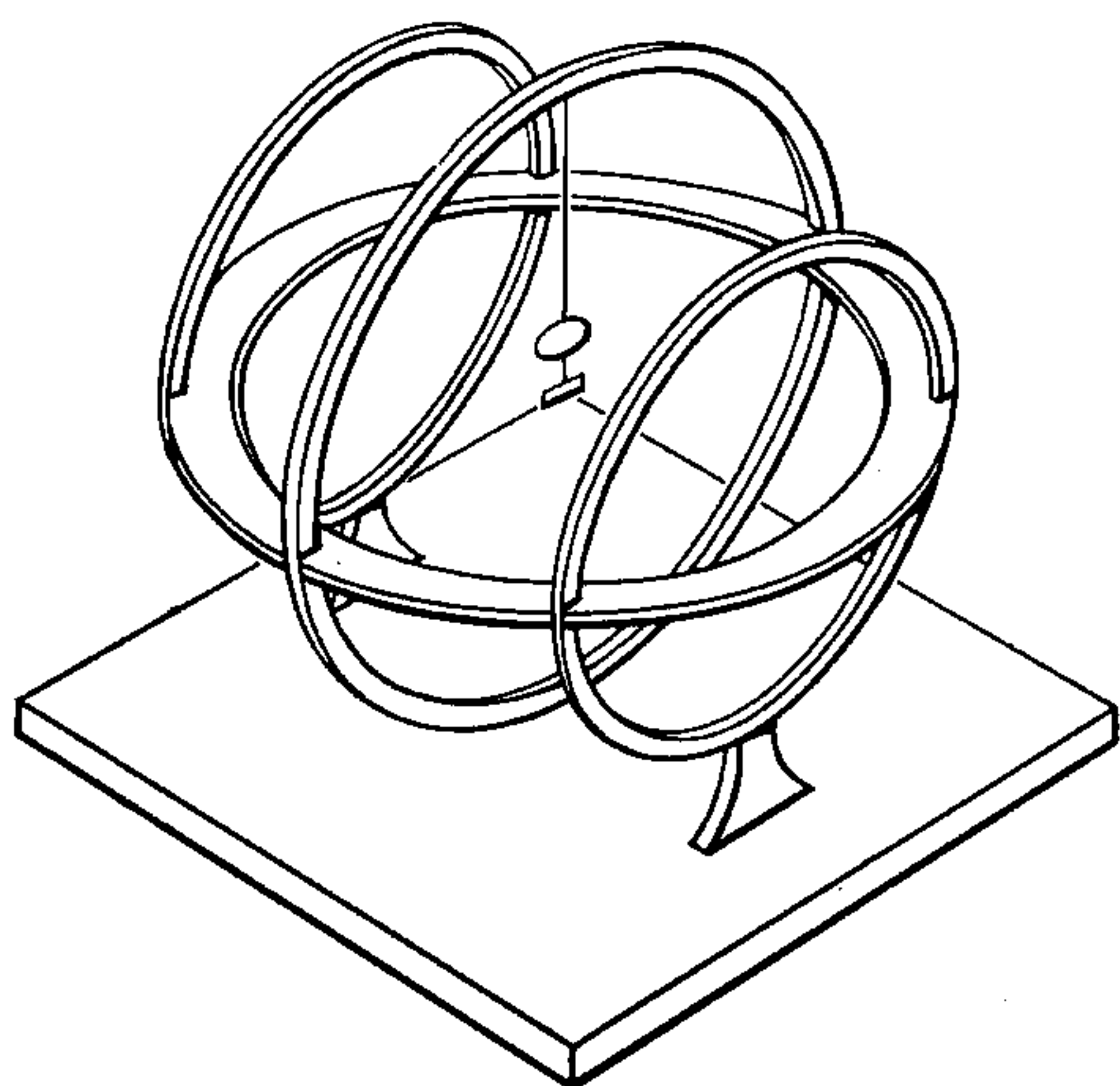


Рис. 50

Трехкатушечный гальванометр

715. Наиболее удобным является расположение катушек, при котором $x=1$. В этом случае две катушки совмещаются друг с другом и образуют большую окружность сферы радиуса C . Число витков в этой составной катушке равно 64. Две другие катушки образуют малые окружности сферы. Радиус каждой из них равен $\sqrt{(4/7)C}$. Расстояние от каждой из них до плоскости первой катушки равно $\sqrt{(3/7)C}$. Число витков в каждой из этих катушек равно 49.

Значение G_1 равно $240\pi/C$.

Такое расположение катушек показано на рис. 50.

Поскольку для такого трехкатушечного гальванометра первым после G_1 членом, имеющим конечное значение, является G_7 , то в большей части пространства внутри сферы, на поверхности которой лежат катушки, поле силы будет довольно однородным.

Если бы мы могли намотать провод по всей сферической поверхности, как описано в п. 672, мы получили бы поле абсолютно однородной силы. Однако, даже отвлекаясь от того, что область внутри такой катушки, образующей замкнутую поверхность, недоступна извне, практически невозможно распределить обмотку на сферической поверхности с достаточной точностью.

Исключая из цепи тока среднюю катушку и пропуская ток через две боковые катушки в противоположных направлениях, мы получаем поле силы, которое в направлении оси обладает почти однородным действием на магнит или катушку, подвешенные в нем так, что их ось совпадает с осью катушек, см. п. 673. Действительно, в этом случае все коэффициенты нечетных порядков исчезают, а в силу равенства $\mu = \sqrt{3/7}$ мы имеем $P'_4 = (5/2)\mu(7\mu^2 - 3) = 0$.

Следовательно, выражение (6) п. 695 для магнитного потенциала вблизи центра катушки принимает вид

$$\omega = \frac{8}{7} \sqrt{\frac{3}{7}} \pi n \left\{ -3 \frac{r^2}{C^2} P_2(\vartheta) + \frac{11}{7} \frac{r^6}{C^6} P_6(\vartheta) + \dots \right\},$$

где n — число витков в каждой из катушек.

О необходимой толщине провода гальванометра при заданном внешнем сопротивлении

716. Пусть форма каркаса, внутри которого наматывается катушка гальванометра, задана и требуется определить, должен ли он быть заполнен длинным тонким или коротким толстым проводом.

Пусть l — длина провода, y — его радиус, $y+b$ — радиус провода с покрытием, ρ — удельное сопротивление, g — значение G для единицы длины провода, а r — та часть сопротивления, которая не зависит от гальванометра.

Сопротивление провода гальванометра равно $R = \frac{\rho}{\pi} \frac{l}{y^2}$.

Объем катушки равен $V = \pi l (y+b)^2$.

Электромагнитная сила равна γG , где γ — сила тока, а $G = gl$.

Если E является электродвижущей силой, действующей в контуре с сопротивлением $R+r$, то $E = \gamma(R+r)$.

Электромагнитная сила, обусловленная этой электродвижущей силой, равна $EG/(R+r)$, ее мы и должны сделать максимальной, меняя величины y и l .

