

## ГЛАВА V

## ЧАСТНЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

*Полая сферическая оболочка*

431. Первый пример полного решения задачи о магнитной индукции был дан Пуассоном для случая полой сферической оболочки, находящейся под воздействием произвольных магнитных сил.

Для простоты будем считать, что источник магнитной силы расположен во внешнем по отношению к оболочке пространстве.

Если обозначить через  $V$  потенциал, создаваемый внешней магнитной системой, то его можно будет разложить в ряд по пространственным гармоникам следующего вида:

$$V = C_0 S_0 + C_1 S_1 r + \text{и т. д.} + C_i S_i r^i, \quad (1)$$

где  $r$  — расстояние от центра оболочки,  $S_i$  — поверхностная гармоника  $i$ -го порядка,  $C_i$  — коэффициент.

Этот ряд будет сходящимся при условии, что  $r$  меньше расстояния до ближайшего из магнитов, создающих данный потенциал. Следовательно, для полой сферической оболочки он сходится и на самой оболочке, и в области внутри нее.

Обозначим через  $a_2$  внешний радиус оболочки, через  $a_1$  — внутренний радиус и через  $\Omega$  — потенциал, создаваемый индуцированной в ней намагниченностью. Во внутреннем пространстве, внутри вещества оболочки, и во внешнем пространстве вид функции  $\Omega$ , вообще говоря, различен. Разложив эти функции в ряды по гармоникам и сосредоточив свое внимание на членах, содержащих поверхностную гармонику  $S_i$ , мы увидим, что потенциал  $\Omega_1$ , относящийся к полости внутри оболочки, следует разлагать по положительным гармоникам вида  $A_1 S_i r^i$ , поскольку внутри сферы радиуса  $a_1$  он не должен обращаться в бесконечность.

В веществе оболочки, где значения  $r$  лежат между  $a_1$  и  $a_2$ , ряд может содержать как положительные, так и отрицательные степени  $r$  вида  $A_2 S_i r^i + B_2 S_i r^{-(i+1)}$ .

Вне оболочки, где  $r$  больше  $a_2$ , разложение должно сходиться при сколь угодно больших  $r$ , и поэтому мы должны брать только отрицательные степени  $r$  вида  $B_3 S_i r^{-(i+1)}$ .

Функция  $\Omega$  должна удовлетворять следующим условиям: (1°) быть конечной, (2°) быть непрерывной, (3°) обращаться в нуль на бесконечном расстоянии и (4°) везде удовлетворять уравнению Лапласа.

Из условия (1°) следует

$$B_1 = 0.$$

Из условия (2°) при  $r = a_1$

$$(A_1 - A_2) a_1^{2i+1} - B_2 = 0 \quad (2)$$

и при  $r = a_2$

$$(A_2 - A_3) a_2^{2i+1} + B_2 - B_3 = 0. \quad (3)$$

Из условия (3°) следует  $A_2 = 0$ , а условие (4°) выполнено всюду, так как все эти функции являются гармоническими.

Помимо этих условий, существуют и другие, которым в силу уравнения (10) п. 427 необходимо удовлетворить на внешней и внутренней сторонах оболочки. На внутренней поверхности при  $r=a_1$

$$(1 + 4\pi\kappa) \frac{d\Omega_2}{dr} - \frac{d\Omega_1}{dr} + 4\pi\kappa \frac{dV}{dr} = 0, \quad (4)$$

на внешней поверхности при  $r=a_2$

$$-(1 + 4\pi\kappa) \frac{d\Omega_2}{dr} + \frac{d\Omega_3}{dr} - 4\pi\kappa \frac{dV}{dr} = 0. \quad (5)$$

Из этих условий получаем уравнения

$$(1 + 4\pi\kappa) \{iA_2 a_1^{2i+1} - (i+1)B_2\} - iA_1 a_1^{2i+1} + 4\pi\kappa i C_i a_1^{2i+1} = 0, \quad (6)$$

$$(1 + 4\pi\kappa) \{iA_2 a_2^{2i+1} - (i+1)B_2\} + (i+1)B_3 + 4\pi\kappa i C_i a_2^{2i+1} = 0; \quad (7)$$

из которых, обозначив

$$N_i = \frac{1}{(1 + 4\pi\kappa) (2i+1)^2 + (4\pi\kappa)^2 i (i+1) \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right)}, \quad (8)$$

находим

$$A_1 = - (4\pi\kappa)^2 i (i+1) \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right) N_i C_i, \quad (9)$$

$$A_2 = - 4\pi\kappa i [2i+1 + 4\pi\kappa (i+1)] \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right) N_i C_i, \quad (10)$$

$$B_2 = 4\pi\kappa i (2i+1) a_1^{2i+1} N_i C_i, \quad (11)$$

$$B_3 = - 4\pi\kappa i \{2i+1 + 4\pi\kappa (i+1)\} (a_2^{2i+1} - a_1^{2i+1}) N_i C_i. \quad (12)$$

Эти величины при подстановке в ряды по гармоникам дают ту часть потенциала, которая обусловлена намагниченностью оболочки. Величина  $N_i$  всегда положительна, так как множитель  $(1+4\pi\kappa)$  никогда не может быть отрицательным. Следовательно,  $A_1$  всегда принимает отрицательные значения, или, другими словами, действие намагниченной оболочки в точке внутри нее всегда противоположно действию внешней магнитной силы, независимо от того, является ли оболочка парамагнитной или диамагнитной. Истинное значение результирующего потенциала внутри оболочки равно  $(C_i + A_1)S_i r^i$ , или

$$(1 + 4\pi\kappa)(2i+1)^2 N_i C_i S_i r^i. \quad (13)$$

432. Если  $\kappa$  является большим числом, как в случае мягкого железа, то для не слишком тонкой оболочки магнитная сила внутри нее составляет малую долю внешней силы.

Именно таким способом сэра У. Томсон, поместив свой морской гальванометр в трубу из мягкого железа, сделал его независимым от внешней магнитной силы.

433. Наибольшую практическую ценность представляет случай  $i=1$ , для

которого имеем

$$N_1 = \frac{1}{9(1+4\pi k) + 2(4\pi k)^2 \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)}, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -2(4\pi k)^2 \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right) N_1 C_1, \\ A_2 &= -4\pi k \left[3 + 8\pi k \left(-1 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)\right] N_1 C_1, \\ B_2 &= 12\pi k a_1^3 N_1 C_1, \\ B_3 &= -4\pi k (3 + 8\pi k) (a_2^3 - a_1^3) N_1 C_1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В этом случае магнитная сила внутри полой оболочки является однородной, а ее величина равна

$$C_1 + A_1 = \frac{9(1+4\pi k)}{9(1+4\pi k) + 2(4\pi k)^2 \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)} C_1. \quad (16)$$

Если мы хотим определить  $k$  путем сравнения магнитной силы, измеренной внутри полой оболочки, с внешней магнитной силой, то наилучшее значение толщины оболочки можно найти из уравнения

$$1 - \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{9}{2} \frac{1+4\pi k}{2(4\pi k)^2}. \quad (17)$$

Магнитная сила внутри оболочки при этом составляет половину значения магнитной силы вне оболочки.

Поскольку для железа значения  $k$  лежат между 20 и 30, то толщина оболочки должна составлять около двух сотых долей ее радиуса. Этот метод применим только при больших значениях  $k$ . Если же они очень малы, то и величина  $A_1$  становится неощутимо малой, так как она пропорциональна квадрату  $k$ .

Для случая почти сплошной сферы с очень маленькой сферической полостью

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{2(4\pi k)^2}{(3+4\pi k)(3+8\pi k)} C_1, \\ A_2 &= -\frac{4\pi k}{3+4\pi k} C_1, \\ B_3 &= -\frac{4\pi k}{3+4\pi k} C_1 a_2^3. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Это исследование можно было полностью провести, непосредственно исходя из решения задачи о протекании тока через сферическую оболочку, рассмотренную в п. 312. Для этого в приведенных там выражениях следует положить  $k_1 = (1+4\pi k)k_2$  и учесть, что величины  $A_1$  и  $A_2$  в задаче о протекании тока эквивалентны величинам  $C_1 + A_1$  и  $C_1 + A_2$  в задаче о магнитной индукции.

**434.** Соответствующее двумерное решение представлено графически на рис. XV в конце этого тома. Там показано, как линии индукции, почти горизонтальные вдали от центра, искажаются поперечно намагниченным цилиндрическим стержнем, помещенным в положение устойчивого равновесия. Линии, пересекающие

это семейство под прямыми углами, изображают эквипотенциальные поверхности, одна из которых является цилиндром. Большой пунктирный круг соответствует сечению цилиндра из парамагнитного вещества, а пунктирные горизонтальные линии внутри него изображают линии индукции в веществе, непрерывно переходящие во внешние линии индукции. Вертикальные пунктирные линии представляют собой внутренние эквипотенциальные поверхности, неразрывно связанные с внешней системой эквипотенциалей.

Следует отметить, что линии индукции сгущаются внутри вещества, а эквипотенциальные поверхности раздвигаются парамагнитным цилиндром, который, выражаясь языком Фарадея, проводит линии индукции лучше, чем окружающее вещество.

Если считать систему вертикальных линий линиями индукции, а горизонтальную систему — эквипотенциальными поверхностями, то получится, во-первых, случай поперечно намагниченного цилиндра, помещенного в неустойчивое равновесие среди раздвинутых им силовых линий; во-вторых, если считать, что большой пунктирный круг соответствует сечению диамагнитного цилиндра, пунктирные линии внутри него вместе с внешними линиями будут представлять действие диамагнитного вещества, состоящее в разрежении линий индукции и сближении эквипотенциальных поверхностей, ибо такое вещество является худшим проводником магнитной индукции, чем окружающая среда.

*Случай сферы с коэффициентами намагниченности,  
различными в разных направлениях*

435. Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — составляющие магнитной силы, а  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — составляющие намагниченности в произвольной точке, тогда наиболее общее линейное соотношение между этими величинами дается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} A &= r_1\alpha + p_3\beta + q_2\gamma, \\ B &= q_3\alpha + r_2\beta + p_1\gamma, \\ C &= p_2\alpha + q_1\beta + r_3\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $r$ ,  $p$ ,  $q$  — девять коэффициентов намагниченности.

Предположим теперь, что условия намагниченности внутри сферы радиуса  $a$  именно таковы и что намагниченность в каждой точке вещества однородна и одинаково направлена, а ее составляющие равны  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Предположим также, что внешняя намагничивающая сила также однородна и параллельна какому-нибудь направлению и имеет составляющие  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Тогда значение  $V$  будет равно

$$V = -(Xx + Yy + Zz), \quad (2)$$

а для значения потенциала  $\Omega'$  вне сферы намагниченности, согласно п. 391, получим

$$\Omega' = \frac{4\pi}{3} \frac{a^3}{r^3} (Ax + By + Cz). \quad (3)$$

Значение потенциала  $\Omega$  внутри сферы намагниченности равно

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} (Ax + By + Cz). \quad (4)$$

Истинный потенциал внутри сферы равен  $V + \Omega$ , т. е. для составляющих магнитной силы внутри сферы имеем

$$\alpha = X - \frac{4}{3} \pi A, \quad \beta = Y - \frac{4}{3} \pi B, \quad \gamma = Z - \frac{4}{3} \pi C. \quad (5)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{4}{3} \pi r_1\right) A + \frac{4}{3} \pi p_3 B + \frac{4}{3} \pi q_2 C &= r_1 X + p_3 Y + q_2 Z, \\ \frac{4}{3} \pi q_3 A + \left(1 + \frac{4}{3} \pi r_2\right) B + \frac{4}{3} \pi p_1 C &= q_3 X + r_2 Y + p_1 Z, \\ \frac{4}{3} \pi p_2 A + \frac{4}{3} \pi q_1 B + \left(1 + \frac{4}{3} \pi r_3\right) C &= p_2 X + q_1 Y + r_3 Z. \end{aligned} \quad (6)$$

Решая эти уравнения, находим

$$\left. \begin{aligned} A &= r'_1 X + p'_3 Y + q'_2 Z, \\ B &= q'_3 X + r'_2 Y + p'_1 Z, \\ C &= p'_2 X + q'_1 Y + r'_3 Z, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} D' r'_1 &= r_1 + \frac{4}{3} \pi (r_3 r_1 - p_2 q_2 + r_1 r_2 - p_3 q_3) + \left(\frac{4}{3} \pi\right)^2 D, \\ D' p'_1 &= p_1 - \frac{4}{3} \pi (q_2 q_3 - p_1 r_1), \\ D' q'_1 &= q_1 - \frac{4}{3} \pi (p_2 p_3 - q_1 r_1) \end{aligned} \quad (8)$$

и т. д.

Здесь  $D$  — определитель из коэффициентов в правой части уравнения (6), а  $D'$  — определитель из коэффициентов в левой части.

Новая система коэффициентов  $p'$ ,  $q'$ ,  $r'$  будет симметричной только для симметричной системы  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , т. е. когда коэффициенты типа  $p$  равны соответствующим коэффициентам типа  $q$ .

**436.** Момент пары сил, стремящийся повернуть сферу вокруг оси  $x$  в направлении от  $y$  к  $z$ , находится путем вычисления моментов, действующих на элементарные объемы, и их суммирования по всей сфере. Результат следующий:

$$L = (4/3) \pi a^3 (\gamma B - \beta C) = (4/3) \pi a^3 \{p'_1 Z^2 - q'_1 Y^2 + (r'_2 - r'_3) YZ + X(q'_3 Z - p'_2 Y)\}. \quad (9)$$

Если положить  $X=0$ ,  $Y=F \cos \vartheta$ ,  $Z=F \sin \vartheta$ , то это будет соответствовать магнитной силе  $F$ , лежащей в плоскости  $yz$  и наклоненной под углом  $\vartheta$  к оси  $y$ . Будем теперь поворачивать сферу, сохраняя силу постоянной, тогда работа, совершаемая при вращении сферы на каждый полный оборот, окажется равной

$\int_0^{2\pi} L d\vartheta$ . Но эта работа равна

$$(4/3) \pi^2 a^3 F^2 (p'_1 - q'_1). \quad (10)$$

Следовательно, чтобы вращающаяся сфера не могла стать неисчерпаемым источником энергии, необходимо выполнение равенства  $p'_1 = q'_1$  и, аналогично,  $p'_2 = q'_2$ ,  $p'_3 = q'_3$ .

Эти условия показывают, что в первоначальных уравнениях (6) коэффициент при  $B$  в третьем уравнении равен коэффициенту при  $C$  во втором и т. д. Система уравнений, таким образом, оказывается симметричной и после приведения к главным осям намагниченности становится такой:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{r_1}{1 + \frac{4}{3} \pi r_1} X, \\ B &= \frac{r_2}{1 + \frac{4}{3} \pi r_2} Y, \\ C &= \frac{r_3}{1 + \frac{4}{3} \pi r_3} Z. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Момент пары сил, стремящийся повернуть сферу вокруг оси  $x$ , равен

$$L = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{r_2 - r_3}{\left(1 + \frac{4}{3} \pi r_2\right) \left(1 + \frac{4}{3} \pi r_3\right)} YZ. \quad (12)$$

В большинстве случаев различия между коэффициентами намагниченности в различных направлениях очень малы и, считая  $r$  средним значением для этих коэффициентов, можно положить

$$L = \frac{2}{3} \pi a^3 \frac{r_2 - r_3}{\left(1 + \frac{4}{3} \pi r\right)^2} F^2 \sin 2\vartheta. \quad (13)$$

Эта сила стремится развернуть кристаллическую сферу вокруг оси  $x$  в направлении от  $y$  к  $z$ . Она всегда старается направить ось, соответствующую наибольшему магнитному (или наименьшему диамагнитному) коэффициенту параллельно линии магнитной силы.

Соответствующий двумерный случай представлен на рис. XVI.

Если предположить, что верхняя сторона рис. XVI смотрит на север, то там будут представлены силовые линии и эквипотенциальные поверхности, возмущенные поперечно намагниченным цилиндром, северная сторона которого направлена на восток. Результирующая сила стремится повернуть цилиндр с востока на север. Большая пунктирная окружность представляет сечение цилиндра из кристаллического вещества, у которого коэффициент индукции вдоль оси, направленной с северо-востока на юго-запад, больше, чем вдоль оси, направленной с северо-запада на юго-восток. Пунктирные линии внутри окружности изображают линии индукции и эквипотенциальные поверхности, которые теперь уже пересекаются не под прямым углом друг к другу. Действующая на цилиндр результирующая сила, очевидно, стремится повернуть его с востока на север.

437. Задача об эллипсоиде, помещенном в поле однородной и параллельной магнитной силы, очень изобретательно была решена Пуассоном.

Если потенциал в точке  $(x, y, z)$ , обусловленный гравитацией тела произвольной формы с однородной плотностью  $\rho$ , равен  $V$ , то потенциал магнетизма, создаваемый тем же телом при однородной намагниченности в направлении оси  $x$  с интенсивностью  $I = \rho$ , равен  $-(dV/dx)$ .

Действительно, значение  $-(dV/dx)\delta x$  в произвольной точке есть превышение потенциала тела  $V$  над потенциалом  $V'$  того же тела, смещенного на расстояние  $-\delta x$  в направлении  $x$ .

Предположим, что тело смещено на расстояние  $-\delta x$ , а его плотность вместо  $\rho$  стала  $-\rho$  (как будто тело сделано из отталкивающей материи вместо притягивающей), тогда величина  $-(dV/dx)\delta x$  будет потенциалом, создаваемым этими двумя телами.

Рассмотрим теперь элементарную порцию тела с объемом  $\delta v$  и массой  $\rho \delta v$ , а также соответствующий объем смещенного на расстояние  $-\delta x$  тела с массой  $-\rho \delta v$ . Действие этих двух элементов эквивалентно действию магнита с мощностью  $\rho \delta v$  и длиной  $\delta x$ . Интенсивность намагниченности находится делением магнитного момента элемента на его объем. Результат равен  $\rho \delta x$ .

Следовательно, величина  $-(dV/dx)\delta x$  есть магнитный потенциал тела, намагниченного с интенсивностью  $\rho \delta x$  в направлении  $x$ , а  $-(dV/dx)$  — потенциал тела, намагниченного с интенсивностью  $\rho$ .

Этот потенциал можно рассматривать и в ином свете. Тело было смещено на расстояние  $-\delta x$ , и его плотность изменена на  $-\rho$ . В той области пространства, которая является общей для двух положений тела, плотность равна нулю, так как две равные и противоположные плотности уничтожают друг друга (пока речь идет о притяжении). Таким образом, остается оболочка из положительной материи на одной стороне тела и оболочка из отрицательной материи на другой. Можно считать, что ими и создается результирующий потенциал. Толщина оболочки в точке, где нормаль, проведенная наружу, образует угол  $\epsilon$  с осью  $x$ , равна  $\delta x \cos \epsilon$ ; и поэтому при объемной плотности  $\rho$  поверхностная плотность равна  $\rho \delta x \cos \epsilon$ . Если потенциал записан в виде  $-(dV/dx)$ , то поверхностная плотность окажется равной  $\rho \cos \epsilon$ .

Таким способом мы можем найти магнитный потенциал любого тела, однородно намагниченного параллельно данному направлению. Но если эта однородная намагниченность обусловлена магнитной индукцией, то магнитная сила во всех точках внутри тела также должна быть однородной и параллельной.

Эта сила состоит из двух частей: одна связана с внешними источниками, другая — с намагниченностью тела. Поэтому при однородной и параллельной внешней магнитной силе магнитная сила, связанная с намагниченностью, также должна быть однородной и параллельной во всех точках внутри тела.

Таким образом, чтобы данный метод привел к решению задачи о магнитной индукции, производная  $dV/dx$  должна быть внутри тела линейной функцией координат  $x, y, z$  и, следовательно, потенциал  $V$  — квадратичной функцией этих координат.

Но единственными из числа известных нам примерами, когда потенциал  $V$  представлялся бы внутри тела квадратичной функцией координат, служат тела, ограниченные полной поверхностью второго порядка, и единственным случаем, в котором такое тело обладало бы ограниченными размерами, является эллипсоид. Поэтому мы применим этот метод к случаю эллипсоида.

Пусть уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

будет уравнением эллипсоида, а  $\Phi_0$  обозначает следующий определенный интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a^2 + \varphi^2)(b^2 + \varphi^2)(c^2 + \varphi^2)}}. \quad (2)^1$$

Тогда, если положить

$$L = 4\pi abc \frac{d\Phi_0}{d(a^2)}, \quad M = 4\pi abc \frac{d\Phi_0}{d(b^2)}, \quad N = 4\pi abc \frac{d\Phi_0}{d(c^2)}, \quad (3)$$

то значение потенциала внутри эллипсоида будет равно

$$V_0 = -\frac{\rho}{2} (Lx^2 + My^2 + Nz^2) + \text{const.} \quad (4)$$

Если эллипсоид намагничен однородно с интенсивностью  $I$  в направлении, которое относительно осей  $x, y, z$  имеет направляющие косинусы  $l, m, n$ , так что составляющие намагниченности этого эллипсоида равны  $A = Il, B = Im, C = In$ , то потенциал, обусловленный такой намагниченностью внутри соленоида, будет

$$\Omega = -I (Llx + Mmy + Nnz). \quad (5)$$

Если внешняя магнитная сила равна  $\mathfrak{H}$ , а ее составляющие —  $X, Y, Z$ , то ее потенциал будет равен

$$V = -(Xx + Yy + Zz). \quad (6)$$

Поэтому составляющие истинной намагничивающей силы в произвольной точке тела равны

$$X + AL, \quad Y + BM, \quad Z + CN. \quad (7)$$

Наиболее общая связь между намагниченностью и намагничивающей силой задается тремя линейными уравнениями, содержащими девять коэффициентов. Для выполнения закона сохранения энергии в случае магнитной индукции необходимо, однако, чтобы три из них были бы соответственно равны трем другим, т. е. чтобы мы имели

$$\begin{aligned} A &= \kappa_1 (X + AL) + \kappa_3' (Y + BM) + \kappa_2' (Z + CN), \\ B &= \kappa_3' (X + AL) + \kappa_2 (Y + BM) + \kappa_1' (Z + CN), \\ C &= \kappa_2' (X + AL) + \kappa_1' (Y + BM) + \kappa_3 (Z + CN). \end{aligned} \quad (8)$$

Из этих уравнений можно выразить  $A, B, C$  через  $X, Y, Z$  и получить наиболее общее решение задачи.

Потенциал вне эллипсоида будет складываться из потенциала, обусловленного намагниченностью эллипсоида, и потенциала внешней магнитной силы.

<sup>1</sup> См. Томсон и Тэт «Натуральная философия» (Thomson and Tait's *Natural Philosophy*, § 525, 2nd Edition).



438. Единственным практически важным является случай, в котором

$$\kappa'_1 = \kappa'_2 = \kappa'_3 = 0. \quad (9)$$

Тогда мы имеем

$$A = \frac{\kappa_1}{1 - \kappa_1 L} X, \quad B = \frac{\kappa_2}{1 - \kappa_2 M} Y, \quad C = \frac{\kappa_3}{1 - \kappa_3 N} Z. \quad (10)$$

Если эллипсоид имеет две одинаковых оси и является эллипсоидом планетарной или сплюснутой формы, то

$$b = c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} L &= -4\pi \left( \frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e \right), \\ M = N &= -2\pi \left( \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если эллипсоид имеет яйцевидную или вытянутую форму, то

$$a = b = \sqrt{1 - e^2} c, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} L = M &= -2\pi \left( \frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right), \\ N &= -4\pi \left( \frac{1}{e^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В случае сферы, когда  $e=0$ ,

$$L = M = N = -\frac{4}{3} \pi. \quad (15)$$

В случае очень плоского планетоида величина  $L$  в пределе становится равной  $-4\pi$  а величины  $M$  и  $N$  равными  $-\pi^2 a/c$ .

В случае очень вытянутого овалоида (ovoid)  $L$  и  $M$  стремятся к значению  $-2\pi$ , а  $N$  приближается к выражению

$$-4\pi \frac{a^2}{c^2} \left( \ln \frac{2c}{a} - 1 \right)$$

и обращается в нуль при  $e=1$ .

Из этих результатов следует:

(1). Когда коэффициент намагничности  $\kappa$  очень мал, будучи положительным или отрицательным, индуцированная намагничность приблизительно равна намагничивающей силе, умноженной на  $\kappa$ , и почти не зависит от формы тела.

(2). Когда  $\kappa$  является большой положительной величиной, намагничность существенно зависит от формы тела и почти не зависит от точного значения  $\kappa$ , кроме случая продольной силы, действующей на такой вытянутый овалоид, в котором даже при больших  $\kappa$  величина  $N\kappa$  остается малой.

(3). Если бы коэффициент  $\kappa$  мог стать отрицательным и равным  $1/4\pi$ , то в случае намагничивающей силы, действующей перпендикулярно плоской пластинке или диску, мы имели бы бесконечное значение для намагничности. Абсурдность этого результата подтверждает сказанное в п. 428.

Таким образом, эксперименты по определению  $\kappa$  можно проводить на телах любой формы, но при условии, что  $\kappa$  очень малы, как это имеет место для всех диамагнитных тел и всех магнитных тел, кроме железа, никеля и кобальта.

Если, однако, как в случае железа,  $\kappa$  представляет собой большое число, то эксперименты со сферами и плоскими фигурами непригодны для определения  $\kappa$ ; например, для сферы с  $\kappa = 30$  (отдельные сорта железа) намагниченность относится к намагничивающей силе как 1 к 4,22, а при бесконечных  $\kappa$  это отношение равно 1 : 4,19, т. е. очень маленькая ошибка при определении намагниченности приводила бы к очень большой ошибке в  $\kappa$ .

Воспользовавшись, однако, куском железа в форме очень вытянутого овалоида, можно при умеренных по сравнению с единицей значениях  $N\kappa$  вычислить значения  $\kappa$  по найденной величине намагниченности, причем тем точнее, чем меньше величина  $N$ .

Действительно, если сделать  $N\kappa$  достаточно малым, то малая ошибка в определении самой величины  $N$  не внесет большой погрешности, и вместо овалоида можно взять любое вытянутое тело, например проволоку или длинный стержень.

Следует, однако, помнить, что такая замена допустима только в случае, когда произведение  $N\kappa$  мало по сравнению с единицей. На самом деле распределение магнетизма вдоль длинного цилиндра с плоскими концами не напоминает соответствующее распределение вдоль длинного овалоида, так как свободный магнетизм очень сильно концентрируется к концам цилиндра, в то время как в случае овалоида его концентрация меняется прямо пропорционально расстоянию от экватора.

Распределения же электричества, как мы уже видели в п. 152, вдоль цилиндра и вдоль овалоида фактически сходны.

Эти результаты позволяют понять также, почему магнитный момент у постоянных магнитов вытянутой формы может быть заметно увеличен. Если намагнитить диск перпендикулярно его поверхности до интенсивности  $I$  и затем предоставить самому себе, то на внутренние частицы этого диска начала бы действовать постоянная размагничивающая сила, равная  $4\pi I$ . И даже если этой силы самой по себе было бы не достаточно для разрушения части намагниченности, вскоре это все же произошло бы под действием вибраций или изменений температуры.

При намагничении цилиндра в поперечном направлении, размагничивающая сила будет равна всего лишь  $2\pi I$ , а в сферическом магните  $(4/3)\pi I$ .

В поперечно намагниченном диске размагничивающая сила равна  $\pi^2(a/c)I$ , а в продольно намагниченном вытянутом овалоиде она имеет наименьшее из всех значений, равное  $4\pi (a^2/c^2)I \ln(2c/a)$ .

