ЧАСТЬ IV
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ГЛАВА I
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СИЛА

475. В определенных условиях, как было замечено большим числом разных наблюдателей, магнетизм у игл и стрелок образуется или разрушается под действием разрядов электричества, проходящих через них или рядом с ними. Хотя при этом делались различного рода догадки о связи между магнетизмом и электричеством, но законы этих явлений, равно как и вид этих связей, оставались совершенно неизвестными до тех пор, пока Ганс Христиан Эрстед [1] на одной из частных лекций для небольшого числа аспирантов в Копенгагене не обнаружил, что провод, замыкающий клеммы вольтовой батареи, оказывает влияние на расположенный поблизости магнит. Он опубликовал это открытие в своем трактате, озаглавленном «*Опыты, касающиеся влияния электрических возмущений на магнитные иглы*», датированным 21 июля 1820 г.

Эксперименты по связи между магнитом и электрически заряженными телами не дали никаких результатов до тех пор, пока Эрстед не попытался установить влияние провода, *нагретого* электрическим током. Однако он открыл, что не тепло в проводе, а сам электрический ток оказался причиной этого воздействия и что «электрическое возмущение действует вращательным образом», а именно: магнит, помещенный вблизи провода, передающего электрический ток, стремится установиться перпендикулярно проводу, а при обносе его вокруг провода он всегда указывает вперед одним и тем же концом.

476. Из этого явствует, что в пространстве, окружающем провод, по которому течет электрический ток, магнит находится под действием сил, зависящих от положения провода и от силы тока. Поэтому пространство, где действуют эти силы, можно рассматривать как магнитное поле и изучать его так же, как мы уже изучали поле в окрестности обычных магнитов, прослеживая ход линий магнитной силы и измеряя напряженность силы в каждой точке.

477. Начнем со случая сколь угодно длинного прямого провода, несущего электрический ток. Если бы наблюдатель представил себе, что он расположен вдоль этого провода, а ток протекает от его головы к его ногам, то свободно подвешенный перед ним магнит установился бы таким образом, чтобы конец магнита, ранее указывавший на север, под действием тока стал бы указывать на правую руку этого наблюдателя.

Линии магнитной силы всюду составляют прямые углы с плоскостями, проведенными через провод, и потому являются окружностями; каждая из них лежит

[1] Другой отчет о том, как было сделано открытие Эрстеда, содержится в письме проф. Ханстина (Hansteen), помещенном в книге д-ра Бенса Джонса «Жизнь Фарадея» (Dr. Bence Jones, «*Life of Faraday*», vol. II, p. 395).

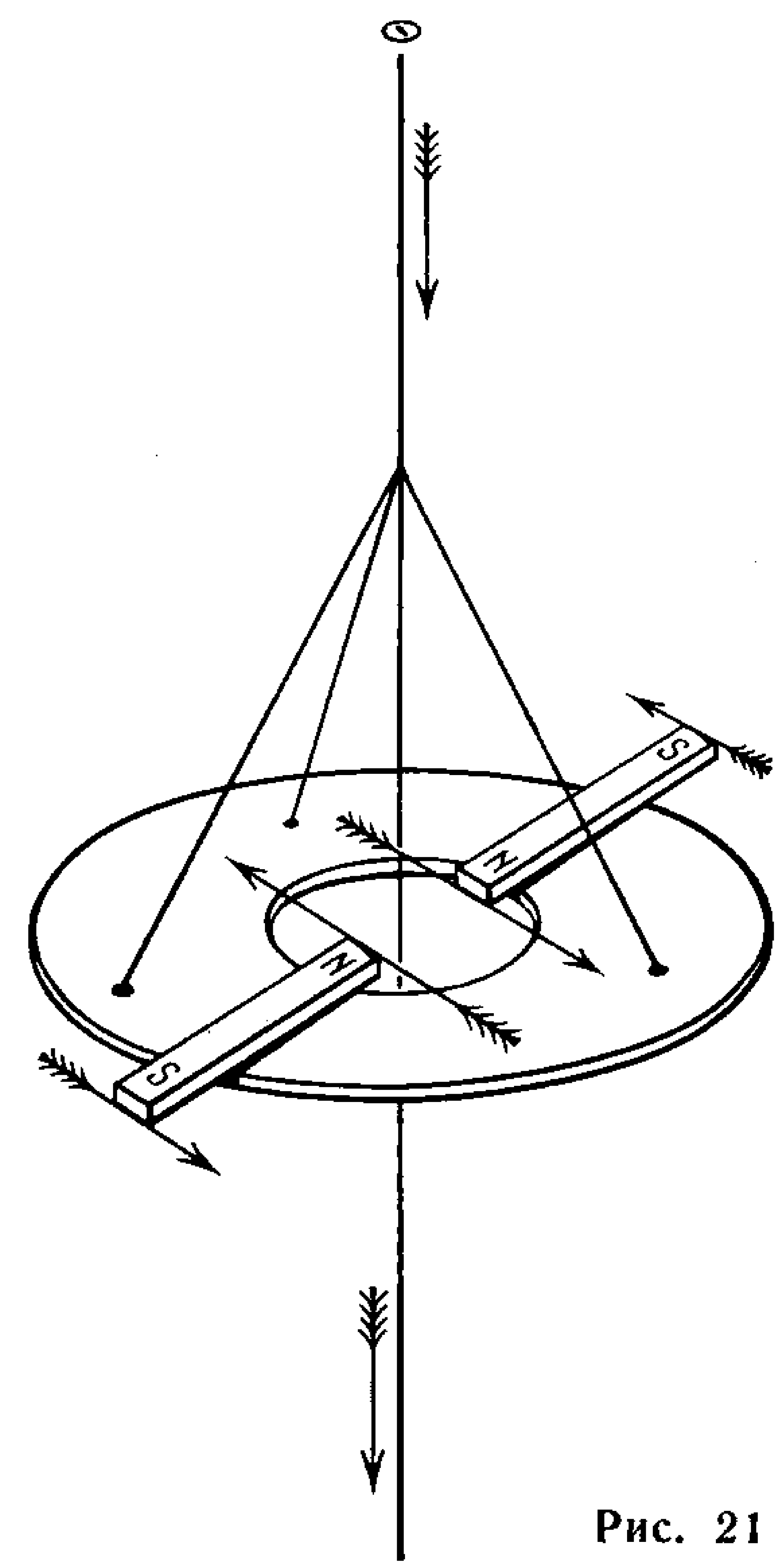


Рис. 21

в плоскости, перпендикулярной проводу, а сам провод проходит через центры этих окружностей. Полюс магнита, указывающий на север, при его перемещении вдоль одной из этих окружностей слева направо испытывал бы действие силы всегда в направлении движения. А на другой полюс того же магнита сила действовала бы в противоположном направлении.

478. Для сравнения этих сил будем считать провод вертикальным, а ток текущим вниз. Магнит же поместим на какое-нибудь устройство, свободно вращающееся относительно вертикальной оси, совпадающей с проводом [рис. 21]. Оказывается, что в этих условиях ток не дает никакого эффекта вращения всего устройства в целом вокруг оси. Следовательно, действие вертикального тока на два полюса магнита таково, что статические моменты обеих сил относительно тока, взятого за ось, равны и противоположны. Пусть мощности полюсов равны m_1 и m_2, их расстояния до оси провода r_1 и r_2, интенсивности магнитной силы, обусловленной током, в месте расположения этих полюсов соответственно T_1 и T_2, тогда действующая на m_1 сила будет равна m_1T_1; так как она составляет с осью прямой угол, ее момент есть $m_1T_1r_1$. Аналогично момент силы, действующей на другой полюс, равен $m_2T_2r_2$. Поскольку при этом не наблюдается никакого движения, то

$$m_1T_1r_1+m_2T_2r_2=0.$$

Однако мы знаем, что у всех магнитов $m_1+m_2=0$. Поэтому $T_1r_1=T_2r_2$, или электромагнитная сила, обусловленная бесконечно протяженным прямолинейным током, перпендикулярна этому току, а ее величина изменяется обратно пропорционально расстоянию от него.

479. Произведение Tr зависит от силы тока и потому может быть использовано в качестве меры этого тока. Такой метод измерения отличен от метода, основанного на электростатических явлениях, и поскольку он зависит от магнитных явлений, вызываемых электрическими токами, то его называют Электромагнитной системой измерений. Если в этой системе ток обозначить через i, то $Tr=2i$.

480. Если принять провод за ось z, то прямоугольные составляющие T будут равны

$$X=-2i\frac{y}{r^2},\qquad Y=2i\frac{x}{r^2},\qquad Z=0.$$

Здесь $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ есть полный дифференциал от $2i \operatorname{arctg}(y/x)+C$.

Следовательно, магнитная сила в этом поле может быть выведена, как и в нескольких предыдущих примерах, из потенциальной функции, но в данном случае потенциал является функцией с бесконечной последовательностью значений, имеющих общую разность, равную $4\pi i$. Частные производные по координатам, однако, имеют определенные и единственные значения в каждой точке.

Существование потенциальной функции в поле вблизи электрического тока не является самоочевидным следствием принципа сохранения энергии, ибо для всех реальных токов имеет место непрерывное расходование электрической энергии батареи, идущей на преодоление сопротивления провода. И пока величина этого расхода точно неизвестна, допустимо подозревать, что часть энергии батареи может идти на работу, совершаемую над магнитом при его движении по окружности. И действительно, если магнитный полюс m двигается по замкнутой кривой, охватывающей провод, то над ним в самом деле совершается работа, равная по величине $4\pi mi$. И только для замкнутых путей, не охватывающих провод, криволинейный интеграл от силы обращается в нуль. Поэтому пока мы должны считать, что как закон для силы, так и само существование потенциала опираются на описанные выше экспериментальные факты.

481. Рассматривая пространство, окружающее бесконечную прямую линию, мы видим, что это пространство является циклическим, поскольку оно возвращается само в себя. Но если мы представим плоскость или какую-то иную поверхность, начинающуюся на прямой линии и простирающуюся по одну сторону от нее до бесконечности, то эту поверхность можно будет рассматривать как диафрагму, сводящую циклическое пространство к ациклическому. Пусть из некоторой фиксированной точки в другую произвольную точку проведены линии, не пересекающие диафрагму, а потенциал определен как криволинейный интеграл от силы, взятый вдоль одной из этих линий, тогда потенциал любой точки будет иметь единственное и определенное значение.

Теперь магнитное поле во всех отношениях совпадает с полем, создаваемым магнитной оболочкой, совмещенной с этой поверхностью и имеющей мощность i; эта оболочка с одной своей стороны ограничена бесконечной прямой линией, тогда как другие части ее границы бесконечно удалены от рассматриваемых областей поля.

482. Во всех реальных экспериментах ток образует замкнутую цепь (контур) конечных размеров. Поэтому мы должны сравнивать магнитное действие конечного контура с действием магнитной оболочки, для которой контур служит ограничивающим краем.

Многочисленными экспериментами, из которых наиболее ранние выполнены Ампером, а наиболее точные — Вебером, показали, что магнитное действие маленького плоского контура на расстояниях, больших по сравнению с его размерами, совпадает с действием магнита, ось которого нормальна к плоскости контура, а магнитный момент равен площади контура, помноженной на силу тока.

Если предположить, что на контур натянута некоторая поверхность, которая ограничена этим же контуром и тем самым образует диафрагму, и если заменить электрический ток магнитной оболочкой, совпадающей с данной поверхностью и имеющей мощность i, то магнитное действие оболочки во всех удаленных точках окажется одинаковым с магнитным действием тока.

483. До сих пор мы считали размеры контура малыми по сравнению с расстоянием между любым участком контура и областью, где исследуется поле. Теперь мы будем предполагать, что контур имеет произвольную форму и произвольные размеры; изучим его действие в произвольной точке P, но не расположенной, однако, внутри самого проводящего провода. Для этой цели Ампер ввел следующий метод, имеющий важные геометрические применения.

Представим себе какую-нибудь поверхность S, ограниченную контуром и не проходящую через точку P. Проведем на этой поверхности два семейства линий, которые, пересекаясь друг с другом, делят поверхность на элементарные части, имеющие размеры, малые по сравнению с их расстоянием от P и с радиусом кривизны поверхности.

Представим себе, что вокруг каждого из этих элементов течет ток силы i, имеющий одинаковое, такое же, как и в исходном контуре, направление циркуляции во всех элементах.

Вдоль каждой из линий, разделяющих два смежных элемента, текут два равных тока силы i в противоположных направлениях.

Эффект двух одинаковых, но противоположных токов, текущих в одном и том же месте, тождественно равен нулю, с какой бы точки зрения мы ни рассматривали эти токи. Единственными участками элементарных контуров, которые не нейтрализуются таким путем, являются участки, совпадающие с первоначальным контуром. Поэтому общий эффект элементарных контуров эквивалентен эффекту первоначального контура.

484. Теперь, поскольку каждый элементарный контур может рассматриваться как маленький плоский контур, расстояние которого от P велико по сравнению с его размерами, мы можем заменить его элементарной магнитной оболочкой мощности i, ограничивающий край которой совпадает с этим элементарным контуром. Магнитный эффект, производимый элементарной оболочкой в точке P, эквивалентен эффекту элементарного контура. В целом все элементарные оболочки образуют магнитную оболочку мощности i, совпадающую с поверхностью S и ограниченную первоначальным контуром; магнитное действие всей оболочки в точке P эквивалентно действию контура.

Ясно, что действие этого контура не зависит от формы поверхности S, которая была выбрана совершенно произвольным образом, лишь бы она затягивала контур. Отсюда видно, что действие магнитной оболочки зависит только от формы ее границы, но не от формы самой оболочки. Этот результат мы получили раньше, в п. 410, однако весьма поучительно видеть, как он может быть выведен из электромагнитных соображений.

Поэтому магнитная сила, создаваемая контуром в произвольной точке, по величине и направлению одинакова с магнитной силой, создаваемой магнитной оболочкой, ограниченной этим контуром и не проходящей через данную точку, причем мощность оболочки численно равна силе тока. Направление тока в контуре так соотносится с направлением намагниченности оболочки, что если наблюдатель встал бы ногами на ту сторону оболочки, которую мы называем положительной и которая стремится указывать на север, то ток перед ним протекал бы справа налево.

485. Магнитный потенциал контура, однако, отличается от потенциала магнитной оболочки для тех точек, которые находятся в самом веществе магнитной оболочки.

Если ω — телесный угол с вершиной в точке P, опирающийся на магнитную оболочку (он считается положительным, когда ближней к P оказывается положительная или аустральная сторона оболочки), то магнитный потенциал в произвольной точке вне самой оболочки равен $\omega\varphi$, где φ — мощность оболочки. Для какой-либо точки внутри вещества самой оболочки мы можем предположить, что оболочка разделена на две части, имеющие мощности φ_1 и φ_2, такие, что $\varphi_1+\varphi_2=\varphi$, причем точка находится на положительной стороне оболочки φ_1 и на отрицательной стороне оболочки φ_2. Потенциал в этой точке равен $\omega\,(\varphi_1+\varphi_2)-4\pi\varphi_2$.

На отрицательной стороне оболочки этот потенциал становится равным $\varphi\,(\omega-4\pi)$. Следовательно, в этом случае потенциал является непрерывным и имеющим в каждой точке единственное определенное значение. С другой стороны, в случае электрического контура магнитный потенциал в каждой точке (но не внутри проводящего провода) равен $i\omega$, где i — сила тока, а ω — телесный угол с вершиной в этой точке, опирающийся на контур и считающийся положительным, когда ток, если смотреть из точки P, циркулирует в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки.

Величина $i\omega$ является функцией, имеющей бесконечную последовательность значений, общая разность которых равна $4\pi i$. Частные производные от $i\omega$ по координатам имеют, однако, единственные и определенные значения в каждой точке пространства.

486. Если длинный тонкий гибкий соленоидальный магнит поместить рядом с электрическим контуром, то северный и южный концы соленоида стремились бы двигаться в противоположных направлениях вокруг провода, и если бы они могли свободно подчиняться действию магнитной силы, то в конце концов магнит оказался бы скрученным вокруг провода в замкнутый виток. Если было бы возможно получить магнит с одним лишь полюсом или с полюсами, обладающими неодинаковыми мощностями, то такой магнит стал бы непрерывно двигаться, причем двигаться вокруг провода в одном направлении; но поскольку полюса у каждого магнита равны и противоположны, то такой результат никогда не может быть достигнут. Фарадей, однако, показал, как производить непрерывное вращение одного полюса магнита вокруг электрического контура, создавая возможность одному из полюсов продолжительно вращаться вокруг тока, а второму — нет.

Для того чтобы этот процесс мог повторяться сколь угодно долго, тело магнита должно переноситься при каждом обороте с одной стороны тока на другую. Чтобы осуществить это, не прерывая потока электричества, ток распределяется по двум ветвям; когда одна ветвь размыкается, позволяя пройти магниту, ток продолжает течь по другой ветви. Для этой цели Фарадей использовал кольцевой желобок со ртутью, как это показано на рис. 23, п. 491. Ток входит в желоб по проводу AB, в B он разделяется, после протекания по дугам BQP и BRP соединяется в P и покидает желоб по проводу PO через чашу со ртутью O, далее он течет вниз по вертикальному проводу, расположенному под чашей O.

Магнит (не показанный на рис. 23) установлен так, чтобы иметь возможность вращаться вместе с проводом OP вокруг вертикальной оси, проходящей через O. Тело магнита проходит через отверстие кольца, причем один полюс, скажем северный, располагается под плоскостью желоба, а второй — над ней. Поскольку магнит вращается вместе с проводом OP около вертикальной оси, то ток постепенно переходит из той ветви желоба, которая находится впереди магнита, к той ветви, которая находится позади его, так что при каждом полном обороте магнит переходит с одной стороны тока на другую. Северный полюс магнита вращается вокруг текущего вниз тока в направлении $N \to E \to S \to W$ (север—восток—юг—запад). Если ω и ω' — телесные углы (без учета знаков) с вершинами на этих двух полюсах, опирающиеся на кольцевой желоб, то работа, совершаемая электромагнитной силой при полном обороте, равна $mi\,(4\pi-\omega-\omega')$, где m — мощность любого из полюсов, а i — сила тока.

487. Попытаемся теперь составить себе представление о состоянии магнитного поля вблизи линейного электрического контура. Пусть для каждой точки пространства найдено значение телесного угла ω, опирающегося на контур, и построены поверхности постоянных значений ω. Они будут эквипотенциальными. Каждая из таких поверхностей ограничена контуром, и любые две поверхности ω_1 и ω_2 встречаются на контуре под углом $(\omega_1-\omega_2)/2$.

На рис. XVIII в конце этого тома представлено сечение эквипотенциальных поверхностей, создаваемых кольцевым током. Маленький круг представляет сечение проводящего провода, а горизонтальная линия внизу рисунка является перпендикуляром к плоскости кольцевого тока, проходящим через его центр. Эквипотенциальные поверхности (24 из них изображены для последовательных значений ω с интервалом $\pi/6$) являются поверхностями вращения, имеющими эту линию в качестве их общей оси. Они, очевидно, представляют собой вытянутые фигуры, уплощенные в направлении оси. На линии контура они встречаются друг с другом под углом в 15 градусов.

Сила, действующая на магнитный полюс, помещенный в любой точке эквипотенциальной поверхности, перпендикулярна к этой поверхности и изменяется обратно пропорционально расстоянию между последовательными поверхностями. Замкнутые кривые, окружающие сечение провода на рис. XVIII, являются линиями силы. Они воспроизведены из работы сэра У. Томсона «Вихревое движение» [2]; см. также п. 702.

Действие электрического контура на произвольную магнитную систему

488. Теперь мы в состоянии, исходя из теории магнитных оболочек, вычислить действие электрического контура на произвольную магнитную систему, находящуюся в его окрестности. Действительно, если построить магнитную оболочку, мощность которой численно равна силе тока, а край по своему положению совпадает с контуром, причем построить так, чтобы сама оболочка нигде не пересекала магнитной системы, то действие этой оболочки на магнитную систему будет равносильно действию электрического тока.

Реакция магнитной системы на электрический контур

489. Отсюда, применяя принцип, что действие и противодействие (реакция) равны и противоположны, мы заключаем, что механическое действие магнитной системы на электрический контур равносильно действию на магнитную оболочку, имеющей этот контур в качестве своей границы.

[2] *Trans. R. S. Edin.*, vol. XXV, p. 217 (1869).

Потенциальная энергия магнитной оболочки мощности φ, помещенной в поле магнитной силы с потенциалом V, согласно п. 410, равна

$$\varphi \iint \left(l \frac{dV}{dX} + m \frac{dV}{dy} + n \frac{dV}{dz} \right) dS,$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали, проведенной с положительной стороны элемента оболочки dS; интегрирование распространяется на всю поверхность оболочки.

Теперь поверхностный интеграл

$$N = \iint (la + mb + nc)\, dS,$$

в котором a, b, c — составляющие магнитной индукции, представляет собой величину потока магнитной индукции через оболочку, или на языке Фарадея *число* линий магнитной индукции (подсчитанное алгебраически), проходящих через оболочку от отрицательной стороны к положительной; при этом линии, проходящие сквозь оболочку в противоположном направлении, считаются отрицательными.

Помня, что оболочка не принадлежит магнитной системе, обусловливающей потенциал V, и потому магнитная сила равна магнитной индукции, мы имеем

$$a = -(dV/dx), \qquad b = -(dV/dy), \qquad c = -(dV/dz),$$

и для значения M можно написать $M = -\varphi N$.

Если δx_1 представляет собой какое-нибудь смещение оболочки, а X_1 — действующую на нее и способствующую этому смещению силу, то согласно принципу сохранения энергии

$$X_1 \delta x_1 + \delta M = 0, \quad \text{или} \quad X_1 = \varphi (dN/dx_1).$$

Мы определили сейчас характер силы, соответствующей какому-либо заданному смещению оболочки: эта сила либо способствует смещению, либо противодействует ему в зависимости от того, увеличивает или уменьшает она число линий индукции N, проходящих через оболочку.

То же самое справедливо и для эквивалентного электрического контура. Любому смещению контура будет оказано содействие или сопротивление в зависимости от того, увеличивает или уменьшает это смещение число линий индукции, проходящих сквозь контур в положительном направлении.

Мы должны помнить, что положительным направлением линии магнитной индукции является то направление, по которому вдоль линии стремится двигаться полюс магнита, указывающий на север, и что линия индукции проходит сквозь контур в положительном направлении тогда, когда ее направление относится к направлению тока стекловидного электричества в контуре так же, как продольное движение правого винта относится к его вращательному движению (см. п. 23).

490. Очевидно, что сила, соответствующая произвольному смещению контура как целого, может быть сразу выведена из теории магнитной оболочки. Но это еще не все. Если какой-либо участок контура является гибким и способным смещаться независимо от остальных, то путем разрезания поверхности оболочки на достаточное количество частей, связанных между собой гибкими соединениями, мы можем сделать также и край оболочки способным к такого же рода смещению. Отсюда мы заключаем, что если путем смещения какого-либо участка контура в заданном направлении число линий индукции, проходящих сквозь контур, может быть увеличено, то действующая на контур электромагнитная сила будет способствовать этому смещению.

Поэтому на любой участок контура действует сила, заставляющая его двигаться поперек линий магнитной индукции так, чтобы вобрать в обхват контура как можно большее количество этих линий; работа, совершенная силой за время этого смещения, численно равна количеству добавленных линий индукции, умноженному на силу тока.

Пусть элемент ds контура, по которому протекает ток силы i, перемещен параллельно самому себе на расстояние δx; при этом движении он заметет площадь в виде параллелограмма, стороны которого параллельны и равны соответственно ds, δx.

Если обозначить магнитную индукцию через $\mathfrak{B}$ и считать, что ее направление составляет угол ε с нормалью к параллелограмму, то величина прироста N, соответствующего смещению, находится путем умножения площади параллелограмма на $\mathfrak{B}\cos\varepsilon$. Результат этой операции представляется геометрически объемом параллелепипеда, ребра которого по величине и направлению соответствуют δx, ds и $\mathfrak{B}$.

Объем должен считаться положительным, если какая-нибудь стрелка, направляемая последовательно в этих трех направлениях, будет перемещаться вокруг диагонали параллелепипеда в направлении движения стрелок часов. Объем этого параллелепипеда равен $X\delta x$.

Если ϑ есть угол между ds и $\mathfrak{B}$, то площадь параллелограмма со сторонами ds и $\mathfrak{B}$ равна $ds\cdot\mathfrak{B}\sin\vartheta$. Пусть η есть угол, образуемый смещением δx с нормалью к этому параллелограмму, тогда объем параллелепипеда равен

$$ds\cdot\mathfrak{B}\sin\vartheta\cdot\delta x\cos\eta=\delta N.$$

Теперь

$$X\delta x=i\delta N=ids\cdot\mathfrak{B}\sin\vartheta\,\delta x\cos\eta$$

и

$$X=ids\cdot\mathfrak{B}\sin\vartheta\cos\eta.$$

Это есть действующая на ds сила, спроектированная на направление δx.

Таким образом, направление этой силы перпендикулярно к параллелограмму, а ее величина равна $i\cdot ds\cdot\mathfrak{B}\sin\vartheta$.

Это есть площадь параллелограмма, стороны которого и по величине, и по направлению соответствуют ids и $\mathfrak{B}$. Следовательно, действующая на ds сила по своей величине представлена площадью этого параллелограмма, а по своему направлению — нормалью к его плоскости, проведенной в направлении поступательного движения винта с правой нарезкой, рукоятка которого поворачивается от направления тока ids к направлению магнитной индукции $\mathfrak{B}$.

Мы можем выразить и направление, и величину этой силы на языке кватернионов, сказав, что это есть векторная часть результата умножения вектора элемента тока ids на вектор магнитной индукции $\mathfrak{B}$ [рис. 22].

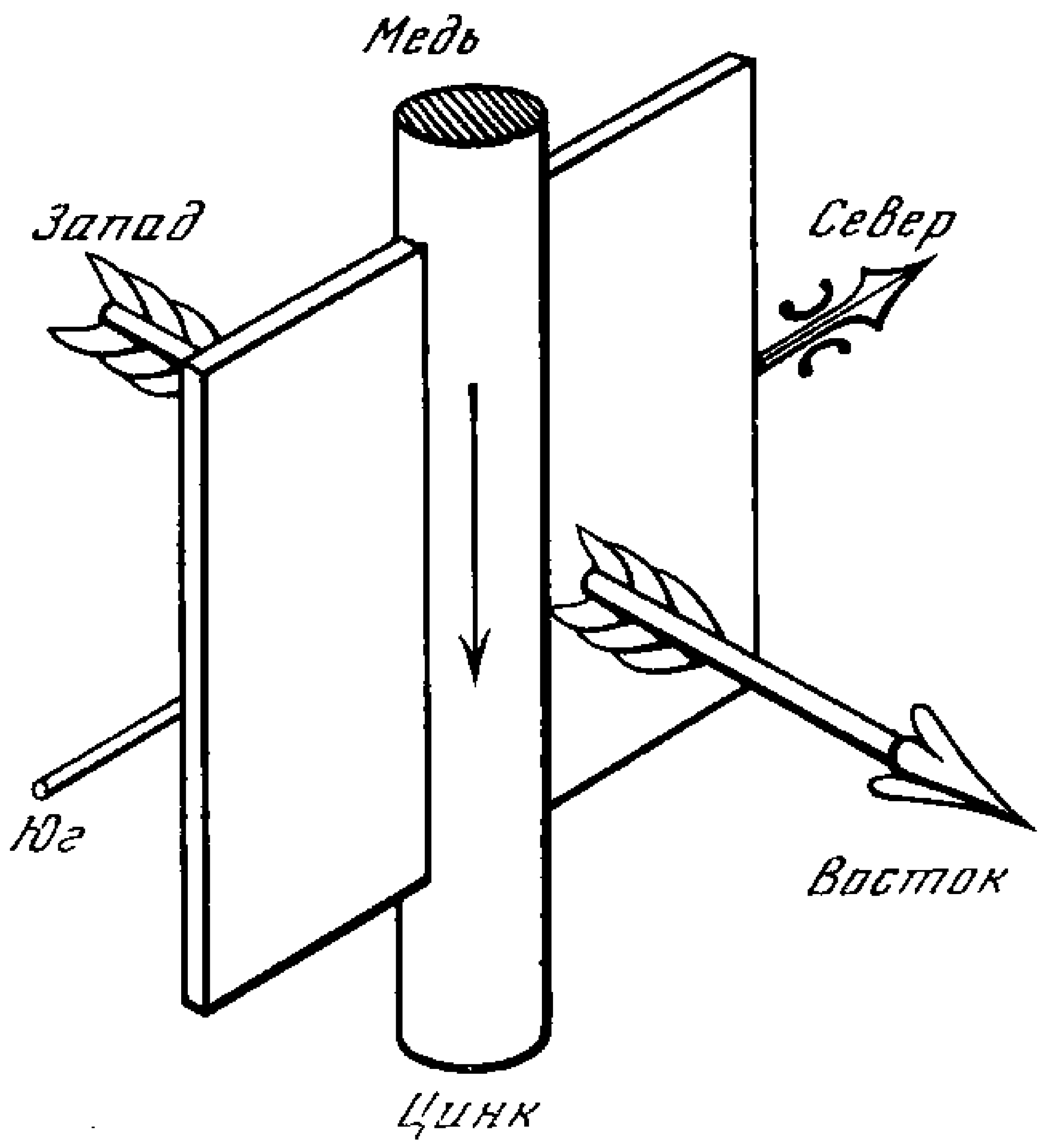


Рис. 22

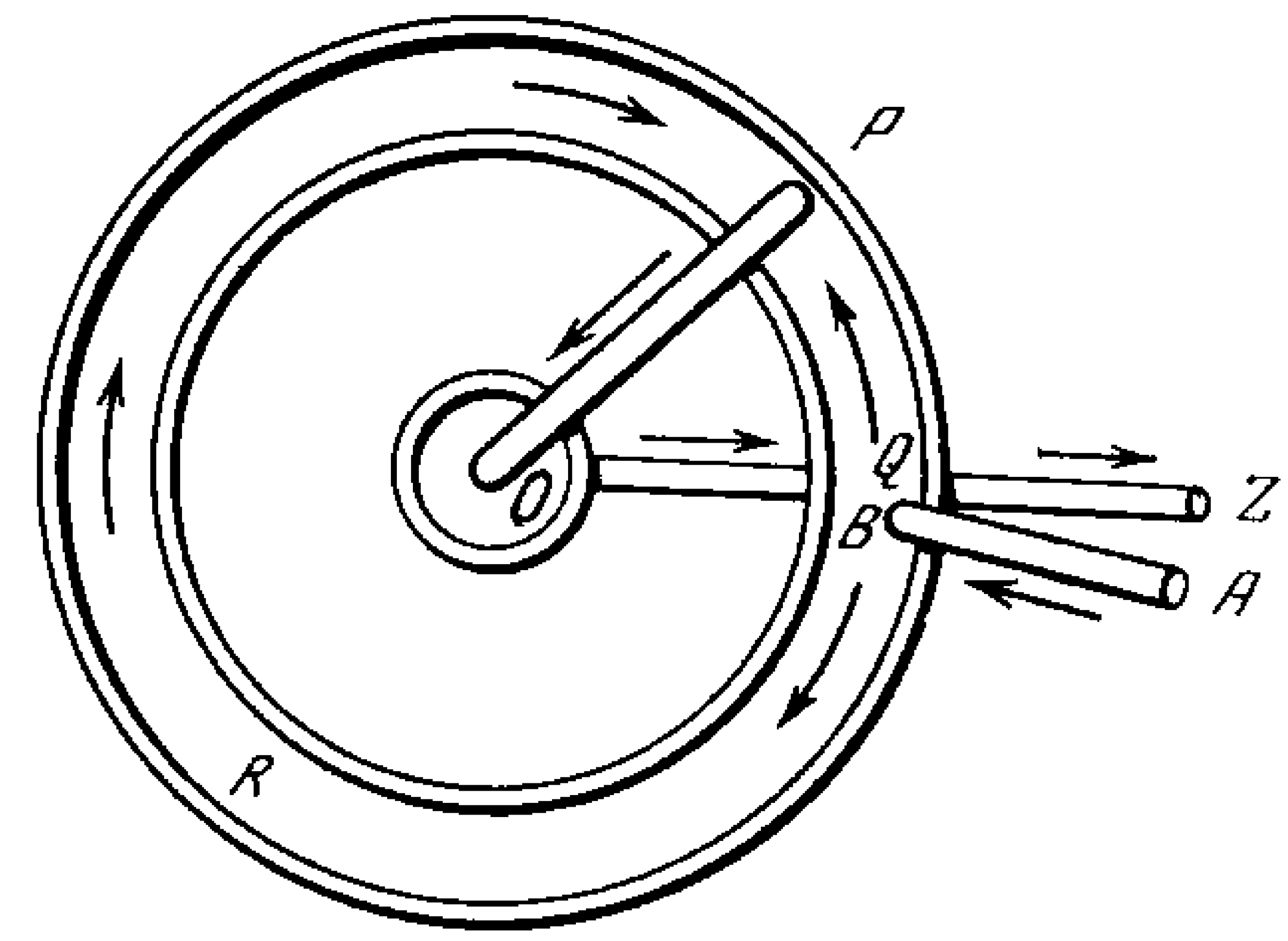


Рис. 23

491. Таким образом, мы полностью определили силу, действующую на любой участок электрического контура, помещенного в магнитное поле. Если контур двигается произвольным способом, но так, что, перебрав различные формы и положения, он возвращается в исходное место, а сила тока за время движения сохраняется постоянной, то общее количество работы, совершаемой электромагнитными силами, будет равно нулю. Так как это справедливо для любого цикла движения контура, то отсюда следует, что при помощи электромагнитных сил невозможно, преодолевая сопротивление трения и т. п., поддерживать непрерывное вращательное движение какой-либо части линейного контура с постоянной силой тока.