Перевертывая эту дробь, мы получаем выражение $\frac{\rho}{\pi g} \frac{1}{y^2} + \frac{r}{gl}$, которое следует сделать минимальным. Следовательно, $2 \frac{\rho}{\pi} \frac{dy}{y^3} + \frac{r}{l^2} dl = 0$.

Если объем катушки остается постоянным, то $\frac{dl}{l} + 2 \frac{dy}{y+b} = 0$.

Исключая dl и dy , получаем $\frac{\rho}{\pi} \frac{y+b}{y^3} = \frac{r}{l}$, или $\frac{r}{R} = \frac{y+b}{y}$.

Таким образом, толщина провода в гальванометре должна быть такой, чтобы внешнее сопротивление относилось к сопротивлению катушки гальванометра как диаметр провода вместе с изоляцией к диаметру собственно провода.

О чувствительных гальванометрах

717. При конструировании чувствительного гальванометра назначение каждой из его частей состоит в обеспечении максимально возможного отклонения магнита посредством малой заданной электродвижущей силы, приложенной между клеммами катушки.

Протекающий по проводу ток производит наибольшее действие тогда, когда он находится на возможно более близком расстоянии от подвешенного магнита. Магнит, однако, должен свободно колебаться, и поэтому какое-то пространство внутри катушки необходимо оставить пустым. Это определяет границу катушки изнутри.

Вне этой области каждый виток должен располагаться так, чтобы производить максимально возможное воздействие на магнит. По мере увеличения числа витков заполняются наиболее выгодные места, так что в конце концов сопротивление нового витка более уменьшает действие тока предыдущих витков, нежели сам новый виток добавляет к нему. Изготавливая внешние витки из более толстого провода, чем внутренние, мы получаем наибольший магнитный эффект при заданной электродвижущей силе.

718. Будем предполагать, что витки в гальванометре представляют собой окружности, а ось гальванометра проходит через центры этих окружностей под прямым углом к их плоскостям.

Пусть $r \sin \vartheta$ будет радиусом одной из этих окружностей, а $r \cos \vartheta$ — расстоянием между ее центром и центром гальванометра; тогда, если l есть длина участка провода, совпадающего с данной окружностью, а γ — текущий по нему

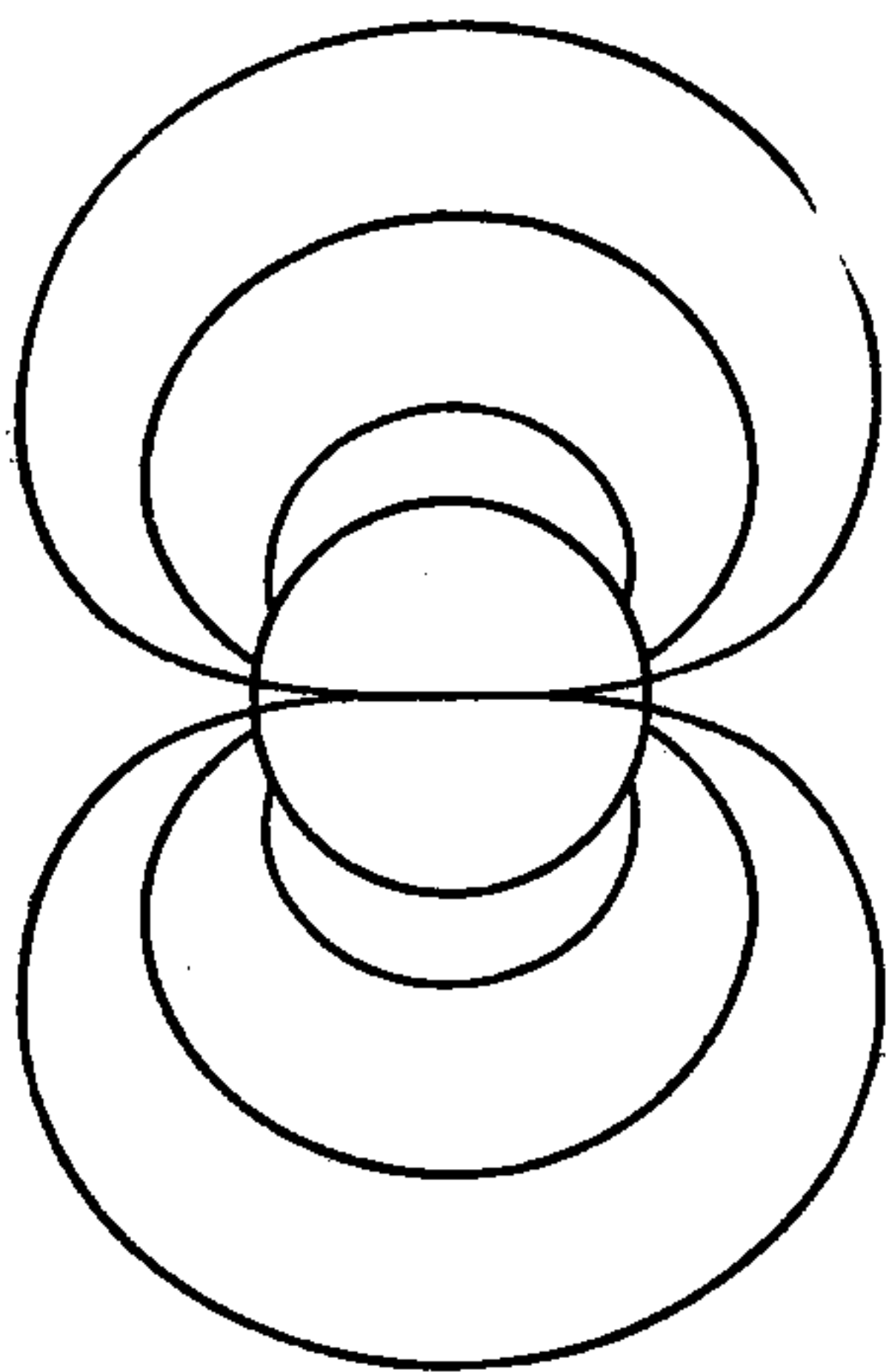


Рис. 51

ток, то магнитная сила в центре гальванометра, спроектированная на направление его оси, равна $\gamma l r^{-2} \sin \vartheta$.

Если записать

$$r^2 = x^2 \sin \vartheta, \quad (1)$$

то это выражение примет вид $\gamma l / x^2$.

Следовательно, если сделать поверхность, подобную одной из тех, сечения которых представлены на рис. 51 (их уравнение в полярных координатах имеет вид

$$r^2 = x_1^2 \sin \vartheta, \quad (2)$$

где x_1 — произвольная постоянная), то провод заданной длины, изогнутый в виде дуги окружности, будет производить большее магнитное действие, когда он лежит внутри этой поверхности, чем когда он находится вне ее. Отсюда сле-

дует, что внешняя поверхность любого слоя провода должна иметь постоянное значение x , так как, если x в одном месте больше, чем в другом, то можно часть провода переместить из первого места во второе и тем самым увеличить силу в центре гальванометра.

Полная сила, создаваемая катушкой, равна γG , где

$$G = \int \frac{dl}{x}, \quad (3)$$

интегрирование распространяется на всю длину провода, а x считается функцией l .