Следовательно, вытянутый магнит не так охотно теряет свой магнетизм, как короткий и толстый магнит.

Для эллипсоида с различными магнитными коэффициентами вдоль трех осей момент сил, действующий на него и стремящийся повернуть его вокруг оси  $x$ , равен

$$\frac{4}{3} \pi abc (BZ - CY) = \frac{4}{3} \pi abc YZ \frac{\kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_2 \kappa_3 (M - N)}{(1 - \kappa_2 M)(1 - \kappa_3 N)}.$$

Следовательно, если  $\kappa_2$  и  $\kappa_3$  малы, то этот момент в принципе зависит от кристаллических свойств тела, а не от его формы, при условии, что размеры тела не

различаются слишком сильно; если же  $\kappa_2$  и  $\kappa_3$  значительны (как в случае железа), то сила будет существенно зависеть от формы тела, стремясь устанавливать большую ось параллельно линиям силы.

Если бы могло быть получено достаточно большое, но все же еще однородное поле магнитной силы, то вытянутое изотропно диамагнитное тело тоже стремилось бы установиться так, чтобы его наибольший размер оказывался бы параллельным линиям магнитной силы.

439. Вопрос о распределении намагниченности в эллипсоиде вращения под действием произвольных магнитных сил был исследован И. Нейманом<sup>2</sup>. Кирхгофф<sup>3</sup> распространил его метод на случай бесконечно длинного цилиндра, находящегося под воздействием произвольной силы.

Грин в 17-м разделе своего Сочинения привел исследование распределения магнетизма в цилиндре конечной длины под действием однородной внешней силы  $X$ , параллельной его оси. Хотя отдельные этапы этого исследования и не очень строги, однако в данном наиболее важном случае его результаты, по-видимому, приближенно соответствуют реальной намагниченности, и они, конечно, очень четко выражают переход от цилиндра с большим  $\kappa$  к цилиндру с очень малыми  $\kappa$ , хотя совершенно непригодны в случае отрицательных  $\kappa$ , т. е. для диамагнитных веществ.

Грин нашел, что линейная плотность свободного магнетизма для цилиндра с радиусом  $a$  и длиной  $2l$  на расстоянии  $x$  от его середины равна

$$\lambda = \pi \kappa X r a \frac{e^{px/a} - e^{-px/a}}{e^{pl/a} + e^{-pl/a}},$$

где  $p$  есть численная величина, определяемая из уравнения

$$0,231863 - 2 \ln p + 2p = \frac{1}{\pi \kappa r^2}.$$

Ниже приводятся несколько соответствующих значений  $\kappa$  и  $p$ :

$\kappa$	$p$	$\kappa$	$p$	$\kappa$	$p$	$\kappa$	$p$
$\infty$	0	29,475	0,04	11,802	0,07	0,1427	1,00
336,4	0,01	20,185	0,05	9,137	0,08	0,0002	10,00
62,02	0,02	14,794	0,06	7,517	0,09	0	$\infty$
48,416	0,03			6,319	0,10	Отрицатель- ное	Мнимое

Когда длина цилиндра велика по сравнению с его радиусом, полное количество свободного магнетизма по любую сторону от середины магнита, как это и должно быть, равно  $M = \pi a^2 \kappa X$ , причем часть этого магнетизма, равная  $pM/2$ , сосредоточена на плоском торце цилиндра, а центр тяжести всего распределения расположен от торца на расстоянии  $a/p$ .

Когда  $\kappa$  очень мало, то  $p$  велико, и почти весь свободный магнетизм сосредоточен на торцах цилиндра. С увеличением  $\kappa$  величина  $p$  убывает, и свободный магнетизм рассредоточивается на больших расстояниях от концов. При бесконечном  $\kappa$  свободный магнетизм в любой точке цилиндра просто пропорционален расстоя-

<sup>2</sup> *Crelle*, Bd. XXXVII (1848).

<sup>3</sup> *Crelle*, Bd. XLVIII (1854).

нию от средней точки; подобное распределение имеет свободное электричество на проводнике в поле однородной силы.

440. Во всех веществах, кроме железа, никеля и кобальта, коэффициенты намагниченности так малы, что индуцированная намагниченность тела приводит лишь к небольшому изменению силы в магнитном поле. Следовательно, в первом приближении мы можем считать, что внутри тела действует такая же магнитная сила, как в отсутствие тела. Поверхностная намагниченность тела, таким образом, в первом приближении равна  $\kappa (dV/dv)$ , где  $dV/dv$  — скорость роста магнитного потенциала, созданного внешним магнитом, вдоль внутренней нормали к поверхности. Вычислив потенциал, обусловленный этим поверхностным распределением, мы можем затем использовать его при переходе ко второму приближению.

Чтобы в этом первом приближении найти механическую энергию, обусловленную поверхностным распределением магнетизма, мы должны найти поверхностный интеграл

$$E = \frac{1}{2} \iint \kappa V \frac{dV}{dv} dS,$$

взятый по всей поверхности тела. Но в п. 100 мы показали, что он равен объемному интегралу

$$E = -\frac{1}{2} \iiint \kappa \left[ \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

взятому по области, занятой телом, или, если обозначить через  $R$  результирующую магнитную силу,

$$E = -\frac{1}{2} \iiint \kappa R^2 dx dy dz.$$

Далее, так как работа, совершаемая магнитной силой над телом при смещении на  $\delta x$ , равна  $X\delta x$  (где  $X$  — механическая сила в направлении  $x$ ) и так как  $\int X\delta x + E = \text{const}$ , то

$$X = -\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \iiint \kappa R^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint \kappa \frac{dR^2}{dx} dx dy dz.$$

Отсюда следует, что на тело действует такая сила, при которой каждая его часть стремится перемещаться из областей меньших  $R^2$  в область больших  $R^2$ ; при этом сила, действующая на каждый единичный элемент объема, равна  $(\kappa/2)dR^2/dx$ .

Если величина  $\kappa$  отрицательна, как это имеет место для диамагнитных тел, то данная сила (это впервые установил Фарадей) направлена из области сильных в область слабых магнитных полей. Большинство эффектов, наблюдаемых с диамагнитными телами, зависит от этого свойства.

### *Корабельный магнетизм*

441. Почти каждая отрасль науки о магнетизме находит применение в навигации. Непосредственное воздействие земного магнетизма на стрелку компаса является единственным методом определения курса корабля в условиях, когда солнце и звезды скрыты. Вначале казалось, что отклонение стрелки от направления истинного меридиана служит помехой для использования компаса в навигации, од-

нако, после того как были составлены магнитные карты, эта трудность была преодолена и стало очевидным, что магнитное склонение само по себе может даже помочь моряку в определении местонахождения его корабля.

Наибольшую трудность в навигации всегда вызывало определение долготы. Но так как склонение различно в разных точках одной и той же широтной параллели, то его наблюдение при наличии известной широты предоставляет возможность моряку определить свое положение на магнитной карте.

Однако в последнее время при конструировании кораблей настолько широко применяется железо, что стало вообще невозможно пользоваться компасом без учета того действия, которое оказывает на его стрелку сам корабль, представляющий собой некоторое магнитное тело.

Определение распределения магнетизма в массе железа произвольной формы под влиянием земной магнитной силы, даже не подверженного механическим напряжениям и другим возмущениям, составляет, как мы видели, очень сложную задачу.

В рассматриваемом случае эта задача все же упрощается благодаря следующим обстоятельствам.

Считается, что центр компаса расположен в фиксированной точке корабля, достаточно удаленной от любого железа, так что сама стрелка компаса не индуцирует в корабле заметного магнетизма. Размеры стрелки предполагаются настолько малыми, что во всех ее точках магнитную силу можно считать одинаковой.

Корабль предполагается состоящим из железа только двух сортов.

(1). Твердого железа с постоянной намагниченностью.

(2). Мягкого железа с намагниченностью, индуцированной Землей или другими магнитами.

Для строгости следует допустить, что даже самое твердое железо способно не только к индукции, но и к потере — теми или иными способами — части своей так называемой постоянной намагниченности.

Самое же мягкое железо способно сохранять свою так называемую остаточную намагниченность. Реальные свойства железа нельзя точно представлять, предполагая его состоящим из железа твердого и железа мягкого, определение которых было дано нами выше. Однако было установлено, что когда корабль подвергается действию только силы земного магнетизма и не находится в каких-то условиях непогоды, то допущение того, что его магнетизм обусловлен лишь частично постоянной и частично временной намагниченностью, приводит к достаточно точным результатам применительно к коррекции компаса.

Уравнения, на которых основана теория вариации компаса, были даны Пуассоном в пятом томе *Mémoires de l'Institut*, p. 533 (1824).

При их выводе было сделано единственное предположение, касающееся индуцированного магнетизма, а именно: если магнитная сила  $X$ , обусловленная внешним магнетизмом, создает в железе корабля индуцированную намагниченность и если эта индуцированная намагниченность воздействует на стрелку компаса с возмущающей силой, имеющей составляющие  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , то при изменении внешней магнитной силы в заданное число раз составляющие возмущающей силы изменятся в то же самое число раз.

В действительности при воздействии на железо очень больших магнитных сил

индуцированная намагниченность уже не пропорциональная действующей силе, однако в случае магнитных сил, величина которых обусловлена земным магнетизмом, отсутствие пропорциональности незаметно.

Таким образом, на практике мы можем считать, что если единичная магнитная сила создает через посредство корабельного железа действующую на стрелку компаса возмущающую силу с составляющими  $a$  — в направлении  $x$ ,  $d$  — в направлении  $y$ ,  $g$  — в направлении  $z$ , то составляющие возмущающей силы, обусловленной внешней силой  $X$ , направленной по  $x$ , будут соответственно равны  $aX$ ,  $dX$ ,  $gX$ .

Следовательно, если мы введем оси, фиксированные относительно корабля, направив ось  $x$  к носу корабля, ось  $y$  — к правому борту, а ось  $z$  — к килю, и обозначим через  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  составляющие земной магнитной силы в этих направлениях, то  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  — составляющие комбинированной силы, действующей на стрелку компаса со стороны Земли и корабля, будут равны

$$\begin{aligned} X' &= X + aX + bY + cZ + P, \\ Y' &= Y + dX + eY + fZ + Q, \\ Z' &= Z + gX + hY + kZ + R. \end{aligned} \quad (1)$$

В этих уравнениях  $a, b, c, d, e, f, g, h, k$  — девять постоянных коэффициентов, зависящих от количества, расположения и восприимчивости к индукции мягкого железа корабля;  $P, Q, R$  — константы, определяемые постоянной намагниченностью корабля.

Очевидно, что эти уравнения обладают достаточной общностью в условиях, когда магнитная индукция является линейной функцией магнитной силы, поскольку они представляют собой ни больше ни меньше как самое общее выражение для любого вектора, являющегося линейной функцией другого вектора.

Можно тем не менее показать, что они не слишком общие, поскольку соответствующим размещением железа можно любой из коэффициентов изменять независимо от других.

Так, длинный и тонкий железный прут под действием продольной магнитной силы приобретает полюса, мощность которых численно равна сечению прута, умноженному на магнитную силу и на коэффициент индуцированной намагниченности. Магнитная сила, перпендикулярная этому стержню, производит гораздо более слабую намагниченность, действие которой почти незаметно на расстоянии нескольких диаметров.

Если расположить длинный железный стержень вдоль корабля и поместить один его конец на расстоянии  $x$  от стрелки компаса, измеряя это расстояние в сторону носа корабля, то, обозначив сечение стержня через  $A$ , а его коэффициент намагниченности через  $k$ , для мощности полюса получим  $AkX$ ; при значении  $A = ax^2/k$  сила, действующая со стороны этого полюса на стрелку компаса, будет равна  $aX$ . При этом стержень можно считать достаточно длинным и действием на компас со стороны другого полюса пренебречь.

Таким образом, мы получили способ задания любого требуемого значения коэффициента  $a$ .

Если взять другой стержень с сечением  $B$ , поместить один его конец в ту же самую точку, отстоящую от компаса на расстоянии  $x$ , измеряемом в направлении

носа судна, и развернуть его в сторону правого борта, удалив второй полюс на такое расстояние, где бы он не оказывал заметного влияния на компас, то возмущающая сила, создаваемая этим стержнем, будет направлена по  $x$  и равна  $BxY/x^2$ , или при  $B=bx^2/\kappa$  сила окажется равной  $bY$ .

Таким образом, этот стержень вводит коэффициент  $b$ .

Третий стержень, направленный из той же самой точки вниз, введет коэффициент  $c$ .

Коэффициенты  $d, e, f$  можно получать с помощью трех стержней, вытянутых к носу, к правому борту и книзу из точки, смещенной от компаса к правому борту, а коэффициенты  $g, h, k$  — с помощью трех стержней, вытянутых в направлениях, параллельных этим, из точки, расположенной под компасом.

Следовательно, любой из девяти коэффициентов можно менять отдельно с помощью нужным образом размещаемых железных стержней.

Величины  $P, Q, R$  являются просто составляющими силы, действующей на компас и возникающей из-за постоянной намагниченности корабля, а также из-за той части индуцированной намагниченности, которая обусловлена действием этой постоянной намагниченности.

Полное обсуждение уравнений (1) и связи между истинным магнитным курсом корабля и курсом, указываемым компасом, дано Арчибальдом Смитом в адмиралтейском «Руководстве по девиации компаса» (*Manual of the Deviation of the Compass*).

Там приведен важный графический метод исследования задачи. Из начала координат, взятого в произвольной фиксированной точке, проводится отрезок линии, представляющий по величине и по направлению горизонтальную составляющую реальной магнитной силы, действующей на стенку компаса. По мере того как корабль поворачивается, ставя свой нос последовательно по разным азимутам, конец этой линии описывает кривую, каждая точка которой соответствует определенному азимуту.

Такая кривая, с помощью которой направление и величина силы, действующей на компас, определяется через магнитный курс корабля, называется Дигограммой.

Есть две разновидности Дигограмм. В одной из них кривая вычерчивается на плоскости, фиксированной в пространстве, в то время как корабль поворачивается. В другом случае кривая вычерчивается на плоскости, фиксированной по отношению к кораблю.

Дигограммы первого вида являются Улитками Паскаля, дигограммы второго вида — эллипсами. О построении и использовании этих кривых и о многих теоремах, представляющих интерес для математиков в той мере, в какой они важны для навигаторов, читатель может узнать из «Руководства по девиации компаса».

## ГЛАВА VI

# ВЕБЕРОВСКАЯ ТЕОРИЯ ИНДУЦИРОВАННОГО МАГНЕТИЗМА

442. Как мы уже знаем, Пуассон предполагал, что намагниченность железа состоит в разделении магнитных жидкостей внутри каждой магнитной молекулы. При желании избежать допущения о существовании магнитных жидкостей можно выдвинуть ту же самую теорию в иной форме, приняв, что каждая молекула железа под действием на нее намагничивающей силы становится магнитом.

Теория Вебера отличается от нее предположением о том, что молекулы железа являются магнитами всегда, даже до приложения намагничивающей силы, но у обыкновенного железа магнитные оси молекул расположены безразлично по отношению к любому направлению, и железо в целом никаких магнитных свойств не проявляет.

Когда магнитная сила действует на железо, она стремится повернуть оси всех молекул в одном направлении, что и является причиной превращения железа, как целого, в магнит.

Если бы оси всех молекул выстроились параллельно друг другу, то железо обладало бы наибольшей интенсивностью намагниченности, на какую оно только способно вообще. Следовательно, теория Вебера устанавливает существование некоторой предельной интенсивности намагниченности, и поэтому для нее необходимы экспериментальные свидетельства наличия такого предела. Проведенные Джоулем<sup>1</sup>, И. Мюллером<sup>2</sup> (J. Muller), Эвингом и Лоу<sup>3</sup> (Ewing and Low) опыты показали, что намагниченность приближается к некоторому предельному значению.

Наиболее полные подтверждения существования этого предела представлены экспериментами Бетца<sup>4</sup> (Beetz) с электролитическим железом, выделяемым под действием магнитной силы.

Серебряная проволока покрывалась лаком, на котором делалась тонкая продольная царапина, обнажавшая узкую полоску металла. Затем проволока погружалась в раствор железа, и все это помещалось в магнитное поле таким образом, чтобы царапина была в направлении линии магнитной силы. Для протекающего через раствор электрического тока проволока служила катодом, и железо, молекула за молекулой, откладывалось на узкой открытой части ее поверхности. Полученная таким способом нитка железа подвергалась затем проверке на магнетизм. Для столь небольшой массы железа ее магнитный момент оказался очень значительным, приложение мощной намагничивающей силы, действующей в том же направлении, приводило лишь к небольшому увеличению индуцированной намагниченности, в то время как постоянная намагниченность не менялась. При-

<sup>1</sup> *Annals of Electricity*, IV, p. 131, 1839; *Phil. Mag.*, (4)III, p. 32.

<sup>2</sup> *Pogg. Ann.*, LXXIX, p. 337, 1850.

<sup>3</sup> *Phil. Trans.* 1889, A, p. 221.

<sup>4</sup> *Pogg.* CXI, 1860.



ложение же намагничивающей силы в противоположном направлении тотчас приводило нить в состояние, свойственное железу, намагниченному обычным путем.

Теория Вебера, предполагающая, что в данном случае магнитная сила поворачивает в момент отложения молекул их оси в одном направлении, очень хорошо согласуется с этими наблюдениями.

Бетц нашел, что если продолжать электролиз под действием намагничивающей силы, то интенсивность намагниченности последовательно осаждаемого железа будет уменьшаться. Вероятно, оси молекул отклоняются от линии намагничивающей силы по мере того, как они откладываются бок о бок с уже осажденными ранее молекулами, т. е. предельная параллельность осей может быть получена только для случая очень тонкой нити железа.

Если, как предположил Вебер, молекулы железа являются готовыми магнитами, то любая магнитная сила, достаточная при электролитическом осаждении для параллельного установления их осей, будет достаточной и для создания в образованной нити наивысшей интенсивности намагниченности.

С другой стороны, если молекулы железа не являются магнитами, а лишь обнаруживают способность к намагничиванию, то намагниченность образующейся нити будет зависеть от намагничивающей силы так же, как в общем случае она зависит и в обычном мягком железе. Эксперименты Бетца не оставляют места для второй гипотезы.

443. Следуя Веберу, мы будем сейчас считать, что в каждом единичном объеме железа имеется  $n$  магнитных молекул и магнитный момент каждой из них равен  $m$ . Если бы оси всех молекул расположились бы параллельно, магнитный момент единичного объема оказался бы равным  $M = nm$ , и это была бы наибольшая интенсивность намагниченности, на которую способно железо.

У обыкновенного железа в ненамагниченном состоянии, согласно предположению Вебера, оси молекул располагаются безразлично во всех направлениях.

Чтобы описать это, можно вообразить некоторую вычерченную сферу, у которой из центра проведен радиус-вектор параллельно направлению оси каждой из  $n$  молекул. Распределение кончиков радиус-векторов по сфере будет представлять распределение осей молекул. В случае обыкновенного железа эти  $n$  точек равномерно распределены на любом участке поверхности сферы, и число молекул, оси которых составляют с осью  $x$  углы меньше  $\alpha$ , равно  $(n/2)(1 - \cos \alpha)$ , следовательно, число молекул, оси которых составляют с осью углы, лежащие в интервале  $\alpha, \alpha + d\alpha$ , окажется равным  $(n/2) \sin \alpha d\alpha$ .

Таково расположение молекул в куске железа, ранее ни разу не подвергавшегося намагничиванию.

Допустим теперь, что на железо в направлении оси  $x$  действует магнитная сила  $X$ , и рассмотрим молекулу, ось которой была первоначально отклонена от оси  $x$  на угол  $\alpha$ .

Если эта молекула может поворачиваться совершенно свободно, она займет положение, в котором ее ось параллельна оси  $x$ . Если бы все молекулы были такими, то самой слабой намагничивающей силы оказалось бы достаточно для достижения самой наивысшей степени намагниченности. Однако это не так.

Молекулы не поворачиваются в положение, в котором их оси параллельны оси  $x$ , что обусловлено либо воздействием на каждую молекулу некоторой

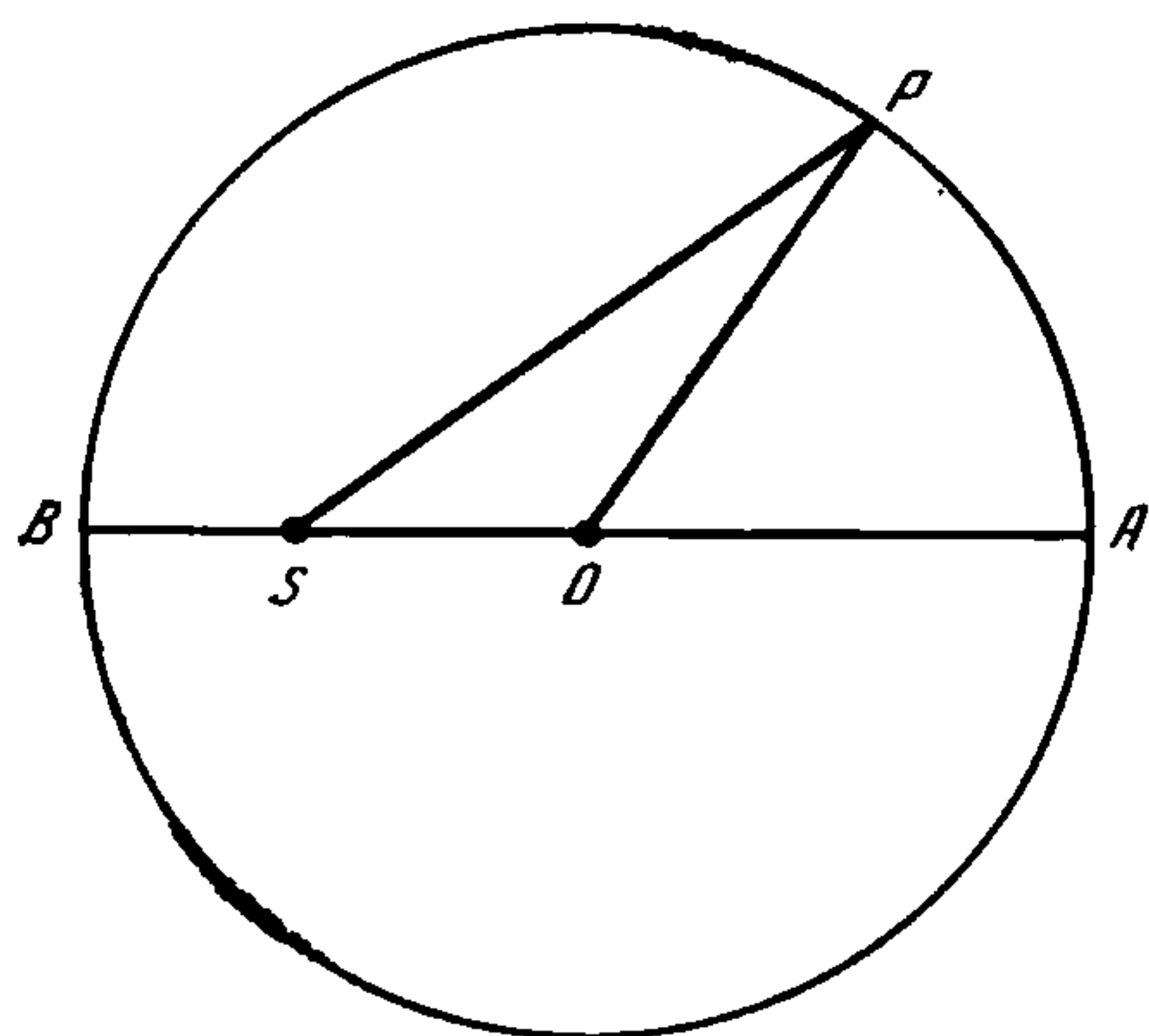


Рис. 5

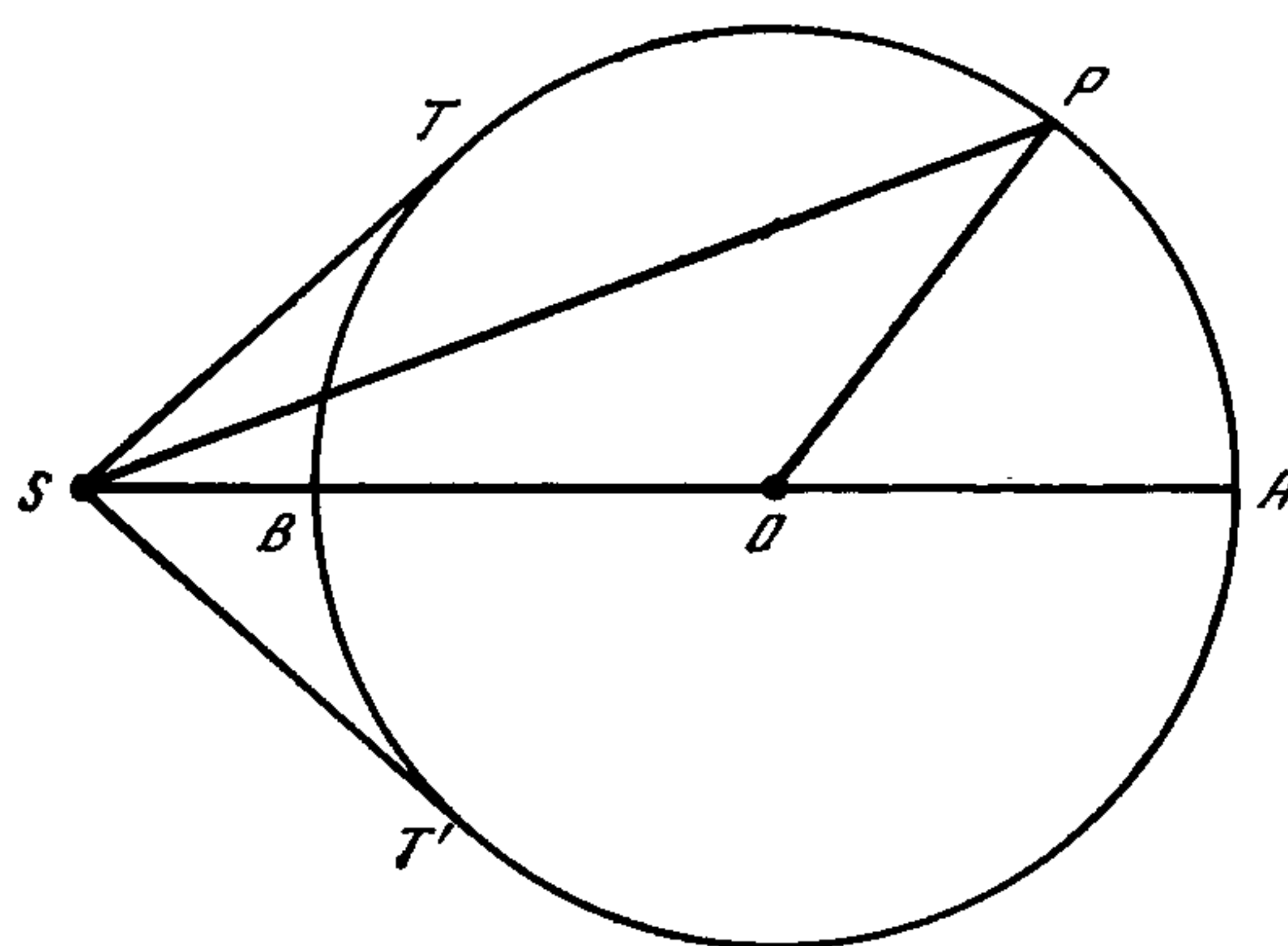


Рис. 6

силы, стремящейся удержать ее в первоначальном направлении, либо эффектом, эквивалентным этому, но производимым взаимодействием всей системы молекул.