Непрерывное вращение, однако, может быть получено при условии, что электрический ток где-то на своем пути переходит от одного проводника к другому, скользящему или ползущему по первому проводнику.

Когда в контуре имеется скользящий контакт между проводником и гладкой поверхностью твердого или жидкого тела, то такую систему уже нельзя рассматривать как одиночный линейный контур с постоянной силой тока, ее следует считать системой, состоящей из двух или большего числа контуров с изменяющейся силой тока, распределенного по контурам таким образом, что в тех контурах, для которых N растет, токи текут в положительном направлении, а в тех, где N уменьшается,— в отрицательном.

Так, в устройстве, представленном на рис. 23, OP является подвижным проводником, один конец которого покоится в чаше со ртутью O, а другой погружен в концентричный относительно O кольцевой желоб со ртутью.

Ток i входит по AB и разделяется в кольцевом желобе на две части, одна из которых, x, течет по дуге BQP, а другая y — по дуге BRP. Эти токи, соединяясь в P, текут вдоль подвижного проводника PO и электрода OZ к цинковому полюсу батареи. Сила тока в PO и OZ равна $x+y$ или i. Здесь мы имеем два контура: контур $ABQPOZ$, в котором сила тока равна x и ток течет в положительном направлении, а также контур $ABRPOZ$, в котором сила тока равна y и ток течет в отрицательном направлении.

Пусть $\mathfrak{B}$ есть магнитная индукция, направленная вверх — по нормали к плоскости круга.

За время, пока OP переместится на угол ϑ в направлении, обратном движению часовой стрелки, площадь первого контура возрастет на $OP^2\cdot\vartheta/2$, а площадь второго контура на ту же самую величину уменьшится. Так как сила тока в первом контуре равна x, то работа, совершенная им, равна $x\cdot OP^2\cdot\vartheta\cdot\mathfrak{B}/2$; и так как сила тока во втором контуре равна y, работа, совершенная им, равна $y\cdot OP^2\cdot\vartheta\cdot\mathfrak{B}/2$. Поэтому полная работа будет такой:

$$\frac{1}{2}(x+y)\,OP^2\cdot\vartheta\mathfrak{B}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}i\cdot OP^2\cdot\vartheta\mathfrak{B}.$$

Эта работа определяется только силой тока в PO. Таким образом, если ток i поддерживается постоянным, то плечо OP будет непрерывно вращаться по кругу под действием постоянной силы, момент которой равен $i\cdot OP^2\cdot\mathfrak{B}/2$. Если, как это имеет место в северных широтах, $\mathfrak{B}$ действует вниз, то при токе, текущем внутрь, вращение будет происходить в отрицательном направлении, т. е. в направлении $PQBR$.

492. Теперь мы в состоянии перейти от взаимного действия магнитов и токов к действию одного контура с током на другой, ибо мы знаем, что магнитные свойства электрического контура C_1 по отношению к произвольной магнитной системе M_2 совпадают с магнитными свойствами магнитной оболочки S_1, граница которой совмещена с данным контуром, а мощность численно равна силе электрического тока. Пусть магнитная система M_2 является магнитной оболочкой S_2, тогда взаимное действие между S_1 и S_2 будет равно взаимодействию между S_1 и контуром C_2, который совмещен с краем оболочки S_2 и сила тока в котором равна мощности S_2. Но это последнее действие равносильно взаимодействию между C_1 и C_2.

Следовательно, взаимодействие между двумя контурами C_1 и C_2 совпадает с взаимодействием между магнитными оболочками S_1 и S_2.

В п. 423 мы уже исследовали взаимодействие между двумя магнитными оболочками, края которых представляют собой замкнутые кривые s_1 и s_2.

Положим $M=\int\limits_0^{s_2}\int\limits_0^{s_1}\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds_1\,ds_2$, где ε — угол между направлением элементов ds_1 и ds_2, r — расстояние между ними, а интегрирование один раз проводится по s_1, а второй раз — по s_2; будем называть эту величину M потенциалом двух замкнутых кривых s_1 и s_2. Тогда потенциальная энергия, обусловленная взаимодействием двух магнитных оболочек, ограниченных двумя контурами и имеющих мощности i_1 и i_2, окажется равной $-i_1i_2M$, а сила X, способствующая произвольному смещению δx, равна $i_1i_2(dM/dx)$.

Из этого результата может быть развита полная теория, описывающая силы, действующие на произвольный участок одного электрического контура со стороны другого электрического контура.

493. Метод, которому мы следовали в этой главе, принадлежит Фарадею. Вместо того чтобы начать (как мы, следуя Амперу, и будем делать в следующей главе) с прямого воздействия участка одного контура на участок другого контура, мы показали, во-первых, что контур производит то же действие на магнит, что и магнитная оболочка, или, другими словами, мы определили характер магнитного поля, создаваемого контуром. Во-вторых, мы показали, что контур, помещенный в произвольное магнитное поле, испытывает действие той же силы, что и магнитная оболочка. Таким образом, мы определили силу, действующую на контур, помещенный в любое магнитное поле. Наконец, предположив, что магнитное поле обусловлено другим электрическим контуром, мы определили действие одного электрического контура на другой: причем и на весь контур в целом, и на любую его часть.

494. Применим этот метод к случаю бесконечно протяженного прямого тока, действующего на некоторый участок параллельного ему прямого проводника.

Предположим, что ток i в первом проводнике течет вертикально вниз. В этом случае конец магнита, указывающий на север, будет смотреть на правую руку наблюдателя, стоящего ногами вниз и смотрящего на этот магнит со стороны оси тока.

Поэтому линии магнитной индукции являются горизонтальными окружностями с центрами на оси тока, а положительный обход вдоль них определяется направлением север—восток—юг—запад.

Пусть теперь к западу от первого тока помещен другой вертикальный ток, текущий вниз. Линии магнитной индукции, обусловленной первым током, будут в этом случае направлены к северу. Направление силы, действующей на второй ток, должно определиться путем поворота рукоятки правого винта из надира, куда направлен ток, к северу, куда направлена магнитная индукция. Тогда винт будет перемещаться к востоку, т. е. действующая на второй ток сила окажется направленной в сторону первого тока, или, вообще говоря, поскольку это явление зависит лишь от относительного расположения токов, два параллельных текущих в одном направлении тока притягивают друг друга.

Тем же самым путем мы можем показать, что два параллельных текущих в противоположных направлениях тока отталкивают друг друга.

495. Интенсивность магнитной индукции на расстоянии r от прямого тока силы i, как мы уже показали в п. 479, равна $2i/r$.

Следовательно, отрезок второго проводника, параллельный первому и несущий ток i' в том же самом направлении, будет притягиваться к первому проводнику с силой $F=2ii'a/r$, где a — длина рассматриваемого отрезка, r — расстояние от него до первого проводника.

Так как отношение a к r является численной величиной, независящей от абсолютных значений любой из этих линейных величин, произведение двух токов, измеренное в электромагнитной системе, должно иметь размерность силы; следовательно, размерность единицы тока такова: $[i]=[F^{1/2}]=[M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}]$.

496. Другой метод определения направления силы, действующей на контур с током, состоит в рассмотрении отношения между магнитным действием тока и действием других токов и магнитов.

Если по одну сторону провода, несущего ток, магнитное действие, обусловленное этим током, направлено в том же (или почти в том же) самом направлении, что и магнитное действие другого тока, тогда по другую сторону от провода эти силы будут противоположно (или почти противоположно) направленными, и сила, действующая на провод, окажется направленной от той стороны, где силы усиливают друг друга, к той стороне, где они противодействуют друг другу.

Таким образом, если текущий вниз ток помещен в поле магнитной силы, направленной к северу, его магнитное действие будет направлено к северу на западной стороне и к югу на восточной стороне. Поэтому силы увеличивают друг друга на западной стороне и уменьшают друг друга на восточной стороне, т. е. контур с током будет испытывать действие силы с запада на восток (см. рис. 22).

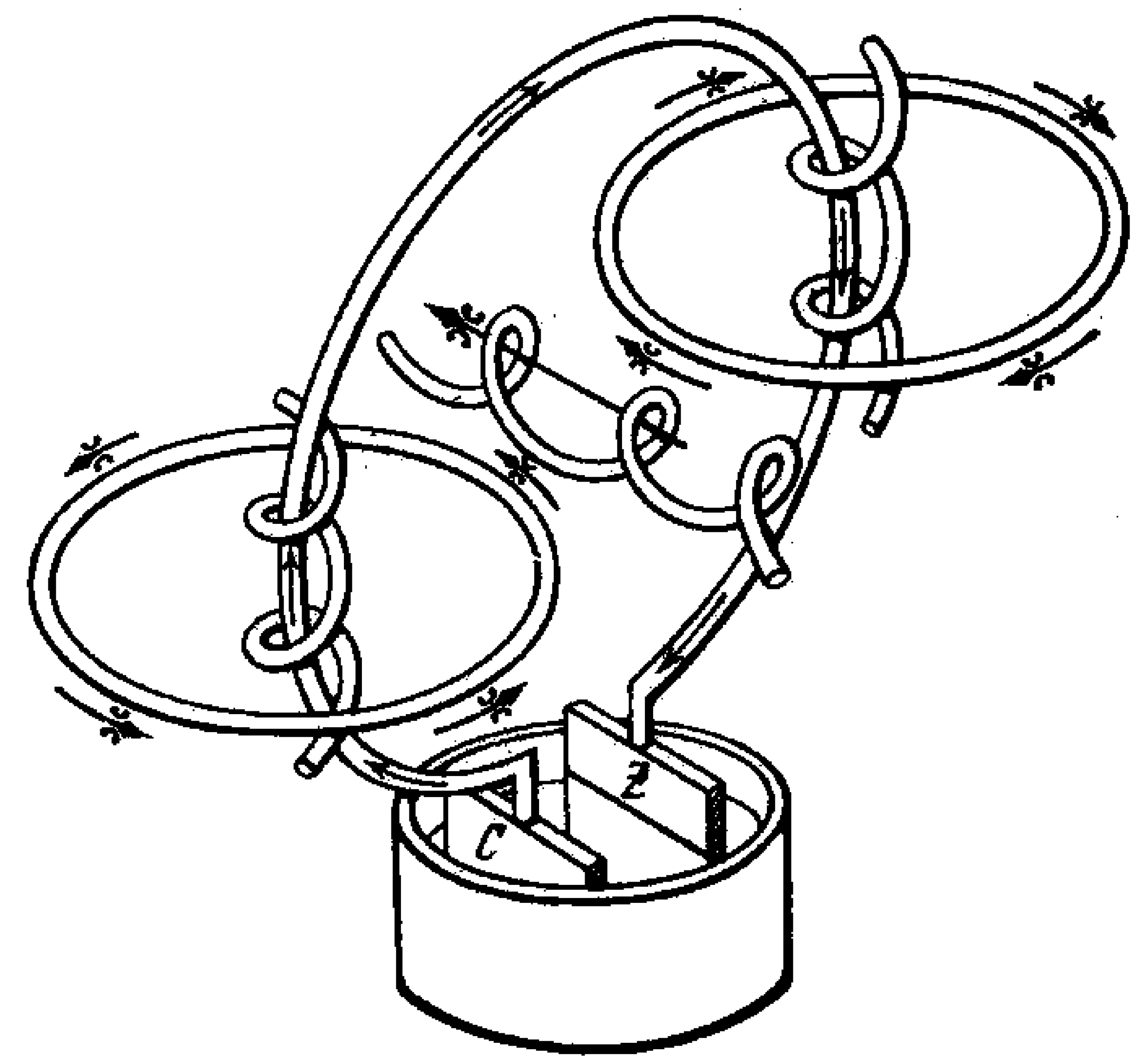


Рис. 24. Связь между электрическим током и линиями магнитной индукции определяется правым винтом

На рис. XVII в конце этого тома маленький кружок представляет сечение провода, несущего ток, текущий вниз, и помещенного в однородное поле магнитной силы, действующей в направлении левой стороны рисунка. Магнитная сила под проводом больше, чем над проводом. Следовательно, на провод будет действовать сила, заставляющая его двигаться снизу вверх.

497. Этот принцип мы можем применить и тогда, когда два тока расположены в одной плоскости, но не параллельны. Пусть один из проводников представляет собой бесконечный прямой провод в плоскости бумаги, которая предполагается горизонтальной. На правой стороне тока магнитная сила действует вниз, а на левой — вверх. То же самое верно и для магнитной силы, обусловленной любым коротким отрезком второго тока, расположенного в этой же плоскости. Если второй ток находится справа от первого, магнитные силы будут увеличивать друг друга справа от второго тока и уменьшать друг друга слева от второго тока. Поэтому второй ток будет испытывать действие силы, движущей его справа налево. Величина этой силы зависит только от положения второго тока, но не от его направления. Если же второй ток находится слева от первого, на него будет действовать сила, вынуждающая его двигаться слева направо.

Следовательно, если второй ток имеет то же самое направление, что и первый, он притягивается к первому; если же он течет в противоположном направлении, он отталкивается от первого тока. Если второй ток течет под прямым углом к первому току, удаляясь от него, то на второй ток действует сила в направлении протекания первого тока; если же второй ток течет, приближаясь к первому току, то сила действует в направлении, противоположном тому, в котором течет первый ток [рис. 24].

При рассмотрении взаимного действия двух токов нет необходимости удерживать в памяти те связи между электричеством и магнетизмом, которые мы пытались иллюстрировать с помощью правого винта. Даже если бы мы забыли их, то все равно пришли бы к правильным результатам при условии, что неизменно придерживались одной из двух возможных форм этой связи.

498. Сведем теперь воедино все магнитные явления, связанные с электрическим контуром в той мере, в какой мы их изучили.

Мы можем представить себе электрический контур состоящим из вольтовой батареи и провода, соединяющего ее клеммы, или из термоэлектрического устройства, или из заряженной лейденской банки с проводом, соединяющим ее положительную и отрицательную обкладки, или из любого иного устройства, предназначенного для создания электрического тока вдоль какого-то определенного пути.

Ток является причиной возникновения магнитных явлений, происходящих вблизи него.

Проведем какую-либо замкнутую кривую и возьмем вдоль всей этой кривой линейный интеграл от магнитной силы. Если замкнутая кривая не охватывает контур, то линейный интеграл обратится в нуль, если же замкнутая кривая охватывает контур, так что ток протекает сквозь эту кривую, то линейный интеграл будет равен $4\pi i$ и окажется положительным, когда направление интегрирования вдоль замкнутой кривой совпадает с направлением движения часовых стрелок в предположении, что наблюдатель смотрит на них, проходя сквозь замкнутую кривую в том же направлении, в котором течет ток.

Но для наблюдателя, который проходит сквозь электрический контур, двигаясь по замкнутой кривой в направлении интегрирования, ток также будет казаться текущим по направлению движения часовых стрелок. Мы можем выразить все это иначе, сказав, что соотношение между направлениями двух замкнутых кривых может быть представлено с помощью одного правостороннего винта, вставленного в электрический контур, и другого правостороннего винта, вставленного в замкнутую кривую. Если направление нарезки любого из винтов при движении вдоль нее совпадает с положительным направлением движения другого винта, то линейный интеграл положителен, в противоположном случае линейный интеграл отрицателен.

499. *Замечание*. Линейный интеграл $4\pi i$ зависит только от величины тока и ни от чего другого. Он не зависит от природы проводника, по которому проходит ток, будь то, например, металл или электролит или неидеальный проводник. У нас есть основания считать, что даже при отсутствии нужных токов проводимости, а только лишь при изменении электрического смещения (как это имеет место внутри стекла Лейденской банки при ее заряде или разряде) магнитный эффект, обусловленный электрическим движением, получается точно таким же.

Далее, величина линейного интеграла $4\pi i$ не зависит от природы среды, внутри которой проведена замкнутая кривая, и будет одной и той же и когда вся замкнутая кривая находится в воздухе, и когда проходит через магнит, или через мягкое железо, или через любое другое парамагнитное или диамагнитное вещество.

500. Когда контур помещен в магнитное поле, взаимное действие между током и другими элементами зависит от поверхностного интеграла от магнитной индукции, взятого по любой поверхности, ограниченной этим контуром. Если этот поверхностный интеграл может быть увеличен путем некоторого заданного перемещения всего контура или части его, то будет существовать механическая сила, стремящаяся заданным образом двигать этот проводник или какую-то его часть.

Движение проводника, приводящее к увеличению поверхностного интеграла, есть движение такого типа, при котором проводник перемещается перпендикулярно направлению тока и поперек линий индукции [рис. 25].

Если нарисовать параллелограмм, стороны которого параллельны и противоположны соответственно силе тока и магнитной индукции в одной и той же точке, то сила, действующая на единицу длины проводника, численно окажется равной площади этого параллелограмма и направленной перпендикулярно к этой плоскости в ту сторону, в какую возникало бы перемещение правого винта при вращательном движении его рукоятки от направления тока к направлению магнитной индукции.

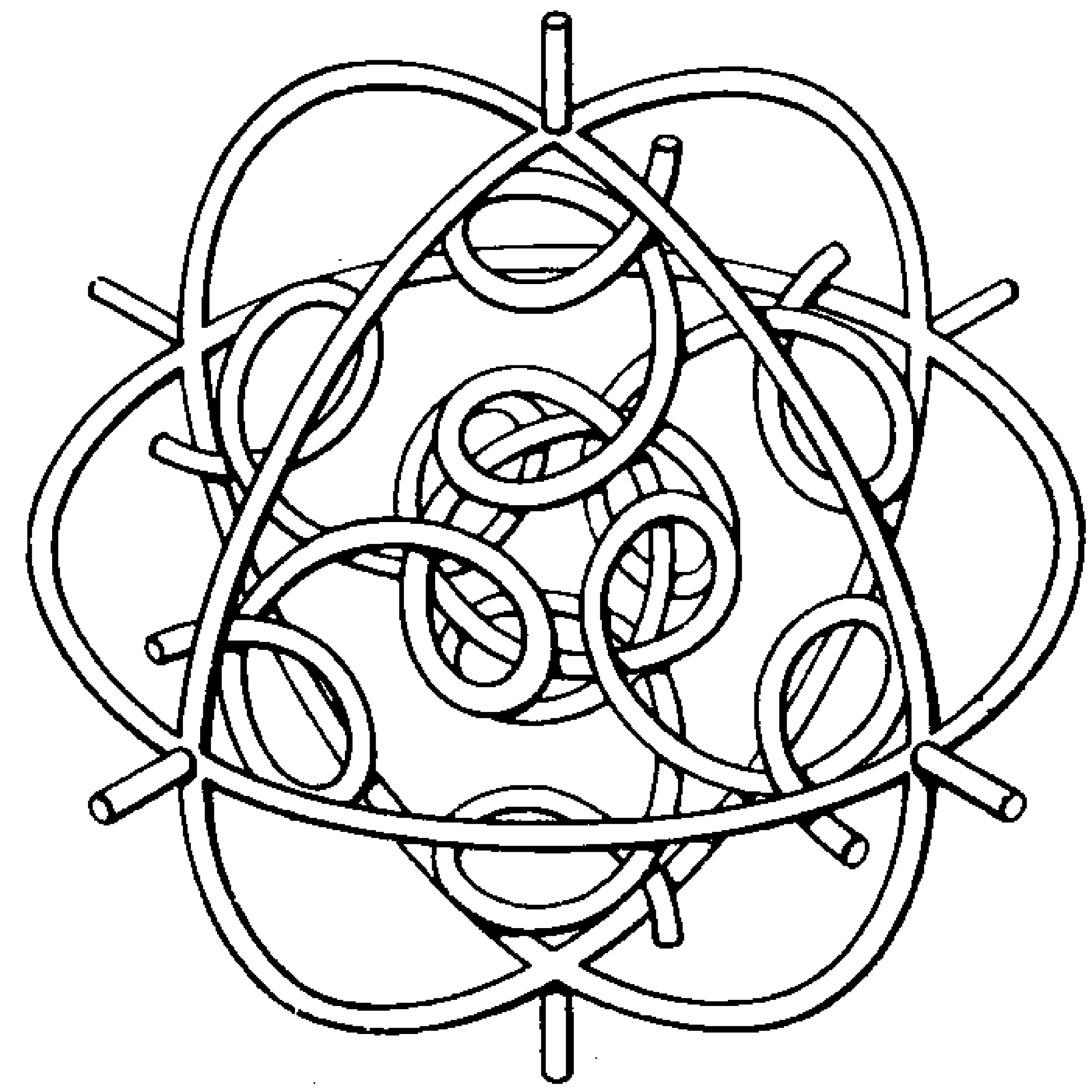


Рис. 25. Соотношения между положительными направлениями движения и вращением определяется тремя правыми винтами

Отсюда мы получаем новое определение линии магнитной индукции. Это линия, всегда перпендикулярная силе, действующей на проводник.

Ее можно также определить как такую линию, при передаче электрического тока вдоль которой проводник, несущий этот ток, не испытывал бы действия никакой силы.

501. Следует четко помнить, что механическая сила, стремящаяся перемещать проводник с током поперек линий магнитной индукции, действует не на электрический ток, а на токонесущий проводник. Если этот проводник представляет собой вращающийся диск или жидкость, он будет двигаться, подчиняясь действию этой силы, причем это движение может сопровождаться, а может и не сопровождаться изменением положения электрического тока, который несет этот проводник.

Единственной силой, воздействующей на электрические токи, является сила электродвижущая, и мы обязаны отличать ее от механической силы, которая и составляла предмет рассмотрения в настоящей главе.

ГЛАВА II

ИССЛЕДОВАНИЯ АМПЕРА ПО ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

502. В предыдущей главе мы рассмотрели природу магнитного поля, создаваемого электрическим током, а также механическое действие на помещенный в магнитное поле проводник с током. После этого мы перешли к рассмотрению действия одного электрического контура на другой, определив действие второго контура на первый как обусловленное магнитным полем, создаваемым вторым контуром. Но такое действие одного контура на другой было первоначально исследовано Ампером прямым путем почти сразу же после опубликования открытия Эрстеда. Поэтому сначала мы изложим основные положения метода Ампера, а метод, принятый в этом трактате, резюмируем в следующей главе.

Идеи, которые руководили Ампером, принадлежат к системе взглядов, допускающих прямое действие на расстоянии. Мы увидим, что основанное на этих взглядах замечательное направление размышлений и исследований было продолжено Гауссом, Вебером, Ф. Е. Нейманом, Риманом, Бетти, К. Нейманом, Лоренцом и другими и оно привело к выдающимся результатам, состоящим как в открытии новых фактов, так и в построении теории электричества (см. п. 846—866).

Идеи, которым я попытался следовать, это идеи действия через среду — от одной части к другой, близлежащей, примыкающей к ней. Такой подход часто применялся Фарадеем; его развитие в математической форме, а также сравнение результатов с известными фактами было моей целью в нескольких опубликованных работах. Сопоставление с философской точки зрения результатов этих двух методов, столь противоположных в своих исходных принципах, должно давать ценный материал для изучения условий построения научных теорий.

503. Теория Ампера взаимодействия электрических токов базируется на четырех экспериментальных фактах и одном предположении.

Все основополагающие опыты Ампера являют собой примеры того, что было названо нулевым методом сравнения сил (см. п. 214). Вместо того чтобы измерять силы либо динамически — путем сообщения движения некоторому телу, либо статически — путем уравновешивания весом другого тела или упругостью нити, в нулевом методе две силы одинакового происхождения одновременно воздействуют на тело, уже и до того пребывающее в равновесии, и если при этом не возникает никаких эффектов, то это означает, что эти силы уравновешивают друг друга.

Этот метод особо ценен при сравнении эффектов, производимых электрическим током, когда он проходит по контурам различных конфигураций. Соединяя все проводники в один непрерывный ряд, мы обеспечиваем постоянство силы тока во всех точках его пути, и, поскольку ток всюду на своем пути начинается почти одновременно, мы можем доказать, что силы, обусловленные его действием на подвешенное тело, находятся в равновесии в том случае, если тело совершенно не реагирует ни на возникновение, ни на прекращение тока.

504. Весы Ампера состоят из легкой рамки, способной вращаться вокруг вертикальной оси и несущей провод, который образует два контура одинаковой площади; контуры лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях, а токи в них текут в противоположных направлениях. Цель этого устройства состоит в том, чтобы избавиться от влияния земного магнетизма на проводящую проволоку. Когда электрический контур может свободно перемещаться, он стремится расположиться так, чтобы охватить собою возможно бóльшее число линий индукции. Если эти линии обусловлены земным магнетизмом, то для контура в вертикальной плоскости это будет положение, при котором плоскость контура совпадает с плоскостью, проходящей через магнитный восток и магнитный запад при направлении тока, противоположном кажущемуся направлению хода Солнца.

Жестко связывая расположенные в параллельных плоскостях контуры равной площади, в которых текут одинаковые, но противоположно направленные токи, мы образуем комбинацию, не подверженную действию земного магнетизма и потому называемую астатической (см. рис. 26). Она испытывает, однако, действие сил, возникающих от токов или магнитов, расположенных столь близко к ней, что их воздействие на оба эти контура оказывается различным.

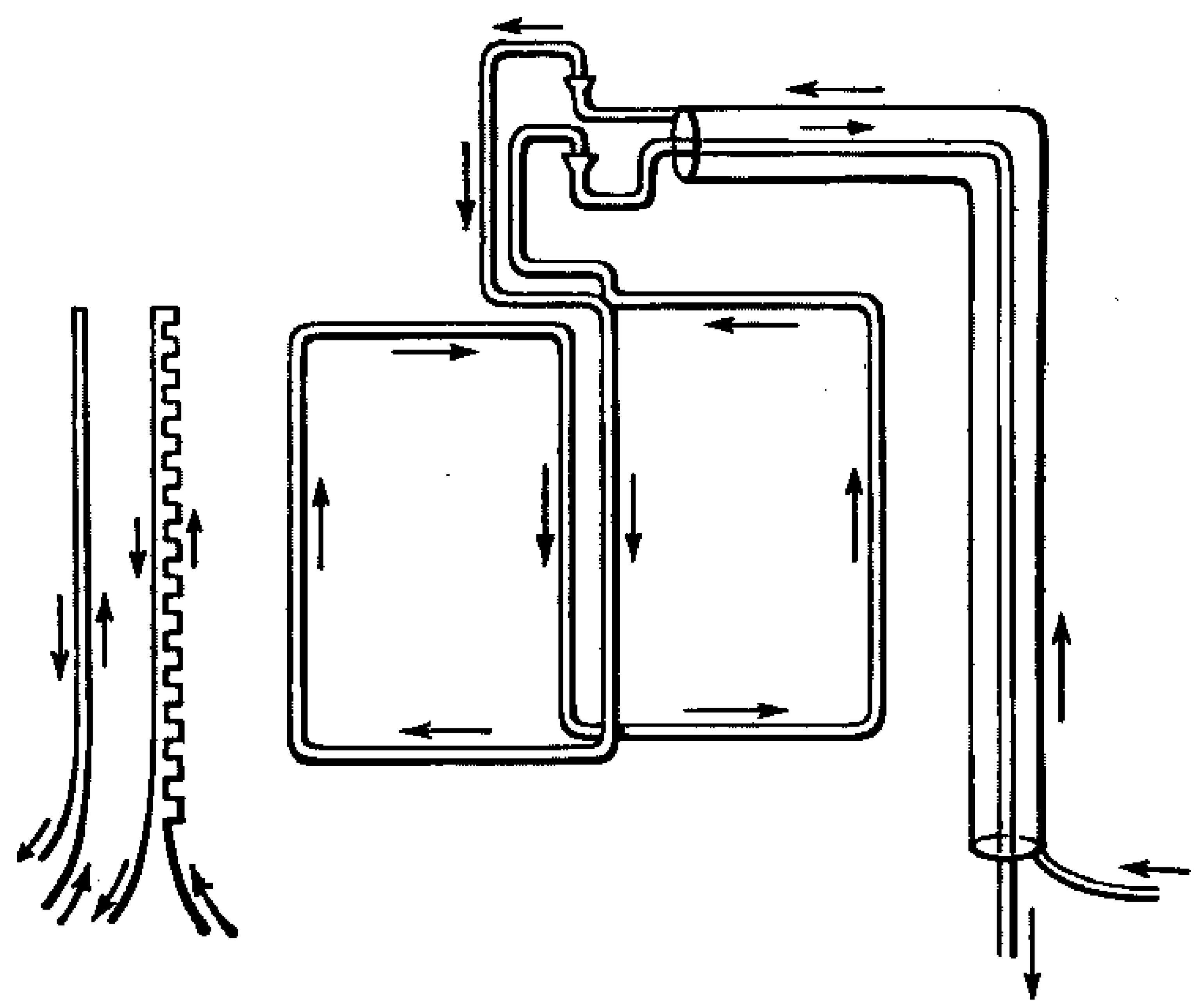


Рис. 26

505. Первый опыт Ампера относится к действию двух равных, но противоположно направленных токов, близко прилегающих друг к другу. Покрытый изоляционным материалом провод сдваивается и помещается поблизости от контуров астатических весов. Когда через провод и весы пропускается ток, равновесие весов остается невозмущенным, показывая тем самым, что два близких, равных и противоположно направленных тока нейтрализуют друг друга. Если вместо двух расположенных рядом проводов взять один провод, изолировать его, поместив в середину металлической трубки, и пропустить ток в одну сторону по проводу, а в другую — по трубке, то действие этого тока вне трубки уже совершенно точно, а не приблизительно будет равно нулю.

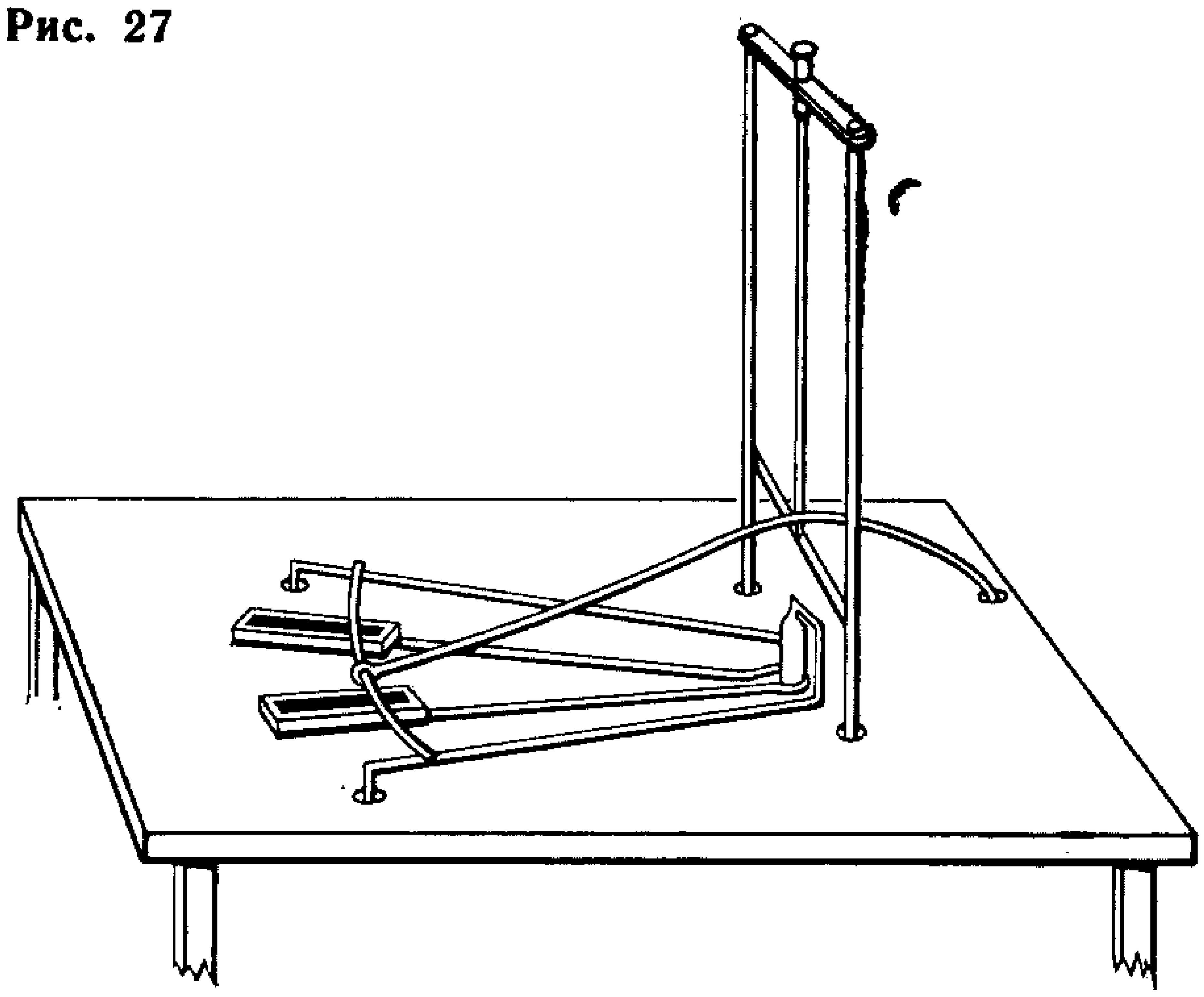
Этот принцип имеет огромное значение для конструирования электрических приборов, так как он позволяет осуществлять подвод и отвод тока к любому гальванометру или другому прибору без какого-либо электромагнитного эффекта, связанного с прохождением тока туда и обратно. На практике обычно бывает достаточно связать провода вместе, тщательно следя, чтобы они были совершенно изолированы друг от друга; однако там, где они должны проходить вблизи чувствительных элементов аппаратуры, лучше все же один из них выполнить в форме трубки, а другой — в виде протянутого внутри нее провода (см. п. 683).