719. Пусть y — радиус провода, тогда площадь его поперечного сечения равна πy^2 . Пусть ρ — удельное сопротивление (отнесенное к единице объема) материала, из которого изготовлена проволока, тогда сопротивление провода длины l равно $l\rho / (\pi y^2)$, а полное сопротивление катушки

$$R = \frac{\rho}{\pi} \int \frac{dl}{y^2}, \quad (4)$$

где y рассматривается как функция l .

Пусть Y^2 — площадь четырехугольника, вершины которого совпадают с сечениями осей четырех ближайших проводов катушки, тогда $Y^2 l$ есть объем, занимаемый в катушке проводом длины l вместе с его изолирующим покрытием и той незаполненной частью пространства, которая с необходимостью остается между витками катушки. Следовательно, общий объем катушки равен

$$V = Y^2 dl, \quad (5)$$

где Y рассматривается как функция l .

Но поскольку катушка представляет собой фигуру вращения, то

$$V = 2\pi \iint r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta, \quad (6)$$

или, если выразить при помощи уравнения (1) r через x ,

$$V = 2\pi \int \int x^2 (\sin \vartheta)^{5/2} dx d\vartheta. \quad (7)$$

Далее интеграл $2\pi \int_0^\pi (\sin \vartheta)^{5/2} d\vartheta$ является численной величиной; обозначим ее через N , тогда

$$V = (1/3)Nx^3 - V_0, \quad (8)$$

где V_0 есть объем внутренней области, оставленной для магнита.

Рассмотрим теперь слой катушки, содержащийся между поверхностями x и $x+dx$.

Объем этого слоя равен

$$dV = Nx^2 dx = Y^2 dl, \quad (9)$$

где dl — длина провода в этом слое.

Это дает нам выражение dl через dx . Подставляя его в уравнения (3) и (4), находим

$$dG = N \frac{dx}{Y^2}, \quad (10)$$

$$dR = N \frac{\rho}{\pi} \frac{x^2 dx}{Y^2 y^2}, \quad (11)$$

где dG и dR представляют собой части величин G и R , относящиеся к данному слою катушки.

Далее, если E — заданная электродвижущая сила, то $E = \gamma(R+r)$, где r есть сопротивление внешней части контура, не зависящее от гальванометра; сила γG в центре равна: $\gamma G = EG/(R+r)$.

Мы должны, таким образом, путем надлежащего подбора сечения провода в каждом из слоев сделать величину $G/(R+r)$ максимальной. А это с неизбежностью приводит к изменениям Y , поскольку Y зависит от y .

Обозначим через G_0 и R_0 значения G и $R+r$ для того случая, когда данный слой исключен из вычислений. Тогда имеем

$$\frac{G}{R+r} = \frac{G_0 + dG}{R_0 + dR}, \quad (12)$$

и, для того чтобы путем вариации относящегося к этому слою значения y сделать данное выражение максимальным, мы должны иметь

$$\frac{\frac{d}{dy} \cdot dG}{\frac{d}{dy} \cdot dR} = \frac{G_0 + dG}{R_0 + dR} = \frac{G}{R+r}. \quad (13)$$

Так как dx есть величина малая и в пределе исчезающая, то отношение G_0/R_0 будет приближенно (а в пределе точно) одним и тем же независимо от того, какой слой исключен; следовательно, мы можем считать это отношение постоянным.

Тогда, согласно (10) и (11), мы имеем

$$\frac{\rho}{\pi} \frac{x^2}{y^2} \left(1 + \frac{Y}{y} \frac{dy}{dY} \right) = \frac{R+r}{G} = \text{constant.} \quad (14)$$

Если способ покрытия провода изолирующим слоем, а также способ его намотки таковы, что независимо от того, является провод толстым или тонким, между областью, заполненной металлом, и пространством между проводами соблюдается одна и та же пропорция, то $\frac{Y}{y} \cdot \frac{dy}{dY} = 1$, и мы должны взять как y , так и Y пропорциональными x ; иначе говоря, диаметр провода в любом слое должен быть пропорционален линейному размеру этого слоя.

Если же толщина изолирующего покрытия постоянна и равна b , а провода расположены в квадратном порядке, то

$$Y = 2(y + b) \quad (15)$$

и рассматриваемое условие записывается так:

$$\frac{x^2 (2y + b)}{y^3} = \text{constant.} \quad (16)$$

В этом случае диаметр провода возрастает с увеличением диаметра слоя, частью которого он является, но не в такой большой степени.

Если принять первую из этих двух гипотез, приблизительно верную в случае, когда собственно провод почти полностью заполняет всю область, то можно положить $y = \alpha x$, $Y = \beta y$, где α и β — постоянные численные величины, тогда

$$G = N \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right), \quad R = N \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{\alpha^4 \beta^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right),$$

где постоянная a зависит от размера и формы пустого пространства, оставшегося внутри катушки.

Следовательно, если толщину провода менять пропорционально x , мы будем получать очень небольшой выигрыш от увеличения внешнего размера катушки после того, как ее внешние размеры значительно превысят внутренние.

720. Если не считать недостатком увеличение сопротивления (как в случае, когда внешнее сопротивление значительно превышает внутреннее сопротивление гальванометра или когда нашей единственной задачей является получение поля значительной силы), мы можем сделать величины y и Y постоянными. Тогда мы имеем

$$G = \frac{N^2}{Y^2} (x - a), \quad R = \frac{1}{3} \frac{N}{Y^2 y^2} \frac{\rho}{\pi} (x^3 - a^3),$$

где a — постоянная, определяемая незаполненной областью внутри катушки. В этом случае величина G монотонно растет с увеличением размеров катушки, и на величину G нет никаких ограничений, за исключением тех, которые связаны с затратами труда и со стоимостью изготовления катушки.

О подвешенных катушках

721. В обычных гальванометрах неподвижная катушка воздействует на подвешенный магнит. Однако если достаточно аккуратно подвесить катушку, то мы можем определять действие магнита или другой катушки на подвешенную катушку по ее отклонению от положения равновесия.

Мы не можем, однако, ввести в катушку электрический ток, если нет металлического соединения между клеммами батареи и концами провода катушки. Такое соединение можно осуществить двумя различными способами — при помощи бифилярного подвеса и с помощью двух противоположно направленных проводов.