Вебер принял первое предположение как наиболее простое, считая, что каждая молекула стремится при отклонении вернуться в исходное положение под действием такой силы, которую производила бы некоторая магнитная сила  $D$ , действующая в первоначальном направлении оси молекулы.

Положение, которое в действительности примет ось, определяется, следовательно, направлением равнодействующей сил  $X$  и  $D$ .

Пусть  $APB$  представляет сечение сферы, радиус которой в некотором масштабе определяется силой  $D$ .

Направим радиус  $OP$  параллельно оси какой-либо отдельной молекулы в ее первоначальном положении.

Пусть отрезок  $SO$  представляет в том же масштабе намагничивающую силу  $X$  в предположении, что она действует в направлении от  $S$  к  $O$ . Тогда при воздействии на молекулу силы  $X$  вдоль  $SO$  и силы  $D$  вдоль направления, параллельного первоначальному направлению ее оси, ось молекулы установится в направлении  $SP$ , т. е. вдоль равнодействующей сил  $X$  и  $D$ .

Поскольку оси молекул ориентированы вначале по всем направлениям,  $P$  может находиться в любой точке сферы безразлично. На рис. 5, где  $X$  меньше, чем  $D$ , ось в конечном положении также может быть повернута в каком угодно направлении, но уже не безразлично, так как по направлению к  $A$  большая часть молекул будет повернута своими осями, нежели по направлению к  $B$ . На рис. 6, где  $X$  больше  $D$ , оси всех молекул будут ограничены конусом  $TST'$ , касающимся сферы.

Таким образом, существуют два различных случая, соответствующих значениям  $X$ , превышающим или не превышающим значение  $D$ .

Пусть

$\alpha = AOP$  — начальный наклон оси молекулы относительно оси  $x$ ;

$\vartheta = ASP$  — наклон оси при отклонении силой  $X$ ;

$\beta = SPO$  — угол отклонения;

$SO = X$  — намагничивающая сила;

$OP=D$  — сила, стремящаяся возвратить ось в первоначальное положение;  
 $SP=R$  — результирующая сил  $X$  и  $D$ ;  
 $m$  — магнитный момент молекулы.

Тогда момент статической пары сил, обусловленный наличием силы  $X$  и стремящийся уменьшить угол  $\vartheta$ , будет равен  $mL=mX \sin \vartheta$ , а момент, обусловленный силой  $D$  и стремящийся увеличить угол  $\vartheta$ ,  $mL \pm mD \sin \beta$ .

Приравнивая эти величины и помня, что  $\beta=\alpha-\vartheta$ , находим

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{D \sin \alpha}{X + D \cos \alpha}, \quad (1)$$

что и определяет направление оси после отклонения.

Далее мы должны найти интенсивность намагниченности, созданной силой  $X$  во всей массе тела, для чего необходимо спроектировать магнитный момент каждой молекулы на направление  $x$  и сложить все эти проекции.

Составляющая момента молекулы вдоль направления  $x$  равна  $m \cos \vartheta$ , а число молекул, у которых начальное отклонение лежит в пределах  $\alpha, \alpha + d\alpha$ , составляет  $(n/2) \sin \alpha d\alpha$ .

Таким образом, необходимо проинтегрировать

$$I = \int_0^{\pi} \frac{mn}{2} \cos \vartheta \sin \alpha d\alpha, \quad (2)$$

помня, что  $\vartheta$  является функцией угла  $\alpha$ .

Мы можем выразить  $\vartheta$  и  $\alpha$  через  $R$ , тогда подынтегральное выражение примет вид

$$-\frac{mn}{4X^2D} (R^2 + X^2 - D^2) dR, \quad (3)$$

неопределенный интеграл от которого равен

$$-\frac{mnR}{12X^2D} (R^2 + 3X^2 - 3D^2) + C. \quad (4)$$

В первом случае, когда  $X$  меньше  $D$ , интегрирование ведется в пределах от  $R=D+X$  до  $R=D-X$ , а во втором случае, когда  $X$  больше  $D$ , — от  $R=X+D$  до  $R=X-D$ .

$$\text{Если } X \text{ меньше } D, \text{ то } I = \frac{2}{3} \frac{mn}{D} X. \quad (5)$$

$$\text{Если } X \text{ равно } D, \text{ то } I = \frac{2}{3} mn. \quad (6)$$

$$\text{Если } X \text{ больше } D, \text{ то } I = mn \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2} \right). \quad (7)$$

$$\text{Если } X \text{ становится бесконечным, то } I = mn. \quad (8)$$

Согласно этому варианту теории, принятому Вебером <sup>5</sup>, при увеличении намагничивающей силы от  $O$  до  $D$  намагниченность растет пропорционально ей и достигает двух третей своего предельного значения, когда намагничивающая сила

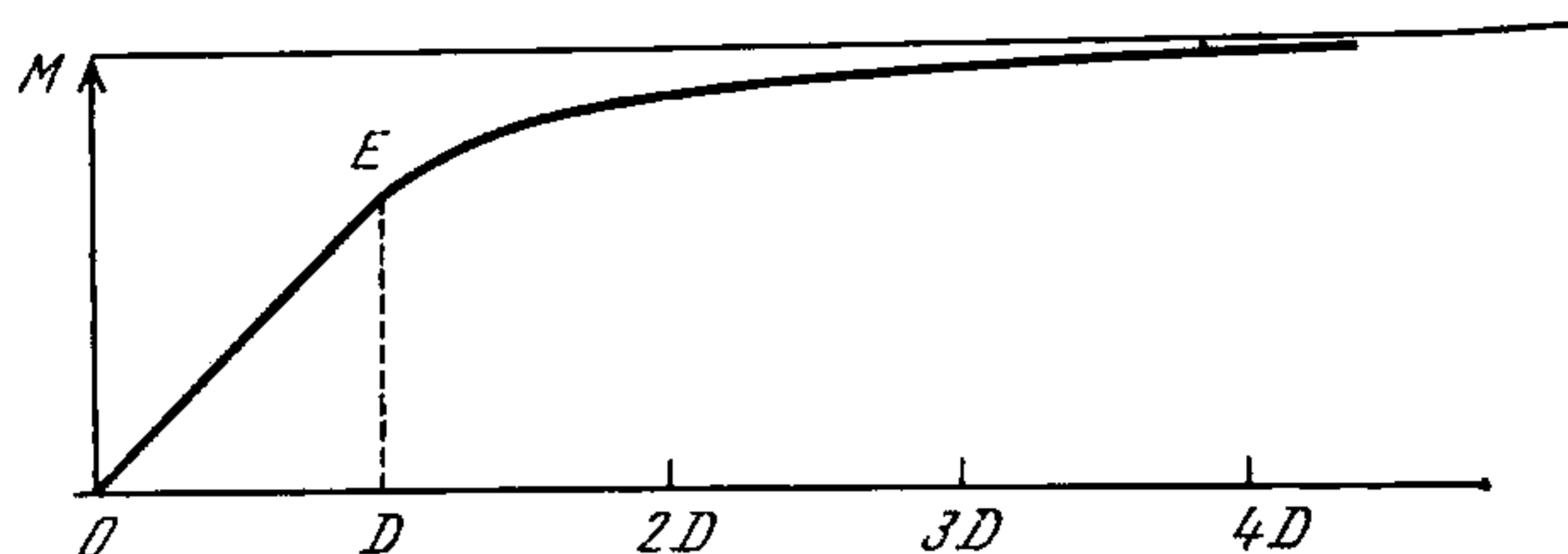


Рис. 7

достигает значения  $D$ . При дальнейшем увеличении намагничивающей силы намагниченность вместо бесконечного роста стремится к конечному пределу.

Этот закон намагниченности показан на рис. 7, где намагничивающая сила отсчитывается от точки  $O$  вправо, а намагниченность выражается вертикальной ординатой. Результаты собственных опытов Вебера дают удовлетворительное согласие с этим законом. Вероятно, однако, что значение  $D$  не одинаково для всех молекул одного и того же образца железа, поэтому переход от прямолинейного участка  $OE$  к криволинейному участку после  $E$  может происходить не столь резко, как здесь представлено.

444. Теория в таком виде не содержит учета остаточной намагниченности, существование которой обнаруживается после удаления намагничивающей силы. Поэтому я подумал, что желательно изучить, к каким результатам приведет дополнительное предположение относительно условий, при которых положение равновесия молекулы может быть смещено на постоянную величину.

Предположим, что если угол отклонения  $\beta$  меньше некоторого угла  $\beta_0$ , то ось магнитной молекулы при удалении отклоняющей силы возвращается к первоначальному положению, если же угол  $\beta$  превышает  $\beta_0$ , то при удалении отклоняющей силы ось не возвращается к первоначальному положению, а остается отклоненной на угол  $\beta - \beta_0$ , который, таким образом, может быть назван углом *установления* молекулы (permanent set).

Не следует думать, что сделанное нами предположение относительно закона молекулярного отклонения основано на точном понимании внутренней структуры тел, оно принимается нами в силу нашего невежества по части истинного положения вещей, как помощь воображению для претворения высказанных Вебером идей.

Положим

$$L = D \sin \beta_0, \quad (9)$$

<sup>5</sup> В формуле, данной Вебером (Abhandlungen der Kg. Sächs-Gesellschaft der Wissens, I, p. 572 (1852) или Pogg. Ann. LXXXVII, p. 167 (1852)) есть какая-то ошибка в окончательном выражении для этого интеграла (промежуточные выкладки не приводятся). Его формула выглядит так:

$$I = mn \frac{X}{\sqrt{X^2 + D^2}} \frac{X^4 + \frac{7}{6} X^2 D^2 + \frac{2}{3} D^4}{X^4 + X^2 D^2 + D^4}.$$

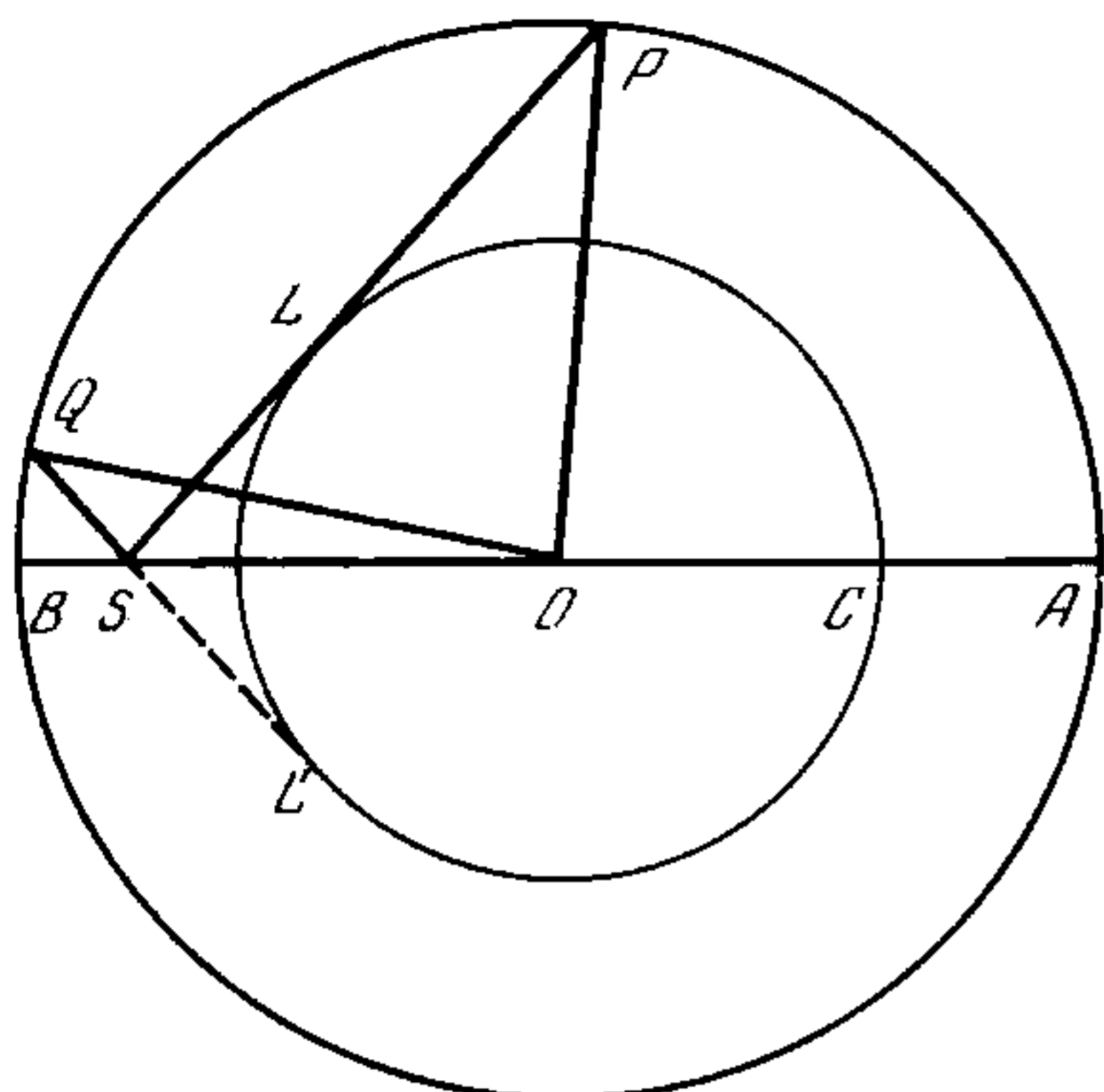


Рис. 8

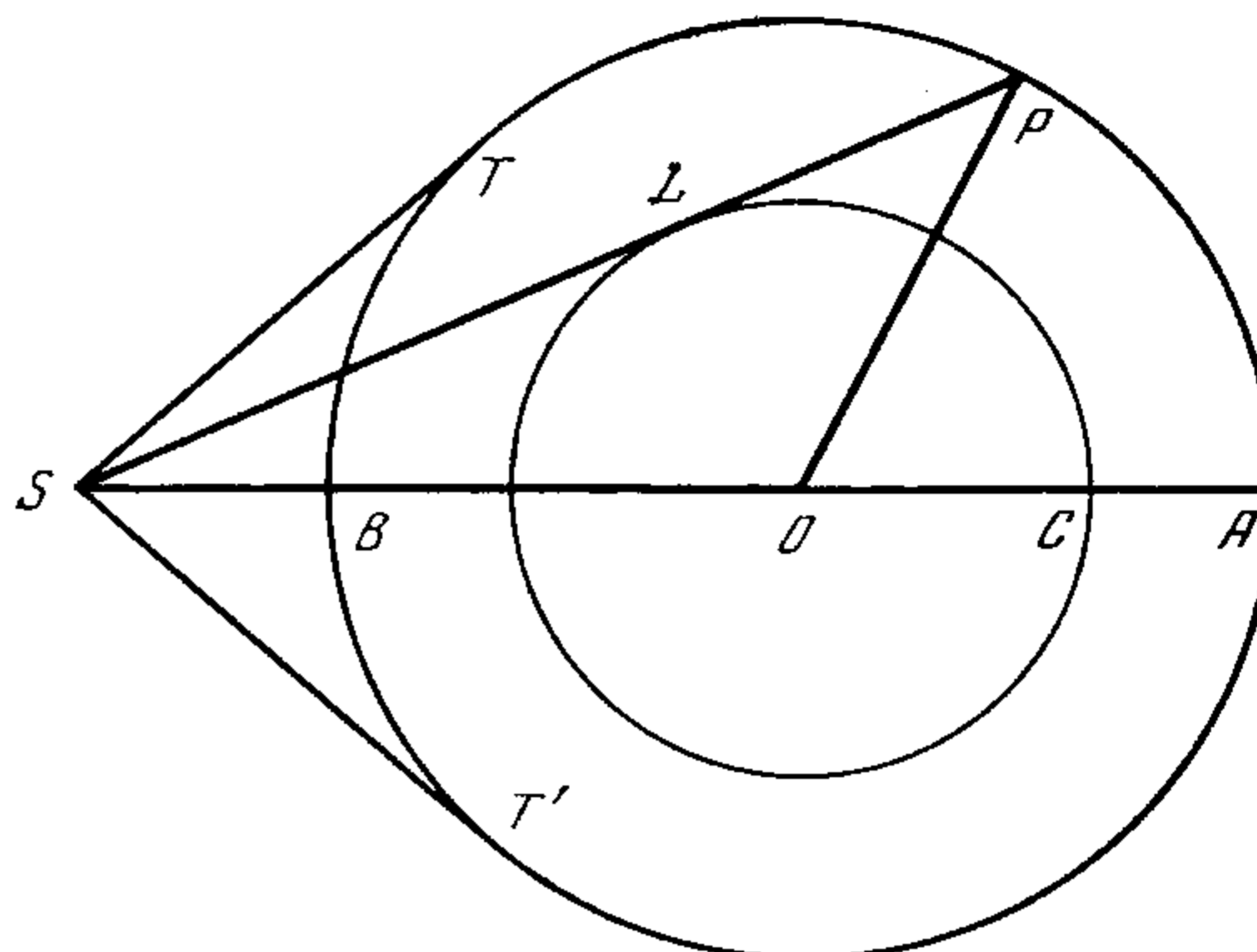


Рис. 9

тогда если крутящий момент, действующий на молекулу, меньше  $mL$ , то постоянного отклонения не возникнет, если же он больше  $mL$ , то появится постоянное изменение положения равновесия.

Чтобы проследить результат этого предположения, нарисуем сферу с центром в точке  $O$  радиусом  $OL=L$ .

Пока  $X$  меньше  $L$ , все будет происходить так, как в уже рассмотренном случае, но, когда сила  $X$  превысит  $L$ , она начнет создавать у некоторых молекул постоянное отклонение.

Возьмем случай, изображенный на рис. 8, где  $X$  больше  $L$ , но меньше  $D$ . Построим двойной конус с вершиной в точке  $S$ , касающийся сферы  $L$  и пересекающийся со сферой  $D$  в точках  $P$  и  $Q$ . Тогда, если в начальном положении ось молекулы лежит между  $OA$  и  $OP$  или между  $OB$  и  $OQ$ , она отклонится на угол, меньший  $\beta_0$ , и постоянного отклонения не возникнет. Но если ось молекулы первоначально располагалась между  $OP$  и  $OQ$ , то на нее будет действовать крутящий момент, больший  $L$ , который отклонит ее в положение  $SP$ , и после прекращения действия силы она не восстановит свое первоначальное направление, а окажется постоянно установленной в направлении  $OP$ .

Положим

$$L = X \sin \vartheta_0, \quad \text{где } \vartheta_0 = PSA \text{ или } QSB.$$

Тогда все те молекулы, оси которых согласно прежней гипотезе имели бы углы  $\vartheta$ , лежащие между  $\vartheta_0$  и  $\pi - \vartheta_0$ , будут во время действия силы  $X$  иметь угол  $\vartheta_0$ .

Следовательно, пока действует сила  $X$ , те молекулы, оси которых при отклонении лежали в пределах любой поверхности двойного конуса с углом  $\vartheta_0$  между осью и образующей, выстроятся, как и в предыдущем случае, а те молекулы, оси которых по предыдущей теории лежали бы вне этих поверхностей, получают постоянное отклонение и образуют плотное обрамление около поверхности конуса, обращенного в сторону  $A$ .

С ростом  $X$  число молекул, принадлежащих конусу, окружающему  $B$ , непрерывно уменьшается, и, когда  $X$  достигнет значения  $D$ , все молекулы будут вырваны из своих прежних положений равновесия и встроены в обрамление конуса,

окружающего  $A$ , так что при  $X$  больше  $D$  все молекулы будут образовывать либо часть конуса вокруг  $A$ , либо его обрамление [рис. 9].

После удаления силы  $X$ , если она не превышает  $L$ , все возвратится в свое исходное состояние. Если же сила  $X$  лежит между  $L$  и  $D$ , то будет существовать два конуса: один вокруг  $A$  с углом  $AOP = \vartheta_0 + \beta_0$ , другой вокруг  $B$  с углом  $BOQ = \vartheta_0 - \beta_0$ . В пределах этих конусов оси всех молекул распределены равномерно. Но молекулы, оси которых вначале располагались вне этих конусов, будут вырваны из своих исходных позиций и сформируют обрамление конуса, окружающего  $A$ .

Если  $X$  больше  $D$ , конус вокруг  $B$  полностью пропадает, а все молекулы, формировавшие его, образуют обрамление конуса вокруг  $A$  с углом отклонения  $\vartheta_0 + \beta_0$ .

445. Рассматривая этот случай тем же способом, что и раньше для интенсивности намагниченности, индуцированной возникающей во время действия силы  $X$ , приложенной к железу, ранее никогда не намагничиваемому, мы найдем:

если сила  $X$  меньше  $L$ , то  $I = \frac{2}{3} M \frac{X}{D}$ ;

если сила  $X$  равна  $L$ , то  $I = \frac{2}{3} M \frac{L}{D}$ ;

если сила  $X$  больше  $L$ , но меньше  $D$ , то

$$I = M \left\{ \frac{2}{3} \frac{X}{D} + \left( 1 - \frac{L^2}{X^2} \right) \left[ \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{X^2 - L^2}{D^2 - L^2}} \right] \right\};$$

если сила  $X$  равна  $D$ , то  $I = M \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{L^2}{D^2} \right)^{3/2} \right\}$ ;

если сила  $X$  больше  $D$ , то

$$I = M \left\{ \frac{1}{3} \frac{X}{D} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{D}{X} + \frac{(D^2 - L^2)^{3/2}}{6X^2D} - \frac{\sqrt{X^2 - L^2}}{6X^2D} (2X^2 - 3XD + L^2) \right\};$$

если сила  $X$  бесконечна, то  $I = M$ .

Пока сила  $X$  меньше  $L$ , намагниченность подчиняется прежнему закону — она пропорциональна намагничивающей силе. Как только  $X$  превысит  $L$ , намагниченность испытывает более крутой рост за счет молекул, переходящих от одного конуса к другому. Этот быстрый рост, однако, вскоре прекращается, по мере того как число молекул, формирующих отрицательный конус, уменьшается и в конце концов намагниченность достигает своего предельного значения  $M$ .

Если бы предположить, что величины  $L$  и  $D$  различны для различных молекул, то в результате различные стадии намагничивания оказались бы менее четко разграниченными.

Остаточная намагниченность  $I'$ , создаваемая намагничивающей силой  $X$  и наблюдаемая после ее удаления, принимает такие значения:

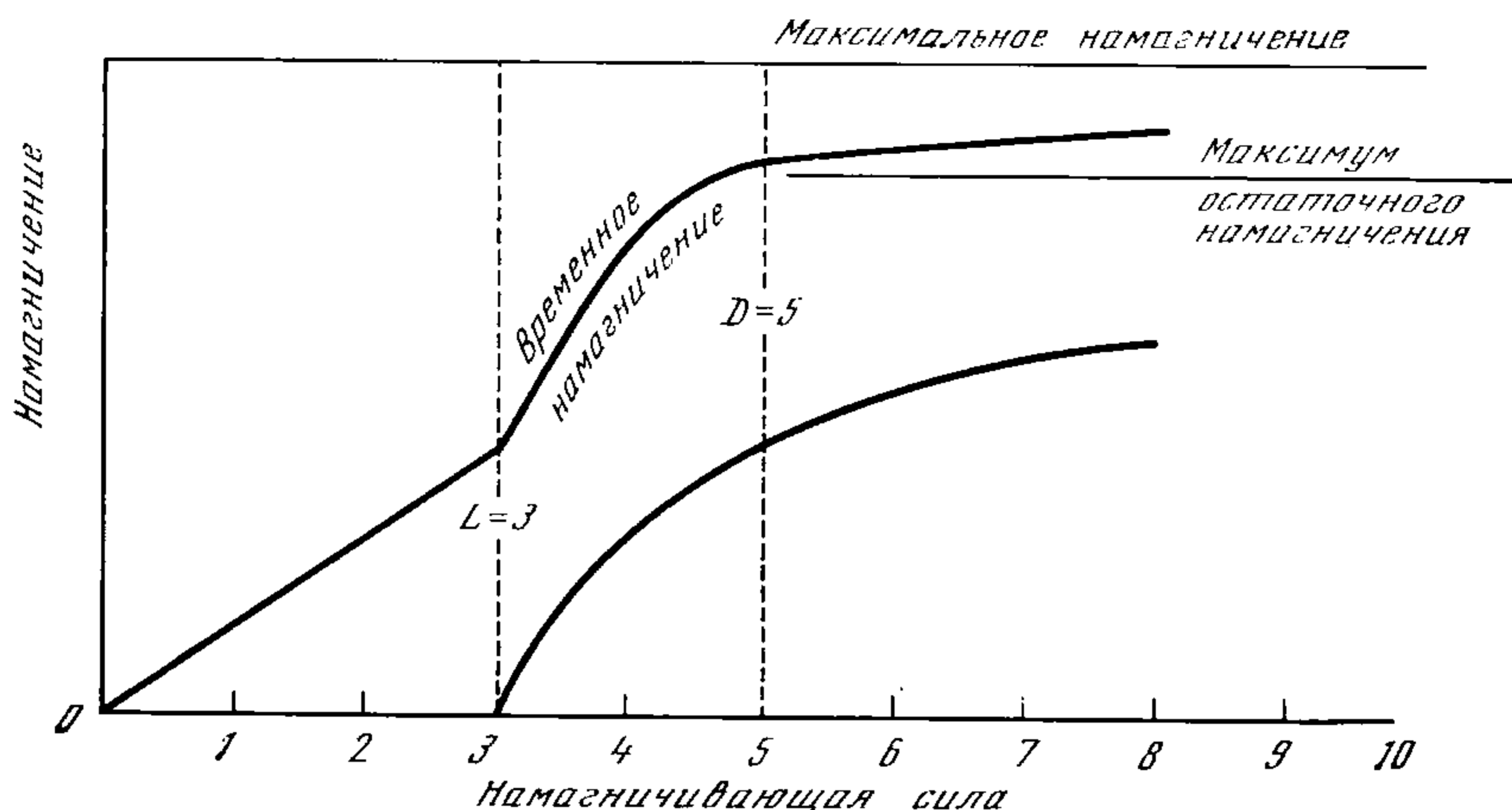


Рис. 10

если сила  $X$  меньше  $L$ , то остаточная намагниченность отсутствует;

если сила  $X$  больше  $L$ , но меньше  $D$ , то  $I' = M \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right) \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right)$ ;

если сила  $X$  равна  $D$ , то  $I' = M \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^2$ ;

если сила  $X$  больше  $D$ , то  $I' = \frac{1}{4} M \left\{1 - \frac{L^2}{XD} + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right\}^2$ ;

если сила  $X$  бесконечна, то  $I' = \frac{1}{4} M \left\{1 + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right\}^2$ .

Взяв значения  $M=1000$ ,  $L=3$ ,  $D=5$ , найдем следующие величины временно индуцированной и остаточной намагниченности:

Намагничивающая сила $X$	Индукцированная намагниченность $I$	Остаточная намагниченность $I'$	Намагничивающая сила $X$	Индукцированная намагниченность $I$	Остаточная намагниченность $I'$
0	0	0	5	837	410
1	133	0	6	864	485
2	267	0	7	882	537
3	400	0	8	897	575
4	729	280	$\infty$	1000	810

Эти результаты изображены на рис. 10.