506. Во втором опыте Ампера один из проводов многократно изогнут, образуя ряд небольших извилин, но так, что каждый участок его остается очень близким к прямому проводу. Оказывается, что ток, текущий в одну сторону по извилистому проводу, а обратно снова по прямому, не влияет на астатические весы. Это доказывает, что влияние тока, текущего по какой-нибудь искривленной части провода, эквивалентно влиянию такого же тока, текущего по прямой линии, соединяющей крайние точки искривления, при условии, что искривленная линия на каждом участке своего пути не сильно удалена от этой прямой. Следовательно, любой малый элемент контура эквивалентен элементам, состоящим из двух или многих элементов, и соотношение между составными элементами и результирующим элементом оказывается таким же, как и соотношение между компонентами и их векторной суммой в случае смещений или скоростей.

507. В третьем опыте астатические весы заменены проводником, способным перемещаться только вдоль своей длины; ток входит в проводник и покидает его в фиксированных точках пространства. Обнаружено, что никакой замкнутый контур, помещаемый поблизости, не в состоянии приводить этот проводник в движение [рис. 27].

Проводником в этом опыте служит провод в форме дуги окружности, подве-

Рис. 27



шенный на коромысло, способное вращаться вокруг вертикальной оси. Дуга горизонтальна, а ее центр совпадает с вертикальной осью. Два небольших корытца наполнены ртутью так, что выпуклая поверхность ртути возвышается над уровнем корытцев. Корытцы помещены под дугой окружности и подогнаны так, чтобы ртуть касалась проволоки, изготовленной из хорошо амальгированной меди.

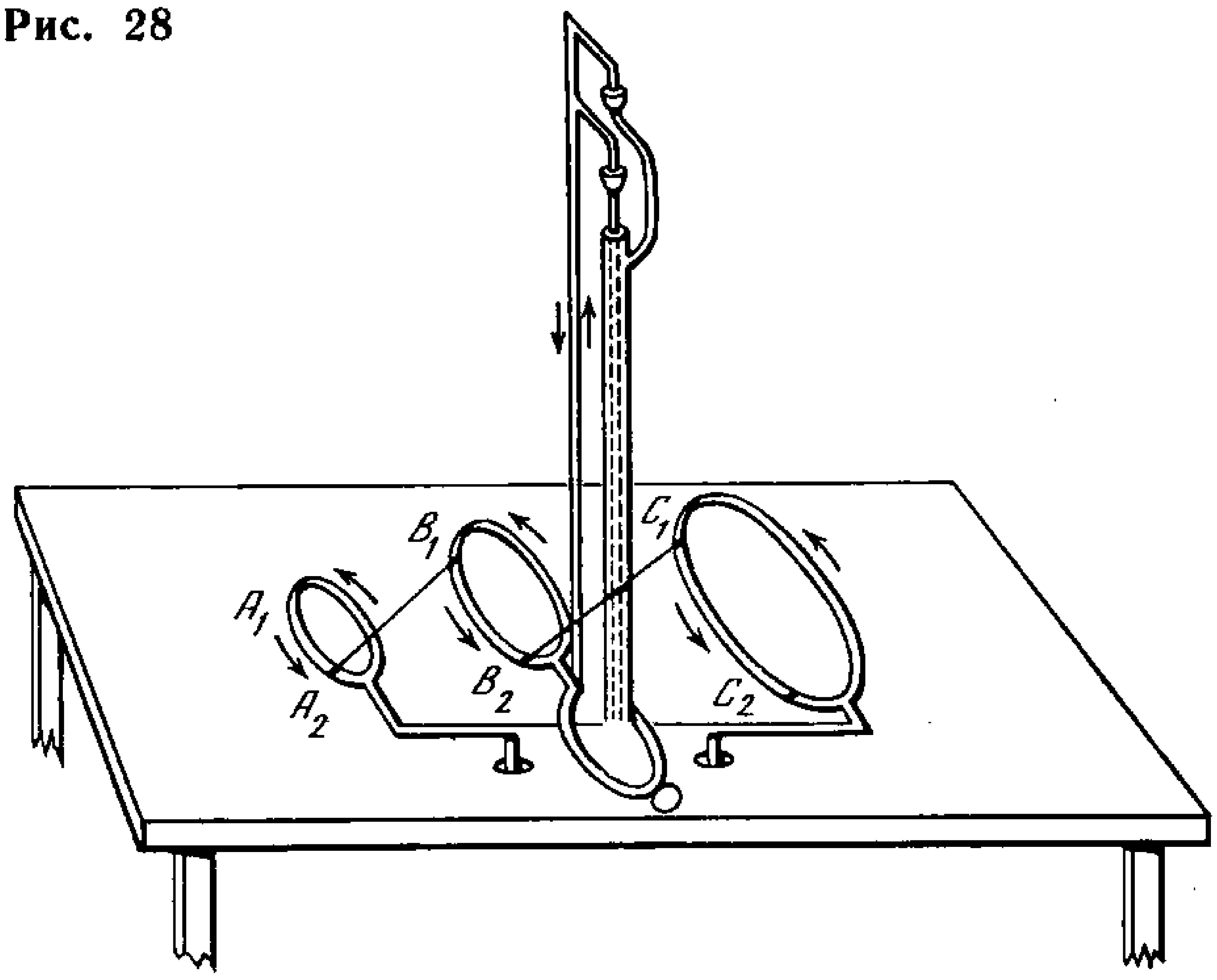
Ток направляется в одно из этих корытцев, проходит часть дуги окружности между корытцами и покидает ее через другое корытце. Таким образом, ток протекает по участку дуги окружности; дуга в то же время имеет возможность достаточно свободно перемещаться в направлении ее длины. К этому подвижному проводнику можно теперь приближать любые замкнутые контуры или магниты, не вызывая при этом ни малейших тенденций к его продольному перемещению.

508. В четвертом опыте с астатическими весами используются два контура, каждый из них подобен одному из контуров в самих весах, но один контур, C, обладает размерами в n раз большими, а другой, A,— в n раз меньшими. Они расположены на противоположных сторонах от контура весов, которые мы обозначим через B, и пропорционально удалены от него: расстояние от C до B в n раз превышает расстояние от B до A. Направление и сила тока в A и C одинаковы. Направление тока в B может быть либо таким же, либо противоположным. Как было найдено, в этих условиях B оказывается в равновесии под действием A и C, какие бы формы эти три контура ни принимали и на каких бы расстояниях при выполнении приведенных выше соотношений они ни находились.

Поскольку действия между полными контурами могут быть рассмотрены как обусловленные действиями между элементами контуров, мы можем использовать следующий метод установления закона этих действий.

Пусть A_1, B_1, C_1 на рис. 28 — соответствующие элементы трех контуров, A_2, B_2, C_2 — тоже соответствующие элементы, но в другой части этих контуров. Тогда расположение B_1 относительно A_2 подобно расположению C_1 относительно B_2, но расстояние и размеры C_1 и B_2 в n раз превышают расстояние и размеры B_1 и A_2 соответственно. Если закон для электромагнитного действия является

Рис. 28



функцией расстояния, то действие между B_1 и A_2, какими бы ни были его вид и качественный характер, может быть записано так: $F=B_1\cdot A_2 f\,(\overline{B_1A_2})ab$, а действие между C_1 и B_2: $F'=C_1\cdot B_2 f\,(\overline{C_1B_2})bc$, где a, b, c — силы токов в A, B, C. Но $nB_1=C_1$, $nA_2=B_2$, $n\overline{B_1A_2}=\overline{C_1B_2}$ и $a=c$. Отсюда

$$F'=n^2B_1A_2 f\,(n\overline{B_1A_2})ab,$$

и это, согласно опыту, равно F, так что мы имеем

$$n^2 f\,(n\overline{A_2B_1})=f\,(\overline{A_2B_1});$$

или *сила изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния.*

509. Имея в виду эти опыты, следует отметить, что каждый электрический ток образует замкнутый контур. Токи, использованные Ампером, создавались вольтовой батареей и, конечно, текли по замкнутым контурам. Можно было бы предположить, что в случае разряда проводника через искру мы могли бы иметь ток, образующий разомкнутый конечный отрезок, но в соответствии со взглядами этой книги даже этот пример относится к случаю замкнутого контура. Не осуществлено никаких опытов по взаимодействию незамкнутых контуров и, следовательно, не может быть высказано никаких опирающихся на чисто экспериментальные данные утверждений по поводу взаимодействия двух элементов контуров. Правда, мы можем сделать участок контура подвижным, чтобы установить воздействие на него со стороны других токов, но эти токи вместе с током на подвижном участке обязательно образуют замкнутые контуры, так что окончательным результатом опыта снова окажется действие одного или нескольких замкнутых токов либо на весь замкнутый ток, либо на часть его.

510. При анализе этих явлений, однако, мы можем рассматривать действие замкнутого контура на элемент этого же или какого-то другого контура как результирующую нескольких отдельных сил, зависящих от тех отдельных частей, на которые первый контур может быть мысленно, для математических целей, разделен.

И поскольку это чисто математический анализ действия, он является совершенно законным независимо от того, как действуют силы в действительности,— раздельно или нет.

511. Мы начнем с рассмотрения чисто геометрических соотношений между двумя линиями в пространстве, представляющими контуры, а также между элементарными частями этих линий.

Пусть в пространстве имеется две кривых; на каждой из них берется какая-нибудь фиксированная точка, от которой в определенном направлении вдоль кри-

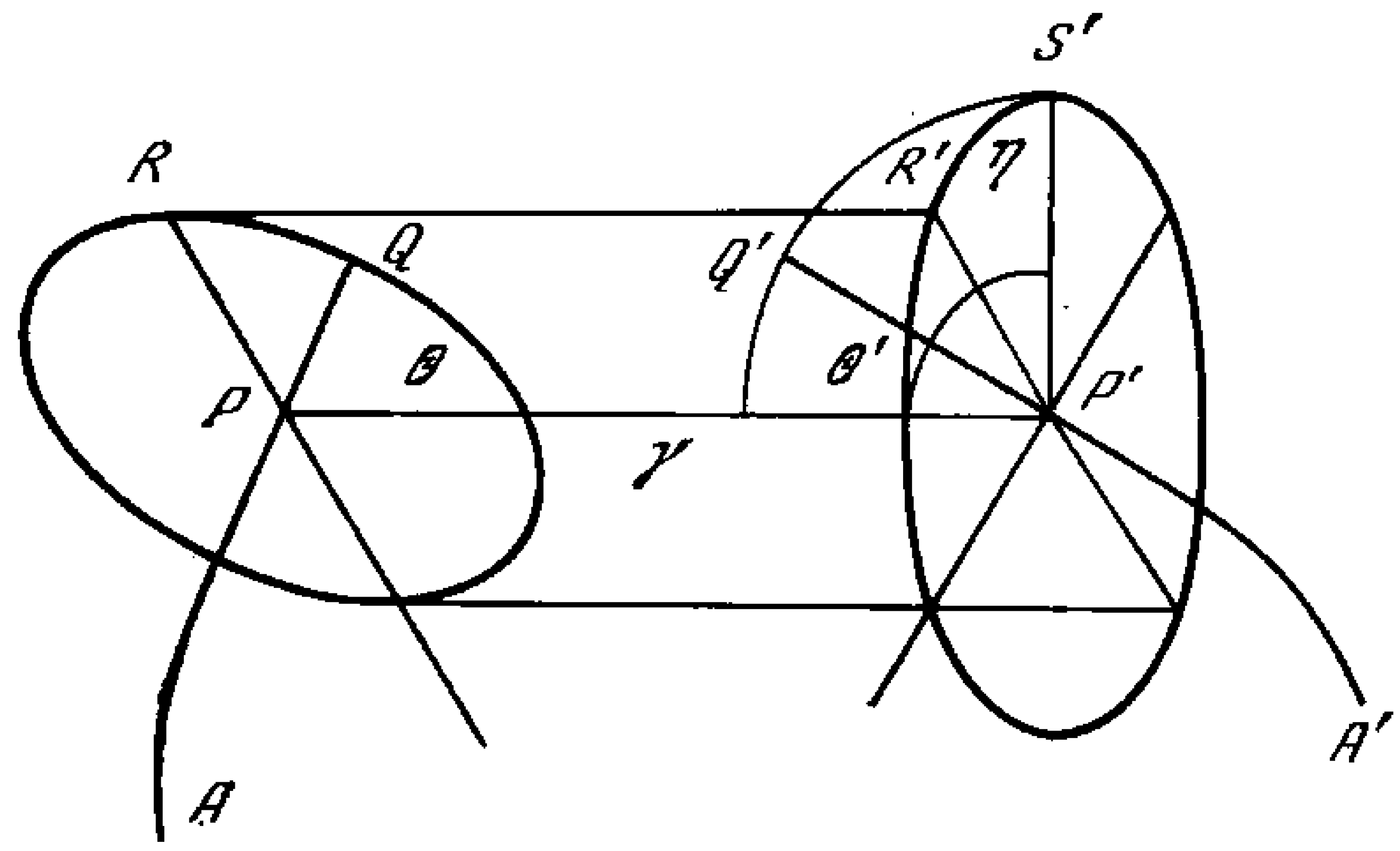


Рис. 29

вой измеряются дуги. Пусть этими точками будут A и A', а элементами этих двух кривых будут PQ и $P'Q'$ [рис. 29].

Пусть

$$\left.\begin{aligned} AP&=s, & A'P'&=s', \\ PQ&=ds, & P'Q'&=ds'. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Обозначим расстояние PP' через r, угол $P'PQ$ — через ϑ, угол $PP'Q'$ — через ϑ', а угол между плоскостями этих углов — через η.

Относительное положение двух элементов полностью определяется расстоянием r между ними и тремя углами ϑ, ϑ' и η, поскольку, если эти величины заданы, то относительное положение элементов определено так же полно, как если бы они являлись частью твердого тела.

512. Если мы, используя прямоугольные координаты, сделаем x, y, z координатами точки P, x', y', z' — координатами точки P', а через l, m, n и l', m', n' обозначим соответственно направляющие косинусы PQ и $P'Q'$, то

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds}&=l, & \frac{dy}{ds}&=m, & \frac{dz}{ds}&=n, \\ \frac{dx'}{ds'}&=l', & \frac{dy'}{ds'}&=m', & \frac{dz'}{ds'}&=n' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и

$$\left.\begin{aligned} l(x'-x)+m(y'-y)+n(z'-z)&=r\cos\vartheta, \\ l'(x'-x)+m'(y'-y)+n'(z'-z)&=-r\cos\vartheta', \\ ll'+mm'+nn'&=\cos\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где ε — угол между направлениями самих элементов, а

$$\cos\varepsilon = -\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta. \tag{4}$$

Далее,

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2, \tag{5}$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} r\frac{dr}{ds} &= -(x'-x)\frac{dx}{ds} - (y'-y)\frac{dy}{ds} - (z'-z)\frac{dz}{ds}, \\ &= -r\cos\vartheta. \\ &\text{Аналогично} \\ r\frac{dr}{ds'} &= (x'-x)\frac{dx'}{ds'} + (y'-y)\frac{dy'}{ds'} + (z'-z)\frac{dz'}{ds'}, \\ &= -r\cos\vartheta' \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и, дифференцируя $r\,(dr/ds)$ по s',

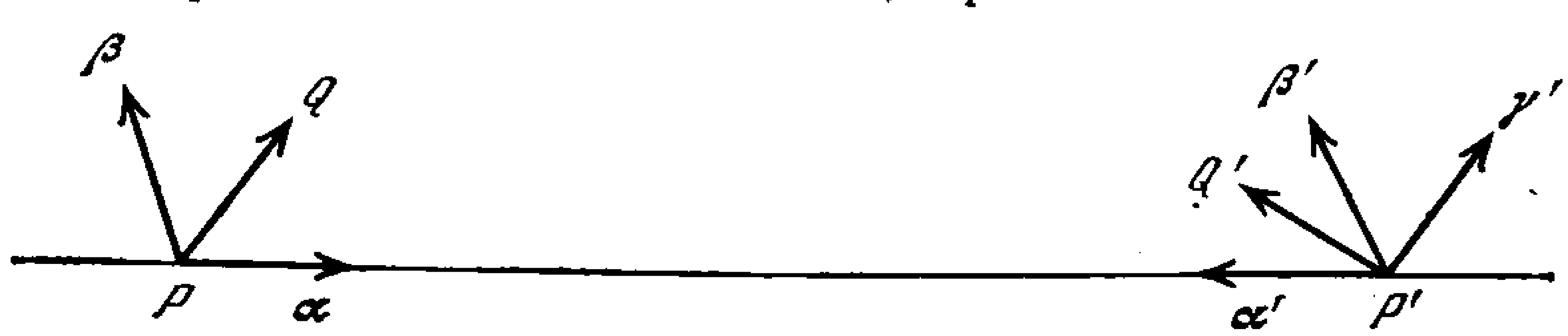
$$\left.\begin{aligned} r\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} &= -\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}, \\ &= -(ll' + mm' + nn'), \\ &= -\cos\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Мы можем поэтому выразить три угла ϑ, ϑ' и η и вспомогательный угол ε через производные от r по s и s' следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta &= -\frac{dr}{ds}, \\ \cos\vartheta' &= -\frac{dr}{ds'}, \\ \cos\varepsilon &= -r\frac{d^2r}{ds\,ds'} - \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}, \\ \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta &= -r\frac{d^2r}{ds\,ds'}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

513. Рассмотрим далее, как факт воздействия друг на друга элементов PQ и $P'Q'$ может быть представлен математически; причем сначала мы не будем

Рис. 30



предполагать, что взаимодействие с необходимостью происходит вдоль линии, соединяющей эти элементы.

Мы видели, что каждый элемент можно считать разложенным на другие элементы при условии, что эти составляющие, если их скомбинировать по правилу сложения векторов, дадут в качестве своей результирующей исходный элемент.

Мы будем поэтому рассматривать элемент ds разложенным на $\cos\vartheta ds = \alpha$ в направлении r и на $\sin\vartheta\, ds = \beta$ — в направлении, перпендикулярном к r в плоскости $P'PQ$ [рис. 30].

Будем также рассматривать элемент ds' разложенным на $\cos\vartheta'\, ds'=\alpha'$ в направлении, обратном r, на $\sin\vartheta' \cos\eta\, ds'=\beta$ — в направлении, параллельном тому, в котором измерен β, и на $\sin\vartheta' \sin\eta\, ds'=\gamma'$ — в направлении, перпендикулярном к α' и β'.

Рассмотрим действие между составляющими α и β, с одной стороны, и между α', β', γ' — с другой.

(1). α и α' лежат на одной прямой. Сила между ними должна быть поэтому тоже направлена вдоль этой прямой. Будем считать ее притягивающей, $=A\,\alpha\alpha' ii'$, где A есть функция r, а i, i' — интенсивности токов соответственно в ds и ds'. Это выражение удовлетворяет условию изменения знака перед i и перед i'.

(2). β и β' параллельны друг другу и перпендикулярны линии, их соединяющей. Действие между ними записывается так: $B\beta\beta' ii'$.

Эта сила действует, очевидно, вдоль линии, соединяющей β и β', ибо она должна быть в плоскости, в которой лежат эти составляющие, и если бы мы измерили β и β' в обратном направлении, то это выражение осталось бы неизменным, значит, если оно представляет силу, то такую, у которой нет составляющих в направлении β и которая, следовательно, должна быть направлена по r. Будем считать, что это выражение, когда оно положительно, соответствует притяжению.

(3). β и γ' перпендикулярны друг к другу, а также к линии, их соединяющей. Единственным возможным действием между расположенными так элементами является пара сил с осью, параллельной r. Но мы сейчас заняты самими силами и поэтому оставим это в стороне.

(4). Действие α и β' (если они вообще действуют друг на друга) должно выражаться так: $C\alpha\beta' ii'$.

Знак этого выражения обращается на противоположный при обращении направления, в котором мы измеряем β'. Поэтому оно должно представлять собой либо силу в направлении β', либо момент пары сил в плоскости α и β'. Поскольку мы не изучаем пары, то будем принимать его за силу, действующую на α в направлении β'.

Существует, конечно, и равная ей сила, действующая на β' в противоположном направлении.

По той же причине мы имеем силу $C\alpha\gamma' ii'$, действующую на α в направлении γ', и силу $C\beta\alpha' ii'$, действующую на β в направлении, противоположном тому, в котором измеряется β.

514. Собирая вместе наши результаты, мы находим, что сила, действующая на ds, составляется из следующих сил:

$$\left.\begin{aligned} X&=(A\alpha\alpha'+B\beta\beta')\,ii' && \text{в направлении } r,\\ Y&=C\,(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\,ii' && \text{в направлении } \beta,\\ Z&=C\alpha\gamma' ii' && \text{в направлении } \gamma'. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Предположим, что это действие на ds является результирующей трех сил: силы $Rii'dsds'$, действующей в направлении r, силы $Sii'ds\,ds'$, действующей в направлении ds, и силы $S'ii'ds\,ds'$, действующей в направлении ds', тогда в выражении через ϑ, ϑ' и η

$$\begin{gathered} R=(A+2C)\cos\vartheta\cos\vartheta'+B\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta\\ S=-C\cos\vartheta',\qquad S'=C\cos\vartheta. \end{gathered} \tag{10}$$

В выражении через производные от r

$$\left.\begin{aligned} R&=(A+2C)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-Br\frac{d^2r}{ds\,ds'}, \\ S&=C\frac{dr}{ds'}, \qquad S'=-C\frac{dr}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В выражении через l, m, n и l', m', n'

$$\left.\begin{aligned} R&=-(A+2C+B)\frac{1}{r^2}(l\xi+m\eta+n\zeta)(l'\xi+m'\eta+n'\zeta)+B(ll'+mm'+nn'), \\ S&=C\frac{1}{r}(l'\xi+m'\eta+n'\zeta), \qquad S'=C\frac{1}{r}(l\xi+m\eta+n\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где ξ, η, ζ написаны взамен $x'-x$, $y'-y$ и $z'-z$ соответственно.

515. Далее мы должны подсчитать силу, с которой конечный участок тока s' действует на конечный участок тока s. Участок тока s тянется от A, где $s=0$, до P, где оно имеет значение s, а участок тока s' тянется от A', где $s'=0$, до P', где оно имеет значение s'. Координаты точек на любом из токов являются функциями s или s'.

Если F есть функция положения точки, то мы будем употреблять нижний индекс $(_{s,\,0})$ для обозначения превышения значения этой функции в P над ее значением в A, т. е. $F_{(s,\,0)}=F_P-F_A$. Для замкнутых контуров эти функции с необходимостью исчезают.

Пусть $ii'X$, $ii'Y$ и $ii'Z$ будут составляющими полной силы, с которой $A'P'$ действует на AP. Тогда параллельная X составляющая силы, с которой ds' действует на ds, будет равна

$$ii'\frac{d^2X}{ds\,ds'}\,ds\,ds'.$$

Откуда

$$\frac{d^2X}{ds\,ds'}=R\frac{\xi}{r}+Sl+S'l'. \tag{13}$$

Подставляя значения R, S и S' из (12) и помня, что

$$(l'\xi+m'\eta+n'\zeta)=r\frac{dr}{ds'}, \tag{14}$$

и группируя члены, содержащие l, m, n, мы найдем

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{ds\,ds'}=l&\left\{-(A+2C+B)\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}\xi^2+C\frac{dr}{ds'}+(B+C)\frac{l'\xi}{r}\right\} \\ +m&\left\{-(A+2C+B)\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}\xi\eta+C\frac{l'\eta}{r}+B\frac{m'\xi}{r}\right\} \\ +n&\left\{-(A+2C+B)\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}\xi\zeta+C\frac{l'\zeta}{r}+B\frac{n'\xi}{r}\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Так как A, B и C являются функциями r, мы можем записать

$$P=\int_r^\infty (A+2C+B)\frac{1}{r^2}\,dr, \qquad Q=\int_r^\infty C\,dr. \tag{16}$$

Здесь интегрирование проводится между r и ∞, поскольку A, B, C исчезают при $r=\infty$.

Следовательно,

$$(A+B+2C)\frac{1}{r^2}=-\frac{dP}{dr}, \qquad C=-\frac{dQ}{dr}. \tag{17}$$

516. Но мы знаем, что, согласно третьему случаю равновесия Ампера, когда s' является замкнутым контуром, сила, действующая на ds, перпендикулярна к направлению ds, или, другими словами, составляющая силы в направлении самого элемента ds равна нулю. Предположим в связи с этим, что направление оси x параллельно ds, т. е. положим $l=1$, $m=0$, $n=0$. Уравнение (15) тогда станет таким:

$$\frac{d^2X}{ds\,ds'}=\frac{dP}{ds'}\xi^2-\frac{dQ}{ds'}+(B+C)\frac{l'\xi}{r}. \tag{18}$$

Чтобы найти dX/ds, т. е. силу на ds, отнесенную к единице длины, мы должны проинтегрировать это выражение по s'. Интегрируя первый член по частям, находим

$$\frac{dX}{ds}=(P\xi^2-Q)_{(s',\,0)}-\int_0^{s'}(2Pr-B-C)\frac{l'\xi}{r}ds'. \tag{19}$$

Когда s' составляет замкнутый контур, это выражение должно быть нулем. Первый его член исчезнет сам. Второй член, однако, в случае замкнутого контура, вообще говоря, не исчезает, если величина, стоящая под знаком интеграла, не обращается тождественно в нуль. Следовательно, чтобы удовлетворить условию Ампера, мы должны положить

$$P=(B+C)/2r. \tag{20}$$

517. Мы можем теперь исключить P и найти общее выражение для dX/ds.

$$\frac{dX}{ds}=\left\{\frac{B+C}{2}\frac{\xi}{r}(l\xi+m\eta+n\zeta)+Q\right\}_{(s',\,0)}$$
$$+m\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{m'\xi-l'\eta}{r}ds'-n\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{l'\zeta-n'\xi}{r}ds'. \tag{21}$$

Когда s' является замкнутым контуром, первый член этого выражения исчезает, и, если положить

$$\left.\begin{aligned}
\alpha'&=\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{n'\eta-m'\zeta}{r}ds',\\
\beta'&=\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{l'\zeta-n'\xi}{r}ds',\\
\gamma'&=\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{m'\xi-l'\eta}{r}ds'
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(где интегрирование распространено на замкнутый контур s'), то мы сможем записать

$$\frac{dX}{ds}=m\gamma'-n\beta'$$

и аналогично

$$\left.\begin{aligned}\frac{dY}{ds}&=n\alpha'-l\gamma',\\ \frac{dZ}{ds}&=l\beta'-m\alpha'.\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

Величины α', β', γ' иногда называют определителями контура s' относительно точки P, а их результирующая названа Ампером директрисой электромагнитного действия.

Из этого уравнения очевидно, что сила, имеющая компоненты $(dX/ds)ds$, $(dY/ds)ds$ и $(dZ/ds)ds$, перпендикулярна как к элементу ds, так и к его директрисе; эта сила представлена численно площадью параллелограмма, сторонами которого являются элемент ds и директриса действия.

На языке кватернионов результирующая сила, действующая на ds, есть векторная часть произведения директрисы на ds.

Поскольку мы уже знаем, что директриса есть то же самое, что и магнитная сила, обусловленная единичным током в контуре s', то далее мы будем говорить о директрисе, как о создаваемой контуром магнитной силе.

518. Теперь мы завершим вычисления составляющих силы, действующей между двумя конечными токами, замкнутыми или разомкнутыми.

Пусть ρ будет новой функцией r, такой, что

$$\rho=\frac{1}{2}\int_r^\infty(B-C)\,dr,\qquad(24)$$

тогда в силу (17) и (20)

$$A+B+2C=r\frac{d^2}{dr^2}(Q+\rho)-\frac{d}{dr}(Q+\rho),\qquad(25)$$

и уравнения (11) становятся такими:

$$\left.\begin{aligned}&R=-\frac{d\rho}{dr}\cos\varepsilon+r\frac{d^2}{ds\,ds'}(Q+\rho),\\ &S=-\frac{dQ}{ds'},\qquad S'=\frac{dQ}{ds}.\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

При таких значениях составляющих сил уравнение (13) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{ds\,ds'}&=-\cos\varepsilon\frac{d\rho}{dr}\frac{\xi}{r}+\xi\frac{d^2}{ds\,ds'}(Q+\rho)-l\frac{dQ}{ds'}+l'\frac{dQ}{ds},\\ &=\cos\varepsilon\frac{d\rho}{dx}+\frac{d^2\{(Q+\rho)\,\xi\}}{ds\,ds'}+l\frac{d\rho}{ds'}-l'\frac{d\rho}{ds}.\end{aligned}\qquad(27)$$

519. Пусть

$$F=\int_0^s l\rho\,ds,\qquad G=\int_0^s m\rho\,ds,\qquad H=\int_0^s n\rho\,ds,\tag{28}$$

$$F'=\int_0^{s'} l'\rho\,ds',\qquad G'=\int_0^{s'} m'\rho\,ds',\qquad H'=\int_0^{s'} n'\rho\,ds'.\tag{29}$$

Эти величины имеют определенные значения для любой заданной точки пространства. Для замкнутых контуров они соответствуют составляющим вектор-потенциалов контуров.

Пусть L будет новой функцией r, такой, что

$$L=\int_0^r r\,(Q+\rho)\,dr,\tag{30}$$

и пусть M будет двойным интегралом

$$\int_0^{s'}\int_0^{s}\rho\cos\varepsilon\,ds\,ds',\tag{31}$$

который для замкнутых контуров становится их взаимным потенциалом; тогда уравнение (27) может быть записано в виде

$$\frac{d^2X}{ds\,ds'}=\frac{d^2}{ds\,ds'}\left\{\frac{dM}{dx}-\frac{dL}{dx}+F-F'\right\}.\tag{32}$$

520. Интегрируя по s и s' между заданными пределами, находим

$$X=\frac{dM}{dx}-\frac{d}{dx}\left(L_{PP'}-L_{AP'}-L_{A'P}+L_{AA'}\right),$$
$$+F_{P'}-F_{A'}-F'_{P}+F'_{A},\tag{33}$$

где индексы у L характеризуют расстояние r, функцией которого является L, а индексы у F и F' характеризуют точки, в которых следует брать значения этих функций.

Исходя из этого, могут быть написаны выражения для Y и Z. Умножая эти три составляющие соответственно на dx, dy и dz, получаем

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=DM-D\left(L_{PP'}-L_{AP'}-L_{A'P}+L_{AA'}\right)$$
$$-(F'\,dx+G'\,dy+H'\,dz)_{(P-A)}+(F\,dx+G\,dy+H\,dz)_{(P'-A')},\tag{34}$$

где D обозначает полный дифференциал.

Так как выражение $F\,dx+G\,dy+H\,dz$ не является, вообще говоря, полным дифференциалом какой-либо функции от x, y, z, то и выражение $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ не является полным дифференциалом токов в том случае, когда один из них разомкнут.

521. Если, однако, оба тока замкнутые, то члены в L, F, G, H, F', G', H' исчезают и

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=DM,\tag{35}$$

где M есть взаимный потенциал двух замкнутых контуров, несущих единичные токи. Величина M выражает работу, производимую электромагнитными силами над любым из проводящих контуров при его перемещении параллельно самому себе с бесконечного расстояния до места его фактического расположения. Любому изменению его положения, *увеличивающему* M, будет оказано *содействие* со стороны электромагнитных сил.

Можно показать, как в п. 490, 596, что и когда движение контура не параллельно самому себе, то силы, действующие на него, все равно определяются через вариацию M потенциала одного контура на другом.

522. Единственным экспериментальным фактом, использованным нами в этом исследовании, является факт, установленный Ампером и состоящий в том, что действие замкнутого контура на произвольный участок другого контура перпендикулярно направлению последнего. Все остальные этапы исследований связаны с чисто математическими соображениями, зависящими от свойств линии в пространстве. Эти рассуждения поэтому могут быть представлены в более сжатой и подходящей форме путем использования идей и языка математического метода, специально приспособленного для выражения таких геометрических соотношений, а именно метода *кватернионов* Гамильтона.

Это было сделано проф. Тэтом в Quarterly Journal of Mathematics, 1866, и в его трактате по *Кватернионам* в § 399 применительно к оригинальным исследованиям Ампера. Читатель, изучающий предмет, сможет легко распространить этот метод на несколько более общее исследование, приведенное здесь.

523. До сих пор мы не делали никаких предположений относительно величин A, B, C, кроме того, что они являются функциями расстояния между элементами r. Теперь мы должны установить вид этих функций; воспользуемся для этой цели четвертым случаем равновесия Ампера, п. 508, в котором показывается, что если линейные размеры и расстояния в системе двух контуров изменить в одинаковой пропорции, сохранив токи неизменными, то сила между двумя контурами останется прежней.