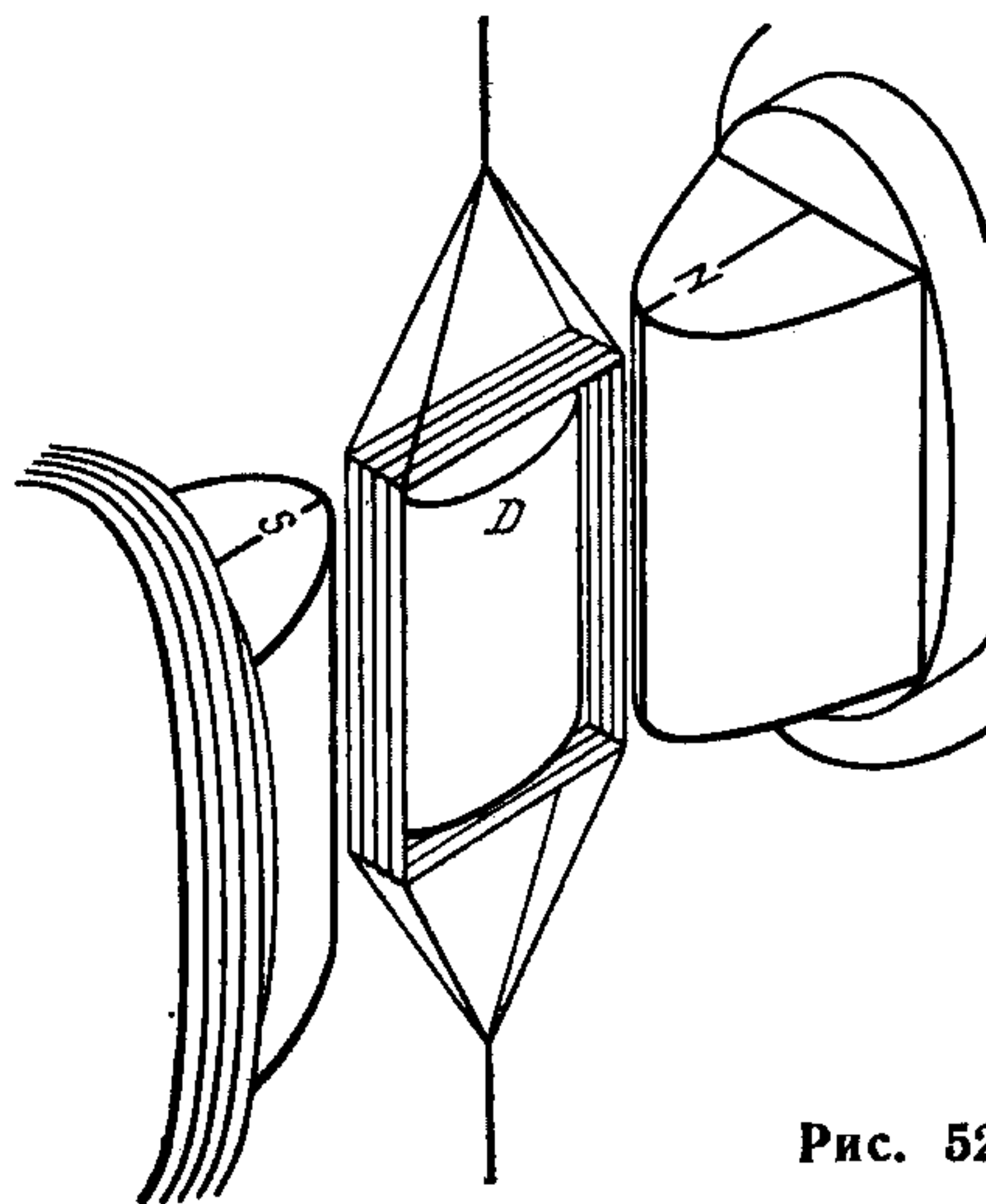


Рис. 52

Бифилярный подвес уже был описан в п. 459 применительно к магнитам. На рис. 54 показано устройство верхней части этого подвеса. В случае катушек обе нити уже не шелковые, а металлические, и поскольку кручение металлического провода, который в состоянии удерживать катушку и пропускать электрический ток, существенно превышает кручение шелковой нити, то это следует специально учитывать. В приборах, сконструированных Вебером, этот подвес был доведен до большой степени совершенства.

При другом способе подвешивание осуществляется при помощи одного провода, который присоединяется к одному из концов катушки. Второй конец катушки присоединяется к другому проводу, который вдоль той же вертикальной линии, что и первый провод, опущен вниз в чашку со ртутью, как показано на рис. 56 п. 726. В некоторых случаях удобно прикреплять концы двух проводов к каким-либо предметам, с помощью которых провода можно туго натягивать, следя, однако, чтобы при этом линия проводов проходила через центр тяжести катушки. Устройство такого типа можно использовать, когда ось не направлена вертикально, см. рис. 52.

722. Подвешенную катушку можно использовать в качестве очень чувствительного гальванометра, так как, увеличивая интенсивность магнитной силы, в поле которой она подвешена, можно значительно увеличить силу, вызываемую протекающим по катушке слабым током, без добавочного увеличения массы катушки. Магнитная сила для этой цели может быть создана с помощью постоянных магнитов или электромагнитов, возбуждаемых дополнительным током; применяя катушку из мягкого железа, можно сильно сконцентрировать поле вблизи подвешенной катушки. Так, в записывающей аппаратуре сэра У. Томсона, рис. 52, катушка подвешивается между противоположными полюсами электромагнитов *N* и *S*, а чтобы сконцентрировать линии магнитной силы на вертикальных сторонах катушки, между полюсами магнитов закрепляется кусок мягкого железа *D*. Железо, намагничиваясь через индукцию, создает в промежутке между ним и двумя магнитами очень мощное поле силы, в котором

вертикальные стороны могут свободно перемещаться, так что катушка, даже когда через нее течет очень слабый ток, находится под действием значительной силы, стремящейся повернуть ее вокруг вертикальной оси.

723. Другое применение подвешенной катушки состоит в определении горизонтальной составляющей земного магнетизма путем сравнения с показаниями тангенс-гальванометра.

Катушка подвешивается таким образом, чтобы в устойчивом равновесии ее плоскость была параллельна магнитному меридиану. Через катушку пропускается ток γ , отклоняющий ее в новое состояние равновесия, в котором плоскость катушки образует угол с магнитным меридианом. Если подвес является бифилярным, то создающий такое отклонение момент пары сил равен $F \sin \vartheta$, и он должен быть равен величине $H \gamma g \cos \vartheta$, где H — горизонтальная составляющая земного магнетизма, γ — ток в катушке, g — сумма площадей всех витков катушки. Следовательно, $H \gamma = \frac{F}{g} \operatorname{tg} \vartheta$.

Если A — момент инерции катушки относительно оси подвеса, а T — полупериод одиночного колебания, то в отсутствии тока $FT^2 = \pi^2 A$ и мы получаем $H \gamma = \frac{\pi^2 A}{T^2 g} \operatorname{tg} \vartheta$.

Если через катушку тангенс-гальванометра проходит тот же самый ток и отклоняет магнит на угол φ , то $\frac{\gamma}{H} = \frac{1}{G} \operatorname{tg} \varphi$, где G — главная постоянная тангенс-гальванометра, см. п. 710.

Из этих двух уравнений получаем

$$H = \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{AG \operatorname{tg} \vartheta}{g \operatorname{tg} \varphi}}, \quad \gamma = \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{A \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \varphi}{Gg}}.$$

Этот метод был дан Ф. Кольраушем¹.

724. Сэр Уильям Томсон сконструировал единый прибор, с помощью которого все измерения, необходимые для определения H и γ , могут быть выполнены одновременно одним и тем же наблюдателем.