Сначала, в пределах от  $X=0$  до  $X=L$ , кривая индуцированной намагниченности представляет собой прямую линию, затем она растет быстрее, вплоть до  $X=D$ , а с дальнейшим увеличением  $X$  приближается к своей горизонтальной асимптоте.

Кривая остаточной намагниченности начинается со значения  $X=L$  и приближается к асимптоте с ординатой  $0,81 M$ .

Следует помнить, что найденные выше значения остаточной намагниченности соответствуют случаю, когда при удалении внешней силы никаких размагничи-

вающих сил, связанных с распределением магнетизма внутри самого тела, не возникает. Следовательно, эти вычисления могут быть отнесены только к очень вытянутым продольно намагниченным телам. В случае коротких и толстых образцов остаточная намагниченность из-за реакции свободного магнетизма будет уменьшаться так же, как это происходило бы под действием обратной по направлению внешней намагничивающей силы.

**446.** Научная значимость теории подобного рода, где мы сделали так много предположений и ввели так много подбираемых констант, не может оцениваться только численным согласием с какой-либо серией экспериментов. Если в ней и есть ценность, то благодаря тому, что она позволяет нам воссоздать некоторую мысленную картину того, что происходит в куске железа в процессе его намагничивания. Чтобы проверить теорию, применим ее к случаю, когда к куску железа, ранее подвергнутому действию намагничивающей силы  $X_0$ , вновь прикладывается намагничивающая сила  $X_1$ .

Если новая сила  $X_1$  действует в том же направлении, в котором действовала сила  $X_0$  (мы будем называть его положительным), то при значениях, меньших  $X_0$ , она не вызовет никакого постоянного установления осей молекул, а при удалении  $X_1$  остаточная намагниченность окажется такой же, какая была произведена силой  $X_0$ . Если же сила  $X_1$  превысит  $X_0$ , то эффект, вызванный ею, будет таким же, как если бы сила  $X_0$  не действовала.

Предположим теперь, что сила  $X_1$  действует в отрицательном направлении, причем  $X_0 = L \operatorname{cosec} \vartheta_0$ , и  $X_1 = -L \operatorname{cosec} \eta_1$ .

При увеличении абсолютной величины  $X_1$  угол  $\vartheta_1$  уменьшается. Под действием силы  $X_1$  первыми получают постоянное отклонение те молекулы, которые образуют обрамление конуса вокруг  $A$ , их угол до отклонения равен  $\vartheta_0 + \beta_0$ .

Как только угол  $\vartheta_1 - \beta_0$  станет меньше  $\vartheta_0 + \beta_0$ , начнется процесс размагничивания. Поскольку в этот момент  $\vartheta_1 = \vartheta_0 + 2\beta_0$ , то сила  $X_1$ , требуемая для начала процесса размагничивания, оказывается меньше силы  $X_0$ , которая произвела намагничивание.

Если бы значения  $D$  и  $L$  были одинаковы для всех молекул, то малейшее увеличение  $X_1$  сорвало бы весь слой молекул, оси которых имели наклон  $\vartheta_0 + \beta_0$ , и повернуло бы их в положение с наклоном  $\vartheta_0 + \beta_1$  относительно отрицательной оси направления  $OB$ .

Действительное размагничивание происходит не так мгновенно, но все же достаточно быстро, чтобы было допустимо считать его некоторым подтверждением данного варианта процесса.

Предположим теперь, что при должном значении обратной силы  $X_1$  можно после удаления ее получить полностью размагниченный кусок железа.

Оси молекул при этом уже не будут расположены безразлично к любому направлению, как это имело место в куске железа, никогда не подвергавшегося намагничиванию. Они распределятся по трем группам:

(1). В пределах конуса с половинным углом  $\vartheta_1 - \beta_0$ , окружающего положительный полюс, оси молекул сохраняют свои первоначальные положения.

(2). То же самое и в пределах конуса с половинным углом  $\vartheta_0 - \beta_0$ , окружающего отрицательный полюс.

(3). Оси всех остальных молекул образуют коническую поверхность, окружающую отрицательный полюс, угол наклона их равен  $\vartheta_1 + \beta_0$ .



При значениях  $X_0$ , больших  $D$ , вторая группа отсутствует. При  $X_1$  больше  $D$  отсутствует также и первая группа.

Таким образом, состояние этого железа, хотя и кажущегося размагниченным, отличается от состояния куска железа, ни разу не подвергавшегося намагничению.

Чтобы показать это, рассмотрим влияние намагничивающей силы  $X_2$ , действующей в положительном или отрицательном направлениях. Эффект постоянного намагничивания будет обусловлен прежде всего действием силы на молекулы третьей группы, оси которых составляют углы  $\vartheta_1 + \beta_0$  с отрицательной осью.

Если сила  $X_2$  действует в отрицательном направлении, она начнет приводить к эффекту постоянного намагничивания, как только угол  $\vartheta_2 + \beta_0$  окажется меньшим, чем  $\vartheta_1 + \beta_0$ , т. е. как только  $X_2$  превысит  $X_1$ . Если же сила  $X_2$  действует в положительном направлении, она вновь начнет намагничивать железо, как только угол  $\vartheta_2 - \beta_0$  станет меньше угла  $\vartheta_1 + \beta_0$ , т. е. начиная с  $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2\beta_0$ , или пока сила  $X_2$  все еще много меньше, чем  $X_1$ .

Таким образом, из сделанной нами гипотезы, по-видимому, вытекает следующее.

Если кусок железа был намагничен силой  $X_0$ , его остаточная намагниченность не может быть увеличена без приложения к нему силы, превышающей  $X_0$ . Для уменьшения остаточной намагниченности достаточно приложить в противоположном направлении силу, меньшую чем  $X_0$ .

Если железо полностью размагничено обратной силой  $X_1$ , оно не может быть намагничено в противоположном направлении без приложения к нему силы, большей чем  $X_1$ , но для повторного намагничивания железа в первоначальном направлении достаточно положительной силы, меньшей чем  $X_1$ .

Эти результаты согласуются с тем, что было действительно обнаружено Ритчи<sup>6</sup>, Якоби<sup>7</sup>, Марианини<sup>8</sup> и Джоулем<sup>9</sup>.

Очень полные данные для отношения намагниченности железа и стали к магнитным силам и механическим напряжениям содержатся в книге Видемана «Гальваника». Подробно сравнивая эффекты намагничивания и кручения, он показал, что идеи упругости и пластичности, заимствованные нами из опытов с упругими (временно возникающими) и неупругими (постоянными) скручиваниями проволок, могут быть приложены с равной приемлемостью к индуцированной (временно возникающей) и постоянной намагниченностям железа и стали.

447. Матт्यूччи<sup>10</sup> обнаружил, что растяжение стержня из твердого железа, производимое во время действия намагничивающей силы, увеличивает индуцированную намагниченность стержня, что было подтверждено Вертхаймом. В случае стержней из мягкого железа магнетизм при растяжении уменьшается.

Постоянный магнетизм железного стержня увеличивается при его растяжении и уменьшается при сжатии.

<sup>6</sup> *Phil. Mag.*, 3, 1833.

<sup>7</sup> *Pogg. Ann.*, 31, 367, 1834.

<sup>8</sup> *Ann. de Chimie et de Physique*, 16, p. 436 and 448, 1846.

<sup>9</sup> *Phil. Trans.*, 1856, p. 287.

<sup>10</sup> *Ann. de Chimie et de Physique*, 53, p. 385, 1858.

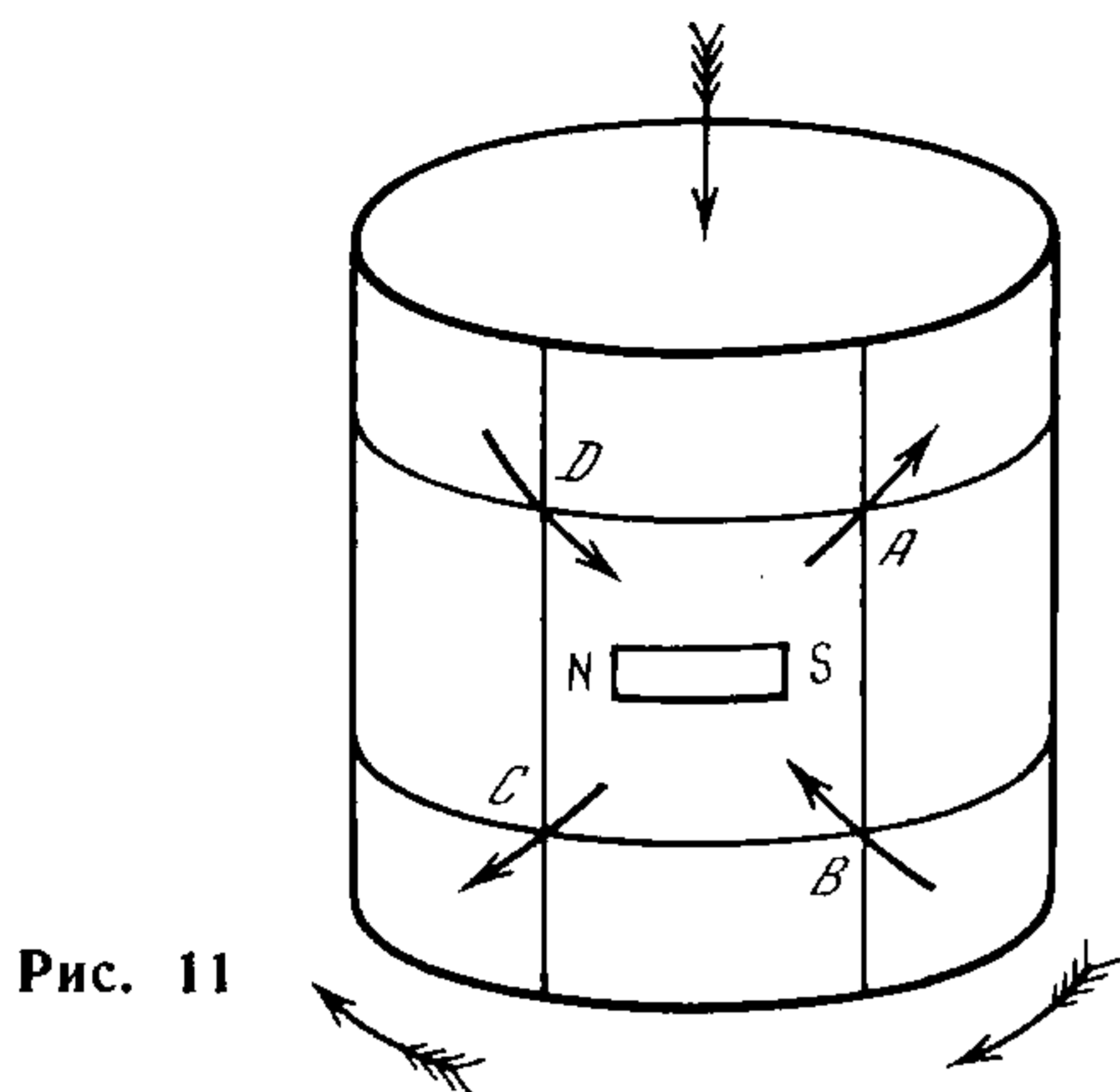


Рис. 11

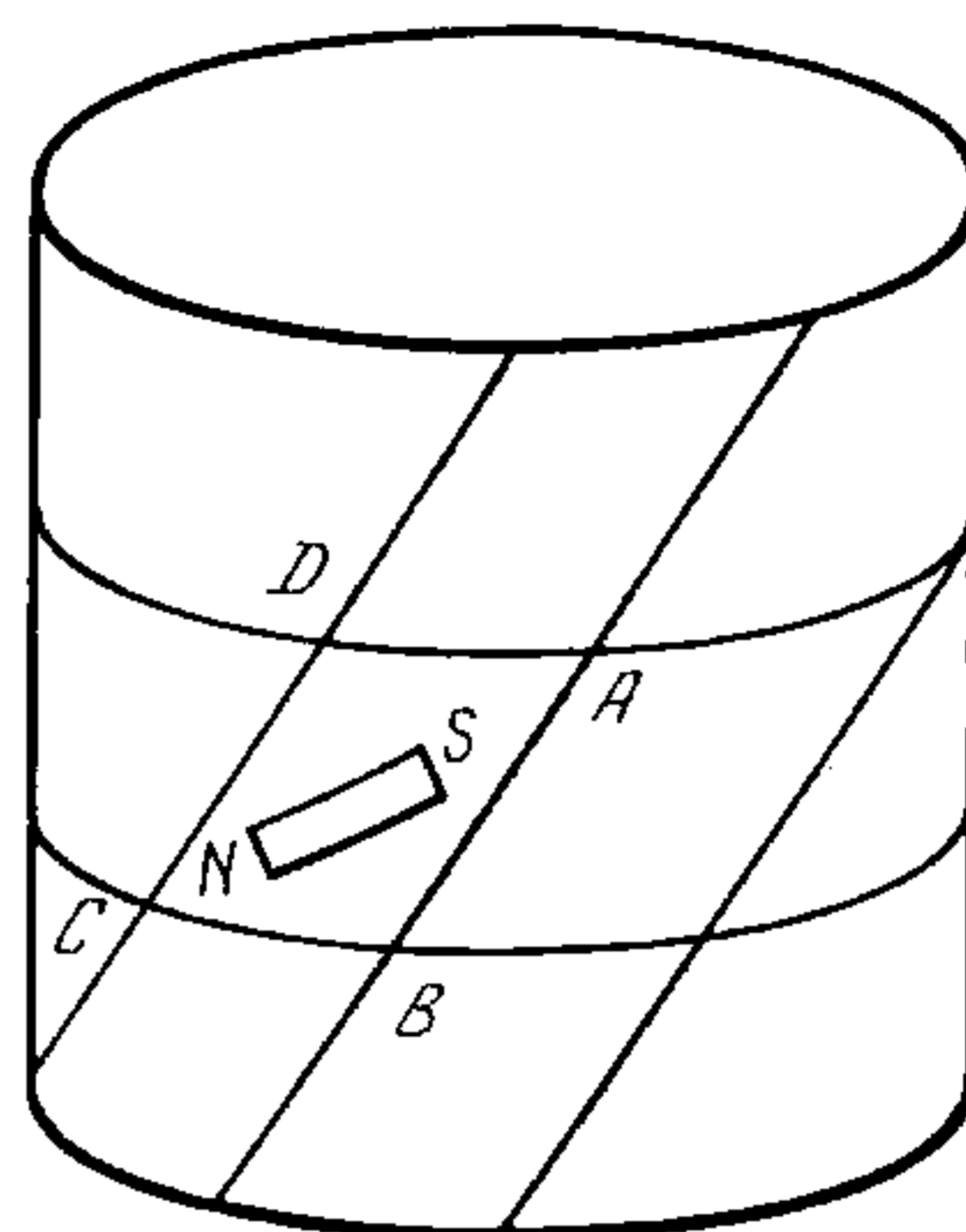


Рис. 12

В частности, если кусок железа, первоначально намагниченный в одном направлении, затем растягивается в другом, то направление намагниченности в нем стремится сблизиться с направлением растяжения. Если его сжимать, то направление намагниченности стремится стать нормальным относительно направления сжатия.

Это объясняет результаты эксперимента Видемана. По вертикальной проволоке пропускался ток сверху вниз. Если во время прохождения тока или после того, как он прекратился, проволоку скрутить в направлении правого винта, нижний конец становится северным полюсом.

Здесь ток, текущий вниз, намагничивает каждую часть проволоки в тангенциальном направлении, как это показано на рис. 11 буквами *NS*.

Скручивание проволоки по правому винту приводит к тому, что участок *ABCD* оказывается растянутым по диагонали *AC* и сжатым по диагонали *BD* (см. рис. 12). Поэтому направление намагниченности стремится приблизиться к *AC* и удалиться от *BD*, в результате чего нижний конец становится северным полюсом, а верхний — южным.

#### *Влияние намагниченности на размеры магнита*

448. В 1842 г. Джоуль обнаружил <sup>11</sup>, что железный стержень удлиняется, когда он становится магнитным из-за электрического тока, протекающего в окружающей его катушке. Впоследствии, помещая стержень в стеклянную трубку с водой, он показал <sup>12</sup>, что объем железа при намагничивании не увеличивается, и сделал вывод, что поперечные размеры сокращаются.

Наконец, он пропустил электрический ток в прямом направлении вдоль оси железной трубки и в обратном направлении по ее наружной части; трубка, таким образом, превратилась в замкнутый магнитный соленоид с намагниченностью, направленной под прямыми углами к оси трубки. Оказалось, что длина оси трубки в этом случае уменьшилась.

<sup>11</sup> Sturgeon's *Annals of Electricity*, vol. VIII, p. 219.

<sup>12</sup> *Phil. Mag.*, XXX, 1847.

Он нашел, что железный прут, к которому приложено продольное давление, также удлиняется при намагничивании. Однако, если на прут оказывается значительное продольное растяжение, действие намагничивания состоит в укорочении прута.

Это относится к проволоке диаметром четверть дюйма, растянутой весом более 600 фунтов.

В случае проволоки из твердой стали влияние намагничивающей силы сводилось к укорочению проволоки независимо от того, подвергалась она растяжению или сжатию. Изменение длины имело место только в течение времени действия намагничивающей силы и не наблюдалось под влиянием постоянной намагниченности стали.

Джоуль определил, что удлинение железных проволок примерно пропорционально квадрату истинной намагниченности, поэтому первое действие размагничивающего тока состояло в укорачивании проволоки.

С другой стороны, он нашел, что эффект укорачивания растянутой железной проволоки или стали меняется как произведение намагниченности на намагничивающий ток.

Видеман нашел, что если по вертикальной проволоке, намагниченной южным полюсом кверху, пропустить сверху вниз электрический ток, то нижний, свободно подвешенный конец проволоки скрутится по часовой стрелке, если смотреть сверху, или, другими словами, проволока окажется скрученной как правый винт, если соотношение между продольным током и намагничивающим током является правовинтовым.

В этом случае результирующая намагниченность, обусловленная как действием тока, так и существовавшей ранее намагниченностью, будет направлена по правому винту вокруг проволоки. Следовательно, скручивание будет указывать на то, что железо при намагничивании расширяется в направлении намагниченности и сжимается в направлении, ей перпендикулярном. Это согласуется с результатами Джоуля.

Дальнейшее развитие теории намагниченности см. в п. 832—845.

## ГЛАВА VII

### МАГНИТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

**449.** Основные магнитные измерения состоят в определении магнитной оси и магнитного момента магнита, а также в определении направления и величины магнитной силы в данном месте.

Так как эти измерения обычно выполняются вблизи земной поверхности, то на магниты всегда действуют сила тяжести и земной магнетизм, а поскольку магниты изготавливаются из стали, их магнетизм является частично постоянным и частично индуцированным. Постоянная намагниченность меняется при изменении температуры, при сильной индукции и резких ударах; индуцированная намагниченность меняется при любой вариации внешней магнитной силы.

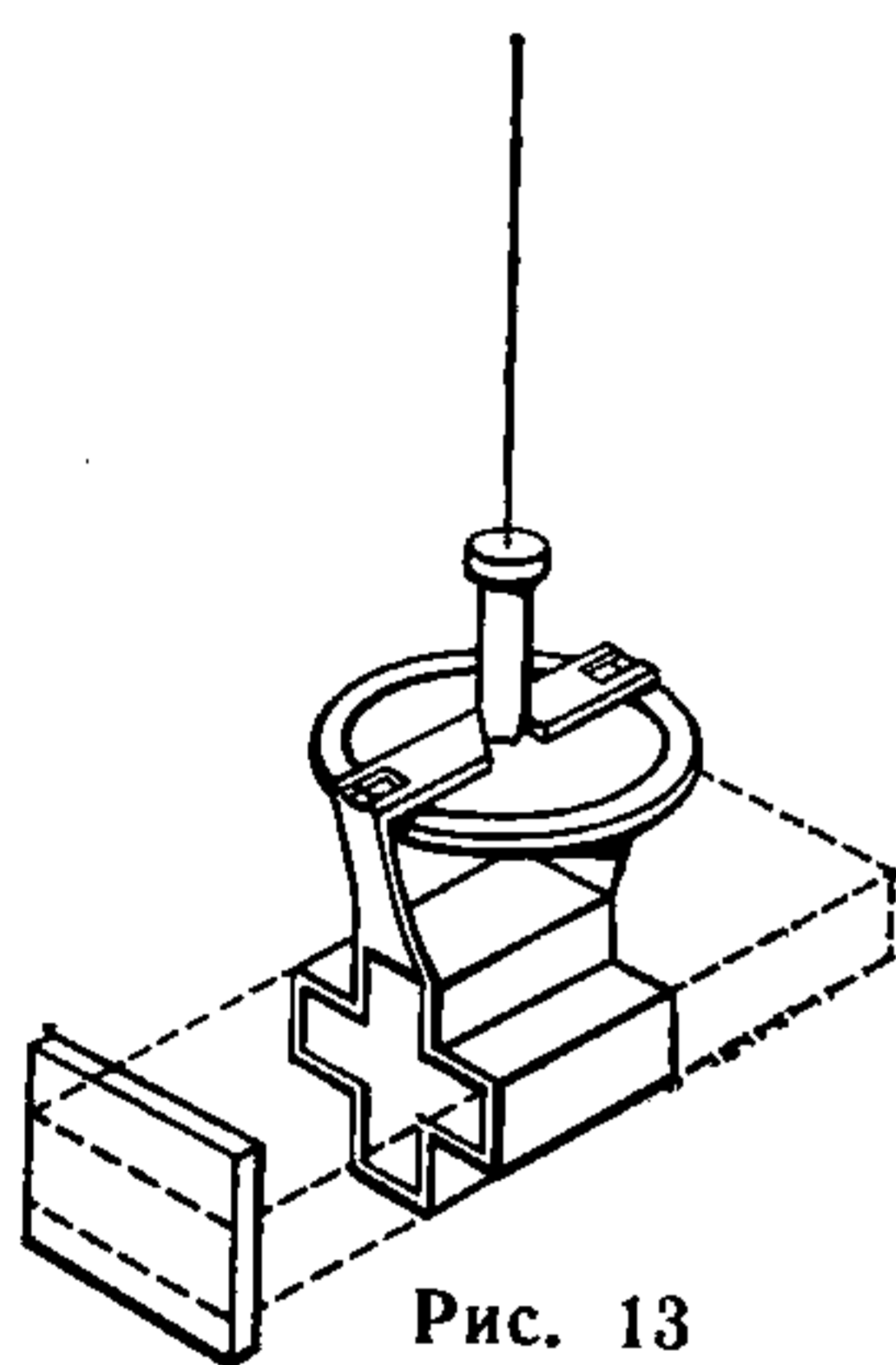
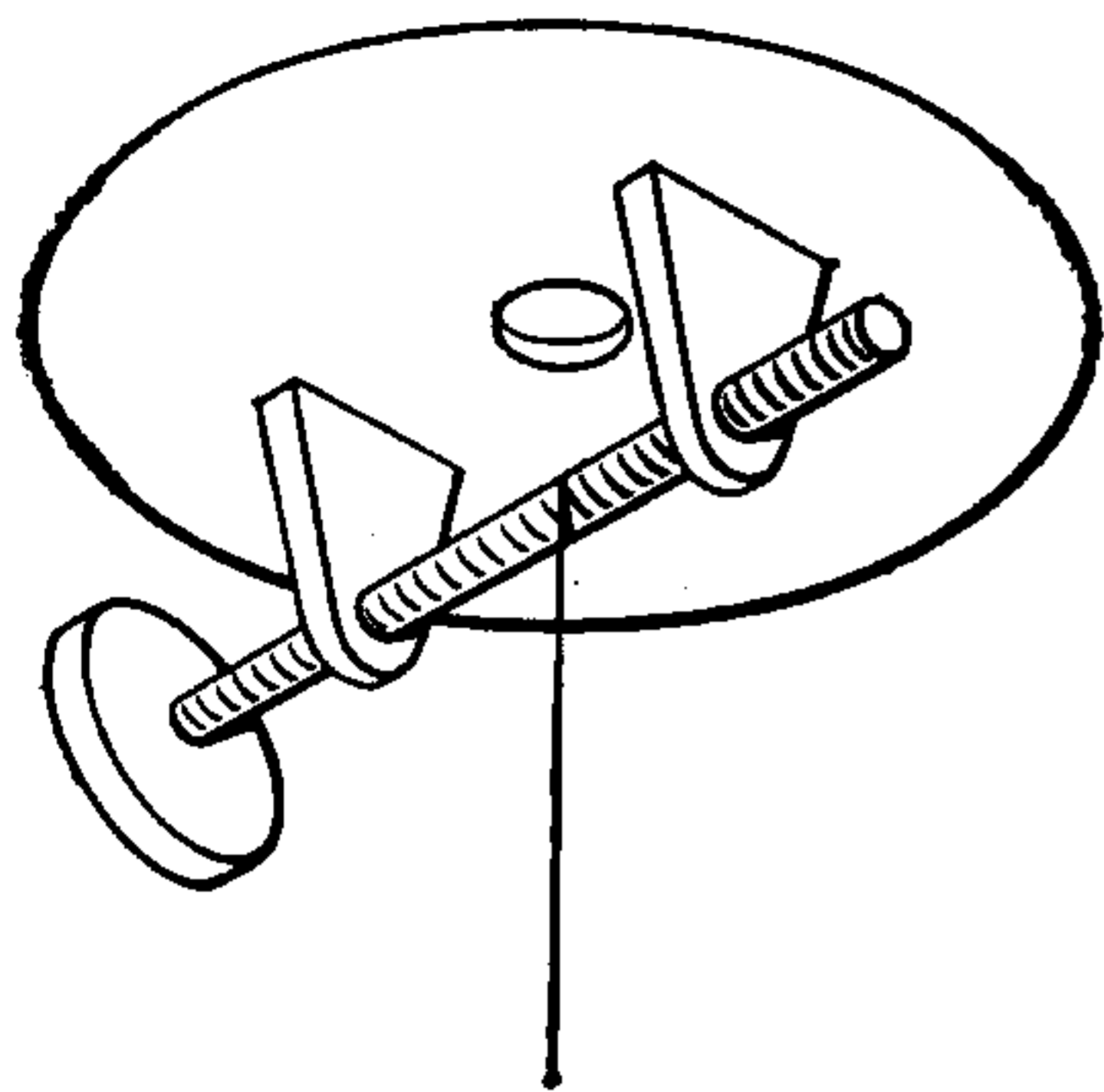


Рис. 13

Для наблюдения действующих на магнит сил удобнее всего сделать его свободно вращающимся вокруг вертикальной оси. В обычном компасе это достигается путем балансировки магнита на вертикальном стержне. Чем тоньше острие стержня, тем меньше момент трения, препятствующий действию магнитной силы. Для более точных наблюдений магнит подвешивается на нити, составленной из незакрученного шелкового волокна, одиночного или удвоенного в нужное число раз так, чтобы на каждое из параллельных волокон, образующих эту нить, приходилась по возможности одинаковая доля веса. У такой нити сила закручивания намного меньше, чем у металлической проволоки равной натяженности, и она может быть вычислена через измеряемый азимут магнита, что невозможно в случае силы, возникающей из-за трения об острие стержня.