Но сила между двумя контурами для единичных токов равна dM/dx и, так как она не зависит от размеров системы, должна быть величиной численной. Следовательно, сама величина M, являющаяся коэффициентом взаимного потенциала контуров, должна иметь размерность длины. Тогда из (31) следует, что ρ должна быть величиной, обратной длине, и, следовательно, в силу (24) разность $B—C$ должна быть обратна квадрату длины. Но так как и B и C являются функциями r, то разность $B—C$ должна быть обратным квадратом r, возможно, с каким-то численным множителем перед ним.

524. Множитель, который мы принимаем, зависит от нашей системы измерений. Если мы принимаем электромагнитную систему (а она называется так потому, что согласуется с системой, уже установленной для магнитных измерений), то величина M должна совпадать с величиной потенциала двух магнитных оболочек единичной мощности, границами которых служат соответственно два этих контура. В этом случае величина M, согласно п. 423, равна:

$$M = \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds', \tag{36}$$

где интегрирование производится по обоим контурам в положительном направлении. Приняв это выражение за численное значение M и ср. с (31), найдем

$$\rho=1/r, \qquad B-C=2/r^2. \tag{37}$$

525. Мы можем теперь выразить составляющие силы, возникающей из-за действия элемента ds' на элемент ds, в наиболее общей форме, согласующейся с данными экспериментов.

Сила, действующая на ds, состоит из следующих сил притяжения:

$$Rii'\,ds\,ds'=\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)ii'\,ds\,ds'+r\frac{d^2Q}{ds\,ds'}ii'\,ds\,ds' \quad \text{в направлении } r,$$

$$Sii'\,ds\,ds'=-\frac{dQ}{ds'}ii'\,ds\,ds' \quad \text{в направлении } ds,$$

$$S'ii'\,ds\,ds'=\frac{dQ}{ds}ii'\,ds\,ds' \quad \text{в направлении } ds', \tag{38}$$

где $Q=\int\limits_r^\infty C\,dr$, и, поскольку C является неизвестной функцией r, нам известно только, что Q есть функция r.

526. Величина Q не может быть без какого-то рода предположений определена из экспериментов, в которых активный ток образует замкнутый контур. Если мы вместе с Ампером будем считать, что действие между элементами ds и ds' происходит вдоль соединяющей их линии, то силы S и S' должны исчезнуть, а величина Q либо стать постоянной, либо обратиться в нуль. Тогда сила сводится к силе притяжения, величина которой равна

$$Rii'\,ds\,ds'=\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)ii'\,ds\,ds'. \tag{39}$$

Ампер, проводивший это исследование задолго до установления магнитной системы единиц, пользовался формулой, содержащей численный множитель, равный половине этого, а именно

$$Rjj'\,ds\,ds'=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)jj'\,ds\,ds'. \tag{40}$$

Здесь сила тока измеряется в так называемых электродинамических мерах. Если i, i' — силы токов в электромагнитных единицах, а j, j' — в электродинамических единицах, то очевидно, что

$$jj'=2ii', \quad \text{или} \quad j=\sqrt{2}\,i. \tag{41}$$

Следовательно, единичный ток, принятый в электромагнитной мере, больше такового в электродинамической мере в отношении $\sqrt{2}$ к 1.

Единственным аргументом в пользу обращения к электродинамической единице является то, что эта единица первоначально была принята Ампером — первооткрывателем закона взаимодействия токов. Но связанное с ней непрерывное появление $\sqrt{2}$ в вычислениях неудобно; электромагнитная система обладает большим преимуществом: численно она совпадает со всеми нашими магнитными формулами. И, поскольку обучающемуся трудно удерживать в памяти, должен ли он что-то умножать или что-то делить на $\sqrt{2}$, мы будем впредь использовать только электромагнитную систему, принятую Вебером и большинством других авторов.

Так как ни вид, ни величина Q не влияют на какие-либо проделанные до сих пор опыты, в которых, по крайней мере, активный ток всегда был замкнутым, мы можем при желании принять для Q любое значение, если нам покажется, что это упростит формулы.

Так, Ампер предположил, что сила между двумя элементами действует вдоль линии, их соединяющей. Это дает $Q=0$,

$$Rii'\,ds\,ds' = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - 2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right) ii'\,ds\,ds', \quad S=0, \quad S'=0. \tag{42}$$

Грассманн [1] предположил, что два элемента, расположенные вдоль одной и той же прямой линии, не взаимодействуют. Это дает

$$Q = -\frac{1}{2r}, \qquad R = -\frac{3}{2r}\frac{d^2r}{ds\,ds'}, \qquad S = -\frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds'}, \qquad S' = \frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds}. \tag{43}$$

Мы можем, если угодно, предположить, что притяжение между двумя элементами, расположенными на заданном расстоянии друг от друга, пропорционально косинусу угла между ними. В этом случае

$$Q = -\frac{1}{r}, \qquad R = \frac{1}{r^2}\cos\varepsilon, \qquad S = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}, \qquad S' = \frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}. \tag{44}$$

Наконец, мы могли бы предположить, что и силы притяжения, и наклонные силы зависят только от углов, образуемых элементами с линией, их соединяющей, и тогда получили бы

$$Q = -\frac{2}{r}, \qquad R = -3\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}, \qquad S = -\frac{2}{r^2}\frac{dr}{ds'}, \qquad S' = \frac{2}{r^2}\frac{dr}{ds}. \tag{45}$$

527. Из четырех этих предположений несомненно наилучшим является принадлежащее Амперу, так как это единственное предположение, которое делает силы между двумя элементами не только равными и противоположными, но и действующими по прямой линии, их соединяющей.

ГЛАВА III

ОБ ИНДУКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

528. Открытие Эрстедом магнитного действия электрического тока привело путем прямых рассуждений к открытию намагничивания электрическими токами и механического действия между электрическими токами. Однако только в 1831 г. Фарадей, в течение некоторого времени пытавшийся создавать электрические токи при помощи магнитного или электрического действия, открыл условия магнитоэлектрической индукции. Метод, примененный Фарадеем в его исследованиях,

[1] Pogg. *Ann.*, 64, p. 1 (1845).

состоял в постоянном обращении к эксперименту как средству проверки правильности его идей и в постоянном развитии идей под непосредственным влиянием эксперимента. В его опубликованных работах эти идеи выражены на языке, более всего пригодном для науки, находящейся в стадии зарождения, ибо язык этот до некоторой степени даже чужд стилю тех физиков, которые привыкли устанавливать математические формы мышления.

Экспериментальное исследование, с помощью которого Ампер установил законы механического действия между электрическими токами, является одним из наиболее блестящих достижений в науке.

Все вместе, и теория, и эксперимент, полностью созревшие и оснащенные, как будто выскочили из головы «Ньютона электричества». Совершенные по форме и неуязвимые по точности, эти результаты были сведены в одну формулу, из которой можно вывести все явления и которая должна навсегда остаться фундаментальной формулой электродинамики.

Метод Ампера, однако, хотя и представлен в индуктивной форме, не позволяет проследить процесс образования идей, характеризующий этот метод. Мы с трудом можем поверить в то, что Ампер на самом деле открыл закон действия лишь с помощью экспериментов, им описанных. Мы вынуждены заподозрить (впрочем, он и сам признается в этом [1]), что он открыл свой закон каким-то способом, оставшимся для нас нераскрытым, и что построив впоследствии безупречное доказательство, он удалил все следы лесов, с помощью которых возвел его.

Фарадей же, насборот, демонстрирует нам неудачные свои эксперименты наряду с удачными и незрелые свои идеи наряду с развитыми; поэтому читатель, каким бы он ни был менее способным по сравнению с Фарадеем в отношении индуктивного мышления, испытывает скорее симпатию, нежели чувство восхищения, и искушение поверить, что при удачном стечении обстоятельств он и сам стал бы первооткрывателем. Поэтому каждому изучающему следовало бы прочитать труды Ампера в качестве великолепного образца научного стиля изложения открытия, но ему следовало бы изучить и Фарадея тоже для культивирования научного духа на основе тех действий и противодействий, которые будут происходить между фактами, открываемыми ему Фарадеем, и идеями, зарождающимися в его собственном мозгу.

Возможно, большую пользу науке принесло то, что Фарадей, хотя и глубоко осознавший фундаментальные свойства пространства, времени и силы, не был профессиональным (professed) математиком. У него не возникало искушения входить во многие интересные исследования в области чистой математики, которые подсказали бы ему его открытия, если бы они были представлены в математической форме, и он не чувствовал потребности втискивать свои результаты в приемлемые — по математическим нормам того времени — формы, т. е. выражать их в виде, доступном для нападок со стороны математиков. Благодаря этому он был оставлен в покое и мог делать работу, ему присущую,— находить соответствие между своими идеями и своими фактами, прибегая к языку естественному, а не профессиональному.

Главным образом в надежде положить эти идеи в основу математической теории взялся я за настоящий трактат.

[1] *Théorie des phénomènes Électrodynamiques*, p. 9.

529. Мы привыкли считать, что мир состоит из отдельных частей; поэтому обычно математики начинают с рассмотрения отдельной частицы, постигают ее связь с другой частицей и так далее. Обычно такой подход считается наиболее естественным.

Однако для того, чтобы вообразить какую-то частицу, требуется прибегнуть к некоторому процессу абстрагирования, ибо все наши восприятия относятся к телам протяженным, и идея *целого*, существующая в нашем сознании на данный момент, возможно, столь же первична, как и представление о любой вещи, обладающей индивидуальными свойствами. Поэтому может существовать математический метод, где, отправляясь от целого, мы переходим к его частям вместо того, чтобы идти от частей к целому. Например, Евклид в своей первой книге представляет себе линию как след, прочерчиваемый точкой, поверхность — как место, заметаемое линией, а объем — как область, производимую поверхностью. Но он также определяет поверхность как границу объема, линию — как край поверхности и точку — как конец линии.

Аналогичным способом мы можем представить себе и потенциал материальной системы как функцию, найденную с помощью определенной процедуры интегрирования, где учитываются массы тел, помещенных в поле, или же мы можем предположить, что эти массы сами по себе лишены иного математического смысла, кроме того, что они равны объемному интегралу от $(1/4\pi)\nabla^2\Psi$, где Ψ — потенциал.

Изучая электричество, мы можем пользоваться формулами, содержащими такие величины, как расстояния между определенными телами, или такие, как электризация или токи в этих телах, но мы можем также пользоваться формулами, содержащими совсем другие величины, каждая из которых непрерывна во всем пространстве.

Математические операции, применяемые в первом методе,— это интегрирование вдоль линий, по поверхностям и по ограниченным объемам пространства, а во втором методе — это дифференциальные уравнения в частных производных и интегрирование по всему пространству.

Метод Фарадея, по-видимому, органически связан со вторым подходом. Фарадей никогда не рассматривает тела, между которыми не существует ничего, кроме расстояния, и которые действуют друг на друга лишь в соответствии с некоторой функцией этого расстояния. Он представляет себе все пространство как некое поле силы, силовые линии которого в общем случае оказываются криволинейными, а линии, обусловленные каким-то определенным телом,— исходящими из него во все стороны в направлениях, изменяющихся под влиянием присутствия других тел. Фарадей даже говорит [2] о принадлежащих телу силовых линиях в известном смысле как о частях самого этого тела, так что при его действии на удаленные тела нельзя сказать, что оно действует там, где его нет. Однако не это составляет главную, определяющую идею, связанную с Фарадеем. Я думаю, он, скорее всего, хотел сказать, что поле пространства заполнено силовыми линиями, расположение которых зависит от расположения тел в этом поле, а электрическое и механическое воздействие на каждое тело определяется силовыми линиями, в это тело упирающимися.

[2] *Exp. Res.*, vol. II, p. 293; vol. III, p. 447.

ЯВЛЕНИЯ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ[3]

530. 1. *Индукция путем изменения первичного тока*

Пусть имеются два проводящих контура — первичный и вторичный. Первичный контур соединен с вольтовой батареей, и ток в нем можно создавать, поддерживать, прекращать или менять на обратный. Во вторичный контур включается гальванометр, регистрирующий любые токи, которые могут сформироваться в контуре. Этот гальванометр помещается на таком удалении от всех частей первичного контура, что первичный ток не оказывает никакого прямого влияния на его показания.

Пусть какая-то часть первичного контура состоит из прямого провода, какая-то часть вторичного контура тоже состоит из прямого провода, расположенного рядом с первым, параллельно ему; остальные же части контуров находятся на значительном расстоянии друг от друга.

Установлено, что в момент посылки тока через прямой провод первичного контура гальванометр вторичного контура регистрирует во вторичном прямом проводе ток противоположного направления. Он называется индуцированным током. Если первичный ток поддерживается постоянным, индуцированный ток быстро исчезает и первичный ток, по-видимому, не производит никакого эффекта на вторичный контур. Если затем прервать первичный ток, то наблюдается появление вторичного тока в том же направлении, в котором протекал первичный ток. Каждое изменение первичного тока производит электродвижущую силу во вторичном контуре. При увеличении первичного тока электродвижущая сила направлена противоположно току, а при уменьшении — в том же самом направлении, что и ток. Когда же первичный ток постоянен, электродвижущая сила отсутствует.

Если сблизить провода, эти эффекты индукции увеличиваются. Они также возрастают при образовании из проводов двух кольцевых витков или спиральных катушек, близко расположенных друг к другу. А при помещении внутрь этих витков (катушек) железного стержня или пучка железных проволок отмеченные выше эффекты возрастают еще сильнее.

2. *Индукция путем перемещения первичного контура*

Мы видели, что, когда первичный ток неподвижен и поддерживается постоянным, вторичный ток быстро исчезает.

Пусть теперь первичный ток остается постоянным, а первичный прямой провод приближается к вторичному прямому проводу. При этом сближении появится вторичный ток в направлении, *противоположном* первичному.

Если первичный контур удаляется от вторичного, то появится вторичный ток в том же самом направлении, что и первичный.

3. *Индукция путем перемещения вторичного контура*

Если перемещать вторичный контур, то при приближении вторичного провода к первичному вторичный ток противоположен первичному, а при удалении проводов друг от друга вторичный и первичный токи текут в одинаковом направлении.

---

[3] Прочтите у Фарадея *Experimental Researches*, Series I and II.

Во всех случаях направление вторичного тока таково, что механическое действие между двумя проводами противоположно направлению движения. Это действие имеет характер отталкивания при сближении проводов и притяжения — при их удалении друг от друга. Этот очень важный факт был установлен Ленцем [4].

4. *Индукция путем относительного перемещения магнита и вторичного контура*

Если заменить первичный контур магнитной оболочкой, край которой совпадает с контуром, а мощность численно равна силе тока в контуре, и если австральная (южная) сторона оболочки будет соответствовать положительной стороне контура, то явления, производимые перемещением этой оболочки относительно вторичного контура, окажутся неотличимыми от явлений, наблюдаемых в случае перемещения первичного контура.

531. Совокупность всех этих явлений может быть сведена в один закон. Когда число линий магнитной индукции, проходящих сквозь вторичный контур в положительном направлении, изменяется, то в контуре действует электродвижущая сила, измеряемая скоростью убывания потока магнитной индукции через контур.

532. Пусть, например, рельсы железной дороги изолированы от земли; на одном конце они соединены через гальванометр, а замыкание контура осуществляется через колеса и ось железнодорожного вагона на расстоянии x от того конца, где находится гальванометр. Если пренебречь высотой оси над уровнем рельсов, то поток индукции через вторичный контур будет обусловлен только наличием вертикальной составляющей земной магнитной силы, которая в северных широтах направлена вниз. Отсюда, если b есть ширина железнодорожной колеи, то горизонтальная площадь контура равна bx и поверхностный интеграл магнитной индукции через нее будет $Z\,bx$, где Z — вертикальная составляющая магнитной силы Земли. Поскольку Z смотрит вниз, то нижнюю сторону контура следует считать положительной, а положительным направлением в самом контуре будет направление север—восток—юг—запад, что совпадает с кажущимся дневным ходом Солнца.

Пусть теперь железнодорожный вагон приведен в движение, тогда x начнет меняться, и в контуре возникнет электродвижущая сила, по величине равная $-Zb\,dx/dt$.

Если x увеличивается, т. е. если вагон удаляется от конца с гальванометром, то электродвижущая сила окажется отрицательной, т. е. направленной соответственно обходу север—запад—юг—восток. Следовательно, на оси эта сила будет направлена справа налево. Если бы расстояние x уменьшалось, то абсолютное направление силы было бы обратным, но поскольку направление движения вагона при этом тоже обращается на противоположное, то электродвижущая сила на оси по-прежнему останется направленной справа налево (в предположении, что наблюдатель в вагоне всегда двигается лицом вперед). В северных широтах, где южный конец стрелки отклоняется вниз, электродвижущая сила в движущемся теле направлена слева направо.

Таким образом, мы имеем следующее правило для определения электродвижущей силы в проводе, движущемся через поле магнитной силы. Поместите мыс-

[4] Pogg. *Ann.*, XXXI, 483 (1834).

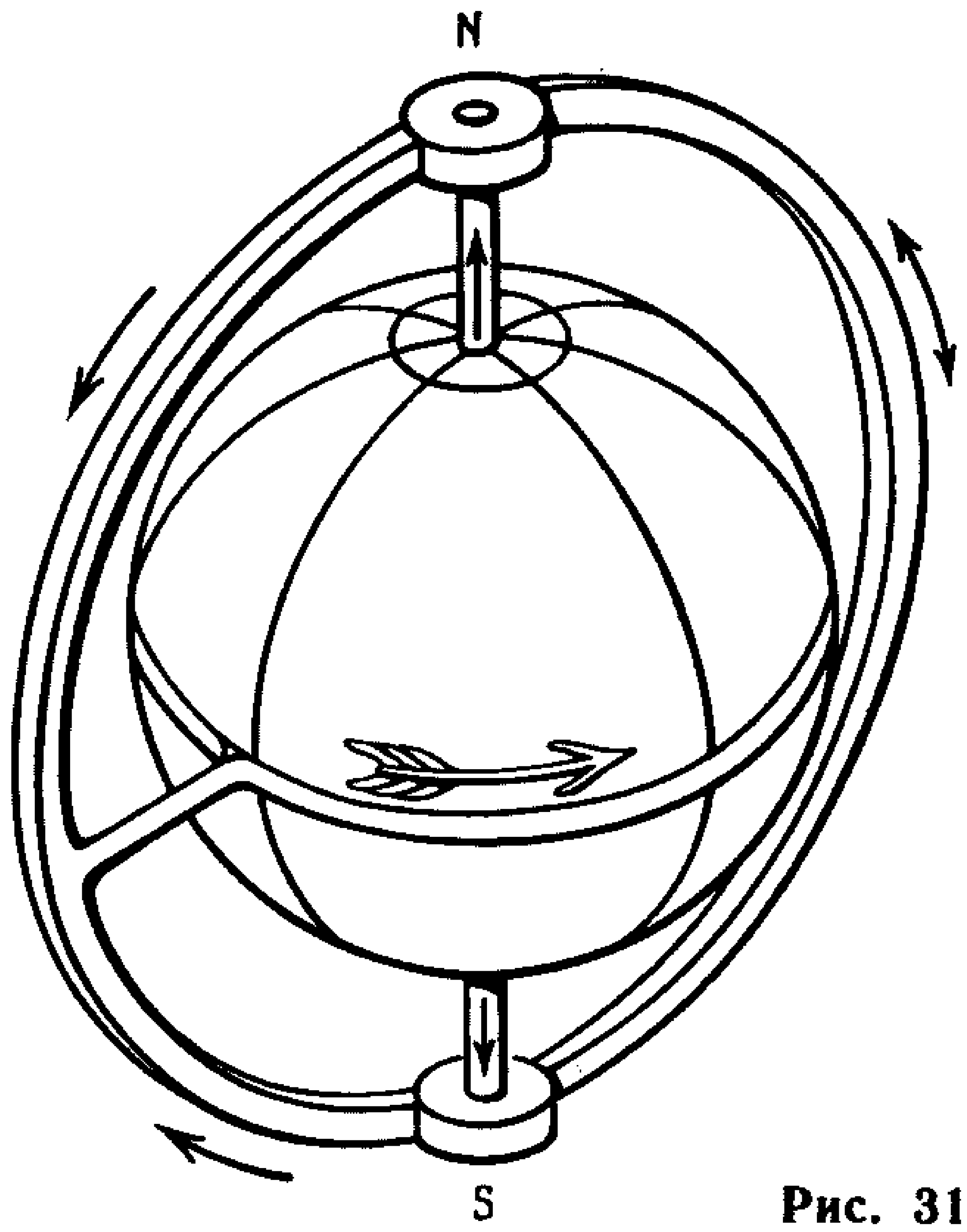


Рис. 31

ленно себя вдоль стрелки компаса так, чтобы ваша голова и ваши ноги располагались у концов стрелки, указывающих соответственно на север и юг, повернитесь лицом вперед по движению, тогда обусловленная этим движением электродвижущая сила окажется направленной слева направо.

533. Поскольку эти соотношения между направлениями представляются важными, мы приведем еще одну иллюстрацию. Предположим, что вокруг земли по экватору уложен металлический пояс, а вдоль Гринвичского меридиана от экватора к северному полюсу протянут металлический провод.

Допустим, что сооружена такая огромная металлическая дуга квадранта, что один ее конец прикреплен к оси на северном полюсе, а другой перемещается вдоль экватора, скользя по большому поясу земли и вслед за солнцем в его дневном движении. Тогда вдоль движущегося квадранта возникнет электродвижущая сила, действующая от полюса к экватору [рис. 31].

Эта электродвижущая сила будет одинаковой — считаем ли мы, что покоится земля, а квадрант перемещается с востока на запад или что покоится квадрант, а земля вращается с запада на восток. Если предположить, что вращается земля, то электродвижущая сила будет одинаковой, какую бы форму ни имел фиксированный в пространстве участок контура, один конец которого касается полюса, а другой экватора. На этом участке контура ток течет от полюса к экватору.

Другая же часть контура, фиксированная относительно земли, также может иметь любую форму и располагаться как в пределах земли, так и вне ее. В этой части ток течет от экватора к любому из полюсов.

534. Напряженность электродвижущей силы магнитоэлектрической индукции совершенно не зависит от природы вещества того проводника, в котором она действует, и также от природы проводника, несущего индуцирующий ток.

Чтобы показать это, Фарадей [5] изготовил проводник из двух проволок, сделанных из разных металлов; он изолировал их шелковой обмоткой, сплел вместе и на одном из концов спаял. Другие же концы проводов он подсоединил к гальванометру. При этом оба провода по отношению к первичному контуру располагались равноправно, и если бы электродвижущая сила в одном из них превысила бы электродвижущую силу в другом, то гальванометр зарегистрировал бы возникновение тока. Фарадей обнаружил, однако, что такая комбинация может находиться под действием самых мощных электродвижущих сил, обусловленных индукцией, без каких-либо отклонений гальванометра. Он нашел также, что независимо от того, состояли ли обе ветки этого составного проводника из двух ме-

[5] *Exp. Res.*, 195.

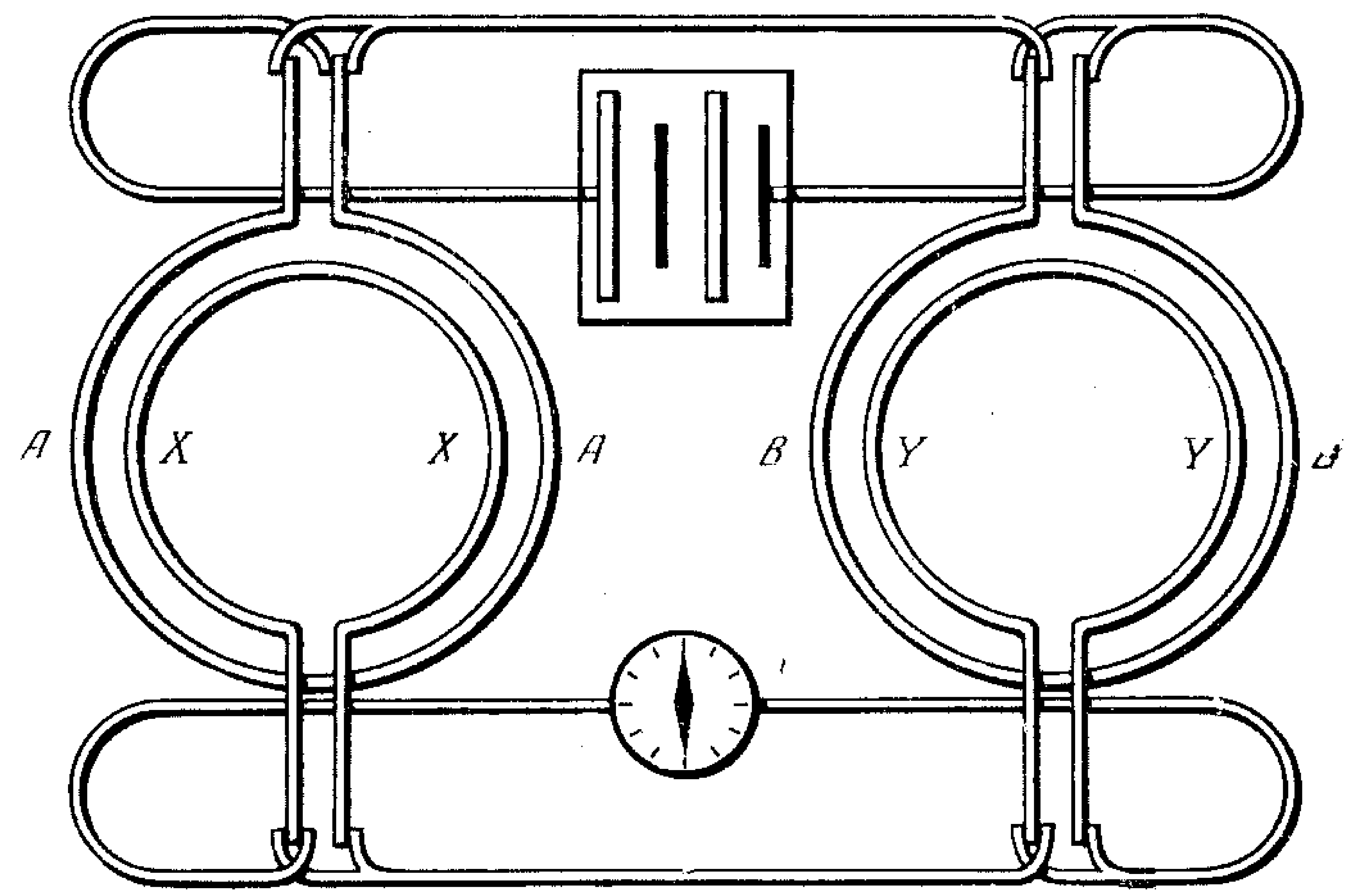


Рис. 32

таллов или из металла и электролита, никакого воздействия на гальванометр не возникало [6].

Следовательно, электродвижущая сила в любом проводнике зависит только от формы и движения этого проводника, а также от силы, формы и движения электрических токов в поле.

535. Другое негативное свойство электродвижущей силы состоит в том, что она сама по себе не проявляет никакой тенденции вызывать механическое движение какого-либо тела, она только вызывает в нем электрический ток.

Если она действительно создает ток в теле, то появляется механическое действие, обусловленное этим током, но если воспрепятствовать образованию тока, то механического действия на само тело не возникнет. Однако если тело электризовано, то электродвижущая сила будет приводить его в движение, что мы уже описывали в Электростатике.

536. Экспериментальное исследование законов индукции электрических токов в неподвижных контурах может быть проведено со значительной точностью при помощи методов, в которых электродвижущая сила (а следовательно, и ток в цепи гальванометра) сводится к нулю [рис. 32].

Так, например, если мы хотим показать, что индукция витка A на виток X равна индукции витка B на виток Y, поместим первую пару витков A и X на достаточном расстоянии от второй пары B и Y и подсоединим витки A и B к вольтовой батареи, так чтобы можно было получить один и тот же первичный ток, текущий через A в положительном, а затем через B в отрицательном направлении. Соединим также X и Y с гальванометром, чтобы вторичный ток, если он появится, потек в одном и том же направлении последовательно через X и Y.

Тогда, если индукция A на X равна индукции B на Y, гальванометр не покажет присутствия тока индукции при замыкании или размыкании цепи батареи.

Точность этого метода повышается с ростом силы первичного тока и чувствительности гальванометра к мгновенным токам; эти эксперименты проводятся

[6] *Exp. Res.*, 200.

значительно проще, чем опыты, связанные с электромагнитными притяжениями, где сам проводник должен очень деликатно подвешиваться.

Очень поучительную серию хорошо продуманных и разработанных опытов такого рода описал профессор Феличи из Пизы [7].

Я только вкратце укажу некоторые из законов, которые могут быть доказаны таким способом.

(1). Электромагнитная сила индукции одного контура на другой не зависит от площади поперечного сечения проводников и от материала, из которого они сделаны.

Действительно, мы можем без изменения результатов опыта заменять любой из контуров на другой, отличающийся сечением, материалом, но не формой.

(2). Индукция контура A на контур X равна индукции X на A.

Действительно, если мы поместим A в цепь гальванометра, а X — в цепь батареи, равновесие электродвижущей силы не нарушается.

(3). Индукция пропорциональна индуцирующему току.

Действительно, если мы удостоверились, что индукция A на X равна индукции B на Y, а также индукции C на Z, мы можем заставить ток батареи сначала течь через A, а потом разделиться в любом отношении между B и C. После этого, если подсоединить последовательно к гальванометру X в обратном, а Y и Z в прямом направлениях, то электродвижущая сила в X уравновесится суммой электродвижущих сил в Y и Z.

(4). У пары контуров, образующих геометрически подобную систему, индукция пропорциональна их линейным размерам.

Действительно, если три пары контуров, упомянутых выше, являются подобными, а линейные размеры первой пары равны сумме соответствующих линейных размеров второй и третьей пар, то, соединив A, B и C последовательно с батареей, а X, Y, Z — последовательно с гальванометром (причем X — в обратном направлении), получим равновесие.

(5). Электродвижущая сила, производимая в катушке, состоящей из n витков, током, текущим в катушке из m витков, пропорциональна произведению nm.

537. В экспериментах того типа, которые мы рассматривали, гальванометр должен быть возможно более чувствительным, а его стрелка — по возможности более легкой, с тем чтобы давать заметные показания при очень малых переходных токах. Для опытов, проводимых с индукцией, обусловленной движением, требуется, чтобы стрелка имела несколько больший период колебаний и проводник успевал совершить нужные движения, пока стрелка еще не удалилась от своего положения равновесия. В предыдущих экспериментах электромагнитные силы в цепи гальванометра пребывали в равновесии в течение всего времени, и через катушку гальванометра не проходило никакого тока. В опытах, которые будут описаны сейчас, электродвижущие силы действуют сначала в одном, а потом в другом направлении и тем самым создают последовательно два тока, проходящих через гальванометр в противоположных направлениях; мы должны показать, что импульсы, действующие на стрелку гальванометра и обусловленные этими следующими друг за другом токами, в определенных случаях равны и противоположны.

---

[7] *Annales de Chimie*, XXXIV, p. 64 (1852); *Nuovo Cimento*, IX, p. 345 (1859).

Теория применения гальванометра для измерения переходных токов будет рассмотрена более подробно в п. 748. Сейчас же для наших целей достаточно заметить, что, пока стрелка гальванометра близка к своему положению равновесия, отклоняющая сила тока пропорциональна самому току, и если полное время действия тока мало по сравнению с периодом колебаний стрелки, то конечная скорость магнита будет пропорциональна полному количеству электричества в токе. Следовательно, если два тока проходят, быстро следуя друг за другом и перенося в противоположных направлениях равное количество электричества, то стрелка в конце процесса не будет иметь никакой скорости.

Таким образом, чтобы показать, что индуцированные токи во вторичном контуре, обусловленные замыканием и размыканием первичного контура, равны по своей полной величине, но противоположны по направлению, мы можем так устроить соединение первичного контура с батареей, чтобы, дотрагиваясь до ключа, можно было посылать ток в первичный контур, а снимая палец с ключа, прерывать контакт по желанию. Если ключ нажат в течение некоторого времени, гальванометр во вторичном контуре показывает в момент образования контакта переходный ток в направлении, противоположном первичному току. Если контакт сохраняется, то индуцированный ток просто проходит и исчезает. Если теперь разорвать контакт, то через вторичную цепь пройдет, но уже в противоположном направлении, другой переходный ток и стрелка гальванометра получит импульс в противоположном направлении.

Но если мы осуществим контакт только на одно мгновение и затем прервем его, то два индуцированных тока пройдут через гальванометр в столь быстрой последовательности, что стрелка под действием первого тока не успеет еще сдвинуться на заметное расстояние от своего положения равновесия и будет остановлена вторым током. В силу точного равенства между величинами этих двух переходных токов стрелка не сдвинется с места.

Если внимательно проследить за стрелкой, то окажется, что она внезапно дернулась от одного положения покоя к другому, очень близкому к первому.

Таким путем мы доказываем, что количество электричества в токе индукции при прерывании контакта в точности равно и противоположно количеству электричества в индукционном токе при установлении контакта.

538. Феличи во второй серии своих «*Исследований*» приводит другое применение этого метода, состоящее в следующем.

Всегда можно найти множество разных положений вторичного витка B, при которых образование и разрыв контакта в первичном контуре A не создает индуктивных токов в B. В таких случаях говорят, что положения этих двух витков *сопряжены* друг другу.