Катушка подвешивается так, чтобы в состоянии равновесия ее плоскость лежала в плоскости магнитного меридиана и при пропускании через нее тока отклонялась бы от этого положения. В центре катушки подвешивается очень маленький магнит, который под действием тока отклоняется в направлении, противоположном направлению отклонения катушки. Пусть отклонение катушки равно ϑ , а отклонение магнита φ , тогда изменяемая часть энергии системы равна $-H \gamma g \sin \vartheta - m \gamma G \sin (\vartheta - \varphi) - H m \cos \varphi - F \cos \vartheta$.

Дифференцируя по ϑ и φ , получим соответственно уравнения равновесия катушки и магнита:

$$\begin{aligned} -H \gamma g \cos \vartheta - m \gamma G \cos (\vartheta - \varphi) + F \sin \vartheta &= 0, \\ m \gamma G \cos (\vartheta - \varphi) + H m \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений, исключая H или γ , мы получаем квадратное уравнение, из которого можно найти γ или H . Если магнитный момент подвешенного маг-

¹ Pogg. Ann., CXXXVIII, p. 1—10, Aug. 1869.

нита m очень мал, мы получаем следующие приближенные значения:

$$H = \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{-AG \sin \vartheta \cos (\vartheta - \varphi)}{g \cos \vartheta \sin \varphi} - \frac{1}{2} \frac{mG \cos (\vartheta - \varphi)}{g \cos \vartheta}},$$

$$\gamma = -\frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{-A \sin \vartheta \sin \varphi}{Gg \cos \vartheta \cos (\vartheta - \varphi)}} + \frac{1}{2} \frac{m \sin \varphi}{g \cos \vartheta}.$$

В этих выражениях G и g — основные электрические постоянные катушки, A — ее момент инерции, T — полупериод ее колебаний, m — магнитный момент магнита, H — напряженность горизонтальной магнитной силы, γ — сила тока, ϑ — отклонение катушки, φ — отклонение магнита.

Поскольку отклонения катушки и магнита противоположны по направлениям, то эти значения H и g всегда будут действительными.

Электродинамометр Вебера

725. В этом приборе внутри большой неподвижной катушки с помощью двух проводов подвешивается маленькая катушка. Когда по обеим катушкам пропускается ток, подвешенная катушка стремится расположиться параллельно неподвижной. Этому препятствует момент сил, возникающий в бифилярном подвесе; кроме того, катушка находится под действием земного магнетизма.

При обычном использовании прибора плоскости двух катушек расположены примерно под прямым углом друг к другу, так, чтобы взаимодействие токов в них было максимальным; в то же время плоскость подвешенной катушки располагается под прямым углом к магнитному меридиану, так, чтобы действие земного магнетизма было минимальным.

Пусть магнитный азимут плоскости неподвижной катушки равен α , а угол, который составляет ось подвешенной катушки с плоскостью неподвижной катушки, равен $\vartheta + \beta$, где β — значение этого угла, когда катушка находится в равновесии и ток по ней не протекает; ϑ — отклонение, обусловленное этим током. Уравнение равновесия таково:

$$Gg\gamma_1\gamma_2 \cos (\vartheta + \beta) - Hg\gamma_2 \sin (\vartheta + \beta + \alpha) - F \sin \vartheta = 0,$$

где γ_1 — ток в неподвижной катушке, γ_2 — ток в подвижной катушке.

Предположим, что прибор отлажен таким образом, что углы α и β очень малы, а величина $Hg\gamma_2$ мала по сравнению с F . В этом случае мы приблизительно имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{Gg\gamma_1\gamma_2 \cos \beta}{F} - \frac{Hg\gamma_2 \sin (\alpha + \beta)}{F} - \frac{HGg^2\gamma_1^2\gamma_2^2}{F^2} - \frac{G^2g^2\gamma_1^2\gamma_2^2 \sin \beta}{F^2}.$$

Если при изменении знаков токов γ_1 и γ_2 получаются следующие отклонения:

$$\begin{array}{ll} \vartheta_1 & \text{при } \gamma_1 + \text{ и } \gamma_2 + \\ \vartheta_2 & \text{при } \gamma_1 - \text{ и } \gamma_2 -, \\ \vartheta_3 & \text{при } \gamma_1 + \text{ и } \gamma_2 -, \\ \vartheta_4 & \text{при } \gamma_1 - \text{ и } \gamma_2 +, \end{array}$$

то мы находим

$$\gamma_1 \gamma_2 = \frac{1}{4} \frac{F}{Gg \cos \beta} (\operatorname{tg} \vartheta_1 + \operatorname{tg} \vartheta_2 - \operatorname{tg} \vartheta_3 - \operatorname{tg} \vartheta_4).$$

Если по обеим катушкам течет один и тот же ток, то мы можем положить $\gamma_1 \gamma_2 = \gamma^2$ и получить, таким образом, величину γ .

Когда токи не очень постоянны, то лучше всего прибегать именно к этому методу (его называют методом тангенсов).

Если же токи настолько постоянны, что можно успеть отрегулировать угол крутильной головки инструмента, то мы можем сразу же избавиться от поправок на земной магнетизм, используя метод синусов.

В этом методе угол β регулируется так, чтобы отклонение было равно нулю, т. е. $\vartheta = -\beta$.

Если для указания знаков γ_1 и γ_2 использовать при β те же индексы, что и раньше, то

$$F \sin \beta_1 = -F \sin \beta_3 = -Gg \gamma_1 \gamma_2 + Hg \gamma_2 \sin \alpha,$$

$$F \sin \beta_2 = -F \sin \beta_4 = -Gg \gamma_1 \gamma_2 - Hg \gamma_2 \sin \alpha$$

$$\text{и } \gamma_1 \gamma_2 = -[F/(4Gg)] (\sin \beta_1 + \sin \beta_2 - \sin \beta_3 - \sin \beta_4).$$

Этот метод был принят г-ном Латимером Кларком (Clark), когда он использовал прибор, построенный Комитетом по электричеству при Британской Ассоциации (Electrical Committee of the British Association). Мы признательны г-ну Кларку за рисунок электрогальванометра (рис. 53), где применено гельмгольцевское размещение обеих катушек — и подвешенной и неподвижной². Крутильная головка прибора, при помощи которой регулируется бифилярный подвес, представлена на рис. 54. Равенство натяжений проводов подвеса обеспечивается тем, что они прикреплены к концам шелковой нити, перекинутой через блок, а расстояние между ними регулируется с помощью двух направляющих роликов, которые можно устанавливать на требуемом расстоянии друг от друга. Подвешенная катушка может перемещаться вертикально — при помощи винта, действующего на блок подвеса, и горизонтально в двух направлениях — своими скользящими частями, показанными внизу на рис. 54. По азимуту она регулируется посредством крутильного винта, поворачивающего крутильную головку вокруг вертикальной оси (см. п. 459). Азимут подвешенной катушки определяется путем наблюдения отражения шкалы в зеркале, которое видно непосредственно под осью подвешенной катушки.