Нить подвеса можно поднимать или опускать, поворачивая горизонтальный винт, работающий в неподвижной гайке. Нить намотана вдоль нарезки винта так, что при повороте винта она всегда продолжает висеть вдоль одной и той же вертикальной линии.

К нити подвеса прикреплен небольшой градуированный круг, называемый поворотным кругом, а также хомутик с указателем, который можно совместить с любым наперед заданным делением на поворотном круге. Форма хомутика позволяет укрепить в нем магнитный брусок так, чтобы ось магнита была горизонтальной и любая из его четырех поверхностей могла быть обращена кверху.

Для установления нуля угла поворота в хомутик помещается немагнитное тело одинакового веса с магнитом и отмечается положение поворотного круга в равновесии [рис. 13].

Сам по себе магнит — это кусок закаленной стали. Согласно Гауссу и Веберу, его длина должна быть по крайней мере в восемь раз больше максимального поперечного размера. Это необходимо, если наиболее важным соображением считать постоянство магнитной оси в пределах магнита. Когда требуется безынерционность, магнит должен быть короче; для того чтобы наблюдать резкие изменения магнитной силы, лучше даже использовать поперечно намагниченный брусок, подвешенный вертикально<sup>1</sup>.

450. Магниту придается устройство для определения его угловой координаты. Для обычных целей на концах магнита делаются отметки, а под магнитом размеща-

<sup>1</sup> Joule, *Proc. Phil. Soc., Manchester*, Nov. 29, 1864.

ется градуированный круг, по которому их положение считывается глазом, находящимся в плоскости нити подвеса и острия стрелки.

Для более точных наблюдений к магниту прикрепляется плоское зеркальце, нормаль к которому как можно точнее совпадает с осью намагниченности. Этот метод принят Гауссом и Вебером.

При другом методе на одном конце магнита помещается линза, а на другом — шкала, нанесенная на стекло, причем расстояние от линзы до шкалы равно главному фокусному расстоянию линзы. Прямая линия, соединяющая нуль шкалы с оптическим центром линзы, должна как можно точнее совпадать с магнитной осью.

Эти оптические методы определения угловой координаты подвешенного прибора играют важную роль во многих физических исследованиях, поэтому мы здесь рассмотрим их математическую теорию сразу для всех случаев.

### *Теория зеркального метода*

Будем считать, что прибор, угловое положение которого необходимо измерить, может поворачиваться вокруг вертикальной оси. Обычно этой осью является нить или проволока, на которой он подвешен. Зеркало должно быть настолько плоским, чтобы миллиметровая шкала отчетливо просматривалась при отражении с расстояния в несколько метров.

Нормаль, выходящая из середины зеркала, должна проходить через ось подвеса и быть строго горизонтальной. Мы будем называть ее линией визирования (коллимации) прибора.

Грубо установив среднее направление линии визирования для предстоящих экспериментов, поместим на удобном расстоянии перед зеркалом телескоп чуть выше уровня зеркала.

Телескоп может перемещаться в вертикальной плоскости; он направлен в сторону нити подвеса прямо над зеркалом; на линии визирования устанавливается неподвижная отметка на расстоянии от объектива, равном удвоенному расстоянию от него до зеркала. Аппаратуру по возможности следует разместить так, чтобы эта отметка была расположена на стене или на другом неподвижном предмете. Для того чтобы видеть в телескопе одновременно и отметку и нить подвеса, можно надеть на объектив насадку со щелью вдоль вертикального диаметра, снимаемую во время других наблюдений. Затем телескоп регулируется вплоть до получения в его фокусе отчетливого совмещения отметки с вертикальной проволочной рисккой.

Под телескопом подвешивается отвес, линия которого проходит прямо перед оптическим центром объектива. Ниже телескопа, непосредственно за отвесом устанавливается равномерная шкала перпендикулярно плоскости, проходящей через отметку, нить подвеса и линию отвеса. Сумма высот над полом, на которых расположены шкала и объектив, должна равняться удвоенной высоте зеркала. Если теперь телескоп направить на зеркало, наблюдатель увидит отражение шкалы. Когда участок шкалы, в котором ее пересекает линия отвеса, окажется в телескопе, совпадающим с вертикальной проволочной рисккой телескопа, линия визирования зеркала совместится с плоскостью, проходящей через отметку и оптический центр объектива. При совпадении вертикального провода с любым другим делением шкалы угловое положение линии визирования находится следующим образом [рис. 14].

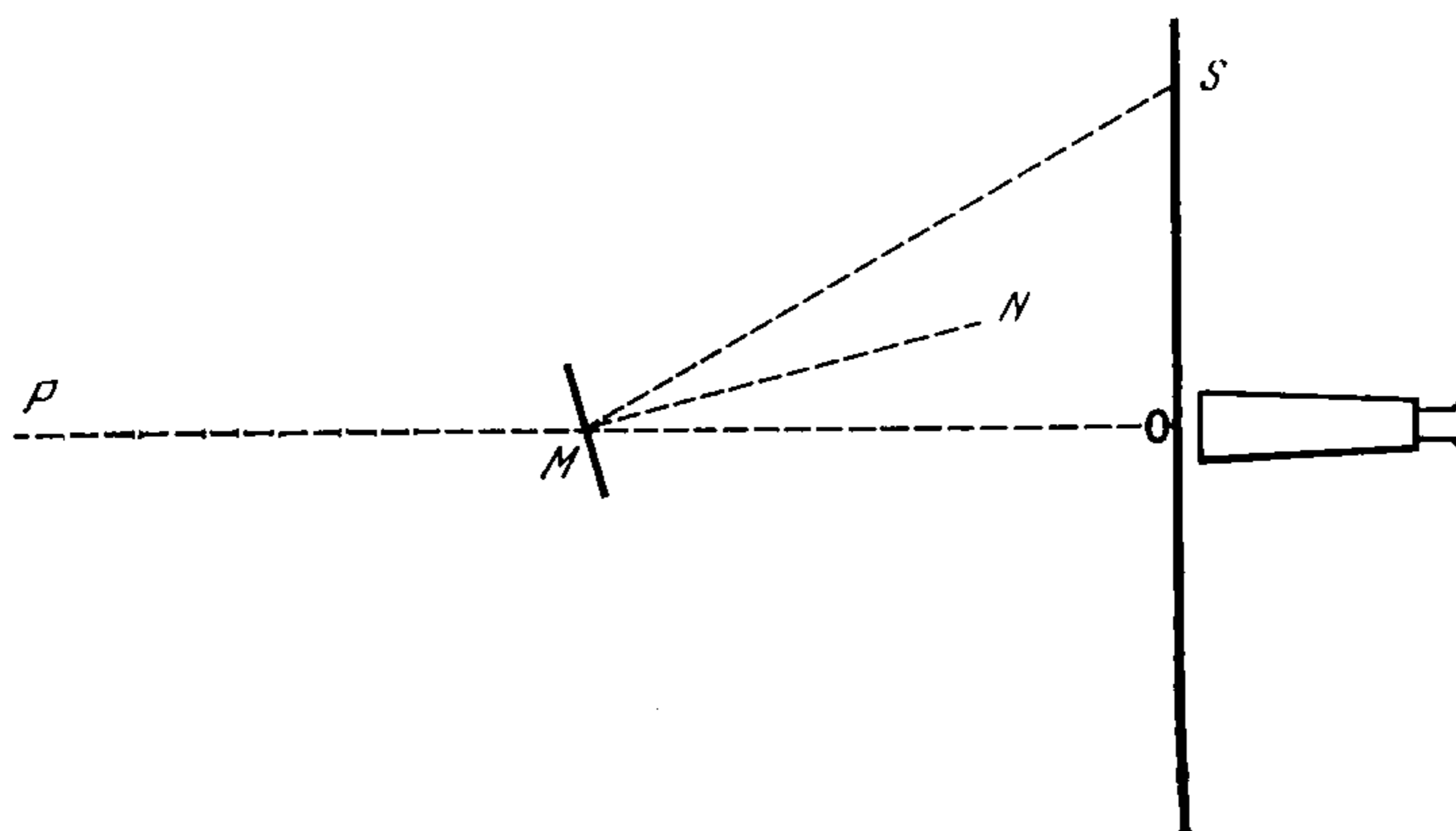


Рис. 14

Примем, что плоскость бумаги горизонтальна, и будем проектировать на нее разные точки. Пусть  $O$  — центр объектива телескопа, а  $P$  — фиксированная отметка, причем точка  $P$  и вертикальный провод фокально сопряжены по отношению к объективу. Пусть  $M$  — точка, в которой  $OP$  пересекает плоскость зеркала, а  $MN$  — нормаль к зеркалу. Тогда  $OMN = \vartheta$  — угол, который линия визирования образует с фиксированной плоскостью. Проведем в плоскости  $OM$  и  $MN$  линию  $MS$ , такую, что  $NMS = OMN$ , тогда  $S$  будет тем местом шкалы, который при отражении в зеркале совпадет с вертикальным проводом телескопа. Далее, поскольку линия  $MN$  горизонтальна, проекции углов  $OMN$  и  $NMS$  на плоскость чертежа между собой равны, а угол  $OMS = 2\vartheta$ . Следовательно,  $OS = OM \operatorname{tg} 2\vartheta$ .

Мы должны, таким образом, измерить  $OM$  в единицах делений шкалы; тогда, если  $s_0$  — деление шкалы, совпадающее с линией отвеса, а  $s$  — наблюдаемое деление, то  $s - s_0 = OM \operatorname{tg} 2\vartheta$ , откуда можно найти  $\vartheta$ . При измерении  $OM$  следует помнить, что в случае стеклянного зеркала с посеребренной задней стенкой видимая отражающая поверхность находится позади фронтальной поверхности стекла на расстоянии  $= t/\mu$ , где  $t$  — толщина стекла,  $\mu$  — показатель преломления.

Мы должны также помнить, что, когда линия подвеса не проходит через точку отражения, положение точки  $M$  будет зависеть от угла  $\vartheta$ . Следовательно, желательно, если это возможно, добиваться совмещения центра зеркала с линией подвеса.

Желательно также, особенно при измерении больших угловых перемещений, наносить шкалу на вогнутую цилиндрическую поверхность, ось которой совпадает с линией подвеса. Углы в этом случае сразу измеряются в долях окружности без обращения к таблице тангенсов. Шкалу следует устанавливать очень тщательно, следя за тем, чтобы ось цилиндра совпадала с нитью подвеса. Числа на шкале от ее начала до конца должны возрастать в одном и том же направлении во избежание считывания отрицательных величин. На рис. 15 воспроизведена средняя часть шкалы, которую следует использовать с зеркалом и перевертывающим изображением телескопом.

Описанный метод измерений является наилучшим для медленных движений. Наблюдатель сидит у телескопа и видит изображение шкалы, движущееся вправо или влево мимо вертикальной проволочной риски телескопа. Имея рядом с собой

часы, он может заметить момент, когда данное деление шкалы проходит мимо риски, или отметить деление шкалы, которое проходит в данный момент времени, а может также засекают крайние положения каждой осцилляции.

При более быстрых движениях считывание делений, кроме моментов остановок в крайних точках осцилляций, становится уже невозможным. Однако, если в определенном месте шкалы поместить яркую метку, можно засечь момент прохождения этой метки.

В случае очень легкой аппаратуры движение под действием переменных сил становится настолько резким и быстрым, что наблюдение через телескоп оказывается бесполезным. В этом случае наблюдатель смотрит прямо на шкалу и следит

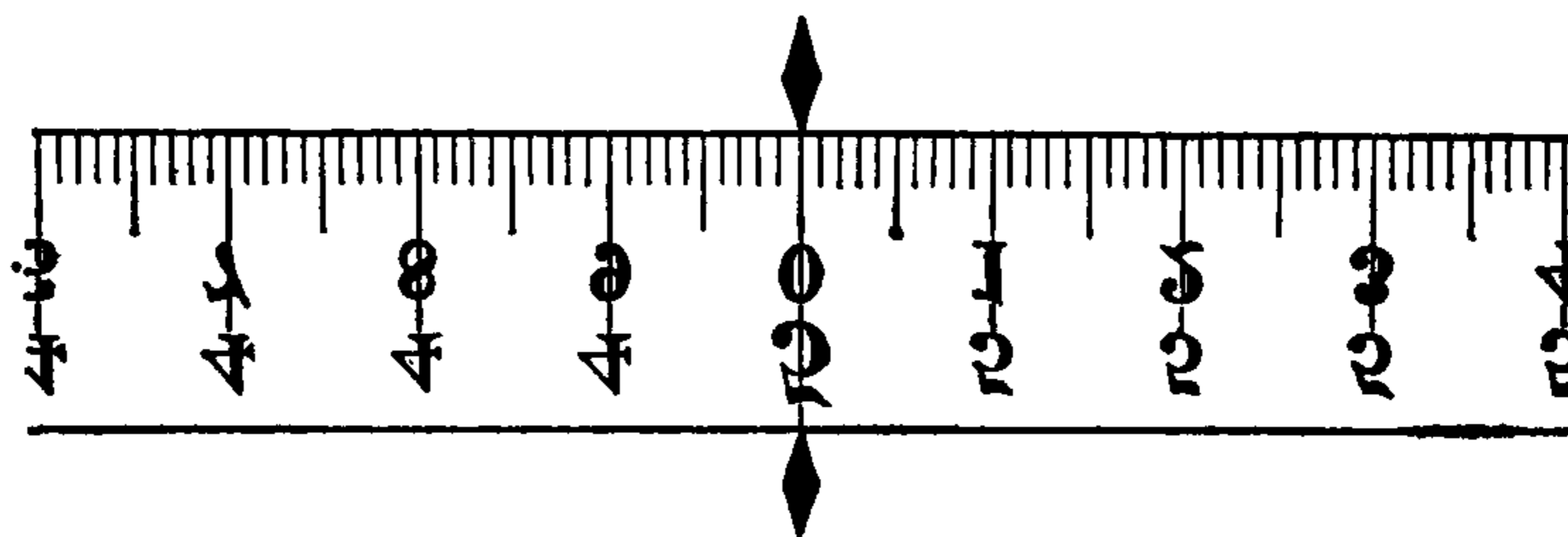


Рис. 15

за движением изображения вертикального провода, отбрасываемого на шкалу с помощью лампы.

Поскольку изображение шкалы, отраженное в зеркале и преломленное объективом, совпадает с вертикальной риской, ясно, что при достаточной освещенности будет видно изображение вертикальной риски, совпадающее со шкалой. Для таких наблюдений следует затемнить комнату и направить сконцентрированные лучи света на вертикальную проволочную риску в направлении объектива. При этом на шкале покажется яркое световое пятно, пересеченное тенью провода. За ее движением можно следить глазом, замечая положение шкалы, на котором она останавливается, и потом считывая его не спеша. Если необходимо засечь момент прохождения светлым пятном данной точки шкалы, можно закрепить в ней булавку или яркую металлическую проволочку, которая давала бы вспышку в момент прохождения пятна.

Заменяя крестовидную проволоку на небольшое отверстие в диафрагме, можно сделать изображение маленьким светлым пятнышком, движущимся по шкале влево или вправо; а если вместо шкалы поместить цилиндр, покрытый фотографической бумагой, и вращать его с помощью часового механизма вокруг горизонтальной оси, то пятно будет вычерчивать кривую, которую потом можно сделать видимой. Каждая абсцисса этой кривой будет соответствовать определенному моменту времени, а ордината — угловому положению зеркала в этот момент. Именно так устроена автоматическая система непрерывной записи всех элементов земного магнетизма в обсерватории Кью (Kew), а также в других обсерваториях.

В некоторых случаях обходятся и без телескопа; тогда вертикальная проволока подсвечивается лампой, помещенной позади нее, а вогнутое зеркало формирует на шкале изображение проволоки в виде темной линии, пересекающей светлое пятно.

451. В портативном приборе, имеющемся в Кью, магнит сделан в виде трубки, на одном конце которой вставлена линза, а на другом — стеклянная шкала, находящаяся в главном фокусе линзы. Свет падает на шкалу сзади и, проходя через линзу, попадает в телескоп.

Поскольку шкала находится в главном фокусе линзы, лучи от любого деления шкалы выходят из линзы параллельными; если телескоп отрегулирован для наблюдения небесных объектов, то шкала будет оптически совпадать с крестом телескопа. Если данное деление шкалы совпадет с центром креста телескопа, линия, соединяющая это деление с оптическим центром линзы, должна быть параллельна линии визирования телескопа. Фиксируя магнит и передвигая телескоп, мы можем установить угловую цену делений шкалы, а затем, когда магнит подвешен и положение телескопа известно, мы можем определять положение магнита в любой момент, считывая показания с деления шкалы, совпадающего с крестом.

Телескоп укрепляется на плече с центром на линии нити подвеса, а его положение отсчитывается верньером на азимутальном круге инструмента.

Такое устройство удобно для небольших портативных магнитометров, где вся аппаратура устанавливается на одной треноге, а осцилляции, связанные со случайными возмущениями, быстро спадают.

*Определение направления оси магнита  
и направления земного магнетизма*

452. Предполагая, что магнитный брусок имеет форму параллелепипеда, построим внутри него систему координат с осью  $z$ , направленной вдоль бруска, и осями  $x$  и  $y$  — перпендикулярно его боковым сторонам.

Обозначим через  $l, m, n$  и через  $\lambda, \mu, \nu$  углы, которые составляют с этими осями соответственно магнитная ось и линия визирования.

Пусть  $M$  — магнитный момент магнита,  $H$  и  $Z$  — горизонтальная и вертикальная компоненты земного магнетизма,  $\delta$  — азимутальный угол направления  $H$ , отсчитываемый от севера к западу.

Обозначим также через  $\zeta$  наблюдаемый азимут линии визирования,  $\alpha$  — азимут хомутика,  $\beta$  — показание поворотного круга; тогда разность  $\alpha - \beta$  будет азимутом нижнего конца нити подвеса.

Момент сил, связанный с кручением нити и направленный в сторону уменьшения  $\alpha$ , равен  $\tau(\alpha - \beta - \gamma)$ , где  $\tau$  — коэффициент кручения, зависящий от свойств нити,  $\gamma$  — значение  $\alpha - \beta$ , при котором момент равен нулю.

Чтобы определить угол  $\lambda_x$  между осью  $x$  и проекцией линии визирования на плоскость  $xz$ , установим хомутик так, чтобы ось была вертикальна и направлена вверх, ось  $z$  — к северу и  $x$  — к западу, и отметим азимут линии визирования  $\zeta$ . Затем вынем магнит, повернем его на угол  $\pi$  вокруг оси  $z$  и в этом перевернутом положении снова поместим его в хомутик, засечем  $\zeta'$  — азимут линии визирования, когда ось  $y$  направлена вниз, а ось  $x$  — к востоку,

$$\zeta = \alpha + (\pi/2) - \lambda_x, \quad (1)$$

$$\zeta' = \alpha - (\pi/2) + \lambda_x. \quad (2)$$

Откуда

$$\lambda_x = (\pi/2) + (\zeta' - \zeta)/2. \quad (3)$$



Далее, прикрепим хомутик к нити подвеса и поместим в него магнит, тщательно направляя ось  $y$  вертикально вверх; тогда момент сил, стремящийся увеличить  $\alpha$ , равен

$$MH \sin m \sin [\delta - \alpha + (\pi/2) + l_x] - \tau (\alpha - \beta - \gamma), \quad (4)$$

где  $l_x$  — угол между осью  $x$  и проекцией магнитной оси на плоскость  $xz$ .

Учитывая, что наблюдаемый азимут линии визирования  $\zeta$  равен

$$\zeta = \alpha + (\pi/2) - \lambda_x, \quad (5)$$

момент сил можно записать в виде

$$MH \sin m \sin (\delta - \zeta + l_x - \lambda_x) - \tau [\zeta + \lambda_x - (\pi/2) - \beta - \gamma]. \quad (6)$$

Для частного значения  $\zeta$ , отвечающего состоянию равновесия, эта величина равна нулю.

Если же система так и не успокоилась и измерения необходимо проводить в состоянии, когда она совершает колебания, то значение  $\zeta$ , отвечающее положению равновесия, можно вычислить методом, который будет изложен в п. 735.

Когда момент сил кручения мал по сравнению с моментом магнитных сил, мы можем вместо синуса подставить значение угла  $\delta - \zeta + l_x - \lambda_x$ .

Придавая углу  $\beta$ , отсчитываемому по крутильному кругу, два значения  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , для соответствующих им значений  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  имеем

$$MH (\zeta_2 - \zeta_1) \sin m = \tau (\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2), \quad (7)$$

или, положив

$$\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2} = \tau',$$

будем иметь

$$\tau = \tau' MH \sin m. \quad (8)$$

Разделив уравнение (6) на  $MH \sin m$ , получим

$$\delta - \zeta + l_x - \lambda_x - \tau' [\zeta + \lambda_x - (\pi/2) - \beta - \gamma] = 0. \quad (9)$$

Перевернем теперь магнит осью  $y$  вниз иотрегулируем аппаратуру до точного совмещения оси  $y$  с вертикалью; для нового значения азимута  $\zeta'$  и соответствующего наклона  $\delta'$  будем иметь

$$\delta' - \zeta' - l_x + \lambda_x - \tau' [\zeta' - \lambda_x + (\pi/2) - \beta - \gamma] = 0, \quad (10)$$

откуда

$$\frac{\delta + \delta'}{2} = \frac{1}{2} (\zeta + \zeta') + \frac{1}{2} \tau' \{ \zeta + \zeta' - 2(\beta + \gamma) \}. \quad (11)$$

Показания поворотного круга следует теперь отрегулировать так, чтобы коэффициент при  $\tau'$  как можно меньше отличался от нуля. Для этого мы должны определить величину  $\gamma$  как то значение  $\alpha - \beta$ , при котором нет кручения. Это можно сделать, помещая в хомутик немагнитный брусок того же веса, что и магнит, и определяя значение  $\alpha - \beta$  в положении равновесия. Из-за малости  $\tau'$  большой точ-

ности не требуется. Другой способ состоит в использовании крутящегося бруска с тем же весом, что у магнита, содержащего внутри очень маленький магнит с магнитным моментом, составляющим  $1/n$  от момента основного магнита. Значение  $\tau$  не меняется, поэтому величина  $\tau'$  станет равной  $n\tau$ , и если при кручении бруска для  $\zeta$  получены два значения  $\zeta_1$  и  $\zeta'_1$ , то

$$\frac{\delta + \delta'}{2} = \frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta'_1) + \frac{1}{2} n\tau' \{ \zeta_1 + \zeta'_1 - 2(\beta + \gamma) \}. \quad (12)$$

Вычитая это уравнение из (11), получим

$$2(n-1)(\beta + \gamma) = \left( n + \frac{1}{\tau'} \right) (\zeta_1 + \zeta'_1) - \left( 1 + \frac{1}{\tau'} \right) (\zeta + \zeta'). \quad (13)$$

Находя таким путем значение  $\beta + \gamma$ , следует менять показания поворотного круга  $\beta$  до тех пор, пока с возможно большей точностью при нормальном положении прибора не достигнем равенства

$$\zeta + \zeta' - 2(\beta + \gamma) = 0. \quad (14)$$

Так как численное значение величины  $\tau'$  очень мало и коэффициент при ней тоже мал, то второй член в выражении для  $\delta$  не будет сильно меняться при малых ошибках в  $\tau'$  и  $\gamma$ , которые являются величинами, известными с наименьшей точностью.

Этим способом величина магнитного склонения  $\delta$  может быть найдена довольно точно при условии ее неизменности за время эксперимента, т. е. когда можно предположить, что  $\delta' = \delta$ .

Когда же требуется большая точность, необходимо учитывать вариации  $\delta$  в течение эксперимента. Для этой цели нужно в те же самые моменты времени, в которые определялись два разных значения  $\zeta$ , произвести измерения со вторым подвешенным магнитом. Зарегистрированные азимуты второго магнита  $\eta$  и  $\eta'$ , соответствующие положениям  $\zeta$  и  $\zeta'$  первого магнита, связаны с  $\delta$  и  $\delta'$  соотношением

$$\delta' - \delta = \eta' - \eta. \quad (15)$$

Поэтому для определения значения  $\delta$  мы должны к соотношению (11) добавить поправку  $(\eta - \eta')/2$ . Таким образом, магнитное склонение в момент первого наблюдения равно

$$\delta = (\zeta + \zeta' + \eta - \eta')/2 + \tau'(\zeta + \zeta' - 2\beta - 2\gamma)/2. \quad (16)$$

Чтобы определить направление магнитной оси внутри магнита, вычтем (10) из (9) и добавим (15):

$$l_x = \lambda_x + (\zeta - \zeta')/2 - (\eta - \eta')/2 + \tau'(\zeta - \zeta' + 2\lambda_x - \pi)/2. \quad (17)$$

Повторяя опыты с бруском при двух положениях его ребер, сначала направив ось  $x$  вертикально вверх, а затем — вниз, мы сможем определить величину  $m$ . Если ось визирования является регулируемой, ее необходимо установить в по-

ложение, как можно ближе совпадающее с магнитной осью, тогда ошибка, связанная с не совсем точным инвертированием магнита, может быть предельно уменьшена <sup>2</sup>.

*Об измерении магнитных сил*

453. Определение магнитного момента магнита  $M$  и интенсивности (напряженности) горизонтальной составляющей земного магнетизма  $H$  являются наиболее важными измерениями магнитной силы. Обычно это делается комбинированием результатов двух экспериментов, в одном из которых измеряется отношение, а в другом — произведение этих величин.

Напряженность магнитной силы бесконечно малого магнита с магнитным моментом  $M$ , создаваемая в точке на расстоянии  $r$  от центра магнита в положительном направлении его оси, направлена по  $r$  и равна

$$R = 2M/r^3. \quad (1)$$

Если размеры магнита конечны, но он имеет сферическую форму и однородно намагничен в направлении оси, то это выражение продолжает оставаться точным. Для соленоидального магнита, имеющего форму стержня длиной  $2L$ ,

$$R = 2 \frac{M}{r^3} \left( 1 + 2 \frac{L^2}{r^2} + 3 \frac{L^4}{r^4} + \dots \right). \quad (2)$$

Если магнит имеет произвольную форму с малыми по сравнению с  $r$  размерами,

$$R = 2 \frac{M}{r^3} \left( 1 + A_1 \frac{1}{r} + A_2 \frac{1}{r^2} + \dots \right), \quad (3)$$

где  $A_1$ ,  $A_2$  и т. д. — коэффициенты, зависящие от распределения намагниченности по образцу.

Обозначим через  $H$  горизонтальную составляющую земного магнетизма в произвольном месте;  $H$  направлена к магнитному северу. Будем отсчитывать  $r$  в сторону магнитного запада; тогда составляющая магнитной силы в точке  $r$  в северном направлении будет равна  $H$ , а в западном направлении —  $R$ . Равнодействующая сила составит с магнитным меридианом угол  $\vartheta$ , отсчитываемый к западу, причем

$$R = H \operatorname{tg} \vartheta. \quad (4)$$

Следовательно, для определения  $R/H$  мы поступим следующим образом.

Установив направление магнитного севера, подвесим магнит не слишком больших размеров так же, как в предыдущих опытах. В той же горизонтальной плоскости поместим отклоняющий магнит  $M$  таким образом, чтобы центр его находился на расстоянии  $r$  от центра подвешенного магнита в направлении магнитного востока.

Ось магнита  $M$  тщательно устанавливается — она должна быть горизонтальна и направлена по  $r$ .

<sup>2</sup> См. работу У. Свана «Неполная инверсия». (W. Swan, «Imperfect Inversion») *Trans. R. S. Edin.*, vol. XXI (1855), p. 349.