Пусть B_1 и B_2 будут два таких положения. Если катушка B внезапно переместилась из положения B_1 в положение B_2, то алгебраическая сумма переходных токов в катушке B будет в точности равна нулю, так что стрелка гальванометра останется в покое, когда движение B будет закончено.

Это верно независимо от того, каким путем катушка B перемещается из B_1 в B_2, а также независимо от того, остается ли ток в первичной катушке A постоянным или меняется во время перемещения.

Далее, пусть B' будет какое-то другое положение B, не сопряженное A, так что создание или прерывание контакта в A создает индуцированный ток, когда B находится в положении B'.

Пусть контакт образован, когда B находится в сопряженном положении B_1 и ток индукции отсутствует. Переместим B в B', тогда появится индуцированный ток, обусловленный движением, но если B быстро передвинуть в B', а затем разорвать первичный контакт, то индуцированный ток, обусловленный разрывом контакта, в точности уничтожит эффект тока индукции, обусловленного движением, и стрелка гальванометра останется в покое. Следовательно, ток, возникающий из-за движения из сопряженного положения в любое другое положение, равен и противоположен току, возникающему из-за разрыва контакта в этом последнем положении.

Так как эффект при образовании контакта равен и противоположен эффекту при разрыве контакта, отсюда следует, что эффект образования контакта в момент, когда катушка B находится в положении B', эквивалентен эффекту перенесения катушки из любого сопряженного положения B_1 в B' при наличии тока, протекающего через A.

Результат окажется тем же самым, если изменение относительного положения катушек осуществляется путем перемещения первичного контура вместо вторичного.

539. Как следует из этих экспериментов, полный ток индукции, обусловленный одновременным перемещением A из A_1 в A_2 и B из B_1 в B_2, при котором ток в A изменяется от γ_1 до γ_2, зависит только от начального состояния A_1, B_1, γ_1 и конечного A_2, B_2, γ_2 и совсем не зависит от характера промежуточных состояний, через которые может проходить система.

Следовательно, величина полного тока индукции должна иметь вид $F(A_2, B_2, \gamma_2) - F(A_1, B_1, \gamma_1)$, где F есть функция A, B и γ.

Относительно вида этой функции нам, согласно п. 536, известно, что при отсутствии движения, т. е. когда $A_1=A_2$ и $B_1=B_2$, ток индукции пропорционален первичному току. Следовательно, γ входит просто как один из множителей, другой же множитель является функцией формы и положения контуров A и B.

Мы также знаем, что значение этой функции зависит от относительных, а не от абсолютных положений A и B, поэтому она должна допускать выражение в виде функции расстояний между различными элементами, из которых составлены контуры, и от углов, которые эти элементы образуют друг с другом.

Пусть M будет этой функцией, тогда полный ток индукции может быть записан как $C\{M_1\gamma_1-M_2\gamma_2\}$, где C — проводимость вторичного контура, $M_1\gamma_1$ — начальные, $M_2\gamma_2$ — конечные значения M и γ.

Эти эксперименты, таким образом, показали, что полный ток индукции зависит от изменения некоторой величины $M\gamma$, а оно может возникнуть либо из-за вариации первичного тока γ, либо от каких-либо движений первичного или вторичного контура, изменяющих M.

540. Концепция, связанная с существованием такой величины, от изменения которой (но не от ее абсолютного значения) зависит ток индукции, встречается у Фарадея на ранней стадии его «*Исследований*» [8]. Он обнаружил, что вторичный

[8] *Exp. Res.*, series I, 60.

контур, покоящийся в электромагнитном поле, напряженность которого остается постоянной, не проявляет никаких электрических эффектов, в то время как если поле приобретет то же самое состояние внезапно, это приводит к возникновению тока. Далее, если первичный контур удаляется из поля или магнитные силы устраняются, то возникает ток противоположного вида. Фарадей в связи с этим усматривал во вторичном контуре, находящемся в электромагнитном поле, «особое электрическое состояние вещества», которому дал название электротонического состояния. Впоследствии он счел возможным освободиться от этой идеи при помощи соображений, основанных на линиях магнитной силы [9], но даже в своих позднейших «*Исследованиях*» [10] он говорит: «Снова и снова в уме моем настойчиво возникает идея *электротонического* состояния» [11].

Вся история возникновения и развития этой идеи в голове Фарадея так, как она показана в его опубликованных «*Исследованиях*», вполне заслуживает изучения. Ход экспериментов, направляемых напряженными усилиями его мысли без помощи каких-либо математических вычислений, привел Фарадея к необходимости признания существования некоторой величины, которая, как мы теперь знаем, является величиной математической и которая даже может быть названа основной величиной в теории электромагнетизма. Но, поскольку Фарадей был подведен к этой концепции чисто экспериментальным путем, он приписал ей физическое существование, предположив, что это есть особое состояние материи; правда, он был готов отставить эту теорию сразу же, как только ему удалось бы объяснить явления с помощью любых более привычных рассуждений.

Другие исследователи пришли к этой идее чисто математическим путем, но значительно позже, и, насколько я знаю, никто из них не распознал в своей рафинированной математической идее о потенциале двух контуров смелую гипотезу Фарадея об электротоническом состоянии. Поэтому те, кто знакомились с этим предметом, следуя указаниям выдающихся исследователей, которые впервые выразили его законы в математической форме, иногда находили для себя затруднительным оценить научную точность формулировок, данных Фарадеем в первых двух сериях его «*Исследований*» с такой удивительной полнотой.

Научное значение фарадеевской концепции об электротоническом состоянии состоит в нацеливании нашего сознания на освоение некоторой новой величины, от изменения которой зависят реальные явления. Однако без дальнейшего, существенного по сравнению с Фарадеем, развития этой концепции она не могла бы эффективно служить для объяснения явлений. К этому вопросу мы еще вернемся в п. 584.

541. Гораздо более мощным методом в руках Фарадея был метод, связанный с использованием тех самых линий магнитной силы, которые всегда стояли перед его мысленным взором, когда он исследовал магниты и токи; изображение линий с помощью опилок Фарадей справедливо относил [12] к числу наиболее ценных вспомогательных средств, имеющихся у экспериментатора.

Фарадей считал, что не только направление этих линий выражает направление магнитной силы, но и что их число и концентрация определяют напряженность

[9] *Exp. Res.*, series II, 242.
[10] *Exp. Res.*, 3269.
[11] *Exp. Res.*, 60, 1114, 1661, 1729, 1733.
[12] *Exp. Res.*, 3234.

силы; в своих последних «*Исследованиях*» [13] он показал, каким образом следует представлять единичные силовые линии. В различных частях этого трактата я объяснил, как соотносятся свойства, которые Фарадей распознавал в силовых линиях, с математическими условиями для электрических и магнитных сил, и как фарадеевское замечание об единичных линиях и о числе линий внутри определенных границ может быть сделано математически точным. См. п. 82, 404, 490.

В первой серии своих «*Исследований*» [14] он показывает, как направление тока в контуре, часть которого является подвижной, зависит от характера пересечения линий магнитной силы этой движущейся частью контура.

Во второй серии [15] он показывает, как можно объяснить явления, вызываемые изменением силы тока или мощности магнита, если предположить, что система силовых линий отжимается от провода или магнита или прижимается к ним в зависимости от того, возрастает или уменьшается их мощность.

Я не знаю, с какой степенью ясности он в то время придерживался доктрины, которая была столь четко изложены им впоследствии [16], что движущийся проводник при пересечении силовых линий суммирует действие, обусловленное площадью или сечением этих силовых линий. Такой подход, однако, не должен казаться новым, если принять во внимание исследования, изложенные во второй серии [17].

Концепция, которой придерживался Фарадей относительно непрерывности силовых линий, исключала возможность их внезапного рождения там, где раньше их не существовало вообще. Следовательно, число силовых линий, пронизывающих проводящий контур, можно менять лишь путем перемещения контура поперек силовых линий или перемещением силовых линий поперек контура. В любом случае в контуре образуется ток.

Число силовых линий, проходящих сквозь контур в произвольный момент времени, математически эквивалентно более ранней концепции Фарадея об электротоническом состоянии этого контура; оно представлено величиной $M\gamma$.

Только после того, как определение электродвижущей силы (п. 69, 274) и способы ее измерения были сделаны более точными, мы можем полностью сформулировать истинный закон магнитоэлектрической индукции следующим образом:

Полная электродвижущая сила, действующая вдоль контура в произвольный момент времени, измеряется скоростью уменьшения числа линий магнитной силы, проходящих сквозь контур.

Будучи проинтегрированным по времени, это утверждение становится таким:

Интеграл по времени от полной электродвижущей силы, действующей вдоль контура, вместе с числом проходящих сквозь контур линий магнитной силы составляет постоянную величину.

Вместо того, чтобы говорить о числе линий магнитной силы, мы можем говорить о потоке магнитной индукции сквозь контур или о поверхностном интегра-

---

[13] *Exp. Res.*, 3122.
[14] *Exp. Res.*, 114.
[15] *Exp. Res.*, 238.
[16] *Exp. Res.*, 3082, 3087, 3113.
[17] *Exp. Res.*, 217.

ле от магнитной индукции, распространенном на любую поверхность, ограниченную контуром.

Мы потом снова вернемся к этому методу Фарадея. Перед этим нам следует перечислить теории индукции, основанные на других соображениях.

Закон Ленца

542. В 1834 г. Ленц [18] сформулировал следующее замечательное соотношение между явлениями механического действия электрических токов (так, как они были определены формулой Ампера) и индукцией электрических токов, обусловленной относительным движением проводников. Более ранняя попытка установления такого соотношения была изложена Ритчи (Ritchie) в журнале *Philosophical Magazine* в январе того же года, но направление индуцированного тока в каждом случае было установлено им неверно. Закон Ленца состоит в следующем:

Если в первичном контуре А течет постоянный ток и если при перемещении первичного контура А или вторичного контура В в этом вторичном контуре В индуцируется ток, то его направление будет таким, чтобы своим электромагнитным воздействием на А он стремился воспрепятствовать относительному перемещению контуров.

Ф. Е. Нейман [19] основал, опираясь на этот закон, свою математическую теорию индукции, в которой установил математический закон для токов индукции, вызванных движением первичного или вторичного проводника. Он показал, что величина M, названная нами потенциалом одного контура на другом, совпадает с электромагнитным потенциалом одного контура на другом, который мы уже изучали в связи с формулой Ампера.

Таким образом, мы можем считать, что математический метод, ранее примененный Ампером для описания механического действия токов, был распространен Ф. Е. Нейманом на индукцию токов.

543. Вскоре Гельмгольц в своем «*Очерке о сохранении силы*» [20] и сэр У. Томсон [21], занявшийся этим вопросом независимо от него, но несколько позже, сделали шаг, представляющий еще большую научную важность. Они показали, что открытая Фарадеем индукция электрических токов может быть выведена математически путем применения принципа сохранения энергии из открытых Эрстедом и Ампером электромагнитных действий.

Гельмгольц рассматривает случай проводящего контура с сопротивлением R, в котором действует электродвижущая сила A, возникающая от вольтовой или термоэлектрической батареи. Ток в контуре в какой-то момент времени равен I. Он предполагает, что движется вблизи контура какой-либо магнит и что его потенциал относительно проводника равен V; поэтому в течение любого малого интервала времени dt энергия, сообщаемая магниту электромагнитным действием, равна $I(dV/dt)dt$.

---

[18] Pogg. *Ann.*, XXXI, p. 483 (1834).

[19] *Berlin Akad.*, 1845 and 1847.

[20] Прочитано вначале перед Берлинским физическим обществом 23 июля 1847 г. Затем переведено в «Научных трудах» Тейлора (Tailor's «Scientific Memoirs», part II, p. 114).

[21] *Trans. Brit. Ass.*, 1848 and *Phil. Mag.*, Dec. 1851. См. также его статью «Переходные электрические токи» («Transient Electric Currents», *Phil. Mag.*, June 1853).

Работа, затраченная на образование тепла в контуре, равна (в соответствии с законом Джоуля, п. 242) $I^2R\,dt$, а работа, затраченная электродвижущей силой A на поддержание тока I в течение времени dt, равна $AI\,dt$. Следовательно, так как полная выполненная работа должна быть равна работе затраченной, то

$$AI\,dt = I^2R\,dt + I\frac{dV}{dt}\,dt.$$

Отсюда мы находим силу тока: $I = \dfrac{A - \frac{dV}{dt}}{R}$.

Но значение A мы можем выбрать любым по своему усмотрению. Возьмем $A=0$, тогда, $I = -\dfrac{1}{R}\dfrac{dV}{dt}$, или, иначе говоря, должен существовать ток, обусловленный движением магнита, равный току, обусловленному электродвижущей силой — (dV/dt).

Полный индуцированный ток за время движения магнита от места, где его потенциал V_1, к месту, где его потенциал V_2, равен

$$\int I\,dt = -\frac{1}{R}\int\frac{dV}{dt}\,dt = \frac{1}{R}(V_1 - V_2),$$

и, следовательно, полный ток не зависит от скорости или пути магнита, а зависит только от его начального и конечного положений.

В своем первоначальном исследовании Гельмгольц принял систему единиц, основанную на измерении тепла, образуемого током в проводнике. Рассматривая единицу тока как произвольную, мы получим, что единица сопротивления есть сопротивление проводника, в котором единичный ток за единицу времени порождает единицу тепла. Единицей электродвижущей силы в этой системе является такая, которая требуется для получения единичного тока в проводнике с единичным сопротивлением. Принятие этой системы единиц делает необходимым введение в уравнения величины a, являющейся механическим эквивалентом единицы тепла. Поскольку мы неизменно принимаем либо электростатическую, либо электромагнитную систему единиц, то этот множитель не встречается в приводимых здесь уравнениях.

544. Гельмгольц вычисляет также ток индукции для случая, когда проводящий контур и контур, несущий постоянный ток, движутся друг относительно друга.

Пусть R_1, R_2 будут сопротивления; I_1, I_2 — токи; A_1, A_2 — внешние электродвижущие силы, а V — потенциал одного контура на другом при единичном токе в каждом из контуров, тогда, как и раньше, мы имеем

$$A_1I_1 + A_2I_2 = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_1I_2\frac{dV}{dt}.$$

Если мы предположим, что ток I_1 является первичным, а ток I_2 настолько мал по сравнению с I_1, что своей индукцией он не вносит ощутимого изменения в I_1, так что можно положить $I_1 = \dfrac{A_1}{R_1}$, тогда получим $I_2 = \dfrac{A_2 - I_1\frac{dV}{dt}}{R_2}$.

Этот результат может быть интерпретирован точно так же, как это было сделано в случае магнита.

Если же мы предположим, что ток I_2 является первичным, а ток I_1 — много меньшим I_2, то для I_1 получим $I_1 = \frac{A_1 - I_2 \frac{dV}{dt}}{R_1}$.

Это показывает, что при одинаковых токах электродвижущая сила от первого контура во втором равна электродвижущей силе от второго контура в первом, какую бы форму ни имели эти контуры.

В указанной работе Гельмгольц не обсуждает случай индукции, обусловленной усилением или ослаблением первичного тока или индукции тока на самого себя. Томсон [22] применил тот же самый принцип к определению механического действия тока; он указал, что, когда работа совершается взаимодействием двух постоянных токов, их механическое действие *увеличивается* на ту же самую величину, и, следовательно, батарея должна обеспечить *двойное* количество работы по отношению к той, которая требуется для поддержания токов при преодолении сопротивления контуров [23].

545. Введение В. Вебером системы абсолютных единиц для измерения электрических величин является одним из наиболее важных шагов, способствовавших развитию науки. Поставив вместе с Гауссом измерение магнитных величин в ранг высшей категории точности, Вебер в его «*Электромагнитных измерениях*» не только продолжает излагать свои глубокие принципы установления подлежащих использованию единиц, но и дает определение отдельных электрических величин через значения этих единиц с такой степенью точности, которой ранее никто даже и не пытался достигнуть. Как электромагнитная, так и электростатическая системы единиц обязаны своим развитием и практическим применением именно этим исследованиям.

Вебер создал также общую теорию электрического действия, из которой вывел как электростатическую, так и электромагнитную силы, а также индукцию электрических токов. Мы рассмотрим эту теорию вместе с некоторыми ее обобщениями, полученными недавно, в отдельной главе (см. п. 846).

ГЛАВА IV

О САМОИНДУКЦИИ ТОКА

546. Девятая серия «*Исследований*» Фарадея посвящена изучению класса явлений, вызываемых током в проводе, образующем катушку электромагнита.

М-р Дженкин обнаружил, что хотя и нельзя произвести заметного удара при непосредственном воздействии гальванической системы, состоящей только из одной пары пластин, тем не менее сильный удар будет ощущаться, если пропустить ток через катушку электромагнита и затем прервать контакт между концами двух

[22] Mechanical Theory of Electrolysis, *Phil. Mag.*, Dec. 1851.

[23] Nichol's *Cyclopaedia of Physical Science*, ed. 1860, Article «Magnetism, Dynamical Relations of», and Reprint, § 571.

проводов, находящихся в руках. Такой удар не ощущается при замыкании контакта.

Фарадей показал, что и это, и другие описываемые им явления обусловлены тем же самым индуктивным действием, которое, по его наблюдениям, ток оказывает на соседние проводники. В данном случае, однако, индуктивному действию подвергается сам токонесущий проводник, а поскольку он расположен ближе к различным элементам тока, чем любой другой провод, то и индуктивное действие оказывается гораздо более сильным.

547. Как замечает, впрочем, Фарадей [1], «первая мысль, которая приходит в голову, состоит в том, что циркулирующее в проводе электричество обладает чем-то, похожим на импульс или инерцию». Действительно, когда мы рассматриваем один-единственный провод, то явления в точности аналогичны явлениям в трубе, наполненной водой, текущей непрерывным потоком. Если при протекании потока воды быстро закрыть конец трубы, то импульс воды создаст резкое повышение давления, значительно превышающее давление, обусловленное перепадом уровней воды, что может привести к разрыву трубы.

Если же перекрыть основное отверстие, оставив воде возможность вытекать узкой струей, то она будет выбрасываться с гораздо большей скоростью, чем под действием гидростатического напора, а если она имеет возможность вытекать через клапан в резервуар, то это будет происходить, даже когда давление в резервуаре превышает давление, обусловленное перепадом уровней воды.

Именно на этом принципе построен гидравлический «домкрат», поднимающий небольшое количество воды на большую высоту при помощи большого количества воды, стекающего вниз с гораздо меньшей высоты.

548. Эффекты, связанные с инерцией жидкости в трубе, зависят лишь от количества протекающей через трубу жидкости, от длины трубы и от ее поперечного сечения на разных участках. Они не зависят от всего, что находится вне трубы, а при неизменной длине трубы — от того, как труба изогнута.

В случае провода с током положение иное, поскольку эффект очень мал, если длинный провод сложен вдвое; эффект больше, если эти две части разнесены друг от друга, он еще больше, если провод свернут в спираль, и максимален, если внутрь такой спиральной катушки поместить кусок мягкого железа.

Опять-таки если взять второй провод и, изолировав его от первого, свернуть их вместе в катушку, то эффект не изменится, если второй провод разомкнут; если же второй провод образует замкнутый контур, то в нем возникает индукционный ток и эффекты самоиндукции в первом проводе замедляются.

549. Эти результаты ясно показывают, что если данные явления обусловлены импульсом, то этот импульс, конечно, не является импульсом электричества в проводе, поскольку тот же самый провод, передающий тот же самый ток, обнаруживает эффекты различные в зависимости от формы провода, и, даже когда форма остается неизменной, присутствие других тел, таких, как кусок железа или замкнутый металлический контур, влияет на результат.

550. Для человеческого разума, который однажды усмотрел аналогию между явлениями самоиндукции и движения материальных тел, все-таки трудно полностью отказаться от обращения к ней или допустить, что она является чисто

[1] *Exp. Res.*, 1077.

поверхностной и вводящей в заблуждение. Основополагающее динамическое представление о том, что материя способна воспринимать импульс и энергию через движение настолько переплелось с нашим образом мыслей, что стоит нам уловить лишь проблеск этой идеи в любой части природы, как мы чувствуем, что перед нами открывается путь, который рано или поздно приведет к полному пониманию предмета.

551. В случае электрического тока мы обнаруживаем, что, когда начинает действовать электродвижущая сила, она не сразу создает полный ток; ток нарастает постепенно. Что же делает электродвижущая сила в то время, когда противостоящее ей сопротивление не может уравновесить ее? Она увеличивает электрический ток.

Обычная сила, действующая на тело в направлении его движения, увеличивает его импульс и сообщает ему кинетическую энергию, т. е. способность совершать работу за счет этого движения.

Аналогичным образом часть электродвижущей силы, не встречающая сопротивления, идет на увеличение электрического тока. Обладает ли созданный таким образом электрический ток импульсом или кинетической энергией?

Мы уже показали, что у него есть что-то, очень напоминающее импульс, оно оказывает сопротивление внезапной остановке и может на короткое время вызывать большую электродвижущую силу.

Но проводящий контур, в котором течет электрический ток, обладает способностью совершать работу за счет этого тока, и эту способность нельзя назвать чем-то, очень напоминающим энергию, ибо это действительно и есть энергия.

Так, если ток предоставить самому себе, он будет продолжать циркулировать до тех пор, пока не прекратится из-за сопротивления контура. До момента остановки он произведет определенное количество тепла, которое, будучи выраженным в динамической мере, равно энергии, первоначально существовавшей в токе.

С другой стороны, предоставленный самому себе ток можно заставить совершать механическую работу по перемещению магнитов: индуктивный эффект этих перемещений будет, по закону Ленца, останавливать ток скорее, чем это происходило бы при наличии одного лишь сопротивления контура. При этом часть энергии тока может быть превращена не в тепло, а в механическую работу.

552. Итак, система, содержащая электрический ток, является, по-видимому, вместилищем какого-то вида энергии, и, поскольку мы не можем создать себе иного представления об электрическом токе, кроме как о явлении кинетическом [2], его энергия должна быть кинетической, т. е. энергией, которой движущееся тело обладает благодаря своему движению.

Мы уже показали, что электричество в проводе нельзя рассматривать как некое движущееся тело, в котором и следует отыскивать эту энергию, ведь энергия движущегося тела ни от чего, находящегося вне тела, не зависит, в то же время присутствие около тока других тел меняет его энергию.

Мы, таким образом, подошли к вопросу о том, не может ли существовать какого-либо движения вне провода, в пространстве, не занятом электрическим током, в котором проявляются электромагнитные эффекты тока.

---

[2] Faraday, *Exp. Res.*, 283.

Сейчас я не буду вдаваться в причины, по которым такие движения следует искать преимущественно в том, а не другом месте, или рассматривать эти движения как движения того, а не иного вида.

То, что я предполагаю сделать сейчас, состоит в изучении следствий, вытекающих из предположения о том, что явления, связанные с электрическим током, относятся к явлениям движущейся системы, причем от одной части к другой это движение передается силами, природу и законы которых мы даже не будем и пытаться определить, поскольку для любой связанной системы их можно исключить из уравнений движения, пользуясь методом Лагранжа.

В последующих пяти главах трактата я предполагаю, исходя из такого рода динамической гипотезы, вывести основную структуру теории электричества, вместо того чтобы следовать пути, который привел Вебера и других исследователей ко многим замечательным открытиям и экспериментам, а также к представлениям, некоторые из которых столь же прекрасны, сколь и смелы. Я избрал данный метод, желая продемонстрировать существование и других способов рассмотрения явлений, и он по сравнению с методами, вытекающими из гипотезы непосредственного действия на расстоянии, кажется мне более удовлетворительным и в то же время более согласованным с методами, излагаемыми в других частях этой книги.

ГЛАВА V

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

553. В четвертом разделе второй части своей *«Аналитической механики»* Лагранж дал метод сведения обычных динамических уравнений движения отдельных частей системы со связями к набору уравнений, число которых равно числу степеней свободы системы.

Уравнения движения такой связанной системы были представлены Гамильтоном в другой форме, что привело к значительному развитию этого высшего раздела чистой динамики [1].

Мы посвятим эту главу изложению идей динамики с физической точки зрения, поскольку сочли необходимым выразить их в форме, пригодной для непосредственных применений в физических вопросах, пытаясь отнести электрические явления к области, охватываемой динамикой.

554. Целью Лагранжа было подчинить динамику власти математики. Он начал с того, что выразил элементарные динамические соотношения через соответствующие связи между чисто алгебраическими величинами, и из полученных таким образом уравнений вывел чисто алгебраическим путем окончательные уравнения. В уравнениях движения составных частей системы появляются определен-

[1] См. Prof. Cayley's «Report on Theoretical Dynamics», *British Association*, 1857 and Thomson and Tait's *Natural Philosophy*.

ные величины, представляющие реакции между отдельными частями системы; они вовлечены в игру благодаря их физическим связям; если взглянуть на исследования Лагранжа с математической точки зрения, то они представляют собой метод исключения этих величин из окончательных уравнений.

Прослеживая этапы этого исключения, разум упражняется в проведении вычислений и потому должен бы оставаться свободным от вмешательства динамики. Однако мы поставили своей целью развитие именно этих динамических идей; поэтому, обращаясь к трудам математиков, мы переводим их результаты с математического языка на язык динамики, с тем чтобы соответствующие слова могли мысленно ассоциироваться с некоторым свойством движущихся тел, а не просто с каким-либо алгебраическим действием.

Язык динамики был значительно расширен теми, кто в популярной форме изложил учение о сохранении энергии. В дальнейшем будет видно, что большая часть последующих утверждений была навеяна нам исследованиями, приведенными в «*Натуральной Философии*» Томсона и Тэта, особенно тем методом, который исходит из теории импульсных сил. Я применил этот метод, чтобы отойти от явного рассмотрения движения каких-либо иных частей системы, кроме координат и переменных, определяющих движение всей системы в целом. Важно, конечно, чтобы читатель был в состоянии проследить связь движения каждой из частей системы с движением переменных, но нет никакой необходимости делать это по ходу получения окончательных уравнений, не зависящих от конкретного вида этих связей.

Переменные

555. Число степеней свободы системы — это такое число величин, которые должны быть заданы для полного определения положения системы. Этим величинам можно придавать различные формы, но число их определяется только природой самой системы и не может быть изменено.

Для того чтобы конкретизировать принятые нами представления, мы можем вообразить себе некоторую систему, которая при помощи подходящего механизма связана с определенным числом подвижных частей, не способных совершать никаких других движений, кроме прямолинейных. Следует предположить, что этот воображаемый механизм, соединяющий рассматриваемую систему с каждой из подвижных частей, не обладает ни трением, ни инерцией и что под действием приложенных сил он не испытывает деформации. Его назначение состоит лишь в том, чтобы облегчить работу воображения и приписать положение, скорость и импульс тому, что в исследованиях Лагранжа фигурирует в качестве чисто алгебраических величин.

Пусть q обозначает положение одной из подвижных частей, определенное через расстояние от некоторой фиксированной точки на линии ее движения. Будем отличать величины q, соответствующие различным частям, с помощью индексов $_1$, $_2$, ...; в случае набора величин, принадлежащих только к одной части системы, этот индекс может быть опущен.

Пусть заданы значения всех переменных (q), тогда положения всех подвижных частей известны и благодаря воображаемому механизму определена конфигурация всей системы.

Скорости

556. Во время движения системы ее конфигурация некоторым определенным образом изменяется, и поскольку она в каждый момент времени полностью определяется значениями переменных (q), то скорость каждой части системы, равно как и ее конфигурация, также будет определена полностью, если известны значения переменных (q) вместе с их скоростями (dq/dt, или согласно обозначениям Ньютона $\dot{q}$).

Силы

557. Распоряжаясь нужным образом движением переменных, можно осуществить любое движение системы, совместимое с характером связей. Для того чтобы произвести это движение перемещением изменяемых частей системы, к ним должны быть приложены силы.

Силу, которую следует приложить к произвольной переменной q_r, мы обозначим через F_r. Система сил (F) механически эквивалентна (благодаря наличию связей) той произвольной системе сил, которая в действительности производит движение.

Импульсы

558. Когда тело перемещается, сохраняя неизменной свою конфигурацию по отношению к действующей на него силе (как, например, в случае силы, действующей на одиночную частицу вдоль линии ее движения), то движущая сила измеряется скоростью увеличения импульса. Если F есть движущая сила, а p — импульс, то $F=dp/dt$, откуда $p=\int F\,dt$.

Интеграл от силы по времени называется Импульсом силы, поэтому мы можем утверждать, что импульс (количество движения) тела равен импульсу силы, который переводит это тело из состояния покоя в данное состояние движения.

В случае связанной системы, находящейся в движении, ее конфигурация непрерывно меняется, причем быстрота этого изменения зависит от скоростей ($\dot{q}$), и мы не можем уже предполагать, что импульс системы равен интегралу по времени от действующей на него силы.

Но приращение любой переменной δq не может превышать $\dot{q}\delta t$, где δt — время, за которое происходит приращение, а $\dot{q}'$ — наибольшее значение скорости за это время. Очевидно, что для системы, движущейся из состояния покоя под действием сил одного направления, максимальной является конечная скорость.

Если конечная скорость и конфигурация системы заданы, мы можем представлять себе, что скорость сообщается системе за очень малое время δt и что начальная конфигурация отличается от конечной на величины δq_1, $\delta q_2, \ldots$, которые соответственно меньше величин $\dot{q}_1\delta t$, $\dot{q}_2\delta t, \ldots$.

Чем меньшим предполагается приращение времени δt, тем большими должны быть приложенные силы, но интеграл по времени от каждой силы, или импульс каждой силы, останется конечным. Предельное значение импульса силы при уменьшении интервала времени до нуля определяется как *мгновенный* импульс силы, а импульс системы p, соответствующий любой переменной q, определяется как относящийся к той же самой переменной импульс силы, при котором система мгновенно переводится из состояния покоя в заданное состояние движения.

Такой подход, согласно которому импульсы системы могут создаваться в результате действия на покоящуюся систему мгновенных импульсов сил, вводится лишь как способ определения величины импульсов, ибо импульсы системы зависят только от мгновенного состояния ее движения, но не от процесса получения этого состояния.

В связанной системе импульс, соответствующий любой переменной, является в общем случае линейной функцией скоростей всех переменных вместо того, чтобы быть величиной, пропорциональной скорости, как это имеет место в динамике одной частицы.

Импульсы силы, необходимые для мгновенного изменения скоростей системы от $\dot q_1$, $\dot q_2, \ldots$ до $\dot q_1'$, $\dot q_2', \ldots$, очевидно, равны изменениям импульсов, относящихся к различным переменным $p_1'-p_1$, $p_2'-p_2$.

Работа, совершаемая малым импульсом силы

559. Работа, совершаемая силой F_1 за время действия импульса силы, равна пространственному интегралу от силы, или

$$W=\int F_1 dq_1, \quad =\int F_1\dot q_1 dt.$$

Если $\dot q_1'$—наибольшее, а $\dot q_1''$—наименьшее значение скорости $\dot q_1$ за время действия силы, то работа W должна быть меньшей, чем $\dot q_1\int F\,dt$, или $\dot q_1'(p_1'-p_1)$, и большей, чем $\dot q_1''\int F\,dt$, или $\dot q_1''(p_1'-p_1)$.

Если мы теперь предположим, что импульс силы $\int F\,dt$ будет беспредельно уменьшаться, то величины $\dot q_1'$ и $\dot q_1''$ будут сближаться и в конечном счете совпадут с величиной $\dot q_1$; значит, мы можем написать $p_1'-p_1=\delta p_1$, так что совершенная работа в пределе будет равна $\delta W_1=\dot q_1\delta p_1$, или *работа, совершаемая очень малым импульсом силы, в пределе равна произведению импульса силы на скорость*.

Приращение кинетической энергии

560. Когда на приведение в движение консервативной системы затрачивается некоторая работа, то системе сообщается энергия, в результате у нее появляется способность совершать равное количество работы на преодоление сопротивлений при переходе системы в состояние покоя.

Энергия, которой обладает система благодаря своему движению, называется кинетической энергией; эта энергия сообщается системе в форме работы, совершаемой силами, приводящими ее в движение.

Если T — кинетическая энергия системы, и она за счет действия бесконечно малого импульса сил с компонентами δp_1, $\delta p_2, \ldots$ становится равной $T+\delta T$, то приращение δT должно быть суммой количества работ, совершаемых составляющими импульса силы, или в формульном представлении

$$\delta T=\dot q_1\delta p_1+\dot q_2\delta p_2+\ldots, =\Sigma\,(\dot q\delta p). \tag{1}$$

Мгновенное состояние системы полностью определено, если заданы ее переменные и импульсы. Следовательно, кинетическая энергия, зависящая от мгновенного состояния системы, может быть выражена через переменные (q) и импульсы (p). Этот способ представления T был введен Гамильтоном. Когда T выражена таким образом, мы будем отличать это при помощи индекса $_p$, т. е. T_p.

Полная вариация T_p равна

$$\delta T_p = \sum\left(\frac{dT_p}{dp}\delta p\right)+\sum\left(\frac{dT_p}{dq}\delta q\right). \tag{2}$$

Последний член может быть записан в виде $\sum\left(\frac{dT_p}{dq}\dot{q}\,\delta t\right)$, он уменьшается вместе с δt и в пределе, когда импульс силы становится мгновенным, исчезает.