Этот прибор, впервые сконструированный Вебером, описан в его работе «*Электродинамическое определение массы*» (*Elektrodynamische Maasbestimmungen*). Он предназначался для измерения малых токов, и поэтому в нем и неподвижная и подвижная катушки состояли из большого количества витков, подвешенная катушка занимала гораздо большую часть объема внутри неподвижной катушки, нежели в приборе Британской Ассоциации; последний первоначально предпо-

² В реальных приборах провода, через которые ток подводится к катушке и отводится от нее, не разнесены так, как это изображено на рисунке, а расположены как можно ближе друг к другу, чтобы нейтрализовать электромагнитное действие друг друга.

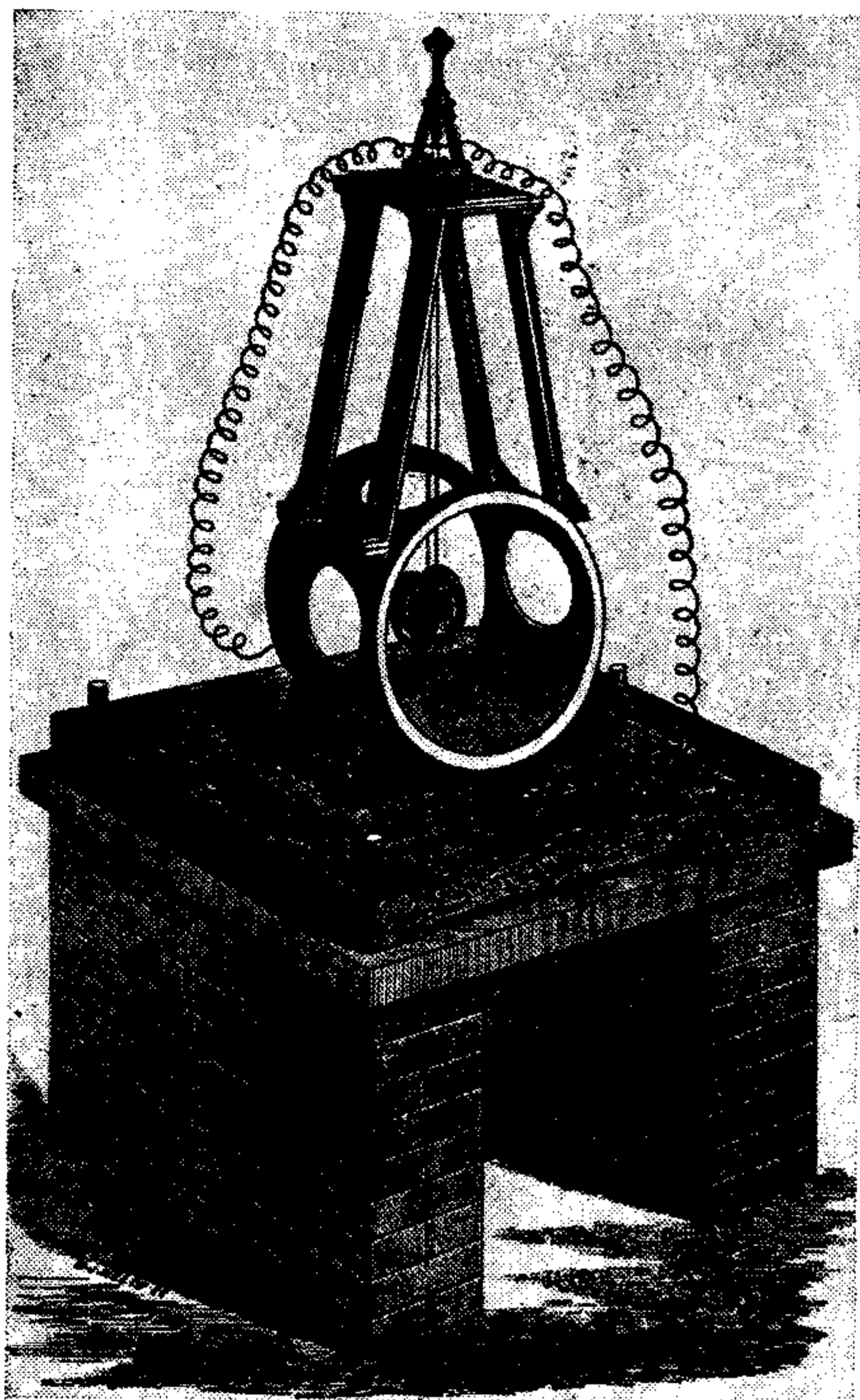


Рис. 53

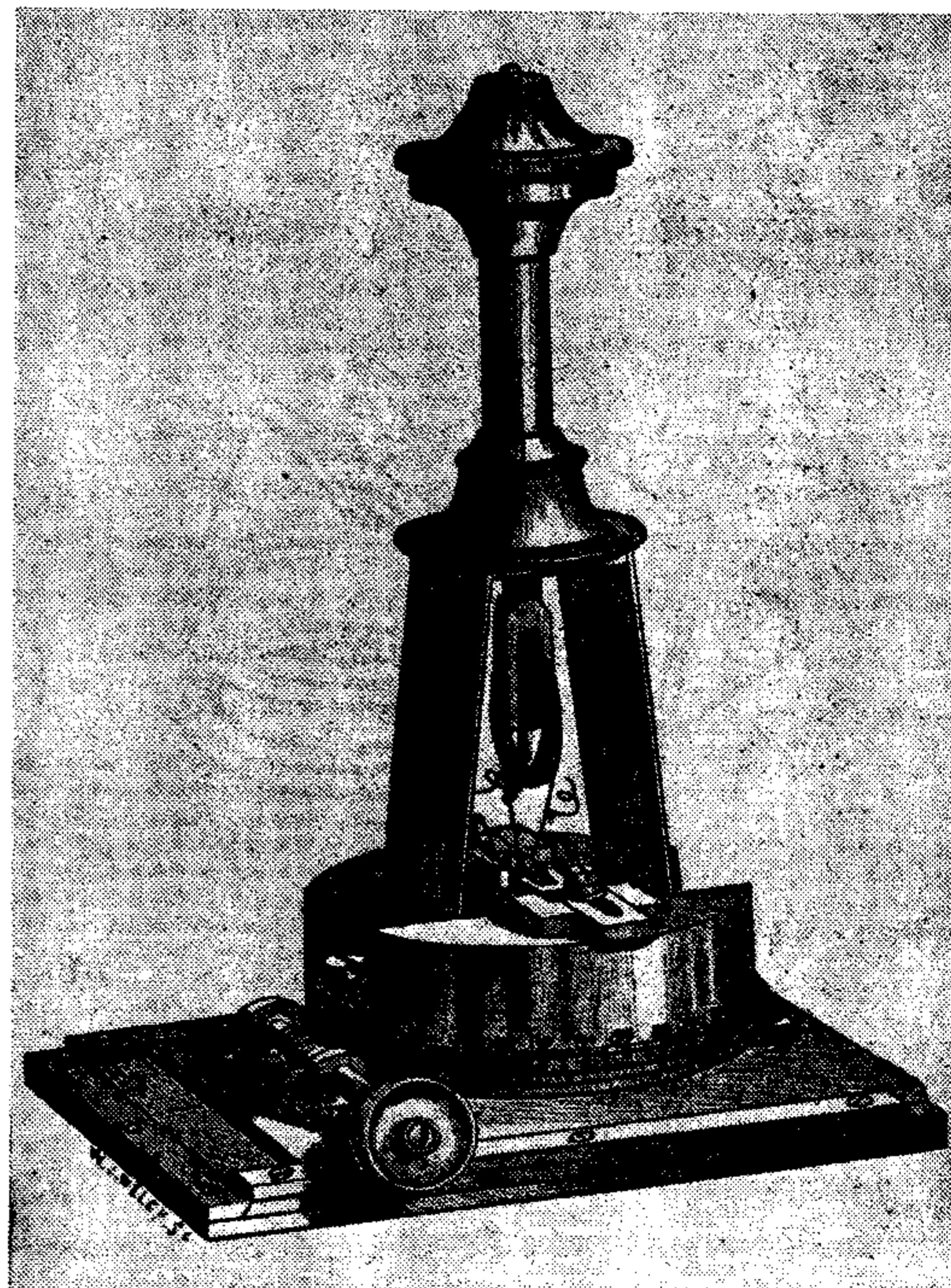


Рис. 54

лагалось использовать в качестве эталонного прибора, с которым можно было бы сравнивать другие, более чувствительные приборы. Опыты, проведенные Вебером с использованием этого прибора, обеспечили наиболее полное экспериментальное доказательство точности формулы Ампера применительно к замкнутым токам и составили важную часть тех исследований, в которых Вебер поднял на высокий уровень точности численное определение электрических величин.

Веберовский вариант электродинамометра, где одна из катушек подвешена внутри другой и находится под действием пары сил, стремящейся повернуть ее вокруг вертикальной оси, является, вероятно, наиболее пригодным для абсолютных измерений. В п. 700 приведен метод вычисления постоянных, характеризующих такое устройство.

726. Если, однако, мы хотим получить при помощи слабого тока значительную электромагнитную силу, то лучше ориентировать подвешенную катушку параллельно неподвижной, предоставив ей возможность перемещаться в направлении неподвижной катушки или от нее.

В токовых весах Джоуля (рис. 55) подвешенная катушка ориентирована горизонтально и может перемещаться в вертикальном направлении; сила взаимодействия между ней и неподвижной катушкой оценивается тем весом, который необходимо добавить к катушке или убрать от нее, для того чтобы привести ее