Наблюдения за подвешенным магнитом производятся как до поднесения к нему магнита  $M$ , так и после установления магнита  $M$  на его место. Если  $\vartheta$  — наблюдаемое отклонение, то по приближенной формуле (1)

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} \operatorname{tg} \vartheta, \quad (5)$$

если же использовать формулы (3), то

$$\frac{1}{2} \frac{H}{M} r^3 \operatorname{tg} \vartheta = 1 + A_1 \frac{1}{r} + A_2 \frac{1}{r^2} + \dots \quad (6)$$

Здесь мы должны помнить, что отклонение  $\vartheta$  можно измерять с большой точностью, а расстояние между центрами магнитов, пока мы не зафиксировали оба магнита и не пометили их центры, измерить точно нельзя. Эта трудность преодолевается так.

Магнит  $M$  размещается на шкале с делениями, которая продолжается к востоку и к западу — по обе стороны от подвешенного магнита. Центром магнита  $M$  считается средняя точка между его концами. Можно отметить эту точку на магните и засекать ее положение, а можно измерять положение концов и брать их среднее арифметическое. Обозначим положение центра магнита  $M$  через  $s_1$ , а положение точки, в которой линия нити подвеса с подвешенным на ней магнитом пересекает шкалу, — через  $s_0$ ; тогда  $r_1 = s_1 - s_0$ , где  $s_1$  известно точно, а  $s_0$  — приближенно. Пусть  $\vartheta_1$  — отклонение, наблюдаемое при этом положении магнита  $M$ .

Теперь перевернем  $M$ , т. е. поместим его на шкале, поменяв местами его концы; тогда  $r_1$  останется тем же самым, а  $M$ ,  $A_1$ ,  $A_3$ , ... сменят знаки, так что для отклонения  $\vartheta_2$  будем иметь

$$-\frac{1}{2} \frac{H}{M} r_1^3 \operatorname{tg} \vartheta_2 = 1 - A_1 \frac{1}{r_1} + A_2 \frac{1}{r_1^2} - \dots \quad (7)$$

Взяв среднее арифметическое от (6) и (7), получим

$$\frac{1}{4} \frac{H}{M} r_1^3 (\operatorname{tg} \vartheta_1 - \operatorname{tg} \vartheta_2) = 1 + A_2 \frac{1}{r_1^2} + A_4 \frac{1}{r_1^4} + \dots \quad (8)$$

Теперь поместим  $M$  к западу от подвешенного магнита, установив его центр в точке, соответствующей отметке на шкале  $2s_0 - s_1$ . Для отклонений оси в двух новых положениях  $\vartheta_3$  и  $\vartheta_4$  получим, как и прежде:

$$\frac{1}{4} \frac{H}{M} r_2^3 (\operatorname{tg} \vartheta_3 - \operatorname{tg} \vartheta_4) = 1 + A_2 \frac{1}{r_2^2} + A_4 \frac{1}{r_2^4} + \dots \quad (9)$$

Допустим, что истинное положение центра подвешенного магнита не  $s_0$ , а  $s_0 + \sigma$ ; тогда

$$r_1 = r - \sigma, \quad r_2 = r + \sigma \quad (10)$$

и

$$\frac{1}{2} (r_1^n + r_2^n) = r^n \left\{ 1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\sigma^2}{r^2} + \dots \right\}. \quad (11)$$

Если измерения проведены достаточно аккуратно, то величиной  $\sigma^2/r^2$  можно пренебречь и вместо  $r_1^n$  и  $r_2^n$  с уверенностью подставить  $r^n$ .

Тогда, взяв среднее арифметическое от (8) и (9), получим

$$\frac{1}{8} \frac{H}{M} r^3 (\operatorname{tg} \vartheta_1 - \operatorname{tg} \vartheta_2 + \operatorname{tg} \vartheta_3 - \operatorname{tg} \vartheta_4) = 1 + A_2 \frac{1}{r^2} + \dots \quad (12)$$

или, введя обозначение

$$(\operatorname{tg} \vartheta_1 - \operatorname{tg} \vartheta_2 + \operatorname{tg} \vartheta_3 - \operatorname{tg} \vartheta_4)/4 = D, \quad (13)$$

найдем

$$\frac{1}{2} \frac{H}{M} D r^3 = 1 + A_2 \frac{1}{r^2} + \dots$$

454. Теперь мы можем рассматривать  $D$  и  $r$  как величины, допускающие точное определение.

Значение  $A_2$  никогда не превосходит  $2L^2$  ( $L$  — половина длины магнита); поэтому на расстояниях  $r$ , значительных по сравнению с  $L$ , мы можем пренебречь членом с  $A_2$  и сразу же определить отношение  $H$  к  $M$ . Нельзя, однако, считать, что величина  $A_2$  равна  $2L^2$ , она может быть меньше и даже отрицательна, если максимальный размер магнита поперечен по отношению к оси. Членами с  $A_4$  и более высокого порядка можно пренебречь без опасений.

Чтобы исключить  $A_2$ , повторим эксперимент с различными расстояниями  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , получив для  $D$  значения  $D_1, D_2, D_3, \dots$ ; тогда

$$D_1 = \frac{2M}{H} \left( \frac{1}{r_1^3} + \frac{A_2}{r_1^5} \right), \quad D_2 = \frac{2M}{H} \left( \frac{1}{r_2^3} + \frac{A_2}{r_2^5} \right), \quad \dots, \dots$$

Если предположить, что вероятные ошибки этих уравнений одинаковы, а это будет так, когда они зависят только от определения  $D$  и когда не существует неопределенности в величине  $r$ , то в соответствии с общим правилом комбинирования в теории ошибок измерений (в предположении равенства вероятных ошибок всех уравнений) одно из комбинированных уравнений получится при умножении каждого из приведенных выше уравнений на  $r^{-3}$  и сложения результатов, а второе — при умножении на  $r^{-5}$  и также с последующим сложением результатов.

Обозначив через  $\sum(Dr^{-3})$  величину

$$D_1 r_1^{-3} + D_2 r_2^{-3} + D_3 r_3^{-3} + \dots$$

и используя аналогичные обозначения для других групп символов, оба результирующие уравнения можно записать в виде

$$\sum(Dr^{-3}) = \frac{2M}{H} \{ \sum(r^{-6}) + A_2 \sum(r^{-8}) \},$$

$$\sum(Dr^{-5}) = \frac{2M}{H} \{ \sum(r^{-8}) + A_2 \sum(r^{-10}) \},$$

откуда

$$\frac{2M}{H} \{ \sum(r^{-6}) \sum(r^{-10}) - [\sum(r^{-8})]^2 \} = \sum(Dr^{-3}) \sum(r^{-10}) - \sum(Dr^{-5}) \sum(r^{-8})$$

и

$$A_2 \{ \sum (Dr^{-3}) \sum (r^{-10}) - \sum (Dr^{-5}) \sum (r^{-8}) \} = \sum (Dr^{-5}) \sum (r^{-6}) - \sum (Dr^{-3}) \sum (r^{-8}).$$

Величина  $A_2$ , найденная из этих уравнений, должна быть меньше половины квадрата длины магнита  $M$ . В противном случае следует подозревать наличие какой-то ошибки в измерениях. Этот метод измерения и редукции был дан Гауссом в «Первом Докладе Магнитного Союза».

Если наблюдатель может сделать лишь две серии экспериментов для расстояний  $r_1$  и  $r_2$ , то вычисленные по ним величины  $2M/H$  и  $A_2$  будут равны

$$Q = \frac{2M}{H} = \frac{D_1 r_1^5 - D_2 r_2^5}{r_1^2 - r_2^2}, \quad A_2 = \frac{D_2 r_2^3 - D_1 r_1^3}{D_1 r_1^5 - D_2 r_2^5} r_1^2 r_2^2.$$

Ошибка в определении величины  $Q$  равна

$$\delta Q = \frac{r_1^5 \delta D_1 - r_2^5 \delta D_2}{r_1^2 - r_2^2},$$

где  $\delta D_1$  и  $\delta D_2$  — действительные ошибки измеренных отклонений  $D_1$  и  $D_2$ .

Предполагая ошибки  $\delta D_1$  и  $\delta D_2$  независимыми, а вероятное значение каждой из них равным  $\delta D$ , для вероятной ошибки  $\delta Q$  вычисленного значения  $Q$  получим

$$(\delta Q)^2 = \frac{r_1^{10} + r_2^{10}}{(r_1^2 - r_2^2)^2} (\delta D)^2.$$

Считая заданным одно из расстояний, например меньшее, можно найти величину большего расстояния, при котором ошибка  $\delta Q$  минимальна. Это условие приводит к уравнению пятой степени относительно  $r_1^2$ , которое имеет только один действительный корень, превышающий  $r_2^2$ ; отсюда находится наилучшее значение для  $r_1$ :  $r_1 = 1,3189 r_2$ .

Если измерение проведено только один раз, то наилучшим является расстояние, при котором  $(\delta D/D) = \sqrt{3} (\delta r/r)$ , где  $\delta D$  — вероятная ошибка в измерении отклонения, а  $\delta r$  — вероятная ошибка в измерении расстояния.

### Метод синусов

455. Метод, который мы только что рассмотрели, можно назвать методом тангенсов, поскольку мерой магнитной силы является тангенс угла отклонения.

Теперь, вместо того чтобы линию  $r_1$  направлять на восток или на запад, будем устанавливать ее до тех пор, пока она не окажется перпендикулярной оси отклоненного магнита; тогда величина  $R$  сохранится прежней, но чтобы подвешенный магнит оставался перпендикулярным  $r$ , составляющая силы  $H$  вдоль  $r$  должна быть равна по величине  $R$  и противоположно направлена, т. е. при угле отклонения  $\vartheta$   $R = H \sin \vartheta$ .

Этот метод называется методом синусов. Он может быть применен только при  $R$ , меньших  $H$ .

Метод синусов использован в портативной аппаратуре обсерватории Кью. Подвешенный магнит прикреплен к той части прибора, которая вращается вместе с телескопом и плечом отклоняющего магнита. Угол поворота всего устройства измеряется на азимутальном круге.

Вначале аппаратура регулируется таким образом, чтобы ось телескопа совпала со средним положением линии визирования магнита в невозмущенном положении. Если магнит совершает колебания, то истинный азимут магнитного севера находится путем наблюдения крайних положений колебания прозрачной шкалы и внесением соответствующей поправки в показания азимутального круга.

Затем на прямой стержень, проходящий через ось вращающегося устройства под прямым углом к оси телескопа, помещается отклоняющий магнит, который устанавливается так, чтобы его ось совпала с линией, проходящей через центр подвешенного магнита.

Далее вся аппаратура поворачивается до тех пор, пока линия визирования подвешенного магнита снова не совпадет с осью телескопа; новое показание азимута при необходимости уточняется путем измерения крайних положений осцилляций.

Разность уточненных азимутов дает величину отклонения, после чего следует действовать, как и в методе тангесов, подставив лишь  $\sin \vartheta$  в выражение для  $D$  вместо  $\operatorname{tg} \vartheta$ .

В этом методе отсутствует поправка на кручение нити подвеса, так как относительное положение нити, телескопа и магнита остается одинаковым при каждом измерении.

Оси двух магнитов при таком методе всегда расположены под прямым углом, что позволяет более аккуратно делать коррекцию длины.

456. Измерив таким способом отношение момента отклоняющего магнита к горизонтальной составляющей земного магнетизма, мы должны затем найти произведение этих величин путем определения момента сил, с которым земной магнетизм стремится повернуть этот же магнит при отклонении его оси от направления магнитного меридиана.

Есть два способа проведения такого измерения: динамический, когда измеряется время одного колебания магнита под действием земного магнетизма, и статический, когда магнит удерживается в равновесии под действием измеряемой статической пары сил и магнитной силы.

Аппаратура для динамического метода более проста, он дает большую точность при абсолютных измерениях, но требует достаточно большого времени; статический метод допускает проведение почти мгновенных измерений и поэтому полезен при слежении за изменениями напряженности магнитной силы, однако он требует более тонкой аппаратуры и не столь точен при абсолютных измерениях.

### *Метод колебаний*

Подвешенный магнит с горизонтальной магнитной осью приводится в колебания в пределах малых дуг окружности. Колебания наблюдаются любым из описанных выше способов.

На шкале выбирается точка, соответствующая середине дуги колебаний, и засекается момент, когда магнит проходит через нее в положительном направлении. Если магнит не очень быстро возвращается в ту же самую точку, то засекается также момент прохождения через эту точку в отрицательном направлении; процесс этот продолжается до тех пор, пока не будет зарегистрировано  $(n+1)$  проходов в положительном направлении и  $n$  проходов в отрицательном направлении. Если же колебания совершаются настолько быстро, что не позво-

ляют засекаать последовательные прохождения, то можно регистрировать каждое третье или каждое пятое прохождение, обращая внимание на чередование в положительном и отрицательном направлениях.

Пусть наблюдаемые времена прохождений равны  $T_1, T_2, T_{2n+1}$ . Положим

$$\frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} T_1 + T_3 + T_5 + \dots + T_{2n-1} + \frac{1}{2} T_{2n+1} \right) = T_{n+1},$$

$$\frac{1}{n} (T_2 + T_4 + \dots + T_{2n-2} + T_{2n}) = T'_{n+1}.$$

Величина  $T_{n+1}$  является средним временем положительных прохождений, при правильном выборе точки оно должно соответствовать среднему времени отрицательных прохождений  $T'_{n+1}$ . Среднее от этих величин следует брать в качестве среднего времени прохождения средней точки.

После того как совершится большое число колебаний, но еще перед тем как они перестанут быть отчетливыми и регулярными, наблюдатель производит вторую серию измерений, из которой вычисляет среднее время прохождения средней точки во второй серии.

При вычислении периода колебаний из первой или из второй серии наблюдатель должен иметь возможность точно знать число полных колебаний, происшедших в интервале между временами прохождения средней точки в первой и во второй сериях.

Разделив интервал между средними временами прохождений средней точки в двух сериях на это число колебаний, он получит среднюю продолжительность одного колебания.

Измеренная продолжительность одного колебания должна быть затем — по тем же формулам, что и в экспериментах с маятником, — сведена к продолжительности одного колебания с бесконечно малым угловым отклонением. Если обнаружится, что амплитуда колебаний быстро уменьшается, то следует ввести еще одну поправку — на сопротивление (см. п. 740). Эти поправки, однако, очень малы в случае, когда магнит подвешен на тонкой нити и когда дуга колебания составляет всего лишь несколько градусов.

Движение магнита определяется уравнением

$$A \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + MH \sin \vartheta + HM\tau' (\vartheta - \gamma) = 0,$$

где  $\vartheta$  — угол между магнитной осью и направлением силы  $H$ ,  $A$  — момент инерции магнита вместе с подвешенной аппаратурой,  $M$  — магнитный момент магнита,  $H$  — интенсивность горизонтальной магнитной силы,  $HM\tau'$  — коэффициент кручения; величина  $\tau'$  введена в п. 452 и является очень малой. Значение  $\vartheta$  в равновесии равно очень маленькому углу  $\vartheta_0 = \tau'\gamma / (1 + \tau')$ . Решение уравнения при малых значениях амплитуды будет таким:

$$\vartheta = C \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} + \alpha \right) + \vartheta_0,$$

где  $T$  — период,  $\alpha$  — константа,  $C$  — амплитуда; причем  $T^2 = 4\pi^2 A / MH (1 + \tau')$ , откуда находим значение  $MH$ :  $MH = 4\pi^2 A / T^2 (1 + \tau')$ .



Здесь  $T$  — время полного колебания, определяемое из наблюдений,  $A$  — момент инерции, устанавливаемый для магнита раз и навсегда либо путем взвешивания и обмера его (в том случае, когда он имеет правильную форму), либо путем динамической процедуры сопоставления с телом, момент инерции которого известен.

Комбинируя это выражение для  $MH$  с ранее найденным  $M/H$ , получаем

$$M^2 = (MH) \left( \frac{M}{H} \right) = \frac{2\pi^2 A}{T^2 (1 + \tau')} Dr^3$$

и

$$H^2 = (MH) \left( \frac{H}{M} \right) = \frac{8\pi^2 A}{T^2 (1 + \tau')} Dr^3.$$

457. Выше мы предполагали, что в течение двух серий экспериментов величины  $M$  и  $H$  остаются постоянными. Наличие флуктуаций  $H$  можно установить при одновременных измерениях на описываемом далее двухнитевом магнитометре. Если магнит был какое-то время в употреблении, но не подвергался во время экспериментов ни температурным изменениям, ни встряске, то определяемую постоянным магнетизмом долю намагниченности  $M$  можно считать постоянной. Однако все стальные магниты подвержены влиянию индуцированного магнетизма, зависящего от действия внешней магнитной силы.

Ось магнита, участвующего в экспериментах в качестве отклоняющего, направлена с запада на восток; поэтому действие земного магнетизма перпендикулярно магниту и не стремится ни уменьшить, ни увеличить  $M$ . Когда же магнит установлен для совершения колебаний, его ось ориентирована в направлении север — юг; поэтому действие земного магнетизма стремится намагнитить магнит в направлении оси и, таким образом, увеличить его магнитный момент на величину  $kH$ , где коэффициент  $k$  должен быть найден из экспериментов с магнитом.

Есть два способа исключения этого источника ошибки без вычисления  $k$ ; эксперименты должны проводиться так, чтобы магнит находился в одинаковых условиях, — и когда он участвует в отклонении другого магнита, и когда колеблется сам.

Можно направить ось отклоняющего магнита на север, поместив его на расстоянии  $r$  от центра подвешенного магнита, выбрав линию  $r$  так, чтобы она образовывала с магнитным меридианом угол, косинус которого равен  $\sqrt{1/3}$ . Тогда действие отклоняющего магнита на подвешенный будет происходить под прямыми углами к его собственному направлению и окажется равным  $R = \sqrt{2M}/r^3$ .

Как и в эксперименте с колебаниями, здесь  $M$  является магнитным моментом, когда ось магнита указывает на север, поэтому никаких поправок на индукцию делать не надо.

Однако этот метод чрезвычайно сложен из-за больших ошибок, к которым приводило бы малейшее смещение отклоняющего магнита, и, поскольку коррекция путем обращения отклоняющего магнита здесь неприменима, к этому методу прибегать не стоит, кроме как для определения коэффициента индукции.

В другом методе, которым мы обязаны доктору Дж. П. Джоулю<sup>3</sup>, магнит

<sup>3</sup> *Proc. Phil. S., Manchester, March 19, 1867.*

при колебаниях свободен от индуцирующего действия земного магнетизма.

Изготавливаются два магнита с предельно близкими друг к другу магнитными моментами. В опытах по отклонению они либо используются отдельно, либо для увеличения отклонения размещаются по разные стороны от подвешенного магнита. При этом индуцирующая сила земного магнетизма перпендикулярна оси.

Теперь один из магнитов подвесим, а другой поместим точно под ним (центр под центром) параллельно ему, направив его ось в том же направлении. Сила, с которой покоящийся магнит действует на подвешенный, направлена против силы земного магнетизма. Если постепенно приближать покоящийся магнит к подвешенному, период колебаний будет возрастать, пока в некоторой точке равновесие не перестанет быть устойчивым, после чего подвешенный магнит начнет колебаться в перевернутом положении. Экспериментируя таким образом, можно найти положение фиксированного магнита, в котором он точно нейтрализует действие земного магнетизма на подвешенный магнит. После этого два магнита скрепляются (с сохранением их параллельности) на расстоянии, найденном из этого эксперимента, при том же самом направлении осей. Затем они подвешиваются обычным способом и приводятся в состояние совместных колебаний в пределах малых дуг.

Нижний магнит точно нейтрализует влияние земного магнетизма на верхний, а поскольку магниты имеют одинаковые магнитные моменты, верхний также нейтрализует индуцирующее действие Земли на нижний магнит.

Таким образом, значение  $M$  оказывается в опытах с колебаниями и отклонениями одинаковым, и не требуется вносить поправки на индукцию.

**458.** Только что описанный метод является наиболее точным для определения напряженности горизонтальной магнитной силы. Однако невозможно провести всю серию экспериментов с достаточной точностью намного быстрее, чем за час; поэтому любые изменения напряженности с периодом в несколько минут выпадут из наблюдений. Значит, для наблюдения напряженности в какой-то отдельный момент времени необходим другой метод.

Статический метод состоит в отклонении магнита с помощью статической пары сил, действующей в горизонтальной плоскости. Пусть момент этой пары равен  $L$ , магнитный момент магнита  $M$ , горизонтальная составляющая земного магнетизма  $H$  и угол отклонения  $\vartheta$ , тогда  $MH \sin \vartheta = L$ . Следовательно, если известен момент  $L$  в зависимости от  $\vartheta$ , то может быть найдена величина  $MH$ .

Момент  $L$  может возникнуть по двум причинам: из-за упругого кручения проволоки, как в обычных крутильных весах, или из-за веса подвешенного прибора, как при двухнитевом подвесе.

В крутильных весах магнит прикрепляется к концу вертикальной проволоки, верхний конец которой можно поворачивать и измерять угол поворота с помощью поворотного круга.

Тогда мы имеем

$$L = \tau (\alpha - \alpha_0 - \vartheta) = MH \sin \vartheta.$$

Здесь  $\alpha_0$  — показание поворотного круга при совпадении оси магнита с магнитным меридианом, а  $\alpha$  — его действительное показание. Если поворотный круг

установлен так, что магнит почти перпендикулярен магнитному меридиану, т. е.  $\vartheta = (\pi/2) - \vartheta'$ , то

$$\tau \left( \alpha - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} + \vartheta' \right) = MN \left( 1 - \frac{1}{2} \vartheta'^2 \right), \text{ или}$$

$$MN = \tau \left( 1 + \frac{1}{2} \vartheta'^2 \right) \left( \alpha - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} + \vartheta' \right).$$

Измеряя отклонение магнита в равновесии  $\vartheta'$ , мы можем вычислить  $MN$  при условии, что мы знаем  $\tau$ .

Если же мы хотим узнать только относительную величину  $H$  в различные моменты времени, то нет необходимости в знании  $M$  или  $\tau$ .

Абсолютное значение  $\tau$  легко определить, подвесив на том же проводе немагнитное тело и измеряя период его колебаний:  $\tau = 4\pi^2 A / T^2$ , где  $A$  — момент инерции этого тела,  $T$  — период одного полного колебания.

Основное возражение против использования крутильных весов состоит в том, что нулевое значение  $\alpha_0$  подвержено изменениям. Под действием постоянной скручивающей силы, возникающей из-за стремления магнита поворачиваться к северу, провод постепенно приобретает постоянное закручивание, так что через короткие промежутки времени становится необходимым определять нулевое показание поворотного круга заново.

#### *Двухнитевой (бифилярный) подвес*

459. Метод подвешивания магнита на двух проволоках или нитях был введен Гауссом и Вебером. Поскольку двухнитевой подвес используется во многих электрических приборах, изучим его более подробно. Общий вид подвеса показан на рис. 16; на рис. 17 изображены проекции проволок на горизонтальную плоскость:

$AB$  и  $A'B'$  — проекции двух проволок;

$AA'$  и  $BB'$  — линии, соединяющие верхние и нижние концы проволок;

$a$  и  $b$  — длины линий  $AA'$  и  $BB'$ ;

$\alpha$  и  $\beta$  — их азимуты;

$W$  и  $W'$  — вертикальные составляющие натяжения проволок;

$Q$  и  $Q'$  — их горизонтальные составляющие;

$h$  — расстояние по вертикали между  $AA'$  и  $BB'$ .

Действующие на магнит силы таковы: его вес, пара сил, обусловленная земным магнетизмом, кручение (если таковое имеется) проволок и их натяжение. Из всего этого действие магнетизма и кручение имеют характер момента. Поэтому равнодействующая натяжения должна состоять из равной весу вертикальной силы и момента сил. Следовательно, равнодействующая вертикальных составляющих натяжения направлена вдоль линии, имеющей своей проекцией точку  $O$ , которая является пересечением линий  $AA'$  и  $BB'$  и делит каждую из них в отношении  $W'$  к  $W$ .

Горизонтальные составляющие натяжения образуют пару сил, т. е. они равны по величине и параллельны по направлению. Обозначая каждую из них через  $Q$ , для момента пары сил, которую они образуют, имеем

$$L = Q \cdot PP', \tag{1}$$

где  $PP'$  — расстояние между параллельными линиями  $AB$  и  $A'B'$ .