Следовательно, приравнивая в уравнениях (1) и (2) коэффициенты перед δp, получаем

$$\dot{q}=dT_p/dp, \tag{3}$$

или, *скорость, соответствующая переменной q, равна частной производной от T_p по соответствующему импульсу p.*

Мы пришли к этому результату, рассматривая импульсные силы и тем самым избежав рассмотрения изменения конфигурации системы за время их действия. Но мгновенное состояние системы оказывается одним и тем же во всех отношениях независимо от того, была ли система приведена в данное состояние движения из состояния покоя путем приложения к ней короткодействующих импульсных сил или же система пришла в это состояние каким-то другим способом, хотя бы и постепенным.

Другими словами, и переменные, и соответствующие скорости, и импульсы зависят от фактического состояния движения системы в данный момент, а не от его предыстории.

Следовательно, уравнение (3) одинаково справедливо, предполагаем ли мы, что состояние движения системы обусловлено импульсными силами или силами, действующими каким бы то ни было другим способом.

Мы можем поэтому устранить из рассмотрения импульсные силы вместе со всеми ограничениями, налагаемыми на продолжительность их действия и на изменения конфигурации системы в течение их действия.

Уравнения движения Гамильтона

561. Мы показали уже, что

$$dT_p/dp=\dot{q}. \tag{4}$$

Пусть система движется произвольным образом, подчиняясь наложенным на нее связям, тогда вариации p и q будут равны

$$\delta p=(dp/dt)\delta t, \qquad \delta q=\dot{q}\delta t. \tag{5}$$

Отсюда

$$\frac{dT_p}{dp}dp=\frac{dp}{dt}\dot{q}\,\delta t, \;=\frac{dp}{dt}\delta q, \tag{6}$$

а полная вариация T_p равна

$$\delta T_p=\sum\left(\frac{dT_p}{dp}\delta p+\frac{dT_p}{dq}\delta q\right), =\sum\left(\left(\frac{dp}{dt}+\frac{dT_p}{dq}\right)\delta q\right). \tag{7}$$

Но приращение кинетической энергии появляется за счет работы, совершаемой приложенными силами, т. е.

$$\delta T_p=\Sigma\ (F\ \delta q). \tag{8}$$

Вариации δq, входящие в эти два выражения, независимы, и мы вправе приравнять в (7) и (8) коэффициенты при них. В результате получаем

$$F_r=\frac{dp_r}{dt}+\frac{dT_p}{dq_r}, \tag{9}$$

где импульс p_r и сила F_r относятся к переменной q_r.

Уравнений такого вида существует столько же, сколько и переменных. Эти уравнения получены Гамильтоном. Они показывают, что сила, соответствующая какой-либо переменной, представляется в виде суммы двух частей. Первая есть скорость увеличения во времени импульса, относящегося к данной переменной. Вторая часть есть скорость увеличения кинетической энергии, приходящейся на единицу приращения данной переменной при условии, что другие переменные, а также все импульсы остаются постоянными.

Кинетическая энергия, выраженная через импульсы и скорости

562. Пусть p_1, p_2,.. . — импульсы, а $\dot q_1$, $\dot q_2$,. . . — скорости в данный момент времени, и пусть p_1, p_2,. . ., $\dot{\mathrm{q}}_1$, $\dot{\mathrm{q}}_2$,. . .—другая система импульсов и скоростей, таких, что

$$\mathrm{p}_1=np_1, \quad \dot{\mathrm{q}}_1=n\dot q_1,\ldots \tag{10}$$

Ясно, что наборы p, $\dot{\mathrm{q}}$ будут совместны друг с другом, если совместны наборы p, $\dot q$.

Пусть теперь значение n изменяется на δn. Работа, совершаемая силой F_1, равна

$$F_1\delta\mathrm{q}_1=\dot{\mathrm{q}}_1\delta\mathrm{p}_1=\dot q_1 p_1 n\delta n. \tag{11}$$

Если n увеличивается от 0 до 1, то система переводится из состояния покоя в состояние движения $(\dot q,\ p)$ и вся работа, затраченная на создание этого движения, равна

$$(\dot q_1 p_1+\dot q_2 p_2+\ldots)\int\limits_0^1 n\,dn. \tag{12}$$

Но $\int\limits_0^1 n\,dn=\frac{1}{2}$, а работа, затрачиваемая на создание движения, эквивалентна кинетической энергии. Отсюда

$$T_{p\dot q}=(p_1\dot q_1+p_2\dot q_2+\ldots)/2, \tag{13}$$

где через $T_{p\dot{q}}$ обозначена кинетическая энергия, выраженная через импульсы и скорости. Переменные q_1, q_2,. . . в это выражение не входят.

Таким образом, кинетическая энергия равна полусумме произведений импульсов на соответствующие скорости.

Выраженную в таком виде кинетическую энергию мы будем обозначать символом $T_{p\dot{q}}$. Она является функцией только импульсов и скоростей и не включает в себя сами переменные.

563. Существует и третий метод представления кинетической энергии, который обычно рассматривается как основной. Решая уравнения (3), мы можем выразить импульсы через скорости, а затем, вводя эти величины в (13), получим выражение для T, содержащее только скорости и переменные. Когда энергия T выражена в этом виде, мы будем отмечать ее символом $T_{\dot{q}}$. Именно в таком представлении кинетическая энергия фигурирует в уравнениях Лагранжа.

564. Ясно, что поскольку T_p, $T_{\dot{q}}$ и $T_{p\dot{q}}$ представляют собой три различных выражения для одной и той же величины, то $T_p+T_{\dot{q}}-2T_{p\dot{q}}=0$, или

$$T_p+T_{\dot{q}}-p_1\dot{q}_1-p_2\dot{q}_2-\ldots=0. \tag{14}$$

Отсюда, если варьируются все величины p, q, и $\dot{q}$, то

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dT_p}{dp_1}-\dot{q}_1\right)\delta p_1+\left(\frac{dT_p}{dp_2}-\dot{q}_2\right)\delta p_1+\ldots\\&+\left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1}-p_1\right)\delta\dot{q}_1+\left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2}-p_2\right)\delta\dot{q}_2+\ldots\\&+\left(\frac{dT_p}{dq_1}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}\right)\delta q_1+\left(\frac{dT_p}{dq_2}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_2}\right)\delta q_2+\ldots=0.\end{aligned} \tag{15}$$

Вариации δp не являются независимыми от вариаций δq и $\delta\dot{q}$, так что мы не можем сразу утверждать, что коэффициент при каждой вариации в этом уравнении равен нулю. Но из уравнений (3) мы знаем, что

$$\frac{dT_p}{dp_1}-\dot{q}_1=0,\ \ldots, \tag{16}$$

и поэтому члены, содержащие вариации δp, исчезают сами по себе.

Теперь уже все оставшиеся вариации δq и $\delta\dot{q}$ независимы, так что, приравнивая нулю коэффициенты при $\delta\dot{q}_1$ и т. д., мы находим

$$p_1=\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1},\quad p_2=\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2},\ \ldots, \tag{17}$$

или *составляющие импульса равны производным от $T_{\dot{q}}$ по соответствующим скоростям.*

Далее, приравнивая нулю коэффициенты при δq_1,. . . ,

$$\frac{dT_p}{dq_1}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}=0, \tag{18}$$

или *производная от кинетической энергии, выраженная как функция скоростей, равна по величине и противоположна по знаку производной от энергии T, выраженной как функция импульсов.*

В силу уравнения (18) мы можем записать уравнение движения (9) так:

$$F_1=\frac{dp_1}{dt}-\frac{dT_{\dot q}}{dq_1}, \tag{19}$$

или

$$F_1=\frac{d}{dt}\frac{dT_{\dot q}}{d\dot q_1}-\frac{dT_{\dot q}}{dq_1}. \tag{20}$$

Уравнения движения в такой форме были даны Лагранжем.

565. В предыдущих исследованиях мы избегали рассмотрения вида функции, выражающей кинетическую энергию через скорости или импульсы, и приняли для нее единственное явное выражение

$$T_{p\dot q}=(p_1\dot q_1+p_2\dot q_2+\ldots)/2, \tag{21}$$

в котором кинетическая энергия выражена как полусумма произведений каждого импульса на соответствующую ему скорость.

Мы можем выразить скорости через частные производные от T_p по импульсам, как и в уравнении (3):

$$T_p=\frac{1}{2}\left(p_1\frac{dT_p}{dp_1}+p_2\frac{dT_p}{dp_2}+\ldots\right). \tag{22}$$

Это показывает, что T_p является однородной функцией вторых степеней импульсов p_1, p_2, . . .

Мы можем также выразить импульсы через $T_{\dot q}$ и найдем

$$T_{\dot q}=\frac{1}{2}\left(\dot q_1\frac{dT_{\dot q}}{d\dot q_1}+\dot q_2\frac{dT_{\dot q}}{d\dot q_2}+\ldots\right), \tag{23}$$

откуда видно, что $T_{\dot q}$ есть однородная функция вторых степеней скоростей $\dot q_1$, $\dot q_2$, ...

Если мы запишем

$$P_{11} \text{ вместо } \frac{d^2T_{\dot q}}{d\dot q_1^2}, \qquad P_{12} \text{ вместо } \frac{d^2T_{\dot q}}{d\dot q_1\, d\dot q_2}, \ \ldots$$

и

$$Q_{11} \text{ вместо } \frac{d^2T_p}{dp_1^2}, \qquad Q_{12} \text{ вместо } \frac{d^2T_p}{dp_1\, dp_2}, \ \ldots,$$

то, поскольку $T_{\dot q}$ и T_p являются функциями второй степени $\dot q$ и p соответственно, Q и P должны быть функциями только переменных q и не зависеть от скоростей и импульсов. Таким образом, мы получаем выражения для T:

$$2T_{\dot q}=P_{11}\dot q_1^2+2P_{12}\dot q_1\dot q_2+\ldots, \tag{24}$$

$$2T_p=Q_{11}p_1^2+2Q_{12}p_1p_2+\ldots. \tag{25}$$

Импульсы выражаются через скорости с помощью линейных уравнений

$$p_1 = P_{11}\dot{q}_1 + P_{12}\dot{q}_2 + \ldots, \tag{26}$$

и скорости выражаются через импульсы с помощью линейных уравнений

$$\dot{q}_1 = Q_{11}p_1 + Q_{12}p_2 + \ldots . \tag{27}$$

В трактатах по динамике твердого тела коэффициенты, соответствующие величинам P_{11}, т. е. имеющие одинаковые индексы, называются моментами инерции, а коэффициенты, соответствующие величинам P_{12}, в которых индексы различны, называются произведениями инерции. Мы можем распространить эти названия и на более общую задачу, которая в настоящее время стоит перед нами и в которой эти величины, в отличие от случая твердого тела, не являются абсолютными константами, а зависят от переменных q_1, $q_2, \ldots$.

Подобным же образом мы можем назвать коэффициенты типа Q_{11} моментами подвижности, а коэффициенты типа Q_{12} — произведениями подвижности. Однако нам не часто представится возможность говорить об этих самых коэффициентах подвижности.

566. Кинетическая энергия системы является величиной, существенно положительной или равной нулю. Отсюда следует, что коэффициенты должны быть такими, чтобы никакие вещественные значения переменных величин не могли бы сделать энергию отрицательной, независимо от того, выражена ли она через скорости или через импульсы.

Таким образом, существует целый набор необходимых условий, которым должны удовлетворять значения коэффициентов P. Эти условия следующие.

Все величины P_{11}, P_{12}, . . . должны быть положительны.

Все $(n—1)$ определителей, которые последовательно получаются из детерминанта

$$\begin{vmatrix} P_{11}, & P_{12}, & P_{13}, & \ldots & P_{1n} \\ P_{21}, & P_{22}, & P_{23}, & \ldots & P_{2n} \\ P_{31}, & P_{32}, & P_{33}, & \ldots & P_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1}, & P_{n2}, & P_{n3}, & \ldots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

путем убирания членов, содержащих индекс 1, затем членов, содержащих индекс 1 или 2, и т. д., должны быть положительны.

Число условий для n переменных равно, таким образом, $2n—1$.

Коэффициенты Q подчиняются условиям того же вида.

567. В этой сводке основных принципов динамики системы со связями мы оставили вне поля зрения сам механизм, при помощи которого связаны различные части системы. Мы даже не выписали систему уравнений, показывающих зависимость движения какой-либо части системы от изменения переменных, и ограничили наше внимание лишь рассмотрением переменных, их скоростей, импульсов, а также сил, действующих на описываемые этими переменными части системы. Единственные принятые нами допущения состоят в том, что система имеет только такие связи, в уравнения для которых время не входит явно, и что к системе применим принцип сохранения энергии.

Такое изложение методов чистой динамики не является излишним. Лагранж и большинство его последователей, которым мы обязаны этим методам, как правило, ограничивались лишь их демонстрацией, и, чтобы полностью сосредоточиться на рассматриваемых ими символах, они попытались исключить все понятия, кроме понятия чистой величины; они не только обходились без графических представлений, но избавились даже от понятий скорости, импульса и энергии, заменив их раз и навсегда просто символами в исходных уравнениях.

Развитие идей и методов чистой математики позволило, создав математическую теорию динамики, пролить свет на многие истины, открытие которых было бы невозможно без математической подготовки. И если нам предстоит построение динамической теории для других областей науки, мы должны проникнуться в равной мере и математическими методами, и этими динамическими истинами.

Образуя понятия и составляя терминологию в какой-либо науке, которая, подобно науке об электричестве, имеет дело с силами и их проявлениями, мы непременно должны руководствоваться идеями, присущими фундаментальной науке динамике. И тогда на начальной стадии развития этой науки нам удастся избежать несоответствия с уже установленными утверждениями, а после обретения более ясного понимания принятый нами язык может сослужить нам пользу, а не быть помехой.

ГЛАВА VI

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

568. В п. 552 мы показали, что существующий в контуре электрический ток обладает способностью совершать определенное количество механической работы независимо от поддерживающей его внешней электродвижущей силы. Но способность совершать работу в любом ее проявлении есть не что иное, как энергия, а все виды энергии по сути одинаковы, хотя и могут различаться по форме. Энергия электрического тока относится либо к той энергии, которая состоит в действительном движении материи, либо к той, которая состоит в способности вызывать движение, обусловленной наличием сил, действующих между телами, находящимися в определенных положениях относительно друг друга.

Энергия первого типа, т. е. энергия движения, называется кинетической; однажды понятая, она представляется таким фундаментальным фактом природы, что мы вряд ли можем воспринять возможность сведения ее к чему-либо другому. Второй вид энергии, зависящий от положения, называется потенциальной энергией и обусловлен действием того, что мы обычно называем силами, иначе говоря, тенденциями к изменению относительного положения. Хотя мы и можем принять существование этих сил как некий установленный факт, тем не менее мы всегда чувствуем, что любое объяснение того механизма, который приводит тела в движение, образует заметный вклад в наши знания.

569. Электрический ток нельзя понимать иначе, как явление кинетическое. Даже Фарадей, который постоянно пытался избавить свой интеллект от влияния тех ассоциаций, которые способны вызвать слова «электрический ток» и «электрическая жидкость», говорит об электрическом токе, как о «чем-то распространяющемся, а не просто как о состоянии» [1].

Эффекты, вызываемые током, такие, как электролиз и перенос электризации от одного тела к другому, относятся к действиям распространяющимся, т. е. к действиям, требующим времени для их осуществления, и, следовательно, являющимися по природе своей движениями.

Что касается скорости тока, то мы показали, что нам о ней ничего неизвестно; эта скорость может составлять и десятые доли дюйма в час, и сотни тысяч миль в секунду [2]. В любом случае мы настолько далеки от знания ее абсолютного значения, что даже не знаем, является ли направление, называемое нами положительным, истинным направлением движения или противоположным ему.

Однако здесь мы лишь предполагаем, что в электрическом токе заключено какого-то рода движение. Тому, что является причиной электрических токов, дано название Электродвижущей Силы. Оно применяется уже давно и с большой пользой, и ни разу не вызвало какой-либо несогласованности в научном языке. Электродвижущую силу всегда следует понимать как силу, действующую только на электричество, а не на тела, в которых оно существует. Ее никогда нельзя путать с обычной механической силой, которая действует только на тела и не действует на электричество внутри них. Если мы когда-либо установим формальную связь между электричеством и обычной материей, то, по-видимому, узнаем также и связь между электродвижущей и обычной силами.

570. Когда на тело действует обычная сила и тело подчиняется ее действию, то работа, совершаемая силой, измеряется произведением силы на величину смещения тела. Так, при пропускании воды через трубу работа, совершаемая в произвольном сечении, измеряется произведением давления жидкости в этом сечении на количество воды, проходящей через сечение.

Аналогично работа, совершаемая электродвижущей силой, измеряется произведением электродвижущей силы на количество электричества, которое проходит через сечение проводника под действием электродвижущей силы.

Работа, совершаемая электродвижущей силой, является по своей природе точно такой же, как и работа, совершаемая обычной силой; обе они измеряются одними и теми же стандартами, или единицами.

Часть работы, совершаемой электродвижущей силой, действующей на проводящий контур, расходуется на преодоление сопротивления контура и тем самым превращается в тепло. Другая часть работы расходуется на электромагнитные явления, изученные Ампером, при которых проводники приводятся в движение электромагнитными силами. Остальная часть работы тратится на увеличение кинетической энергии тока; эффекты, связанные с этой частью действия, проявляются в явлениях индукции токов, наблюдавшихся Фарадеем.

Таким образом, наши знания об электрических токах достаточны для того, чтобы распознать в системе материальных проводников, несущих токи, дина-

[1] *Exp. Res.*, 283.
[2] *Exp. Res.*, 1648.

мическую систему, являющуюся резервуаром энергии, одна часть которой может быть кинетической, а другая — потенциальной.

Природа связей отдельных частей этой системы между собой нам неизвестна, однако, поскольку в нашем распоряжении имеются динамические методы исследования, не требующие знания устройства системы, мы и применим их к этому случаю.

Вначале мы изучим те следствия, к которым приводит предположение о наиболее общем виде функции, выражающей кинетическую энергию системы.

571. Пусть система состоит из проводящих контуров, форма и положение которых определяются значениями переменных x_1, x_2, . . .; их число равно числу степеней свободы системы.

Если бы вся кинетическая энергия системы была обусловлена движением этих проводников, она выражалась бы формулой

$$T=\frac{1}{2}(x_1x_1)\dot{x}_1^2+\ldots+(x_1x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2+\ldots,$$

где символы (x_1x_1), . . . обозначают величины, которые мы назвали моментами инерции, а (x_1x_2), . . . обозначают произведения инерции.

Если X' — приложенная сила (стремящаяся увеличить координату x), необходимая для осуществления истинного движения, то, согласно уравнению Лагранжа, $\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}=X'$.

Когда T обозначает энергию, обусловленную только видимым движением, мы будем отмечать ее нижним индексом $_m$, т. е. как T_m.

Но в системе проводников, несущих электрические токи, часть кинетической энергии обусловлена существованием этих токов. Пусть движение электричества, а также всего того, чьим движением оно управляет, определяется другим набором координат y_1, y_2, . . .; тогда T будет однородной функцией квадратов и произведений всех скоростей двух наборов координат. Мы, таким образом, можем разделить T на три части, в первой из которых T_m встречаются только скорости координат x, во второй T_e — только скорости координат y, а в третьей T_{me} каждый член содержит произведение скоростей двух координат, одной из которых является x, а второй — y.

Таким образом, мы имеем

$$T=T_m+T_e+T_{me},$$

где

$$T_m=\frac{1}{2}(x_1x_1)\dot{x}_1^2+\ldots+(x_1x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2+\ldots,$$

$$T_e=\frac{1}{2}(y_1y_1)\dot{y}_1^2+\ldots+(y_1y_2)\dot{y}_1\dot{y}_2+\ldots,$$

$$T_{me}=(x_1y_1)\dot{x}_1\dot{y}_1+\ldots.$$

572. В общей динамической теории коэффициенты перед каждым членом могут быть функциями всех координат, как x, так и y. Однако в случае электрических токов легко увидеть, что координаты класса y не входят в коэффициенты.

Действительно, если все электрические токи поддерживаются постоянными, а проводники покоятся, общее состояние поля остается неизменным. Но в этом случае координаты y переменны, хотя скорости $\dot{y}$ постоянны. Следовательно, координаты y не могут входить в выражение для T или в другие выражения, относящиеся к чему-либо реальному.

Кроме того, согласно уравнению непрерывности, если проводники по своему характеру являются линейными контурами, для выражения силы тока в каждом из них требуется только одна переменная. Пусть скорости $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$, . . . представляют собой силы токов в нескольких проводниках.

Все это оставалось бы верным, и если вместо электрических токов мы имели бы потоки несжимаемой жидкости, текущей в гибких трубах. В этом случае скорости потоков вошли бы в выражение для T, но коэффициенты зависели бы только от переменных x, определяющих форму и положение труб.

В случае жидкости ее движение в одной трубе не влияет непосредственно на движение любой другой трубы или жидкости в ней. Следовательно, в значение T_e входят только квадраты скоростей $\dot{y}$, но не их произведения, а в T_{me} любая скорость $\dot{y}$ связана лишь с теми скоростями класса $\dot{x}$, которые принадлежат ее собственной трубе.

Мы знаем, что в случае электрических токов это ограничение не имеет места, поскольку токи в различных контурах действуют друг на друга. Следовательно, мы должны допустить наличие членов, включающих произведения вида $\dot{y}_1\dot{y}_2$, и это предполагает существование чего-то находящегося в движении, которое зависит от силы обоих электрических токов $\dot{y}_1$ и $\dot{y}_2$. И эта движущаяся материя, чем бы она ни оказалась, не находится во внутренних областях проводников, несущих оба тока, а, вероятно, распределена во всем окружающем их пространстве.

573. Рассмотрим далее, какой вид принимают уравнения движения Лагранжа в этом случае. Пусть X' — приложенная сила, соответствующая координате x — одной из тех, которые определяют форму и положение проводящих контуров. Она является силой в обычном смысле, т. е. величиной, определяющей тенденцию к изменению положения и задаваемой уравнением

$$X' = \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx}.$$

Мы можем рассматривать эту силу как сумму трех частей в соответствии с частями, на которые мы разделили кинетическую энергию системы, различая их с помощью тех же индексов. Таким образом, $X' = X'_m + X'_e + X'_{me}$.

Часть X'_m определяется с помощью обычного динамического метода, и у нас нет необходимости рассматривать ее.

Поскольку T_e не содержит $\dot{x}$, первый член в выражении для X'_e равен нулю, и ее значение сводится к следующему: $X'_e = -dT_e/dx$.

Это есть выражение для механической силы, которую следует приложить к проводнику, чтобы уравновесить электромагнитную силу; оно означает, что сила измеряется скоростью *уменьшения* чисто электрокинетической энергии, обусловленной изменением координаты x. Электромагнитная сила X_e, которая вводит в игру эту внешнюю механическую силу, равна по величине, но противоположна по знаку силе X'_e и измеряется, следовательно, скоростью *увеличения* электрокинетической энергии, соответствующей увеличению координаты x. Поскольку значение X_e зависит от квадратов и произбедений токов, оно остается тем же самым, если поменять направления всех токов на обратные.

Третья часть X' равна $X'_{me} = \frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{d\dot{x}} - \frac{dT_{me}}{dx}$.

Величина T_{me} содержит только произведения вида $\dot{x}\dot{y}$, так что $dT_{me}/d\dot{x}$ является линейной функцией сил токов $\dot{y}$. Первый член, таким образом, зависит от скорости изменения сил токов и определяет механическую силу, действующую на проводник; сила эта равна нулю, когда токи постоянны, и положительна или отрицательна в зависимости от того, увеличиваются или уменьшаются величины токов.

Второй член зависит не от изменения токов, а от их действительной величины. Поскольку относительно этих токов он является линейной функцией, то его знак меняется при смене знака токов. Поскольку скорость $\dot{x}$ входит во все члены, они обращаются в нуль, когда проводники покоятся. Из-за изменения во времени коэффициентов при $\dot{y}$ в выражении для $dT_{me}/d\dot{x}$ появляются еще несколько членов. Сделанные нами замечания относятся и к ним.

Мы можем, таким образом, исследовать эти члены отдельно: если проводники покоятся, иметь дело только с первым членом, если токи постоянны — только со вторым.

574. Очень важно установить, представляется ли какая-нибудь доля кинетической энергии в форме T_{me}, т. е. в форме, содержащей произведения обычных скоростей и сил электрических токов; поэтому было бы желательным проведение экспериментов, относящихся к этому вопросу, с особой тщательностью.

Трудно определить силы, действующие на тела при их быстром движении; поэтому мы проследим за первым членом, который зависит от изменения силы тока.

Если какая-то часть кинетической энергии зависит от произведения обычной скорости и силы тока, то, вероятно, ее легче всего наблюдать в условиях, когда скорость и ток имеют одинаковые или противоположные направления. Возьмем круговую катушку с большим числом витков и подвесим ее на тонком вертикальном проводе так, чтобы витки были горизонтальны, а катушка могла вращаться вокруг вертикальной оси либо в направлении, совпадающем с направлением тока в катушке, либо в противоположном направлении.

Мы будем предполагать, что ток подводится к катушке с помощью подвешивающего провода, а после прохождения тока через витки катушки его цепь замыкается через провод, идущий вниз вдоль линии подвеса и погруженный в чашку со ртутью.

Поскольку при прохождении тока через катушку действие горизонтальной компоненты земного магнетизма стремится повернуть эту катушку вокруг горизонтальной оси, мы будем предполагать, что горизонтальная компонента земного магнетизма в точности нейтрализуется с помощью неподвижных магнитов, или что эксперимент производится на магнитном полюсе. К катушке прикрепляется вертикальное зеркальце, позволяющее обнаружить любое ее азимутальное движение [рис. 33].

Пусть теперь по катушке в направлении север—восток—юг—запад пропускается электрический ток. Если бы электричество было жидкостью, подобной воде, текущей вдоль проводника, то, как в момент начала тока, так и по мере нараста-

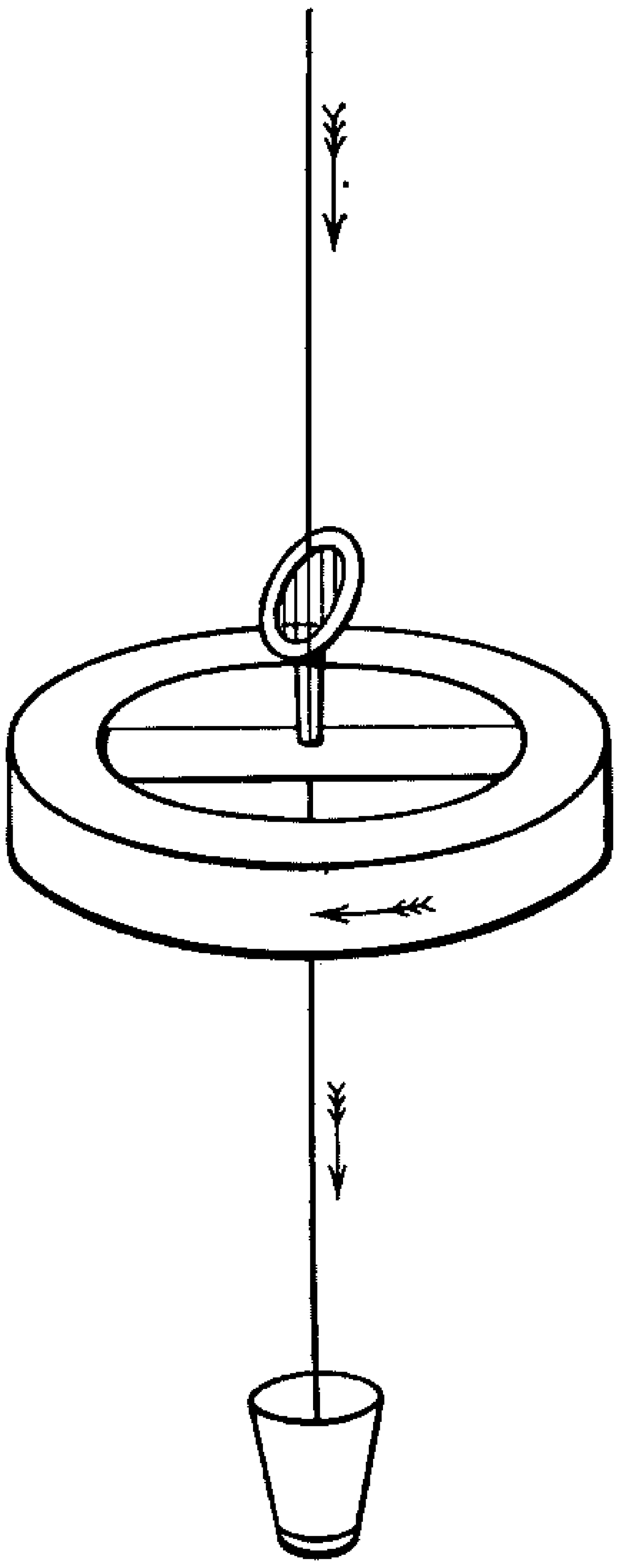


Рис. 33

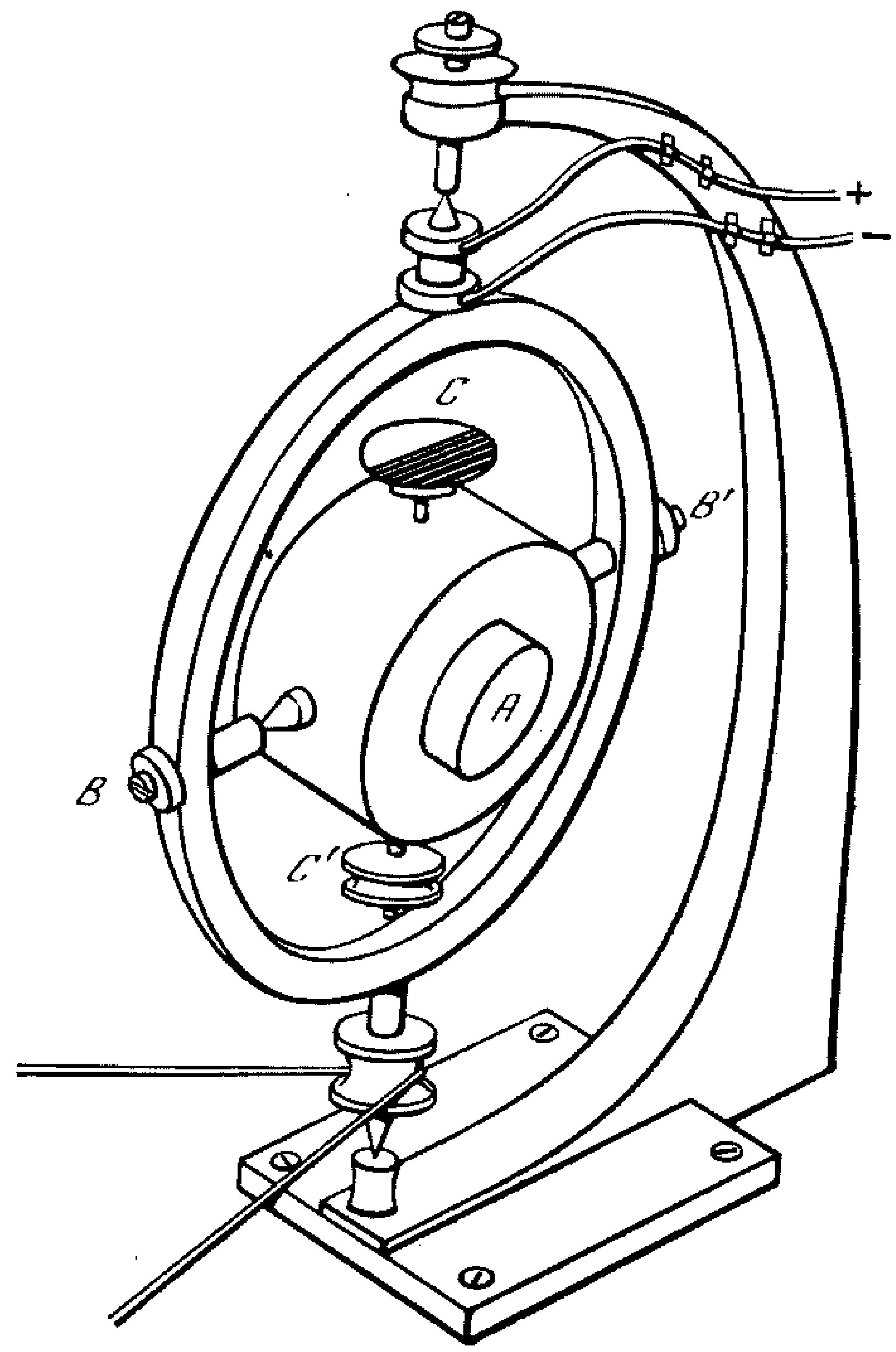


Рис. 34

ния его скорости, было бы необходимо приложить силу, создающую угловой момент жидкости, проходящей через катушку. Эта сила должна была бы быть силой упругости провода подвеса, и катушка в начальный момент поворачивалась бы в обратном направлении, т. е. в направлении запад—юг—восток—север, что и было бы зарегистрировано с помощью зеркала. При прекращении тока зеркало двигалось бы иначе, на этот раз — в направлении тока.

Никаких явлений подобного рода до сих пор не наблюдалось. Если бы такой эффект существовал, его легко было бы отличить от уже известных действий тока по следующим особенностям.