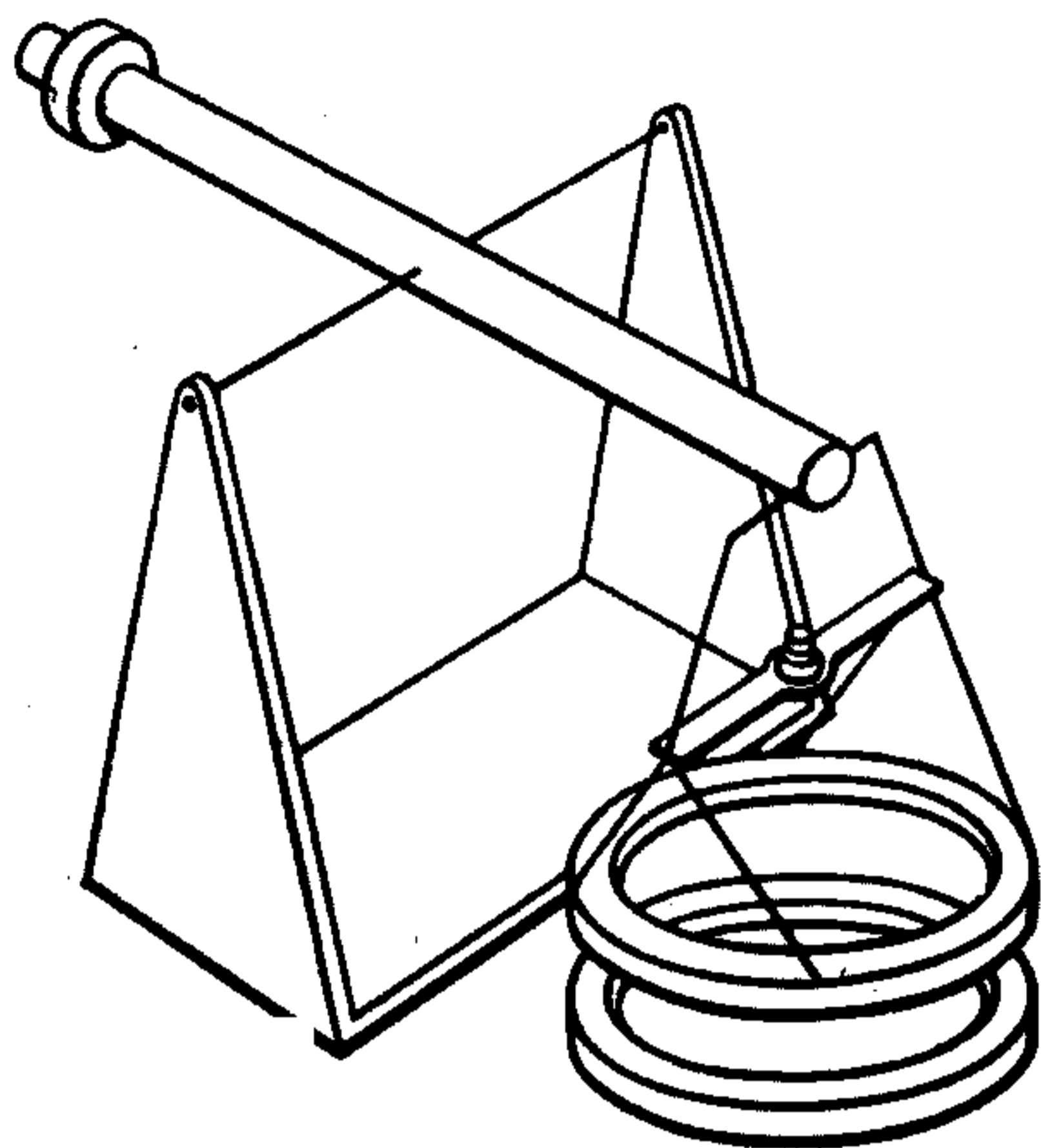


Рис. 55

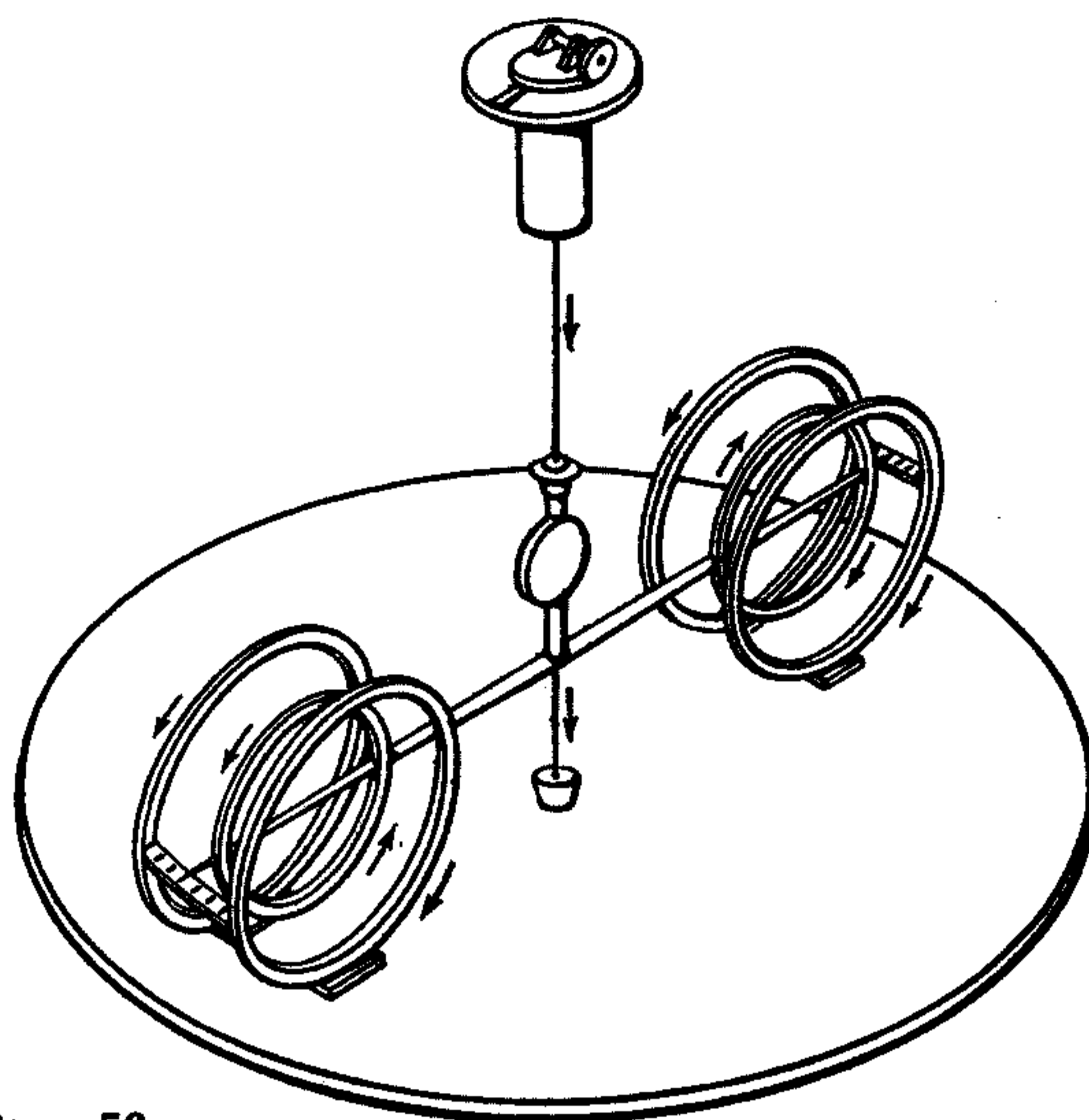


Рис. 56

в то же самое положение относительно неподвижной катушки, в котором она находилась в отсутствие тока.

Подвешенную катушку можно также прикрепить к концу горизонтального плеча крутильных весов и можно поместить ее между двумя неподвижными катушками, одна из которых притягивает, а другая отталкивает ее, как это показано на рис. 56.

При размещении катушек, описанном в п. 729, сила, действующая на подвешенную катушку в пределах небольшого удаления от положения равновесия, может быть сделана почти однородной.

К другому концу крутильных весов можно прикрепить вторую катушку, также поместив ее между двумя неподвижными катушками. Если обе подвешенные катушки одинаковы, но ток в них течет в противоположных направлениях, то полностью будет исключено влияние земного магнетизма на положение плеча крутильных весов.

727. Если подвешенная катушка имеет форму длинного соленоида и может двигаться параллельно своей оси, входя при этом внутрь большего соленоида, имеющего общую с ней ось, то при одинаковом направлении токов в обоих соленоидах подвешенный соленоид будет втягиваться внутрь неподвижного с силой, которая остается приблизительно однородной до тех пор, пока концы этих соленоидов не окажутся близко друг к другу.

728. Чтобы создать однородную продольную силу, действующую на маленькую катушку, помещаемую между двумя другими одинаковыми катушками гораздо больших размеров, мы должны сделать отношение диаметра больших катушек к расстоянию между их плоскостями равным отношению 2 к $\sqrt{3}$. Если пустить через обе катушки один и тот же ток в противоположных направлениях, то в выражении для ω члены, содержащие нечетные степени r , исчезают и, поскольку $\sin^2 \alpha = 4/7$, а $\cos^2 \alpha = 3/7$, член, содержащий r^4 , также исчезает и в

соответствии с п. 715 для переменной части ω имеем

$$\frac{8}{7} \sqrt{\frac{3}{7}} \pi n \gamma \left\{ 3 \frac{r^2}{c^2} P_2(\vartheta) - \frac{11}{7} \frac{r^6}{c^6} P_6(\vartheta) + \dots \right\},$$

что указывает на почти однородную силу, действующую на маленькую подвешенную катушку. Расположение катушек в этом случае такое же, как расположение двух внешних катушек в трехкатушечном гальванометре, описанном в п. 715, см. рис. 50.