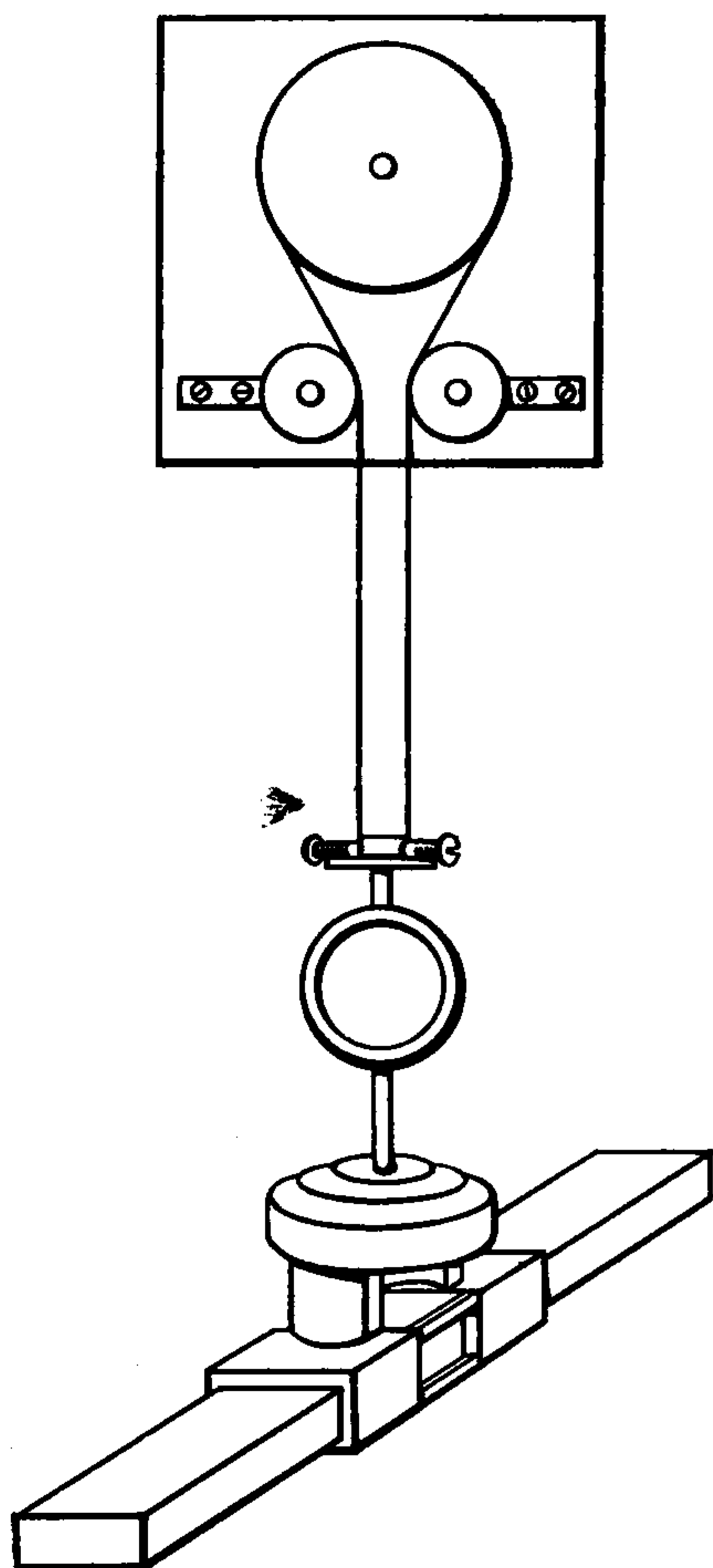
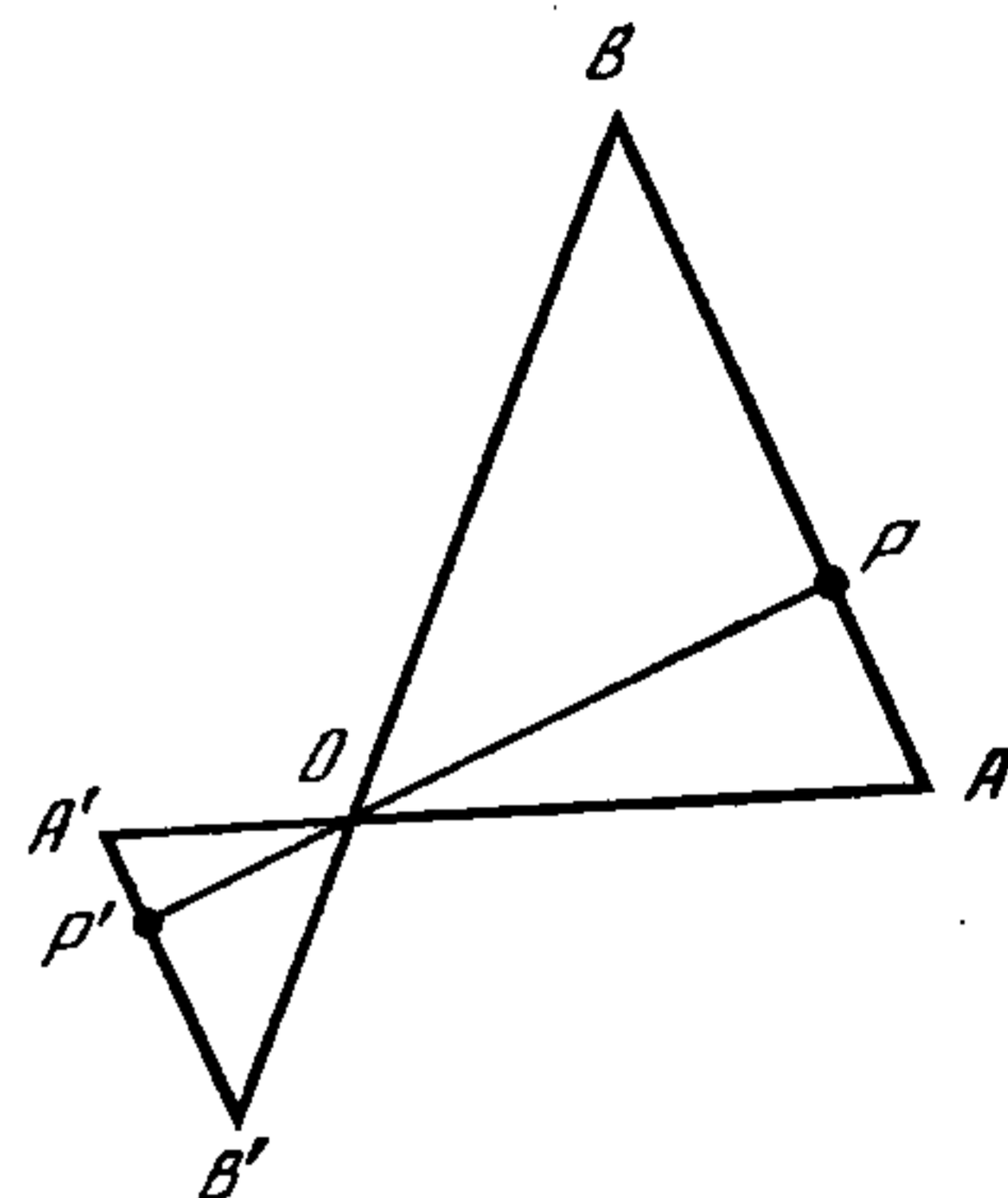


Рис. 16

Рис. 17



Для определения величины  $L$  мы имеем уравнения моментов

$$Qh = W \cdot AB = W' \cdot A'B', \quad (2)$$

и геометрическое соотношение

$$(AB + A'B')PP' = ab \sin(\alpha - \beta), \quad (3)$$

откуда получаем

$$L = Q \cdot PP' = \frac{ab}{h} \frac{WW'}{W + W'} \sin(\alpha - \beta). \quad (4)$$

Если масса подвешенного прибора равна  $m$ , а интенсивность гравитации  $g$ , то

$$W + W' = mg. \quad (5)$$

Мы можем также записать

$$W - W' = nmg, \quad (6)$$

откуда найдем

$$L = \frac{1}{4} (1 - n^2) mg \frac{ab}{h} \sin(\alpha - \beta). \quad (7)$$

Таким образом, величина  $L$  будет иметь максимум по  $n$  при  $n=0$ , т. е. когда вес подвешенной массы одинаково несут обе проволоки.

Мы можем отрегулировать натяжения проволок и сделать их одинаковыми путем измерения и сведения к минимуму периода колебаний, или же мы можем

получить автоматическую регулировку, присоединив концы проволок, как показано на рис. 16, к блоку, который поворачивается пока натяжения не сравниваются.

Расстояние между верхними концами проволок подвеса регулируется с помощью двух других блоков. Расстояние между нижними концами проволок также допускает регулировку.

При такой регулировке натяжения момент, возникающий из-за натяжения проволок, становится равным

$$L = \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin(\alpha - \beta).$$

Момент пары сил, возникающий из-за кручения проволок, записывается в виде  $\tau(\alpha - \beta)$ , где  $\tau$  — сумма коэффициентов кручения проволок.

Кручение проволок должно отсутствовать, когда  $\alpha = \beta$ , при этом можно положить  $\gamma = \alpha$ .

Момент пары сил, обусловленный горизонтальной магнитной силой, имеет вид  $MH \sin(\delta - \vartheta)$ , где  $\delta$  — магнитное склонение, а  $\vartheta$  — азимут оси магнита. Мы избежим введения ненужных обозначений без потери общности, предположив, что ось магнита параллельна  $BB'$  или что  $\beta = \vartheta$ .

Тогда уравнение движения становится таким:

$$A \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = MH \sin(\delta - \vartheta) + \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin(\alpha - \vartheta) + \tau(\alpha - \vartheta). \quad (8)$$

Имеется три основных положения прибора.

(1). Когда угол  $\alpha$  примерно равен  $\delta$ . Если время полного колебания в этом положении равно  $T_1$ , то

$$\frac{4\pi^2 A}{T_1^2} = \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg + \tau + MH. \quad (9)$$

(2). Когда угол  $\alpha$  близок к  $\delta + \pi$ . Если в этом положении время полного колебания равно  $T_2$ , а северный конец магнита повернут к югу, то

$$\frac{4\pi^2 A}{T_2^2} = \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg + \tau - MH. \quad (10)$$

Величина в правой части уравнения может быть сделана сколь угодно малой при уменьшении  $a$  или  $b$ , но не должна становиться отрицательной, иначе равновесие магнита станет неустойчивым. Магнит в таком положении является прибором, чувствительным к малым вариациям направления магнитного поля.

Действительно, когда угол  $\vartheta - \delta$  примерно равен  $\pi$ , то  $\sin(\delta - \vartheta)$  примерно равен  $\vartheta - \delta - \pi$ , и мы находим

$$\vartheta = \alpha - \frac{MH}{\frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg + \tau - MH} (\delta + \pi - \alpha). \quad (11)$$

Уменьшая знаменатель дроби в последнем члене, мы можем сделать вариации  $\vartheta$  очень большими по сравнению с вариациями  $\delta$ . Следует заметить, что коэффициент перед  $\delta$  в этом выражении отрицателен, так что когда направление магнитной силы поворачивается в одну сторону, магнит поворачивается в противоположную.

(3). В третьем положении верхняя часть подвешенной аппаратуры повернута так, что ось магнита примерно перпендикулярна магнитному меридиану. Если положить

$$\vartheta - \delta = (\pi/2) + \vartheta' \text{ и } \alpha - \vartheta = \beta - \vartheta', \quad (12)$$

то уравнение движения может быть записано в виде

$$A \frac{d^2 \vartheta'}{dt^2} = -MH \cos \vartheta' + \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin(\beta - \vartheta') + \tau(\beta - \vartheta'). \quad (13)$$

Если при  $H = H_0$  и  $\vartheta' = 0$  существует равновесие

$$-MH_0 + \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin \beta + \tau\beta = 0, \quad (14)$$

то горизонтальная сила  $H$ , соответствующая малому углу  $\vartheta'$ , равна

$$H = H_0 \left( 1 - \frac{\frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \cos \beta + \tau}{\frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin \beta + \tau\beta} \vartheta' \right). \quad (15)$$

Чтобы магнит находился в устойчивом равновесии, числитель дроби во втором члене должен быть положительным, но чем он ближе к нулю, тем прибор будет более чувствительным при индикации изменений величины напряженности горизонтальной составляющей земного магнетизма.

Статический метод оценки напряженности силы зависит от действия прибора, что само по себе предполагает различные положения равновесия при различных значениях силы. Поэтому с помощью прикрепленного к магниту зеркальца, отбрасывающего светящееся пятно на движущуюся под действием часового механизма фотографирующую поверхность, можно вычертить на ней кривую, по которой можно определять напряженность силы в любой момент времени в масштабе, который в этом случае мы можем брать произвольным.

460. В любой обсерватории, где непрерывная система регистрации склонения и напряженности налажена либо визуальным методом, либо методом автоматического фотографирования, можно с большой степенью точности определять абсолютные значения склонения и напряженности, а также положение и момент магнитной оси магнита.

Действительно, деклинометр в каждый момент выдает склонение с некоторой постоянной ошибкой, а двухнитовой магнитометр дает в каждый момент значение напряженности, умноженное на некоторый постоянный коэффициент. В экспериментах мы заменяем  $\delta$  на  $\delta' + \delta_0$ , где  $\delta'$  — показание деклинометра в данный момент, а  $\delta_0$  — неизвестная, но постоянная ошибка, так что  $\delta' + \delta_0$  будет истинным склонением в этот момент.

Аналогично вместо  $H$  мы подставляем  $CH'$ , где  $H'$  — показание магнитометра по произвольной шкале, а  $C$  — неизвестный постоянный множитель, превращающий эти показания в абсолютные, так что  $CH'$  оказывается равной горизонтальной силе в данный момент времени.

Эксперименты по определению абсолютных значений этих величин должны проводиться на достаточном расстоянии от деклинометра и магнитометра, чтобы разные магниты не возмущали заметно друг друга. Следует засекаать время каж-

дого измерения и подставлять соответствующие значения  $\delta'$  и  $H'$ . После этого необходимо, обращаясь к уравнениям, найти постоянную деклинометра  $\delta_0$ , а также коэффициент  $C$ , используемый в показаниях магнитометра. Когда все это будет найдено, показания обоих приборов можно выразить в абсолютных величинах. Абсолютные измерения, однако, следует часто повторять, чтобы учесть изменения, которые могут произойти с магнитными осями и магнитными моментами магнитов.

**461.** Методы измерения вертикальной составляющей земной магнитной силы еще не доведены до такой же степени точности. Вертикальная сила должна действовать на магнит, который поворачивается вокруг горизонтальной оси, но тело, которое поворачивается вокруг горизонтальной оси, нельзя сделать таким же чувствительным к действию малых сил, как тело, подвешенное на нити и вращающееся вокруг вертикальной оси. Кроме того, вес магнита настолько велик по сравнению с магнитными силами, действующими на него, что небольшое смещение центра инерции, вызванное неравномерным расширением или еще чем-то, сильнее влияет на положение магнита, чем значительное изменение магнитной силы.

Поэтому измерение вертикальной силы или сравнение вертикальной и горизонтальной сил, является наименее совершенной частью системы магнитных измерений.

Обычно вертикальная составляющая магнитной силы находится из горизонтальной силы путем определения направления общей силы.

Угол  $i$  между полной силой и ее горизонтальной составляющей называется магнитным наклоном; если известна горизонтальная сила  $H$ , то вертикальная сила равна  $H \operatorname{tg} i$ , а полная сила  $H \operatorname{sec} i$ .

Магнитное наклонение измеряется с помощью инклинометра (уклономера). Теоретически инклинометр — это магнит, ось которого проходит через его центр инерции перпендикулярно магнитной оси стрелки. Концы оси сделаны в виде цилиндров небольшого радиуса, оси которых совпадают с линией, проходящей через центр инерции. Эти цилиндрические концы покоятся на двух горизонтальных пластинках и могут свободно катиться по ним.

Когда ось направлена с магнитного востока на запад, стрелка может свободно вращаться в плоскости магнитного меридиана, и при хорошей настройке прибора магнитная ось установится в направлении полной магнитной силы.

Практически, однако, невозможно отрегулировать инклинометр так, чтобы вес стрелки не влиял на положение равновесия; даже если вначале центр инерции находился на линии, соединяющей катящиеся секции цилиндрических концов, он сместится с этой линии при незначительном изгибе или неравномерном расширении стрелки. Кроме того, определение настоящего центра инерции магнита — очень трудная операция из-за наложения действия магнитной силы и силы тяжести.

Предположим, что один из концов стрелки и один из концов оси как-то помечены. Проведем на стрелке линию, действительную или воображаемую, которую будем называть линией визирования. Положение этой линии измеряется на вертикальном круге. Пусть линия визирования образует угол  $\vartheta$  с радиусом, который мы будем считать горизонтальным, а магнитная ось образует с ней угол  $\lambda$ ; в этом положении стрелки магнитная ось наклонена под углом  $\vartheta + \lambda$  к горизонтали.

При любой форме катящихся поверхностей длина перпендикуляра  $p$ , опущен-

ного из центра инерции на плоскость, по которой катится ось, является функцией  $\vartheta$ . Если обе катящиеся секции концов оси — окружности, то

$$\rho = c - a \sin(\vartheta + \alpha), \quad (1)$$

где  $a$  — расстояние от центра инерции до линии, соединяющей центры катящихся секций,  $\alpha$  — угол, который эта линия образует с линией визирования.

Для магнита с магнитным моментом  $M$  и массой  $m$ , находящегося под действием силы тяжести  $g$  и полной магнитной силы  $I$  с магнитным наклоном  $i$ , как следует из сохранения энергии, в состоянии устойчивого равновесия величина

$$MI \cos(\vartheta + \lambda - i) - mgr \quad (2)$$

должна быть максимальна по  $\vartheta$ , т. е.

$$MI \sin(\vartheta + \lambda - i) = -mg \frac{d\rho}{d\vartheta}, \quad = mga \cos(\vartheta + \alpha), \quad (3)$$

если концы оси цилиндрические.

Итак, если  $T$  — период колебаний около этого положения равновесия, то

$$MI + mga \sin(\vartheta + \alpha) = \frac{4\pi^2 A}{T^2}, \quad (4)$$

где  $A$  — момент инерции стрелки относительно оси вращения, а угол  $\vartheta$  определяется из (3).

При определении наклона показания снимаются с вертикального круга, находящегося в плоскости магнитного меридиана, с градуировкой, обращенной на запад.

Обозначив это показание через  $\vartheta_1$ , имеем

$$MI \sin(\vartheta_1 + \lambda - i) = mga \cos(\vartheta_1 + \alpha). \quad (5)$$

Затем прибор поворачивается вокруг вертикальной оси на  $180^\circ$ , так чтобы шкала обратилась делениями на восток; для нового показания  $\vartheta_2$

$$MI \sin(\vartheta_2 + \lambda - \pi + i) = mga \cos(\vartheta_2 + \alpha). \quad (6)$$

Вычитая из (5) уравнение (6), заметим, что угол  $\vartheta_1$  примерно равен  $i$ ,  $\vartheta_2$  примерно равен  $\pi - i$ , а угол  $\lambda$  мал; тогда величиной  $mga \lambda$  можно пренебречь по сравнению с  $MI$ :

$$MI (\vartheta_1 - \vartheta_2 + \pi - 2i) = 2mga \cos i \cos \alpha. \quad (7)$$

Теперь извлечем магнит из опор и поместим его в отклоняющую аппаратуру п. 453, чтобы по отклонению подвешенного магнита определить его собственный магнитный момент, тогда

$$M = r^3 HD / 2, \quad (8)$$

где  $D$  — тангенс угла отклонения.

Сделаем обращение намагниченности стрелки и найдем ее новый магнитный момент  $M'$ , измерив при том же расстоянии новое отклонение, тангенс которого обозначим  $D'$ :

$$M' = r^3 HD' / 2, \quad (9)$$



откуда

$$MD' = M'D. \quad (10)$$

Снова поместим стрелку на опоры и снимем два новых показания  $\vartheta_3$  и  $\vartheta_4$ , из которых  $\vartheta_3$  близко к  $\pi + i$ , а  $\vartheta_4$  близко к  $-i$ :

$$M'I \sin(\vartheta_3 + \lambda' - \pi - i) = mga \cos(\vartheta_3 + \alpha), \quad (11)$$

$$M'I \sin(\vartheta_4 + \lambda' + i) = mga \cos(\vartheta_4 + \alpha), \quad (12)$$

откуда, как и прежде:

$$M'I(\vartheta_3 - \vartheta_4 - \pi - 2i) = -2mga \cos i \cos \alpha. \quad (13)$$

И, добавив (7),

$$MI(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \pi - 2i) + M'I(\vartheta_3 - \vartheta_4 - \pi - 2i) = 0 \quad (14)$$

или

$$D(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \pi - 2i) + D'(\vartheta_3 - \vartheta_4 - \pi - 2i) = 0, \quad (15)$$

откуда находим наклонение:

$$i = \frac{D(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \pi) + D'(\vartheta_3 - \vartheta_4 - \pi)}{2D + 2D'}, \quad (16)$$

где  $D$  и  $D'$  — тангенсы углов отклонений стрелки при первом и втором значениях намагниченности соответственно.

При проведении измерений с вертикальным кругом вертикальная ось тщательно устанавливается так, чтобы плоские опоры, на которых покоится ось магнита, были горизонтальны при любом азимуте. Ось магнита помещается на плоских опорах, а сам магнит намагничивается таким образом, чтобы конец  $A$  наклонялся; измерения производятся при совмещении плоскости круга с магнитным меридианом, причем градуированная сторона круга обращена к востоку. Каждый конец магнита наблюдается через считывающий микроскоп, размещенный на плече, которое перемещается концентрично вертикальному кругу. Микроскоп регулируется так, чтобы изображение отметки на магните совпало с крестом микроскопа, а положение плеча отсчитывается на вертикальном круге с помощью верньеров.

Так мы производим одно измерение конца  $A$  и другое — конца  $B$  при шкале, обращенной на восток. Измерения обоих концов необходимы для исключения любой ошибки, возникающей из-за неконцентричности оси магнита с вертикальным кругом.

После этого градуированная сторона поворачивается на запад и производятся еще два измерения.

Затем магнит переворачивается так, что концы его оси меняются местами, после чего при таком положении магнита производятся еще четыре измерения.

Затем намагниченность меняется на противоположную, при которой вниз наклоняется уже конец  $B$ , устанавливается значение магнитного момента, и в этом положении осуществляются еще восемь измерений. Истинное наклонение определяется путем комбинации шестнадцати измерений.

462. Обнаружено, что, несмотря на крайние предосторожности, наклонение, найденное из измерений одним инклинометром, заметно отличается от наклонения, найденного из измерений другим инклинометром в том же месте. М-р Браун указал, что этот эффект связан с эллиптичностью опорных поверхностей оси, и предложил корректировать его путем проведения измерений с магнитом, намагничиваемым до различных мощностей.

Принцип этого метода можно сформулировать следующим образом. Мы будем считать, что ошибка любого единичного измерения является величиной малой, не превышающей градуса. Будем также считать, что некоторая неизвестная, но регулярная сила действует на магнит, отклоняя его от правильного положения.

Если момент этой силы равен  $L$ , истинное наклонение  $\vartheta_0$  и наблюдаемое отклонение  $\vartheta$ , то

$$L = MI \sin (\vartheta - \vartheta_0) = \quad (17)$$

$$= MI (\vartheta - \vartheta_0), \quad (18)$$

поскольку разность  $\vartheta - \vartheta_0$  мала.

Очевидно, что чем больше становится  $M$ , тем ближе подходит стрелка к своему правильному положению. Допустим, что процедура регистрации наклонения произведена дважды — один раз с максимально возможной для стрелки намагниченностью  $M_1$ , а второй — с гораздо меньшей намагниченностью  $M_2$ , достаточной, однако, для отчетливого, с еще умеренной ошибкой, снятия показаний. Пусть  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — наклонения, найденные из двух таких серий измерений, а  $L$  — среднее значение неизвестной возмущающей силы для восьми положений в каждой серии, которое мы будем считать одинаковым для обеих серий. Тогда

$$L = M_1 I (\vartheta_1 - \vartheta_0) = M_2 I (\vartheta_2 - \vartheta_0). \quad (19)$$

Следовательно,

$$\vartheta_0 = \frac{M_1 \vartheta_1 - M_2 \vartheta_2}{M_1 - M_2}, \quad L = M_1 M_2 I \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{M_2 - M_1}. \quad (20)$$

Если окажется, что в нескольких экспериментах получаются примерно одинаковые значения  $L$ , то мы можем рассматривать  $\vartheta_0$  как величину, очень близкую к истинному наклонению.

463. Д-р Джоуль сконструировал недавно новый инклинометр, в котором ось стрелки, вместо того чтобы катиться по горизонтальным агатовым плоскостям, подвешена на двух нитях из шелка или паутины, концы которых прикреплены к коромыслу очень чувствительных весов. Таким образом, ось стрелки катится по двум петлям из шелковых нитей; д-р Джоуль находит, что в своем движении она гораздо более свободна, чем при качении по агатовым плоскостям.

На рис. 18 изображены:  $NS$  — стрелка,  $CC'$  — ее ось, выполненная в виде прямого цилиндрического провода,  $PCQ$  и  $P'C'Q'$  — нити, по которым катится ось.  $POQ$  — коромысло весов в виде двойного изогнутого рычага, поддерживаемого проволокой, горизонтально натянутой между зубцами вилкообразной подставки; коромысло снабжено противовесом  $R$ , который можно подвинчивать вверх или вниз, чтобы весы находились в нейтральном равновесии относительно  $O'O'$ .

Чтобы стрелка находилась в нейтральном равновесии, ее центр тяжести при качении по нитям не должен ни подниматься, ни опускаться, т. е. при качении

стрелки расстояние  $OC$  должно оставаться неизменным. Это условие будет выполнено, если рычаги коромысла равны, а нити направлены под прямыми углами к рычагам.

Д-р Джоуль нашел, что стрелка должна быть не длиннее пяти дюймов. При длине восемь дюймов изгиб стрелки приводит к уменьшению видимого наклона на доли минуты. Ось стрелки вначале была изготовлена из стальной проволоки, выпрямленной под действием собственного веса в нагретом докрасна состоянии, но затем д-р Джоуль обнаружил, что при новой системе подвешивания нет необходимости в использовании стальной проволоки, поскольку платина и даже стандартное золото обладают достаточной твердостью.

Весы сбалансированы на проволоке  $O'O'$  длиной около фута, горизонтально натянутой между зубцами вилки. Вилка вращается по азимуту с помощью круга на вершине треноги, на которой держится весь прибор. За час можно произвести шесть полных измерений наклона при средней ошибке единичного измерения, составляющей доли угловой минуты.

В Кембриджской физической лаборатории положение вертикальной стрелки предложено измерять с помощью прибора двойного изображения. Он состоит из двух полностью отражающих призм, расположение которых показано на рис. 19. Призмы прикреплены к вертикальному градуированному кругу, их плоскость отражения можно поворачивать вокруг горизонтальной оси, почти совпадающей с продолжением оси подвешенной стрелки. Стрелка наблюдается через телескоп, помещенный за призмами, причем два конца стрелки видны вместе, как на рис. 20. Поворачивая призмы вокруг оси вертикального круга, можно добиться совпадения изображений двух линий, начерченных на стрелке. Наклонение стрелки при этом определяется показаниями вертикального круга.

Полную напряженность  $I$  магнитной силы вдоль линии наклона можно определить по периодам колебаний  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  и  $T_4$  в четырех уже описанных положениях следующим образом:

$$I = \frac{4\pi^2 A}{2M + 2M'} \left\{ \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} + \frac{1}{T_3^2} + \frac{1}{T_4^2} \right\}.$$

Здесь  $A$  — момент инерции магнита относительно его оси, а величины  $M$  и  $M'$  должны быть найдены уже описанным методом отклонения и колебаний.