(1). Он возникал бы только при изменении силы тока, например, когда цепь замыкается или размыкается, а не тогда, когда ток постоянен.

Все известные *механические* действия тока зависят от сил токов, а не от скорости их изменения. С этим электромагнитным действием не надо смешивать то электродвижущее действие, которое возникает в случае индуцированных токов.

(2). Направление этого действия токов было бы противоположным при смене знаков у всех токов в поле.

Все известные механические действия тока остаются неизменными при смене направлений всех токов на обратные, поскольку они зависят от квадратов и произведений этих токов.

Если бы было обнаружено какое-либо действие такого рода, мы могли бы рассматривать один из так называемых видов электричества (положительный или отрицательный) как некоторое реальное вещество и описывать электрический ток как действительное движение этого вещества в определенном направлении. Действительно, если бы электрические движения были бы каким-то образом сопоставимы с движениями обычной материи, то существовали бы члены вида T_{me} и это проявлялось бы через механическую силу X_{me}.

В рамках гипотезы Фехнера (Fechner) о том, что электрический ток состоит из двух равных токов положительного и отрицательного электричества, текущих через один и тот же проводник в противоположных направлениях, члены второго рода T_{me} обращались бы в нуль, поскольку каждому из них, относящемуся к положительному току, соответствовал бы равный член противоположного знака, относящийся к отрицательному току, и не существовало бы никаких явлений, зависящих от этих членов.

Мне думается, однако, что, несмотря на те большие выгоды, которые дает нам признание многих аналогий между током электричества и потоком материальной жидкости, мы должны тщательно избегать делать любые предположения, не подкрепленные экспериментальными свидетельствами. Я считаю, что пока еще нет экспериментальных данных, показывающих, является ли электрический ток действительно током материального вещества или двойным током; неизвестно также мала или велика его скорость, измеренная в футах в секунду.

Знание этих фактов было бы равнозначно, по крайней мере, отправному моменту для создания полной динамической теории электричества, где электрическое действие рассматривалось бы иначе, чем в этом трактате, т. е. не как явление, причина которого неизвестна и которое подчиняется только общим законам динамики, а как результат известных движений известных элементов материи. При этом предметом исследования служили бы не только общие эффекты и конечные результаты, но и весь промежуточный механизм и детали движения.

575. Еще более трудным является экспериментальное исследование второго члена X_{me}, а именно величины dT_{me}/dx, так как это исследование связано с наблюдением эффектов действия силы на быстро движущееся тело.

На рис. 34 показан прибор, который я построил в 1861 г., чтобы проверить существование силы такого рода.

Электромагнит A может вращаться вокруг горизонтальной оси BB', находящейся в кольце, которое само вращается вокруг вертикальной оси.

Пусть A, B, C являются моментами инерции электромагнита относительно оси катушки, относительно горизонтальной оси BB' и относительно третьей оси CC' соответственно.

Пусть CC' образует с вертикалью угол ϑ, азимут оси BB' равен φ, а ψ является переменной, от которой зависит движение электричества в катушке.

Тогда для кинетической энергии электромагнита T можно записать $2T = A\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + B\dot{\vartheta}^2 + C\dot{\varphi}^2\cos^2\vartheta + E(\dot{\varphi}\sin\vartheta + \dot{\psi})^2$, где E — величина, которую можно назвать моментом инерции электричества в катушке.

Если момент приложенной силы, стремящейся увеличить ϑ, равен Θ, то из уравнений динамики мы имеем

$$\Theta = B\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \{(A - C)\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + E\dot{\varphi}\cos\vartheta(\dot{\varphi}\sin\vartheta + \dot{\psi})\}.$$

Приравнивая нулю момент Ψ приложенной силы (стремящейся увеличить $\dot\psi$), получаем константу $\dot\varphi\ \sin\vartheta+\dot\psi=\gamma$, которая, как можно считать, представляет собой силу тока в катушке.

Если C несколько превышает A, то величина Θ обратится в нуль и равновесие относительно оси BB' будет устойчивым при условии, что $\sin\vartheta=E\gamma/(C-A)\dot\varphi$.

Это значение ϑ зависит от величины γ, т. е. от электрического тока, и является положительным или отрицательным в соответствии с направлением тока.

Ток подводится к катушке через подшипники в точках B и B', которые присоединены к батарее с помощью пружинок, трущихся о металлические кольца, размещенные на вертикальной оси.

Для определения значения ϑ в точке C помещен бумажный диск, который делит пополам диаметр, параллельный BB'; одна из этих половин окрашена в красный цвет, другая — в зеленый.

Когда прибор приведен в движение, при положительных значениях ϑ в точке C виден красный кружок; его радиус приближенно указывает величину ϑ. При отрицательных ϑ в точке виден зеленый кружок.

Чтобы сделать инструмент очень чувствительным к действию силы (если таковая существует), с помощью гайки, перемещающейся вдоль прикрепленного к электромагниту винта, производится регулировка, в результате которой ось CC' делается главной осью с моментом инерции, слегка превышающим момент инерции относительно оси A.

Главная трудность в экспериментах возникает из-за возмущающего действия земной магнитной силы, в результате чего электромагнит ведет себя как вертикальный компас. В связи с этим полученные результаты были весьма грубыми, хотя никаких признаков изменения ϑ не удавалось обнаружить даже при помещении в катушку железного сердечника и превращении ее тем самым в мощный электромагнит.

Итак, если магнит и содержит быстро вращающуюся материю, угловой момент этого вращения должен быть очень мал по сравнению с любыми величинами, которые мы можем измерять, и у нас по-прежнему отсутствуют доказательства существования членов T_{me}, вычисленных на основании их механического действия.

576. Рассмотрим далее силы, действующие на токи электричества, т. е. электродвижущие силы.

Пусть эффективная электродвижущая сила, связанная с индукцией, равна Y; для того чтобы скомпенсировать ее, на контур извне должна действовать электродвижущая сила $Y'=-Y$. Из уравнения Лагранжа

$$Y=-Y'=-\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot y}+\frac{dT}{dy}.$$

Второй член равен нулю, поскольку в T нет членов, зависящих от координаты y, так что сила Y сводится к первому члену. Следовательно, электродвижущая сила не может существовать в покоящейся системе с постоянными токами.

Далее, если мы разделим Y на три части Y_m, Y_e и Y_{me}, соответствующие трем частям T, мы найдем, что $Y_m=0$, поскольку T_m не содержит $\dot y$.

Мы также найдем $Y_e=-\dfrac{d}{dt}\dfrac{dT_e}{d\dot y}$.

Здесь $dT_e/d\dot{y}$ является линейной функцией токов, соответствующая часть электродвижущей силы равна скорости изменения этой функции. Это есть электродвижущая сила индукции, открытая Фарадеем. Мы рассмотрим ее более подробно впоследствии.

577. Из части T, зависящей от произведения скоростей и токов, мы находим $Y_{me}=-\frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{d\dot{y}}$.

Теперь $dT_{me}/d\dot{y}$ является линейной функцией скоростей проводников. Следовательно, если бы какие-то члены T_{me} реально существовали, было бы возможно вызвать появление электродвижущей силы простым изменением скоростей проводников независимо от всех существующих токов. Например, в случае подвешенной катушки п. 574 при внезапном приведении во вращение (вокруг вертикальной оси) первоначально покоящейся катушки пришла бы в действие электродвижущая сила, пропорциональная ускорению этого движения. Она исчезла бы при равномерном движении и сменила бы знак при замедлении движения.

Немногие научные наблюдения можно выполнить с большей точностью, чем то, при котором определяется наличие или отсутствие тока с помощью гальванометра. Точность этого метода намного превосходит точность большинства приборов, предназначенных для измерения действующей на тело механической силы. Следовательно, если какие-то токи и можно было бы создать указанным способом, то они, даже будучи очень слабыми, должны были быть зарегистрированы. Их отличие от обычных токов индукции определялось бы следующими характеристиками.

(1). Они зависели бы только от движений проводников и совсем не зависели бы от силы токов или от уже существующих в поле магнитных сил.

(2). Они зависели бы не от абсолютных значений скоростей проводников, а от ускорения проводников, а также от квадратов и произведений их скоростей и меняли бы знак при обращении ускорения на замедление, хотя при этом абсолютное значение скорости оставалось бы прежним.

Во всех реально наблюдавшихся случаях индуцированные токи зависели как от величин, так и от изменений токов в поле и не могли возбуждаться в поле, где магнитная сила и токи отсутствуют. В той мере, в какой они определяются движением проводников, они зависят не от изменения скорости, а от абсолютной скорости этих движений.

Таким образом, в нашем распоряжении имеется три способа обнаружить существование членов вида T_{me}, и ни один из них до сих пор не привел к какому-либо положительному результату. Я особенно внимательно отметил эти возможности, ибо мне казалось важным иметь наибольшее количество подтверждений (в доступных нам пределах) по вопросу, столь сильно влияющему на правильную теорию электричества.

Поскольку, однако, никаких подтверждений наличия таких членов нет, я далее буду исходить из предположения, что они не существуют или, по крайней мере, не производят заметного эффекта, что существенно упростит нашу динамическую теорию. Тем не менее нам еще представится случай при обсуждении отношения магнетизма к свету показать, что движение, составляющее свет, может входить в качестве коэффициента при членах, включающих движение, которое образует магнетизм.

ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТУРОВ

578. Теперь мы можем ограничить наше внимание лишь той частью кинетической энергии системы, которая зависит от квадратов и произведений сил электрических токов. Ее можно назвать электрокинетической энергией системы. Та часть кинетической энергии, которая зависит от движения проводников, относится к обычной динамике, а той части, которая зависит от произведений скоростей на токи, как мы показали, вообще не существует.

Обозначим через A_1, A_2, ... различные проводящие контуры. Пусть их форма и относительное положение выражаются через переменные x_1, x_2, ..., число которых равно числу степеней свободы механической системы. Мы будем называть их Геометрическими Переменными.

Пусть y_1 обозначает количество электричества, прошедшее через данное сечение проводника A_1 с начала отсчета времени t. Силу тока мы будем обозначать через $\dot{y}_1$, т. е. как производную от этой величины.

Величину $\dot{y}_1$ мы будем называть истинным током, а величину y — интегральным током. Для каждого контура в системе существует одна переменная такого рода.

Обозначим через T электрокинетическую энергию системы. Она является однородной функцией вторых степеней сил токов и имеет вид

$$T=\frac{1}{2}L_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{y}_2^2+\ldots+M_{12}\dot{y}_1\dot{y}_2+\ldots, \tag{1}$$

где коэффициенты L, M, ... представляют собой функции геометрических переменных x_1, x_2, ... Электрические переменные y_1, y_2 в это выражение не входят.

Величины L_1, L_2, ... можно назвать электрическими моментами инерции контуров A_1, A_2, ..., а M_{12} — электрическим произведением инерции двух контуров A_1 и A_2. Когда мы захотим избежать языка динамической теории, мы будем называть L_1 коэффициентом самоиндукции контура A_1, а M_{12} — коэффициентом взаимной индукции контуров A_1 и A_2. Величину M_{12} называют также потенциалом контура A_1 по отношению к контуру A_2. Эти величины зависят только от формы и взаимного расположения контуров. Мы увидим, что в электромагнитной системе измерений они являются величинами, имеющими размерность длины, см. п. 627.

Дифференцируя T по $\dot{y}_1$, мы получаем величину p_1, которая в динамической теории может быть названа импульсом, соответствующим y_1. В теории электричества мы будем называть p_1 электрокинетическим импульсом контура A_1. Его величина равна

$$p_1=L_1\dot{y}_1+M_{12}\dot{y}_2+\ldots .$$

Электрокинетический импульс контура A_1 составляется, таким образом, из произведения его собственного тока на коэффициент самоиндукции и суммы произведений токов в других контурах на их коэффициенты взаимной индукции с контуром A_1.

Электродвижущая сила

579. Пусть E является электродвижущей силой в контуре A, возникающей от какого-либо источника (например, вольтовой или термоэлектрической батареи), которая создает ток независимо от магнитоэлектрической индукции.

Пусть R будет сопротивлением контура, тогда по закону Ома для преодоления сопротивления требуется электродвижущая сила $R\dot{y}$, а для изменения импульса контура остается электродвижущая сила $E—R\dot{y}$. Называя эту силу Y', мы согласно общим уравнениям имеем $Y'=\frac{dp}{dt}-\frac{dT}{dy}$, но, поскольку T не содержит y, последний член исчезает.

Отсюда для электродвижущей силы имеем уравнение

$$E-R\dot{y}=Y'=(dp/dt), \qquad \text{или} \quad E=R\dot{y}+(dp/dt).$$

Приложенная электродвижущая сила E, следовательно, есть сумма двух частей: первая, равная $R\dot{y}$, необходима для того, чтобы, преодолевая сопротивление R, поддерживать ток $\dot{y}$; вторая часть требуется для увеличения электромагнитного импульса p. Эта электродвижущая сила должна создаваться источниками, независимыми от магнитоэлектрической индукции. Электродвижущая сила, возникающая только вследствие магнитоэлектрической индукции, равна, очевидно, $-dp/dt$, т. е. *скорости уменьшения электрокинетического импульса контура*.

Электромагнитная сила

580. Обозначим через X' приложенную механическую силу, возникающую от внешних источников и стремящуюся увеличить переменную x. Согласно общим уравнениям $X'=\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}$.

Так как выражение для электрокинетической энергии не содержит скорости ($\dot{x}$), то первый член в правой части исчезает, и мы находим $X'=-dT/dx$.

Здесь X' — внешняя сила, требуемая для уравновешивания сил, возникающих от электрических источников. Ее принято обычно рассматривать как реакцию на электромагнитную силу, которую мы будем называть X и которая равна и противоположна X'.

Следовательно, $X=dT/dx$, или *электромагнитная сила, стремящаяся увеличить какую-либо переменную, равна скорости увеличения электрокинетической энергии на единицу приращения этой переменной при условии, что токи поддерживаются постоянными*.

Если в течение всего перемещения, за время которого электродвижущая сила совершает работу W, токи с помощью батареи поддерживаются постоянными, то электрокинетическая энергия системы за то же время увеличится на W. Поэтому в дополнение к той энергии, которая расходуется на создание тепла в контуре, из батареи извлекается дополнительно такое же количество энергии W. Впервые на это было указано сэром У. Томсоном [1]. (Сравните эти результаты с электростатическим свойством в п. 93).

[1] Nichol's *Cyclopaedia of the Physical Sciences*, ed. 1860, article «Magnetism, Dynamical Relations of».

Случай двух контуров

581. Назовем контур A_1 первичным, а контур A_2 — вторичным. Электрокинетическая энергия системы может быть записана в виде

$$T=\frac{1}{2}L\dot{y}_1^2+M\dot{y}_1\dot{y}_2+\frac{1}{2}N\dot{y}_2^2,$$

где L и N — коэффициенты самоиндукции первичного и вторичного контуров соответственно, а M — коэффициент их взаимной индукции.

Предположим, что на вторичный контур не действует никакая электродвижущая сила, кроме силы, обусловленной индукцией со стороны первичного контура. Тогда мы имеем

$$E_2=R_2\dot{y}_2+\frac{d}{dt}(M\dot{y}_1+N\dot{y}_2)=0.$$

Интегрируя это уравнение по t, получим

$$R_2y_2+M\dot{y}_1+N\dot{y}_2=C=\mathrm{const},$$

где y_2 — интегральный ток во вторичном контуре.

Метод измерения интегрального тока малой длительности будет описан в п. 748; легко удостовериться, что в большинстве случаев длительность вторичного тока весьма незначительна.

Будем отмечать штрихами величины переменных в уравнении, относящиеся к концу времени t, тогда, если y_2 обозначает интегральный ток, т. е. полное количество электричества, протекшее через сечение вторичного контура за время t, то

$$R_2y_2=M\dot{y}_1+N\dot{y}_2-(M'\dot{y}_1'+N'\dot{y}_2').$$

Пусть вторичный ток возникает целиком благодаря индукции, тогда его начальное значение $\dot{y}_2$ должно равняться нулю, если перед началом отсчета времени t первичный ток был постоянен, а проводники покоились.

Если время t окажется достаточным для того, чтобы дать затухнуть вторичному току, то его конечное значение $\dot{y}_2'$ также равно нулю и уравнение будет таким: $R_2y_2=M\dot{y}_1-M'\dot{y}_1'$.

В этом случае интегральный ток вторичного контура зависит от начального и конечного значений $M\dot{y}_1$.

Индуцированные токи

582. Начнем с предположения, что первичный контур разомкнут, т. е. $\dot{y}_1=0$, и пусть при замыкании контакта в нем устанавливается ток $\dot{y}_1$.

Вторичный интегральный ток определяется уравнением $R_2y_2=-M'\dot{y}_1'$.

Когда контуры помещены рядом друг с другом и имеют одинаковые направления, величина M' положительна. Поэтому при замыкании первичного контура во вторичном контуре индуцируется отрицательный ток.

При размыкании контакта в первичном контуре первичный ток прекращается, индуцированный интегральный ток равен y_2, причем $R_2y_2=M\dot{y}_1$. В этом случае вторичный ток положителен.

Если первичный ток поддерживается постоянным, а форма или относительное положение контуров изменяется так, что M становится равным M', то интегральный вторичный ток будет равен y_2, причем $R_2 y_2 = (M - M')\dot{y}_1$.

В случае двух контуров, помещенных рядом и имеющих одинаковые направления, с увеличением расстояния между контурами величина M уменьшается. Поэтому индуцированный ток положителен, когда это расстояние растет, и отрицателен, когда оно уменьшается.

Все эти элементарные случаи индуцированных токов описаны в п. 530.

Механическое действие между двумя контурами

583. Пусть x является любой из геометрических переменных, от которых зависит форма и относительное положение контуров; электромагнитная сила, стремящаяся увеличить x, равна

$$X = \frac{1}{2}\dot{y}_1^2\frac{dL}{dx} + \dot{y}_1\dot{y}_2\frac{dM}{dx} + \frac{1}{2}\dot{y}_2^2\frac{dN}{dx}.$$

Если движение системы, соответствующее изменению x, таково, что каждый из контуров перемещается как твердое тело, то L и N будут независимыми от x, и уравнение сведется к виду $X = \dot{y}_1\dot{y}_2(dM/dx)$.

Следовательно, если первичный и вторичный токи имеют одинаковые знаки, то сила X, действующая между контурами, будет стремиться смещать их так, чтобы увеличить значение M.

Если контуры расположены рядом, а токи текут в них в одинаковых направлениях, то M будет увеличиваться при их сближении. Таким образом, в этом случае сила X оказывается силой притяжения.

584. Все явления взаимодействия двух контуров, будь то индукция токов или механическая сила между ними, зависят от величины M, названной нами коэффициентом взаимной индукции. Метод расчета этой величины из геометрических соотношений между контурами дан в п. 524, однако в исследованиях, помещенных в следующей главе, мы не будем предполагать, что математическое выражение для этой величины известно. Мы будем считать, что она найдена из опытов, связанных с индукцией, например, путем наблюдения интегрального тока при внезапном перемещении вторичного контура из данного положения на бесконечное расстояние или в любое такое положение, для которого известно, что $M = 0$.

ГЛАВА VIII

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ВТОРИЧНОГО КОНТУРА

585. В п. 582, 583, 584 мы доказали, что электромагнитное действие между первичным и вторичным контурами зависит от некоторой величины, являющейся функцией формы и относительного положения двух контуров и обозначенной нами через M.

Хотя эта величина M фактически представляет собой то же самое, что и потенциал двух контуров, математическую форму и свойства которого мы вывели в п. 423, 521, 539, исходя из магнитных и электромагнитных явлений, не будем здесь ссылаться на эти результаты, а начнем сначала, с нового обоснования, не делая никаких иных допущений, кроме установленных в главе VII для динамической теории.

Электрокинетический импульс вторичного контура состоит из двух частей (п. 578): одна, Mi_1, зависит от первичного тока i_1, а вторая, Ni_2,— от вторичного тока i_2. Мы будем исследовать сейчас первую из этих частей, которую обозначим через p:

$$p = Mi_1. \tag{1}$$

Мы предположим также, что первичный контур неподвижен, а ток в нем постоянен. Величина p, являющаяся электрокинетическим импульсом вторичного контура, будет в этом случае зависеть только от формы и положения вторичного контура; если в качестве вторичного контура взять произвольную замкнутую кривую, приняв какое-либо направление вдоль нее за положительное, то величина p для этой замкнутой кривой будет определена; если же положительным было бы выбрано противоположное направление вдоль этой кривой, то знак p сменился бы на противоположный.

586. Так как величина p зависит от формы и положения контура, мы можем предположить, что каждый участок контура дает определенный вклад в величину p и что доля вклада каждого участка контура зависит от формы и положения только этого участка, но не от расположения других частей контура.

Это допущение является законным, потому что мы не рассматриваем сейчас *ток*, части которого могут действовать (и действительно действуют) одна на другую, мы рассматриваем просто *контур*, т. е. замкнутую кривую, являющуюся чисто геометрической фигурой, вдоль которой *может* течь ток, и поэтому нельзя представлять, что части этой фигуры оказывают друг на друга какое-то физическое воздействие.

Таким образом, мы можем предположить, что доля вклада от элемента контура ds равна Jds, где J — величина, зависящая от положения и направления элемента ds. Следовательно, значение p допускает выражение через линейный интеграл

$$p = \int J ds, \tag{2}$$

где интегрирование проводится по замкнутому контуру однократно.

587. Далее мы должны определить вид величины J. Прежде всего, если направление ds изменить на противоположное, то знак изменится. Поэтому, когда два контура $ABCE$ и $AECD$ имеют общую дугу AEC, отсчитываемую в этих контурах в противоположных направлениях, то сумма значений p для двух контуров $ABCE$ и $AECD$ будет равна значению p для контура $ABCD$, составленного из этих двух контуров [рис. 35].

Действительно, части линейного интеграла, относящиеся к дуге AEC, для обоих парциальных контуров равны по величине и противоположны по знаку; когда берется их сумма, они взаимно уничтожаются, и остаются только части линейного интеграла, зависящие от внешней границы ABCD.

Таким же путем мы можем показать, что если поверхность, ограниченную замкнутой кривой, разделить на произвольное число частей и границу каждой из них рассматривать как контур (положительное направление каждого контура совпадет с положительным направлением внешней замкнутой кривой), то значение p для замкнутой кривой окажется равным сумме значений p для всех этих контуров, см. п. 483.

588. Рассмотрим теперь участок поверхности, размеры которого настолько малы по сравнению с главными радиусами кривизны поверхности, что изменением направления нормали в пределах этого участка можно пренебречь. Будем предполагать также, что если любой очень маленький контур перенести параллельно самому себе от одной части этого участка к другой, то величина p для этого малого

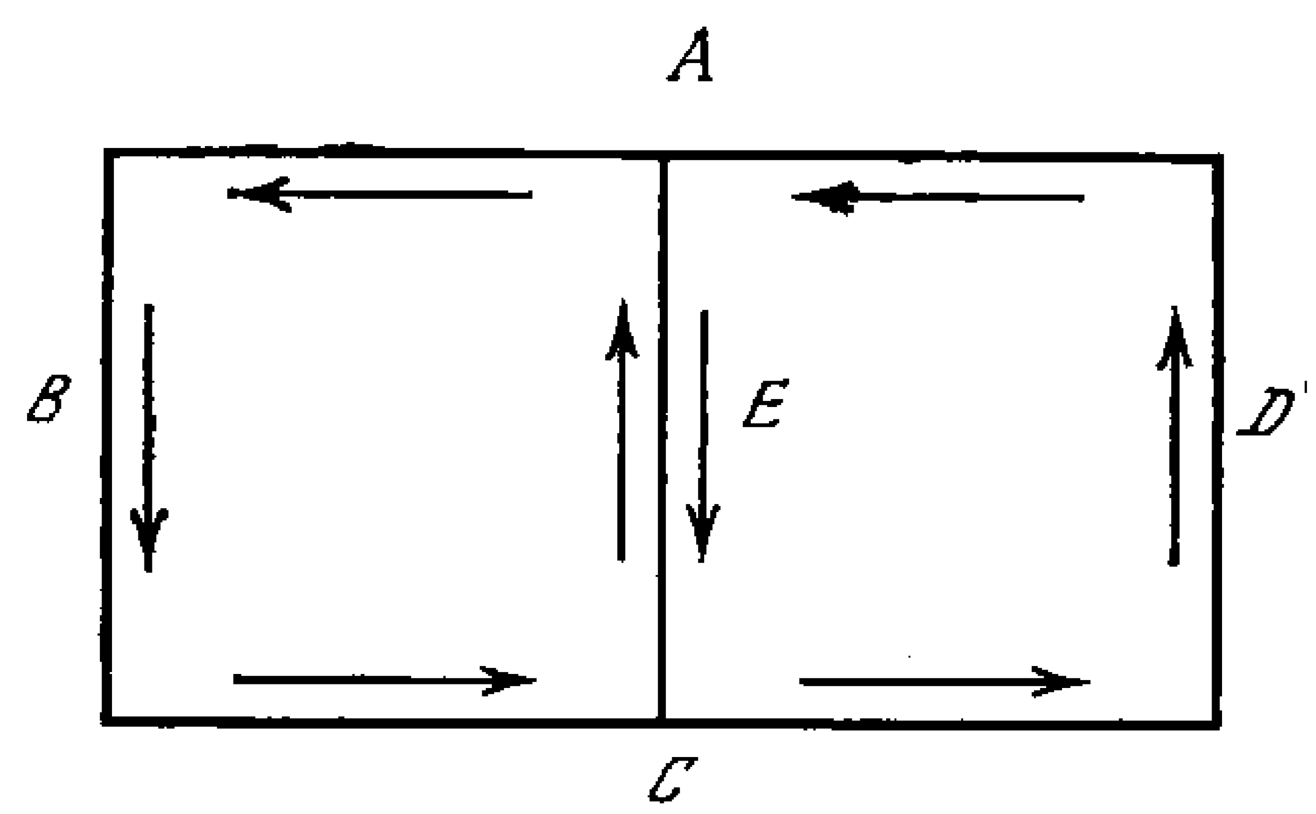


Рис. 35

контура заметно не изменится и это, очевидно, относится к тому случаю, когда размеры участка поверхности достаточно малы по сравнению с его расстоянием от первичного контура.

Если на этом участке поверхности провести произвольную замкнутую кривую, то значение p будет пропорционально площади, ею охватываемой.

Действительно, площади любых двух контуров могут быть разделены на малые элементы, имеющие одинаковые размеры и одинаковые значения p. Площади этих двух контуров пропорциональны числу тех элементов, из которых они состоят, и в таком же отношении между собой находятся их значения p.

Отсюда значение p для контура, который ограничивает некоторый элемент поверхности dS, имеет вид IdS, где I есть величина, зависящая от положения элемента dS и от направления его нормали. Поэтому мы имеем новое выражение для p:

$$p=\iint IdS, \tag{3}$$

где двойное интегрирование распространяется на любую поверхность, ограниченную контуром.

589. Пусть $ABCD$ будет контуром, у которого AC является элементарным участком, настолько малым, что его можно считать прямолинейным. Пусть APB и CQB будут малые, равные между собой площадки, лежащие в той же плоскости, тогда значение p будет одинаковым для обоих малых контуров APB и CQB [рис. 36], или

$$p(APB)=p(CQB).$$

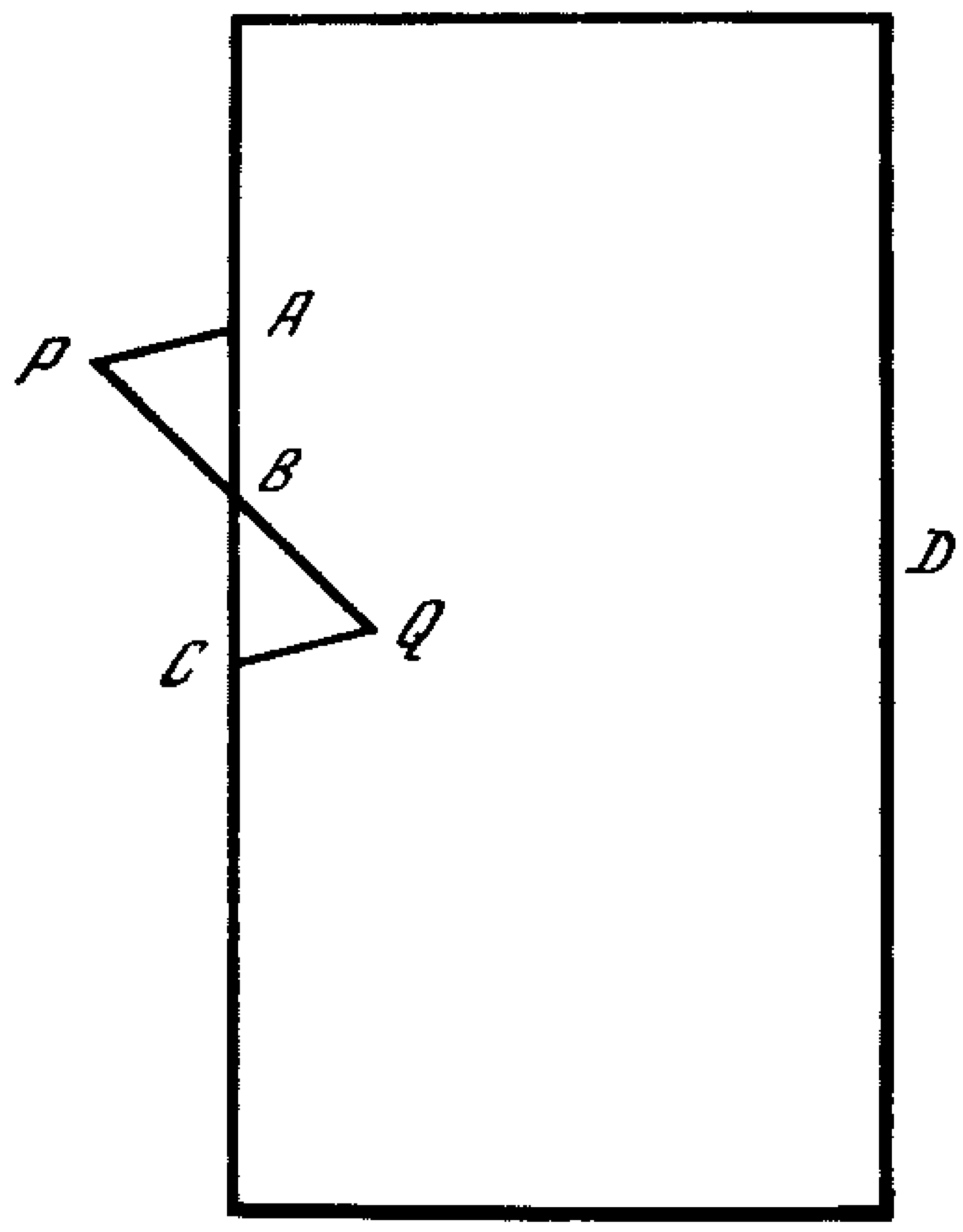


Рис. 36

Отсюда

$$\begin{aligned} p\,(APBQCD) &= p\,(ABQCD) + p\,(APB),\\ &= p\,(ABQCD) + p\,(CQB),\\ &= p\,(ABCD), \end{aligned}$$

т. е. значение p не меняется при замене прямой линии AC на ломаную линию $APQC$, если охватываемая контуром площадь при этом не меняется существенно. Фактически это есть принцип, установленный вторым опытом Ампера (п. 506), где показано, что искривленный участок контура эквивалентен прямолинейному при условии, что ни одна из его частей заметно не удалена от прямолинейного участка.

Следовательно, если мы заменим элемент ds на три малых элемента dx, dy и dz, проведенных в такой последовательности, чтобы образовать непрерывный путь от начала элемента ds к его концу, и если через Fdx, Gdy и Hdz мы обозначим элементы линейного интеграла, соответствующие dx, dy, dz, то

$$Jds = Fdx + Gdy + Hdz. \tag{4}$$

590. Мы теперь в состоянии установить, каким образом величина J зависит от направления элемента ds, поскольку согласно (4)

$$J = F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}. \tag{5}$$

Это есть выражение для составляющей (в направлении ds) вектора, компоненты которого в направлениях x, y и z равны F, G и H соответственно.

Обозначим этот вектор через $\mathfrak{A}$, а вектор, проведенный из начала координат в точку на контуре,— через ρ, тогда элемент контура будет равен $d\rho$, и кватернионным выражением для Jds будет $-S.\mathfrak{A}d\rho$.

Мы можем теперь записать уравнение (2) в виде

$$p = \int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right) ds, \tag{6}$$

или

$$p = -\int S.\mathfrak{A}\, d\rho. \tag{7}$$

Вектор $\mathfrak{A}$ и его составляющие F, G, H зависят от положения элемента ds в поле, но не от направления, в котором он проведен. Следовательно, они являются функциями координат x, y, z элемента ds, но не его направляющих косинусов l, m, n.

Вектор $\mathfrak{A}$ и по направлению, и по величине представляет собой интеграл по времени от электродвижущей напряженности, действие которой испытывала бы частица, помещенная в точку (x, y, z) при внезапном прекращении первичного тока. Поэтому мы назовем его Электрокинетическим Импульсом *в точке* (x, y, z).

Он равен той величине, которую мы исследовали в п. 405 под названием вектор-потенциала магнитной индукции.

Электрокинетический импульс любой конечной линии или контура есть линейный интеграл вдоль этой линии или контура от составляющей электрокинетического импульса в каждой точке этой линии или контура.