729. Если мы хотим подвесить катушку между двумя другими катушками, расположенными так близко к ней, что расстояние между взаимодействующими проводниками мало по сравнению с радиусами катушек, то наиболее однородная сила получается, если радиус каждой из внешних катушек превышает радиус средней катушки на $1/\sqrt{3}$ расстояния между плоскостями средней и внешней катушек. Это следует из выражения для взаимной индукции между двумя круговыми токами, полученного в п. 705.

ГЛАВА XVI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

730. Очень многие измерения электрических величин зависят от наблюдений движения колеблющегося тела; поэтому мы уделим внимание природе этого движения, а также наилучшим методам его наблюдения.

Малые колебания тела около положения равновесия обычно аналогичны колебаниям точки, на которую действует сила, меняющаяся пропорционально расстоянию от некоторой фиксированной точки. В наших опытах в случае колеблющихся тел имеется также сопротивление движению, обусловленное рядом причин, таких как вязкость воздуха и вязкость нити подвеса. Во многих электрических приборах имеется другой источник сопротивления, а именно обратное воздействие токов, индуцируемых в проводящих контурах, расположенных вблизи колеблющихся магнитов. Эти токи индуцируются движением магнита и их действие на магнит в соответствии с правилом Ленца состоит в постоянном противодействии его движению. Во многих случаях это составляет основную часть сопротивления.

Иногда около магнита с явно выраженной целью уменьшения или полного прекращения его колебаний помещается металлический контур, называемый Демпфером. Поэтому о сопротивлении такого рода мы будем говорить как о Демпфирующем.

В случае медленных колебаний, таких, которые легко наблюдать, полное сопротивление, какими бы причинами оно ни было обусловлено, оказывается прямо пропорциональным скорости. И только когда скорость гораздо больше, чем при обычных колебаниях в электромагнитных приборах, появляются свидетельства в пользу того, что сопротивление пропорционально квадрату скорости.

Таким образом, мы должны исследовать движение тела под действием при-