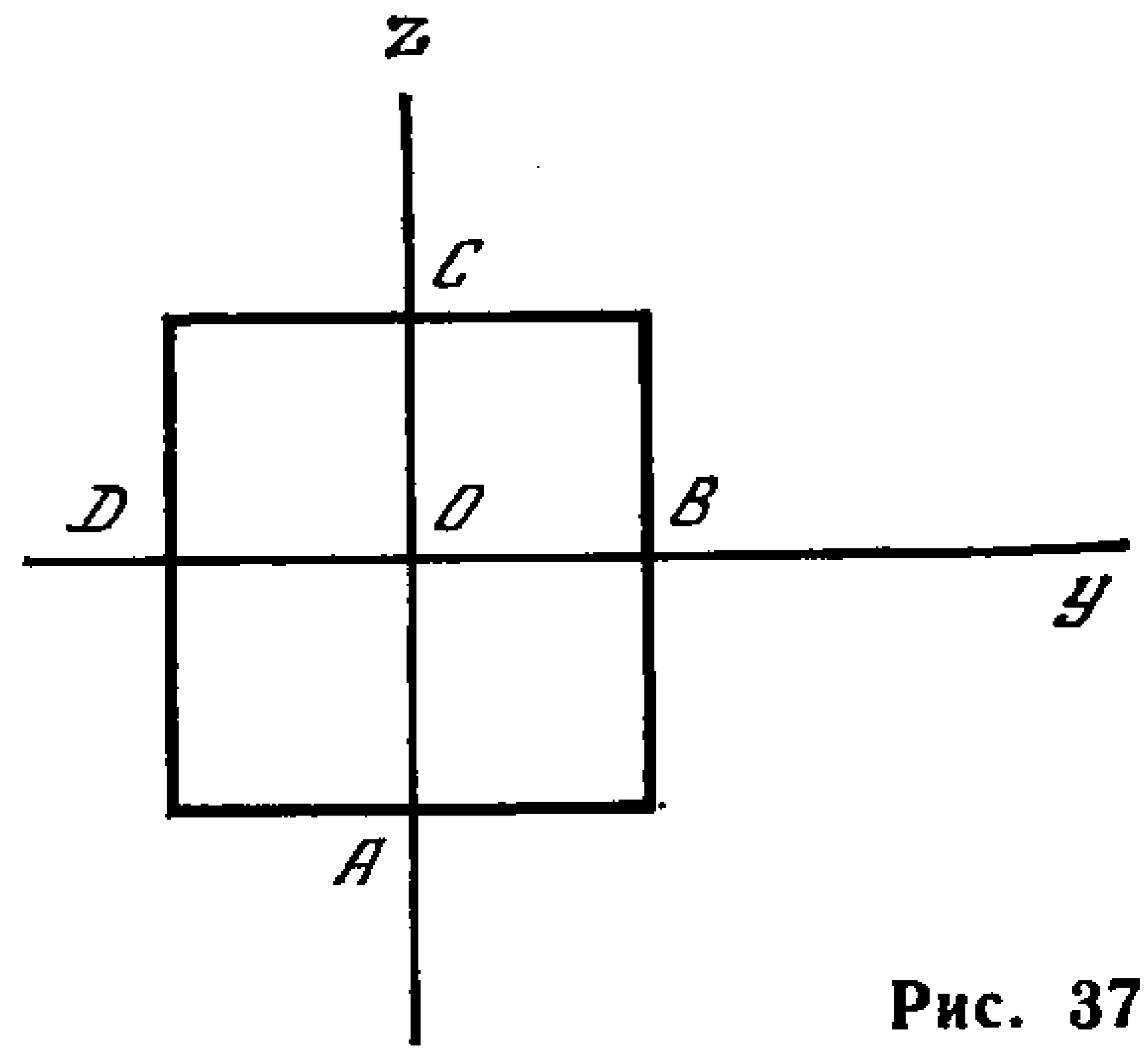


Рис. 37

591. Найдем теперь значение p для элементарного прямоугольника $ABCD$, сторонами которого являются dy и dz, а положительным направлением — направление от оси y к оси z [рис. 37].

Пусть координатами O центра тяжести элемента будут x_0, y_0, z_0, а G_0, H_0 — значения G и H в этой точке.

Координаты A — средней точки первой стороны прямоугольника — равны y_0 и $z_0 - dz/2$. Соответствующее значение G есть

$$G = G_0 - \frac{1}{2}\frac{dG}{dz}dz + \ldots, \tag{8}$$

и часть величины p, возникающая со стороны A, приблизительно равна

$$G_0\,dy - \frac{1}{2}\frac{dG}{dz}dy\,dz. \tag{9}$$

Аналогично для B: $H_0\,dz + \frac{1}{2}\frac{dH}{dy}dy\,dz$, для C: $-G_0\,dy - \frac{1}{2}\frac{dG}{dz}dy\,dz$ для D: $-H_0\,dz + \frac{1}{2}\frac{dH}{dy}dy\,dz$.

Складывая эти четыре величины, находим значение p для четырехугольника, а именно

$$p = \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)dy\,dz. \tag{10}$$

Если теперь ввести три новых величины a, b, c, таких, что

$$\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}, \end{aligned} \tag{A}$$

и рассматривать их в качестве составляющих нового вектора $\mathfrak{B}$, тогда, согласно теореме IV п. 24, мы можем выразить линейный интеграл от $\mathfrak{A}$ вдоль любого замкнутого контура в виде поверхностного интеграла от $\mathfrak{B}$, взятого по поверхности, ограниченной контуром, таким образом:

$$p = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds = \iint (la + mb + nc)\,dS, \tag{11}$$

или

$$p = \int T.\mathfrak{A} \cos \varepsilon ds = \iint T.\mathfrak{B} \cos \eta dS, \qquad (12)$$

где ε есть угол между $\mathfrak{A}$ и ds, а η — угол между $\mathfrak{B}$ и нормалью к dS, направляющие косинусы которой равны l, m, n; $T.\mathfrak{A}$, $T.\mathfrak{B}$ обозначают численные значения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

При сравнении этого результата с уравнением (3) становится очевидным, что величина I в том уравнении равна $\mathfrak{B} \cos \eta$, т. е. проекции $\mathfrak{B}$ на нормаль к dS.

592. Мы уже видели (пп. 490, 541), что в соответствии с теорией Фарадея явления электромагнитной силы и индукции в контуре зависят от изменения числа линий магнитной индукции, проходящих сквозь контур. Теперь же число этих линий выражено математически в виде поверхностного интеграла от магнитной индукции, взятого по любой поверхности, ограниченной данным контуром. Следовательно, мы должны считать, что вектор $\mathfrak{B}$ и его составляющие a, b, c представляют собой то, с чем мы уже знакомы как с магнитной индукцией и ее составляющими.

В настоящем исследовании мы предполагаем вывести свойства этого вектора из принципов динамики, установленных в последней главе, как можно меньше обращаясь при этом к эксперименту.

Отождествляя этот вектор, возникший как результат математических исследований, с магнитной индукцией, свойства которой мы узнали из опытов с магнитами, мы не отступаем от указанного метода, ибо не вводим в теорию новых фактов, а только даем наименование некоторой математической величине. О правомерности такого действия следует судить по согласованности соотношений между математическими и физическими величинами, носящими одинаковые названия.

Вектор $\mathfrak{B}$, поскольку он фигурирует в поверхностном интеграле, принадлежит, очевидно, к категории потоков, описанных в п. 12, а вектор $\mathfrak{A}$ принадлежит, наоборот, к категории сил, так как он появляется в линейном интеграле.

593. Теперь мы должны восстановить в памяти те соглашения о положительных и отрицательных величинах и направлениях, некоторые из которых были установлены в п. 23. Мы принимаем правую систему осей, а именно такую, в которой, если винт с правой нарезкой смотрит вдоль оси x, а гайка поворачивается на винте в положительном направлении, т. е. от направления y к z, она будет перемещаться вдоль винта в положительном направлении x.

Мы считаем также положительными стекловидное электричество и австральный магнетизм. Положительным направлением электрического тока или линии электрической индукции является такое направление, в котором двигается или стремится двигаться положительное электричество, а положительное направление линии магнитной индукции есть направление, в котором указывает стрелка компаса тем своим концом, который поворачивается к северу, см. рис. 24 п. 498 и рис. 25 п. 501.

Мы рекомендуем читателю, изучающему предмет, самому выбрать метод, который покажется ему наиболее эффективным, и тем самым надежно закрепить этот выбор в памяти, ибо куда труднее бывает вспомнить то правило, которое определяет, в каком из двух ранее безразличных вариантов должно быть сделано утверждение, чем правило, выбирающее один вариант из многих.

594. Теперь мы должны вывести из принципов динамики выражения для электромагнитной силы, действующей на проводник, переносящий электрический ток через магнитное поле, а также для электродвижущей силы, действующей на электричество внутри тела, которое движется в магнитном поле. Математический метод, которого мы будем придерживаться, можно сравнить с экспериментальным методом, которым пользовался Фарадей [1] при исследовании поля с помощью провода, а также с методом, основанным на экспериментах, с которым мы уже имели

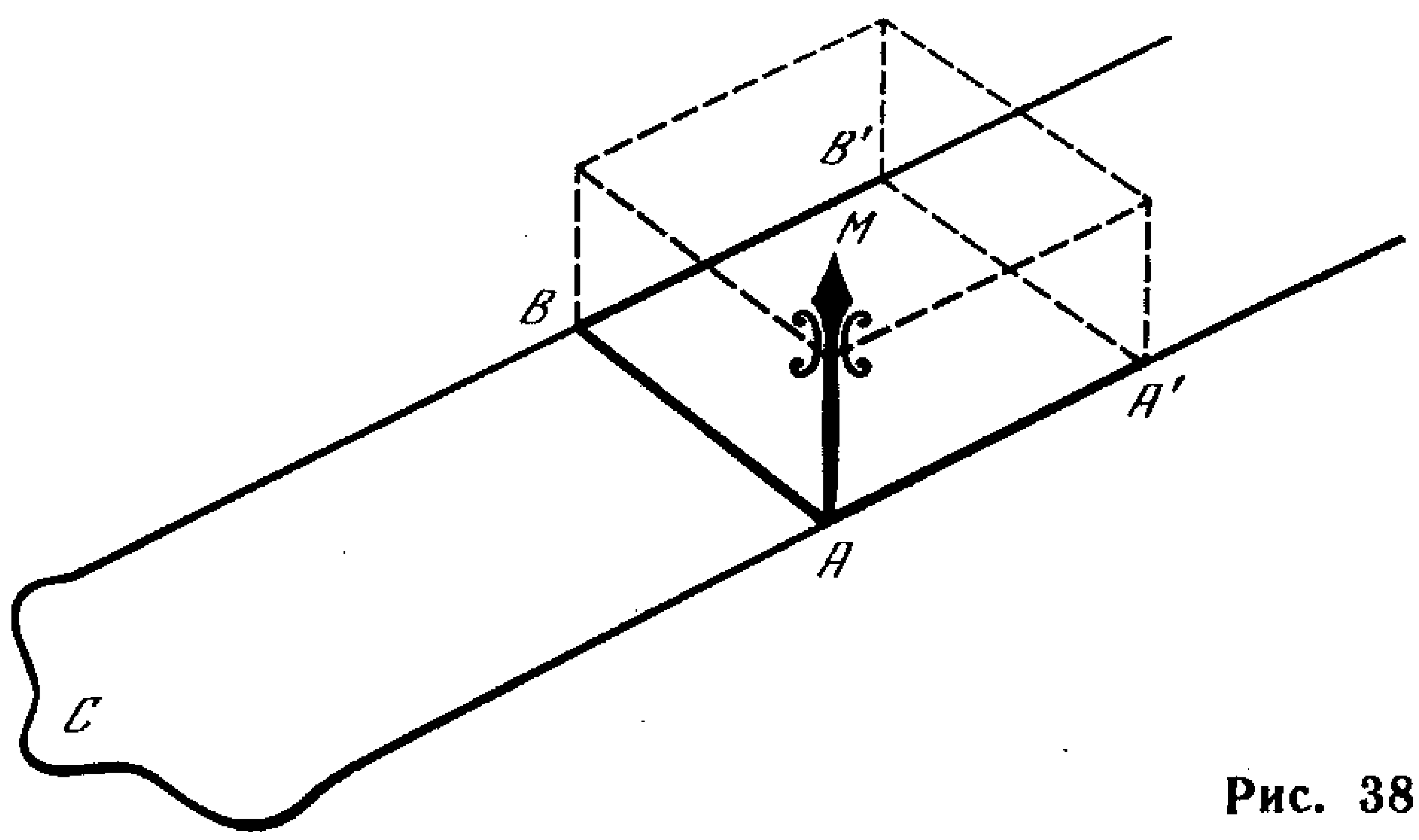


Рис. 38

дело в п. 490. Сейчас же мы должны определить влияние, оказываемое заданными изменениями формы вторичного контура, на величину электрокинетического импульса этого контура p.

Пусть AA', BB' будут два параллельных проводника, соединенных проводящей дугой C, которая может иметь любую форму, и прямолинейным проводником AB, который может скользить параллельно самому себе вдоль проводящих рельс AA' и BB' [рис. 38].

Пусть контур, образованный таким образом, считается вторичным, а направление ABC предполагается положительным направлением обхода по нему.

Пусть скользящая часть перемещается параллельно самой себе из положения AB в положение $A'B'$. Мы должны определить изменение электрокинетического импульса контура p, обусловленное этим смещением скользящего участка.

Вторичный контур меняется от ABC до $A'B'C$, отсюда, согласно п. 587,

$$p(A'B'C)-p(ABC)=p(AA'B'B). \tag{13}$$

Следовательно, нам надо определить значение p для параллелограмма $AA'B'B$. Если он настолько мал, что можно пренебречь изменением направления и величины магнитной индукции в разных точках его плоскости, то величина p в соответствии с п. 591 равна $\mathfrak{B}\cos\eta\cdot AA'B'B$, где $\mathfrak{B}$ есть магнитная индукция, а η — угол, который она образует с положительным направлением нормали к параллелограмму $AA'B'B$.

Мы можем представить этот результат геометрически в виде объема параллелепипеда, основанием которого служит параллелограмм $AA'B'B$, а одним из ребер является линия AM, по величине и направлению представляющая маг-

[1] *Exp. Res.*, 3082, 3087, 3113.

нитную индукцию $\mathfrak{B}$. Объем параллелепипеда следует брать положительным, если параллелограмм расположен в плоскости бумаги, а линия AM проведена вверх от нее, или, выражаясь более общо, если направления контура AB, магнитной индукции AM и смещения AA', взятые в этом циклическом порядке, образуют правую систему.

Объем этого параллелепипеда представляет приращение величины p для вторичного контура, обусловленное смещением скользящего участка от положения AB до $A'B'$.

Электродвижущая сила, действующая на скользящий участок

595. Электродвижущая сила, возникающая во вторичном контуре благодаря движению скользящего участка, согласно п. 579, равна

$$E = -dp/dt. \qquad (14)$$

Если предположить, что AA' есть смещение в единицу времени, то AA' будет представлять скорость, а параллелепипед представит величину dp/dt, или в соответствии с уравнением (14) электродвижущую силу в отрицательном направлении BA.

Следовательно, электродвижущая сила, действующая на скользящий участок AB и обусловленная его перемещением через магнитное поле, представлена объемом параллелепипеда, ребра которого и по направлению, и по величине представляют скорость, магнитную индукцию и сам этот скользящий участок. Она положительна, когда эти три направления берутся в правой циклической последовательности.

Электромагнитная сила, действующая на скользящий участок

596. Обозначим через i_2 ток во вторичном контуре, текущий в положительном направлении ABC, тогда работа, совершаемая электромагнитной силой над участком AB за время его скольжения из положения AB в положение $A'B'$, равна $(M'-M)i_1i_2$, где M и M' — значения M_{12} в начальном и конечном положениях AB. Но величина $(M'-M)i_1$ равна величине $p'-p$, которая представляется объемом параллелепипеда, построенного на AB, AM и AA'. Следовательно, если мы, чтобы представить величину $AB \cdot i_2$, проведем линию, параллельную AB, то параллелепипед, образованный этой линией вместе с магнитной индукцией AM и смещением AA', будет представлять работу, совершенную за время перемещения.

При заданной величине перемещения работа будет наибольшей, когда это перемещение происходит перпендикулярно параллелограмму со сторонами AB и AM. Поэтому величина электромагнитной силы представляется площадью параллелограмма со сторонами AB и AM, умноженной на i_2, а направление — нормалью к этому параллелограмму, проведенной так, чтобы AB, AM и нормаль составляли правую циклическую последовательность.

Четыре определения линии магнитной индукции

597. Если направление AA', в котором происходит движение скользящего участка, совпадает с направлением магнитной индукции AM, то перемещение скользящего участка не приведет в действие электродвижущую силу, каково бы ни было направление AB, а если AB несет электрический ток, то не будет никакой тенденции к скольжению вдоль AA'.

Далее, если скользящий участок AB совпадает по направлению с направлением магнитной индукции AM, то никакое движение AB не приведет в действие электродвижущую силу, а ток, протекающий через AB, не вызовет действия механической силы на AB.

Следовательно, мы можем определить линию магнитной индукции четырьмя различными способами. Это такая линия, что:

(1). Если проводник двигать вдоль линии магнитной индукции параллельно самому себе, то в нем не возникнет электродвижущей силы.

(2). Если проводник, несущий ток, имеет возможность свободно перемещаться вдоль линии магнитной индукции, он не будет проявлять никакой тенденции к такому перемещению.

(3). Если линейный проводник совпадает по направлению с линией магнитной индукции и будет двигаться параллельно самому себе в любом направлении, то на него не будет действовать электродвижущая сила в направлении его длины.

(4). Если линейный проводник, несущий электрический ток, совпадает по направлению с линией магнитной индукции, то на него не будет действовать механическая сила.

Общие уравнения для электродвижущей напряженности

598. Мы видели, что величина электродвижущей силы E, обусловленной действием индукции на вторичный контур, равна $-dp/dt$, где

$$p=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds. \qquad (1)$$

Чтобы определить значение E, продифференцируем по t выражение под знаком интеграла, помня, что если вторичный контур находится в движении, то x, y и z являются функциями времени. Мы получаем

$$\begin{aligned}E=&-\int\left(\frac{dF}{dt}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dt}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dt}\frac{dz}{ds}\right)ds-\int\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dx}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dx}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds\\&-\int\left(\frac{dF}{dy}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dy}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dy}{dt}ds-\int\left(\frac{dF}{dz}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dz}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz}{dt}ds\\&-\int\left(F\frac{d^2x}{ds\,dt}+G\frac{d^2y}{ds\,dt}+H\frac{d^2z}{ds\,dt}\right)ds. \qquad (2)\end{aligned}$$

Возьмем теперь второй член этого интеграла и подставим в него величины dG/dx и dH/dx из уравнений (А) п. 591. Тогда этот член примет вид

$$-\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds,$$

и мы можем записать его так:

$$-\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds.$$

Поступая так же с третьим и четвертым членами, собирая члены, содержащие dx/ds, dy/ds и dz/ds, и помня, что

$$\int \left(\frac{dF}{ds} \frac{dx}{dt} + F \frac{d^2x}{ds\,dt} \right) ds = F \frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

и, следовательно, интеграл от него, взятый вдоль замкнутой кривой, исчезает, получим

$$E = \int \left(c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} \right) \frac{dx}{ds} ds + \int \left(a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} \right) \frac{dy}{ds} ds + \\ + \int \left(b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} \right) \frac{dz}{ds} ds. \tag{4}$$

Это выражение мы можем записать в виде

$$E = \int \left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds} \right) ds, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} P &= c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \\ Q &= a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \\ R &= b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}. \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{(Уравнения}\\ \text{Электродвижущей}\\ \text{Напряженности)}\end{array} \tag{B}$$

Члены, включающие в себя новую величину Ψ, введены для того, чтобы придать общность выражениям для P, Q, R. Эти члены исчезают, когда интеграл берется по замкнутому контуру. В рамках интересующей нас задачи отыскания электродвижущей силы вдоль контура величина Ψ является, таким образом, неопределенной. Однако мы увидим, что, когда мы знаем все относящиеся к задаче обстоятельства, мы можем приписать величине Ψ вполне точное значение, представляющее, согласно известному определению, *электрический потенциал* в точке (x, y, z).

Величина же, стоящая под знаком интеграла в уравнении (5), представляет собой электродвижущую напряженность, действующую на элемент контура ds.

Обозначим через $T.\mathfrak{E}$ численное значение результирующей P, Q, R, а через ε — угол между направлением этой результирующей и направлением элемента ds, тогда вместо уравнения (5) мы можем записать

$$E = \int T.\mathfrak{E} \cos \varepsilon ds. \tag{6}$$

Вектор $\mathfrak{E}$ есть электродвижущая напряженность движущегося элемента ds. Ее направление и величина зависят от положения и движения ds, а также от изменения магнитного поля и не зависят от направления ds. Поэтому мы теперь можем не учитывать то обстоятельство, что элемент ds является частью контура, и считать его просто участком движущегося тела, находящимся под действием электродвижущей силы. Электродвижущая напряженность уже была определена нами в п. 68. Ее называют также результирующей электрической силой, поскольку это та сила, действие которой испытывала бы на себе единица положительного электричества, помещенная в данную точку. Мы получили теперь наиболее общее выражение этой величины для случая тела, движущегося в магнитном поле, обусловленном изменяющейся электрической системой.

Если это тело представляет собой проводник, то электродвижущая сила создает ток, если же это диэлектрик — она создаст только электрическое смещение.

Электродвижущую напряженность или силу, действующую на частицу, следует тщательно отличать от электродвижущей силы вдоль участка кривой. Последняя является линейным интегралом от первой, см. п. 69.

599. Электродвижущая напряженность, компоненты которой определяются уравнениями (B), зависит от трех обстоятельств. Первое из них — это движение частицы через магнитное поле. Часть силы, зависящая от этого движения, выражается первыми двумя членами правых частей каждого из уравнений. Она зависит от скорости частицы, поперечной по отношению к линиям магнитной индукции. Если $\mathfrak{G}$ есть вектор, представляющий скорость, а $\mathfrak{B}$ — вектор, представляющий магнитную индукцию, то, если $\mathfrak{E}_1$ — часть электродвижущей напряженности, которая зависит от движения, получим

$$\mathfrak{E}_1 = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B}, \tag{7}$$

т. е. электродвижущая напряженность есть векторная часть произведения магнитной индукции на скорость, иначе говоря, величина электрической силы представляется площадью параллелограмма, стороны которого представлены скоростью и магнитной индукцией, а ее направление есть направление нормали к этому параллелограмму, проведенной так, чтобы скорость, магнитная индукция и электродвижущая напряженность составляли правую циклическую последовательность.

Третий член в каждом из уравнений (B) зависит от изменения магнитного поля во времени. Оно может быть обусловлено либо изменением во времени электрического тока в первичном контуре, либо движением первичного контура. Пусть $\mathfrak{E}_2$ будет той частью электродвижущей напряженности, которая зависит от этих членов. Ее составляющие равны $-dF/dt$, $-dG/dt$, $-dH/dt$.

Это составляющие вектора $-d\mathfrak{A}/dt$, или $-\dot{\mathfrak{A}}$. Следовательно,

$$\mathfrak{E}_2 = -\dot{\mathfrak{A}}. \tag{8}$$

Последний член в каждом из уравнений (B) обусловлен изменением функции Ψ в различных частях поля. Мы можем записать третью часть электродвижущей напряженности, обусловленную этой причиной, в виде

$$\mathfrak{E}_3 = -\nabla\Psi. \tag{9}$$

Электродвижущая напряженность в том виде, как она определена уравнениями (B), может быть, следовательно, записана в кватернионной форме:

$$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi. \tag{10}$$

О модификации уравнений для электродвижущей напряженности в случае, когда оси, на которые она проектируется, движутся в пространстве

600. Пусть x', y', z' — координаты точки, относящиеся к системе прямоугольных осей, движущихся в пространстве, а x, y, z — координаты той же точки относительно неподвижных осей.

Пусть составляющие скорости начала движущейся системы координат равны u, v, w, а составляющие ее угловой скорости по отношению к неподвижной системе осей равны ω_1, ω_2, ω_3. Выберем неподвижные оси так, чтобы они в данный момент времени совпали с движущимися осями, тогда единственными величинами, которые будут отличны друг от друга для обеих систем, окажутся величины, продифференцированные по времени. Если через $\delta x/\delta t$ обозначить составляющую скорости точки, жестко связанной с движущимися осями и перемещающейся вместе с ними, а через dx/dt и dx'/dt — составляющие скорости любой движущейся точки, имеющей в какое-то мгновение одинаковое положение относительно неподвижных и движущихся осей соответственно, тогда

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dx'}{dt}, \tag{1}$$

для других составляющих уравнения аналогичны.

Согласно теории движения тел неизменной формы

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta x}{\delta t}&=u+\omega_2 z-\omega_3 y,\\ \frac{\delta y}{\delta t}&=v+\omega_3 x-\omega_1 z,\\ \frac{\delta z}{\delta t}&=w+\omega_1 y-\omega_2 z.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Величина F является составляющей некоторой направленной величины, параллельной x, поэтому, обозначив через dF'/dt значение dF/dt, отнесенное к движущимся осям, мы можем показать, что

$$\frac{dF'}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dF}{dy}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{dF}{dz}\frac{\delta z}{\delta t}+G\omega_3-H\omega_2+\frac{dF}{dt}. \tag{3}$$

Подставляя вместо dF/dy и dF/dz их значения, найденные из уравнений для магнитной индукции (A), и помня, что, согласно (2),

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}=0,\qquad \frac{d}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}=\omega_3,\qquad \frac{d}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}=-\omega_2, \tag{4}$$

находим

$$\frac{dF'}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+F\frac{d}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dG}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}+G\frac{d}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{dH}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}+H\frac{d}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}-c\frac{\delta y}{\delta t}+b\frac{\delta z}{\delta t}+\frac{dF}{dt}. \tag{5}$$

Если теперь положить

$$\Psi'=F\frac{\delta x}{\delta t}+G\frac{\delta y}{\delta t}+H\frac{\delta z}{\delta t}, \tag{6}$$

то

$$\frac{dF'}{dt} = -\frac{d\Psi'}{dx} - c\frac{\delta y}{\delta t} + b\frac{\delta z}{\delta t} + \frac{dF}{dt}. \tag{7}$$

Уравнение для P — составляющей электродвижущей напряженности, параллельной оси x, отнесенное к неподвижным осям, согласно (B), будет

$$P = c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}. \tag{8}$$

Заменяя эти значения на значения величин, отнесенных к движущимся осям, для величины P, отнесенной к этим движущимся осям, имеем

$$P' = c\frac{dy'}{dt} - b\frac{dz'}{dt} - \frac{dF'}{dt} - \frac{d(\Psi + \Psi')}{dx}. \tag{9}$$

601. Отсюда следует, что электродвижущая напряженность выражается однотипной формулой для движений проводников, отнесенных и к неподвижным осям, и к движущимся в пространстве осям. Единственное различие между формулами состоит в том, что в случае движущихся осей электрический потенциал Ψ должен быть заменен на $\Psi+\Psi'$.

Во всех случаях, где в проводящих контурах возникает ток, электродвижущая сила является линейным интегралом, взятым вдоль замкнутого контура:

$$E = \int \left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds}\right) ds. \tag{10}$$

Величина Ψ исчезает при интегрировании, и поэтому введение Ψ' не влияет на значение E. Следовательно, во всех явлениях, относящихся к замкнутым контурам и токам в них, безразлично, будут ли оси, к которым мы относим систему, в покое или в движении, см. п. 668.

Об электромагнитной силе, действующей на проводник, переносящий электрический ток через магнитное поле

602. В общем исследовании (п. 583) мы видели, что если x_1 есть одна из переменных, определяющих положение и форму вторичного контура, а X_1 — сила, действующая на вторичный контур и стремящаяся увеличить значение этой переменной, то

$$X_1 = \frac{dM}{dx_1} i_1 i_2. \tag{1}$$

Так как ток i_1 не зависит от x_1, мы можем написать

$$Mi_1 = p = \int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right) ds, \tag{2}$$

и для величины X_1 имеем

$$X_1 = i_2 \frac{d}{dx_1} \int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right) ds. \tag{3}$$

Предположим теперь, что смещение состоит в движении каждой точки контура на расстояние δx в направлении x, причем δx является любой непрерывной функцией от s, так что различные части контура движутся независимо одна от другой и в то же время контур остается непрерывным и замкнутым.

Пусть также X будет полной силой в направлении x, действующей на часть контура от $s=0$ до $s=s$. Тогда часть, соответствующая элементу ds, будет равна $(dX/ds)ds$. Для работы, совершаемой этой силой за время перемещения, будем иметь следующее выражение:

$$\int \frac{dX}{ds}\,\delta x\,ds = i_2 \int \frac{d}{d\delta x}\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)\delta x\,ds, \tag{4}$$

где мы должны распространить интегрирование на замкнутую кривую, помня, что δx является произвольной функцией s. Поэтому мы можем произвести дифференцирование по δx точно так же, как мы дифференцировали по t в п. 598, помня, что

$$\frac{dx}{d\delta x}=1, \qquad \frac{dy}{d\delta x}=0, \qquad \frac{dz}{d\delta x}=0. \tag{5}$$

Таким образом, находим

$$\int \frac{dX}{ds}\,\delta x\,ds = i_2\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}\right)\delta x\,ds + i_2\int\frac{d}{ds}(F\delta x)\,ds. \tag{6}$$

При интегрировании по замкнутой кривой последний член исчезает и так как уравнение должно выполняться для функции δx любого вида мы должны иметь

$$\frac{dX}{ds}=i_2\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}\right). \tag{7}$$

Это уравнение дает силу, параллельную x и действующую на произвольный единичный элемент контура. Силы, параллельные y и z, соответственно равны

$$\frac{dY}{ds}=i_2\left(a\frac{dz}{ds}-c\frac{dx}{ds}\right), \tag{8}$$

$$\frac{dZ}{ds}=i_2\left(b\frac{dx}{ds}-a\frac{dy}{ds}\right). \tag{9}$$

Результирующая сила, действующая на элемент, дается (и по направлению, и по величине) кватернионным выражением $i_2V.d\rho\mathfrak{B}$, где i_2 есть численная мера тока, а $d\rho$ и $\mathfrak{B}$ — векторы, представляющие элемент контура и магнитную индукцию; умножение должно пониматься в гамильтоновом смысле.

603. Если проводник следует рассматривать не как линию, а как некоторое тело, то силу на элемент длины и ток через полное сечение необходимо выражать через символы, обозначающие силу на единицу объема и токи через единицу площади.

Пусть X, Y, Z представляют теперь составляющие силы, отнесенной к единице объема, а u, v, w — составляющие тока, отнесенного к единице площади. Тогда, если S представляет сечение проводника, которое мы будем предполагать малым, то объем элемента ds будет равен Sds и $u=\frac{i_2}{S}\frac{dx}{ds}$. Следовательно, уравнение (7) примет вид

$$\frac{XS\,ds}{ds}=S\,(vc-wb), \tag{10}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{или} & X=vc-wb. \\ \text{Аналогично} & Y=wa-uc \\ \text{и} & Z=ub-va. \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{(Уравнения}\\ \text{Электромагнитной}\\ \text{Силы)}\end{array} \tag{C}$$

Здесь X, Y, Z — составляющие электромагнитной силы, действующей на элемент проводника, деленные на объем этого элемента; u, v, w — отнесенные к единице площади составляющие электрического тока, протекающего через элемент, и a, b, c — составляющие магнитной индукции на элементе, которые также отнесены к единице площади.

Если вектор $\mathfrak{F}$ представляет по величине и направлению силу на единицу объема проводника, а $\mathfrak{C}$ представляет собой электрический ток, текущий через него, то

$$\mathfrak{F}=V.\mathfrak{C}\mathfrak{B}. \tag{11}$$

ГЛАВА IX

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

604. Наше теоретическое обсуждение электродинамики мы начнем с предположения о том, что система контуров, несущих электрические токи, является системой динамической, где токи можно рассматривать как скорости, а координаты, соответствующие этим скоростям, не появляются в уравнениях явно. Из этого следует, что кинетическая энергия системы, поскольку она зависит от токов, является однородной квадратичной функцией токов, коэффициенты которой зависят только от формы и относительного положения контуров. Предполагая, что эти коэффициенты известны из эксперимента или еще откуда-либо, мы с помощью чисто динамических рассуждений вывели законы индукции токов и электромагнитного притяжения. При этом исследовании мы ввели понятия электрокинетической энергии системы токов, электромагнитного импульса тока и взаимного потенциала двух контуров.

Затем мы продолжили исследование поля с помощью вторичных контуров различной конфигурации, и это привело нас в результате к понятию вектора $\mathfrak{A}$, имеющего в любой данной точке поля определенную величину и определенное направление. Мы назвали этот вектор электромагнитным импульсом в данной точке: его можно рассматривать как интеграл по времени от электродвижущей напряженности, создаваемой в этой точке при внезапном удалении всех токов из поля. Он тождествен величине, которую мы уже изучали в п. 405 в качестве вектор-потенциала магнитной индукции. Ее составляющими, параллельными осям x, y, z, являются F, G и H. Электромагнитный импульс контура равен линейному интегралу от $\mathfrak{A}$ по контуру.