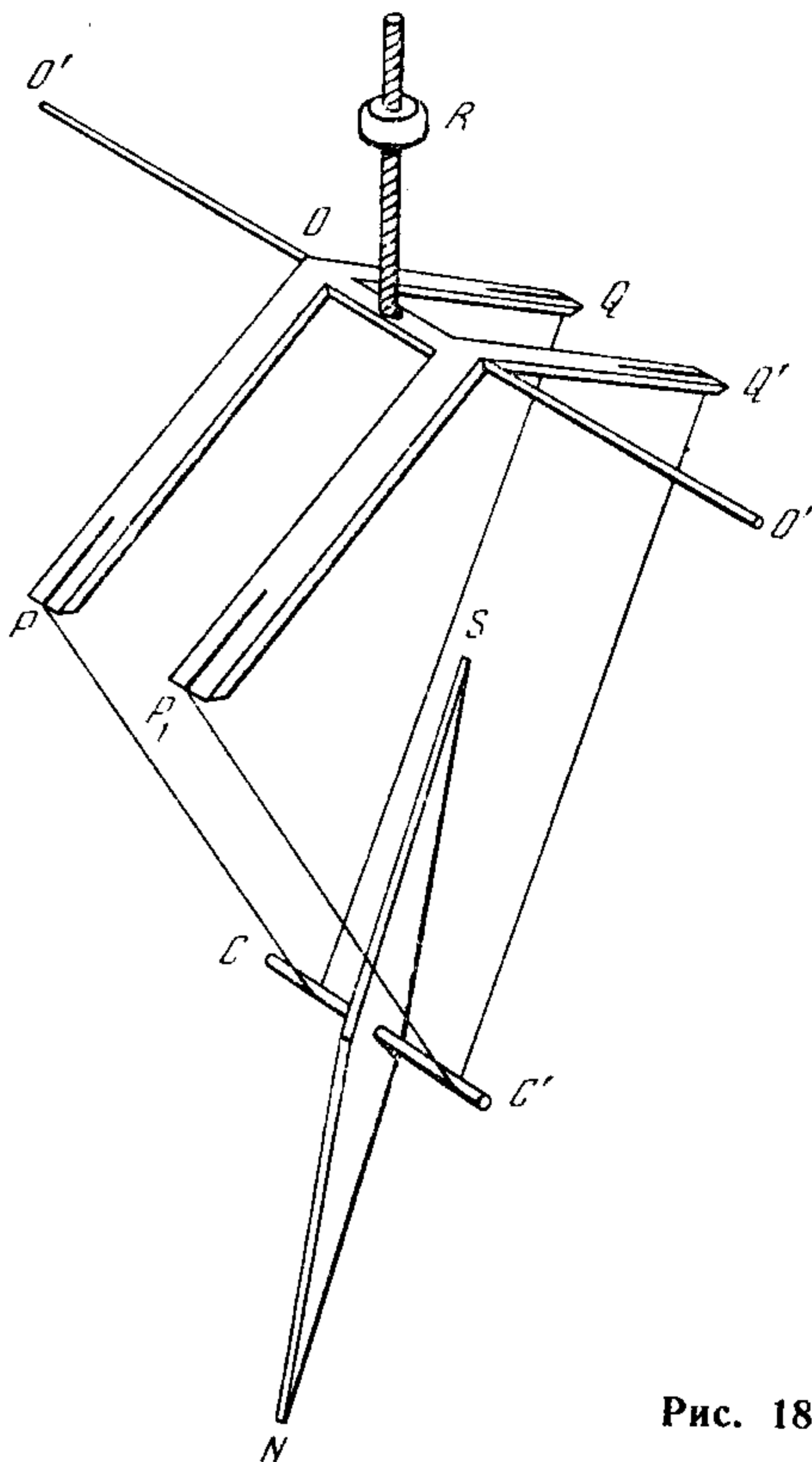


Рис. 18

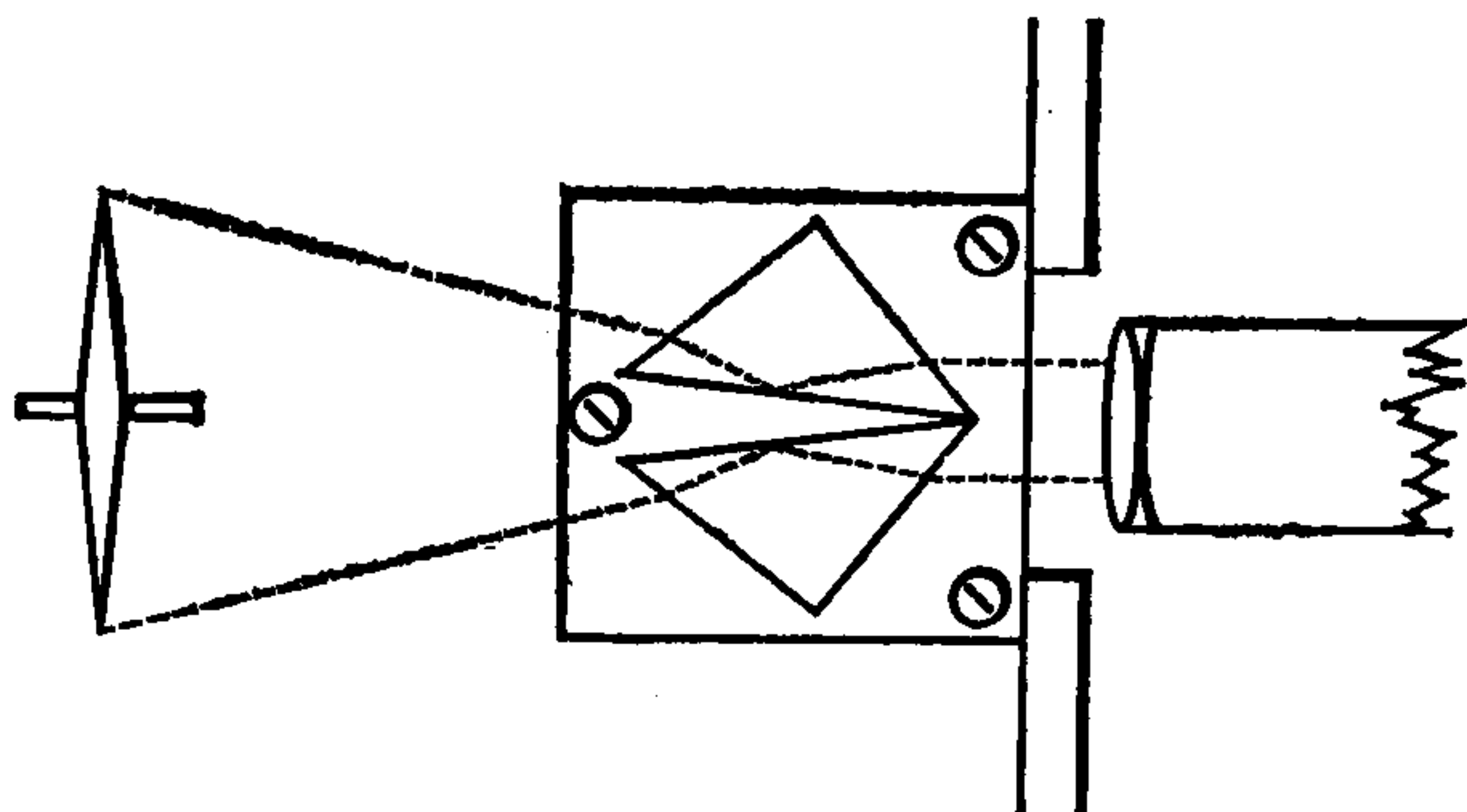


Рис. 19

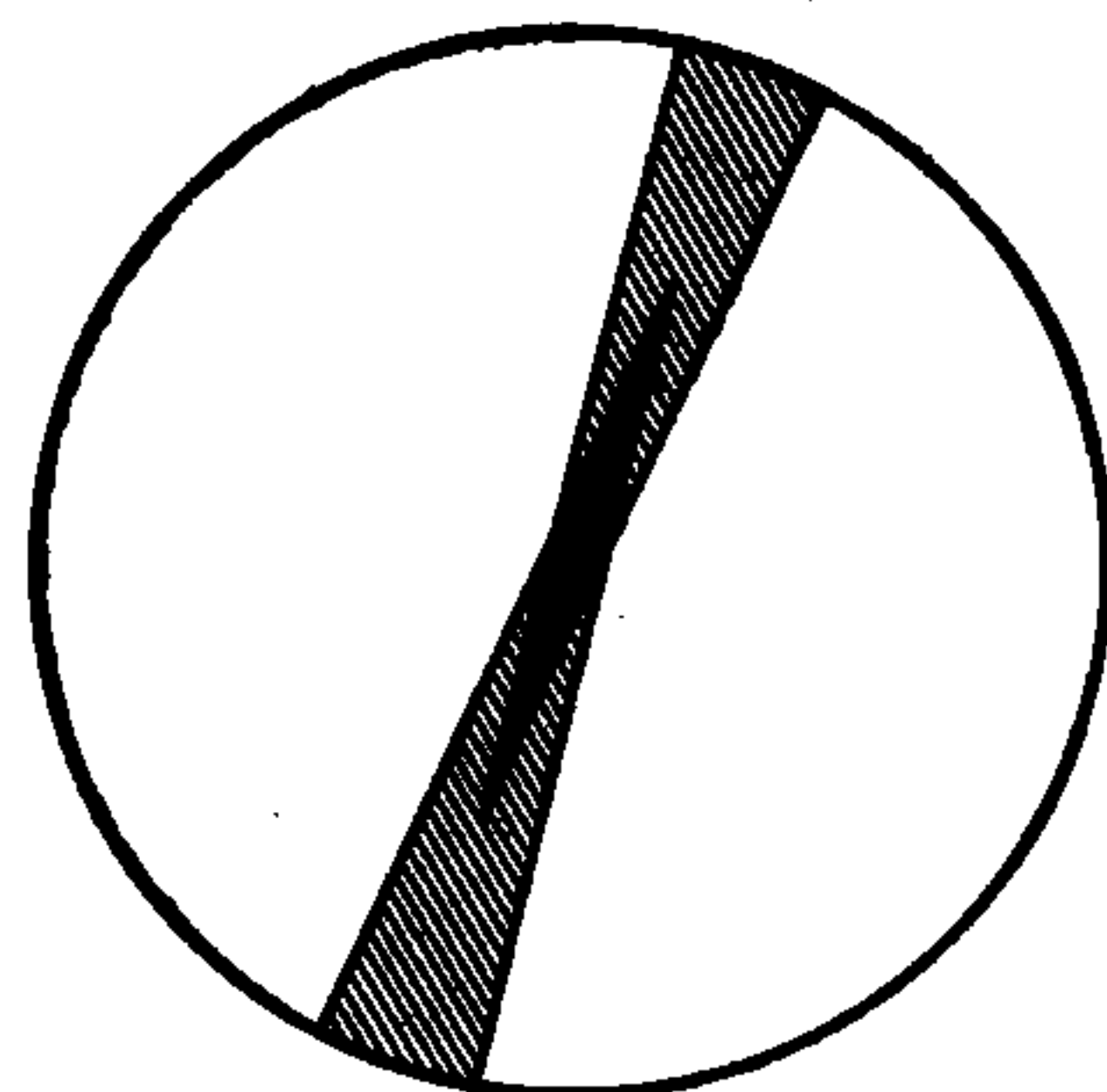


Рис. 20

Измерения с магнитом, подвешенным на нити, являются настолько более точными, что полную силу обычно вычисляют по горизонтальной силе с помощью соотношения  $I = H \sec \vartheta$ , где  $I$  — полная сила,  $H$  — горизонтальная сила и  $\vartheta$  — наклонение.

464. Утомительный процесс определения наклонения не приспособлен для наблюдения непрерывных вариаций магнитной силы. Наиболее удобным прибором для непрерывных наблюдений является магнитометр вертикальной силы, который попросту представляет собой магнит, сбалансированный на лезвии ножа таким образом, что его магнитная ось в устойчивом равновесии оказывается почти горизонтальной.

Если  $Z$  — вертикальная составляющая магнитной силы,  $M$  — магнитный момент и  $\vartheta$  — малый угол, который магнитная ось образует с горизонтом, то

$$MZ \cos \vartheta = mga \cos (\alpha - \vartheta),$$

где  $m$  — масса магнита,  $g$  — сила тяжести,  $a$  — расстояние от центра тяжести до оси подвеса и  $\alpha$  — угол, который образует с осью магнита плоскость, проходящая через ось и центр тяжести.

Следовательно, при малых вариациях вертикальной силы  $\delta Z$ , поскольку  $\vartheta$  очень мало, появятся вариации углового положения магнита  $\delta \vartheta$ , такие, что

$$M \delta Z = mga \sin (\alpha - \vartheta) \delta \vartheta.$$

На практике этот прибор не применяется для определения абсолютного значения вертикальной силы, а используется лишь для регистрации ее малых вариаций.

Для этой цели достаточно знать абсолютное значение  $Z$  при  $\vartheta = 0$  и величину  $dZ/d\vartheta$ .

Если горизонтальная сила и наклонение известны, то значение  $Z$  определяется соотношением  $Z = H \operatorname{tg} \vartheta_0$ , где  $\vartheta_0$  — наклонение и  $H$  — горизонтальная сила.

Чтобы найти отклонение, обусловленное заданной вариацией  $Z$ , возьмем магнит, поместим его на известном расстоянии  $r_1$  к западу или к востоку от деклино-

метра, направив его ось с востока на запад, как это делалось в экспериментах по отклонению; пусть тангенс угла отклонения будет равен  $D_1$ .

Поместим затем магнит, направив его ось вертикально, на расстоянии  $r_2$  над или под центром магнитометра вертикальной силы, и пусть тангенс отклонения, произведенного в магнитометре, равен  $D_2$ . Тогда, если момент отклоняющего магнита равен  $M$ , то

$$2M = Hr_1^3 D_1 = \frac{dZ}{d\vartheta} r_2^3 D_2.$$

Следовательно, 
$$\frac{dZ}{d\vartheta} = H \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{D_1}{D_2}.$$

Действительное значение вертикальной силы в произвольный момент равно  $Z = Z_0 + \vartheta \frac{dZ}{d\vartheta}$ , где  $Z_0$  — значение  $Z$  при  $\vartheta = 0$ .

Для непрерывных измерений магнитной силы в некоторой неподвижной обсерватории наиболее удобны инструменты: однопитевой деклинометр, двухпитевой магнитометр горизонтальной силы и сбалансированный магнитометр вертикальной силы.

В некоторых обсерваториях сейчас воспроизводятся фотографические записи на особой бумаге, перемещаемой с помощью часового механизма; при этом получают непрерывные записи показаний всех трех приборов в каждый момент времени. Эти кривые показывают вариации относительно стандартных значений трех ортогональных составляющих магнитной силы. Деклинометр дает силу, направленную к среднему магнитному западу; двухпитевой магнитометр дает вариацию силы, направленной к магнитному северу, и сбалансированный магнитометр дает вариацию вертикальной силы. Стандартные значения для этих сил или значения, при которых эти приборы показывают нули, получаются на основании часто производимых измерений абсолютных значений склонения, горизонтальной силы и наклона.

## ГЛАВА VIII О ЗЕМНОМ МАГНЕТИЗМЕ

**465.** Наши знания о Земном Магнетизме получены на основании исследования распределения магнитной силы по земной поверхности в какой-либо определенный момент времени, а также изучения изменений, происходящих в этом распределении в различные времена.

Магнитная сила в любом месте в любой момент времени известна, если известны три ее координаты. Они могут быть заданы в виде склонения или азимута силы, наклона относительно горизонта и полного значения напряженности.

Однако наиболее удобный метод изучения общего распределения магнитной

силы на земной поверхности состоит в рассмотрении значений трех ее составляющих:

$$\begin{array}{ll} \text{направленной к северу} & X = H \cos \delta, \\ \text{направленной к западу} & Y = H \sin \delta, \\ \text{направленной вертикально вниз} & Z = H \operatorname{tg} \vartheta, \end{array} \quad (1)$$

где  $H$  обозначает горизонтальную силу,  $\delta$  — склонение,  $\vartheta$  — наклонение.

Если через  $V$  обозначить магнитный потенциал на поверхности Земли, рассматривая ее как сферу с радиусом  $a$ , то

$$X = -\frac{1}{a} \frac{dV}{dl}, \quad Y = -\frac{1}{a \cos l} \frac{dV}{d\lambda}, \quad Z = \frac{dV}{dr}, \quad (2)$$

где  $l$  — широта,  $\lambda$  — долгота,  $r$  — расстояние от центра Земли.

Знание распределения  $V$  по земной поверхности может быть получено из наблюдений одной лишь горизонтальной силы следующим способом.

Обозначим через  $V_0$  значение  $V$  в истинном северном полюсе Земли и затем возьмем линейный интеграл от  $X$  вдоль какого-нибудь меридиана; тогда для потенциала на этом меридиане на широте  $l$  найдем

$$V = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^l X dl + V_0. \quad (3)$$

Таким образом, потенциал в любой точке земной поверхности может быть найден при условии, что мы знаем в каждой точке величину северной компоненты силы  $X$  и величину потенциала на полюсе  $V_0$ .

Так как силы зависят от производных потенциала  $V$ , а не от его абсолютной величины, то нет необходимости фиксировать какое-либо частное значение  $V_0$ .

Величина  $V$  в произвольной точке может быть установлена, если известны значения  $X$  вдоль произвольно заданного меридиана, а также значения  $Y$  на всей поверхности. Пусть интеграл

$$V_l = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^l X dl + V_0 \quad (4)$$

берется вдоль заданного меридиана от полюса до параллели  $l$ , тогда

$$V = V_l - a \int_{\lambda_0}^{\lambda} Y \cos l d\lambda, \quad (5)$$

где интегрирование производится вдоль параллели  $l$  от заданного меридиана  $\lambda_0$  до требуемой точки.

Эти методы предполагают, что составлена полная магнитная обзорная карта (magnetic survey) земной поверхности, так что величины  $X$  или  $Y$  или обе из них известны во всех точках поверхности на данном отрезке времени. Что мы действительно знаем, так это лишь магнитные компоненты в местах расположения оп-

ределенного числа станций. В цивилизованных частях света эти станции сравнительно многочисленны; но в других местах существуют протяженные участки земной поверхности, относительно которых у нас нет никаких сведений.

### Магнитная обзорная карта

466. Предположим, что в какой-то стране умеренной протяженности, наибольший размер которой составляет несколько сот миль, имеется значительное количество удачно размещенных станций, где проводятся наблюдения за горизонтальной силой и склонением.

В пределах этого района можно считать, что потенциал  $V$  с достаточной точностью представляется следующей формулой:

$$V = \text{const} - a \left( A_1 l + A_2 \lambda + \frac{1}{2} B_1 l^2 + B_2 l \lambda + \frac{1}{2} B_3 \lambda^2 + \dots \right), \quad (6)$$

откуда следует

$$X = A_1 + B_1 l + B_2 \lambda, \quad (7)$$

$$Y \cos l = A_2 + B_2 l + B_3 \lambda. \quad (8)$$

Пусть имеется  $n$  станций с широтами  $l_1, l_2, \dots$  и долготами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , и пусть для каждой из этих станций найдены значения  $X$  и  $Y$ . Введем  $l_0$  и  $\lambda_0$ , которые могут быть названы широтой и долготой центральной станции:

$$l_0 = \frac{1}{n} \sum (l), \quad \lambda_0 = \frac{1}{n} \sum (\lambda). \quad (9)$$

Определим значения  $X$  и  $Y$  на этой воображаемой центральной станции так:

$$X_0 = \frac{1}{n} \sum (X), \quad Y_0 \cos l_0 = \frac{1}{n} \sum (Y \cos l). \quad (10)$$

Тогда

$$X = X_0 + B_1 (l - l_0) + B_2 (\lambda - \lambda_0), \quad (11)$$

$$Y \cos l = Y_0 \cos l_0 + B_2 (l - l_0) + B_3 (\lambda - \lambda_0). \quad (12)$$

Мы имеем  $n$  уравнений вида (11) и  $n$  уравнений вида (12). Обозначим вероятную ошибку в определении  $X$  через  $\xi$ , а в определении  $Y \cos l$  — через  $\eta$ ; тогда мы можем вычислить  $\xi$  и  $\eta$ , исходя из предположения, что они обусловлены ошибками наблюдений  $H$  и  $\delta$ .

Пусть вероятная ошибка наблюдений  $H$  равна  $h$ , а ошибка наблюдений  $\delta$  равна  $\Delta$ , тогда в силу

$$dX = \cos \delta \cdot dH - H \sin \delta \cdot d\delta$$

будем иметь

$$\xi^2 = h^2 \cos^2 \delta + \Delta^2 H^2 \sin^2 \delta.$$

Аналогично

$$\eta^2 = h^2 \sin^2 \delta + \Delta^2 H^2 \cos^2 \delta.$$

Если отклонения  $X$  и  $Y$  от значений, даваемых уравнениями вида (11) и (12), значительно превышают вероятные ошибки наблюдений, можно сделать вывод о том, что они обусловлены какими-то местными притяжениями; при этом у нас

нет никаких причин полагать отношение  $\xi$  и  $\eta$  равным какой-либо величине, отличной от единицы.

Согласно методу наименьших квадратов, умножим уравнения вида (11) на  $\eta$ , а уравнения вида (12) — на  $\xi$ , тем самым сделав их вероятные ошибки одинаковыми. Затем умножим каждое из уравнений на коэффициент перед одной из неизвестных величин  $B_1$ ,  $B_2$  или  $B_3$ ; сложив результаты, получим три уравнения для отыскания величин  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ :

$$\begin{aligned} P_1 &= B_1 b_1 + B_2 b_2, \\ \eta^2 P_2 + \xi^2 Q_1 &= B_1 \eta^2 b^2 + B_2 (\xi^2 b_1 + \eta^2 b_3) + B_3 \xi^2 b_2, \\ Q_2 &= B_2 b_2 - B_3 b_3 \end{aligned}$$

Здесь для краткости обозначено

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum (l^2) - n l_0^2, & b_2 &= \sum (l\lambda) - n l_0 \lambda_0, & b_3 &= \sum (\lambda^2) - n \lambda_0^2, \\ P_1 &= \sum (lX) - n l_0 X_0, & Q_1 &= \sum (lY \cos l) - n l_0 Y_0 \cos l_0, \\ P_2 &= \sum (\lambda X) - n \lambda_0 X_0, & Q_2 &= \sum (\lambda Y \cos l) - n \lambda_0 Y_0 \cos l_0. \end{aligned}$$

Вычисляя  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  и подставляя их в уравнения (11) и (12), мы можем найти значения  $X$  и  $Y$  в любой точке обзорной карты в пределах, свободных от местных возмущений, обнаруживаемых там, где вблизи станций имеются магнитные породы, каковыми является большинство скал вулканического происхождения.

Обзорные карты подобного рода могут быть составлены лишь для тех стран, где имеется много станций, куда удастся доставить и где можно установить магнитные инструменты. Для других частей Земли приходится довольствоваться отысканием распределения магнитных элементов путем их интерполяции между значениями, известными лишь в местах расположения небольшого числа станций, разнесенных друг от друга на большие расстояния.

**467.** Предположим теперь, что с помощью описанной выше процедуры или с помощью эквивалентного ей графического метода построения карт, содержащих линии равных значений магнитных элементов, мы узнали величины  $X$  и  $Y$ , а следовательно, и потенциал  $V$  для всей поверхности земного шара. Следующий шаг должен состоять в разложении  $V$  в ряд по сферическим поверхностным гармоникам.

Если бы Земля всюду внутри была однородно намагничена в одном и том же направлении, то потенциал  $V$  был бы гармоникой первого порядка, магнитные меридианы совпадали бы с большими окружностями, проходящими через оба диаметрально противоположных магнитных полюса, а магнитный экватор был бы большой окружностью с одинаковой во всех ее точках горизонтальной силой. Обозначив через  $H_0$  это постоянное значение силы, для любой другой точки с магнитной широтой  $l'$  мы бы имели  $H = H_0 \cos l'$ . Вертикальная сила в произвольной точке равнялась бы  $Z = 2H_0 \sin l'$ , причем  $\text{tg } \vartheta = 2 \text{tg } l'$ , где  $\vartheta$  — наклонение.

Магнитный экватор в случае Земли определяется как линия нулевого наклонения и не является большой окружностью сферы.

Магнитные полюса определяются как точки, в которых горизонтальная сила равна нулю, или где наклонение равно  $90^\circ$ . Существуют две таких точки, одна в северном, другая в южном районах, однако они не являются диаметрально противоположными, и соединяющая их линия не параллельна магнитной оси Земли.



468. Магнитные полюса — это точки, где потенциал  $V$  на поверхности Земли имеет минимум или максимум или стационарное значение.

В любой точке, где потенциал минимален, северный конец стрелки инклинометра показывает вертикально вниз, а если где-нибудь вблизи этой точки поместить компас, то северный конец его стрелки будет указывать в сторону этой точки.

В точках, где потенциал максимален, южный конец стрелки инклинометра показывает вертикально вниз, а южный конец стрелки компаса указывает в сторону этой точки.

Если на поверхности Земли существует  $p$  минимумов  $V$ , то должно иметься  $(p-1)$  других точек, в которых северный конец стрелки инклинометра указывает вниз, но где, однако, стрелка компаса, если ее обнести по окружности около такой точки, вместо того, чтобы, вращаясь, указывать неизменно северным концом на центр этой окружности, будет вращаться в противоположном направлении, поворачиваясь к центральной точке то своим северным, то южным концом.

Если точки с минимумом потенциала назвать истинными северными полюсами, то эти другие точки можно назвать ложными северными полюсами, потому что стрелка компаса по отношению к ним ведет себя неверно. При наличии  $p$  истинных северных полюсов должно иметься  $(p-1)$  ложных северных полюсов и аналогично при  $q$  истинных южных полюсах должно быть  $(q-1)$  ложных южных полюсов. Число одноименных полюсов должно быть нечетным, так что преобладавшее одно время мнение о существовании двух северных и двух южных полюсов ошибочно. Согласно Гауссу, в действительности на земной поверхности имеется только один истинный северный полюс и только один истинный южный полюс и, следовательно, не существует ложных полюсов. Линия, соединяющая эти полюса, не совпадает с диаметром Земли и не параллельна земной магнитной оси.

469. Большинство ранних исследователей природы земного магнетизма пытались представить его как результат действия одного или нескольких стержневых магнитов, расположение полюсов которых подлежало определению. Гаусс был первым, кто выразил распределение земного магнетизма совершенно общим способом через разложение его потенциала в ряд по объемным гармоникам, коэффициенты которых он определил для первых четырех степеней. Общее число коэффициентов равно 24:3 — для первой степени, 5 — для второй, 7 — для третьей и 9 — для четвертой. Все эти члены оказались необходимыми для того, чтобы с доступной точностью дать представление о действительном состоянии земного магнетизма.

*Как отыскать, какая часть наблюдаемой магнитной силы обусловлена внешними, а какая внутренними источниками*

470. Предположим теперь, что мы получили разложение магнитного потенциала Земли по сферическим гармоникам, согласующееся с истинным направлением и истинной величиной горизонтальной силы в каждой точке земной поверхности. Гаусс показал, как, исходя из значений наблюдаемой вертикальной силы, определить, обусловлены ли магнитные силы источниками внутри земной поверхности, такими как намагниченность или электрические токи, или же какая-то их часть непосредственно обязана источникам вне земной поверхности.

Пусть истинный потенциал разложен в двойной ряд по сферическим гармоникам:

$$V = A_1 \frac{r}{a} + \dots + A_i \left(\frac{r}{a}\right)^i + \dots + B_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} + \dots + B_i \left(\frac{r}{a}\right)^{-(i+1)} + \dots$$

Первый ряд представляет часть потенциала, обусловленную внешними по отношению к Земле источниками, второй ряд представляет часть, обусловленную источниками в пределах Земли.

Наблюдаемая горизонтальная сила дает нам сумму этих рядов при  $r=a$  ( $a$  — радиус Земли). Член  $i$ -го порядка равен  $V_i = A_i + B_i$ .

Наблюдения вертикальной силы дают нам  $Z = dV/dr$ , а член  $i$ -го порядка в выражении для  $aZ$  равен  $aZ_i = iA_i - (i+1)B_i$ .

Следовательно, часть, обусловленная внешними источниками, равна  $A_i = \frac{(i+1)V_i + aZ_i}{2i+1}$ , а часть, обусловленная источниками в пределах Земли,  $B_i = \frac{iV_i - aZ_i}{2i+1}$ .

Разложение  $V$  к настоящему времени вычислено только для среднего значения  $V$ , относящегося к определенным или примерно определенным отрезкам времени. Представляется, что существенная часть этого среднего значения не может быть обусловлена причинами, внешними по отношению к Земле.

471. Мы пока еще не достаточно знаем вид разложения солнечной и лунной частей вариаций  $V$ , чтобы установить *этим методом*, связана ли часть этих вариаций с магнитными силами, действующими извне. Безусловно, однако, как показали вычисления Стоуни (Stoney) и Чамберса (Chambers), что главная часть этих вариаций не может быть вызвана непосредственным магнитным воздействием Солнца или Луны, если считать их магнитными<sup>1</sup>.

472. Основные изменения магнитной силы, на которые было направлено внимание, следующие.

### I. Относительно более регулярные вариации

(1). Солнечные вариации, зависящие от времени суток и времени года.

(2). Лунные вариации, зависящие от лунного часового угла и от других элементов положения Луны.

(3). Вариации, которые не повторяются в различные годы, но, по-видимому, принадлежащие к вариациям более длинного, порядка одиннадцати лет, периода.

(4). Кроме этого, существуют вековые изменения состояния земного магнетизма, которые происходят в течение всего времени с тех пор, как начали производиться магнитные измерения, и которые производят изменения магнитных компонент, значительно большие по величине, чем какие-либо вариации малого периода.

<sup>1</sup> Профессор Хорнштейн (Hornstein) из Праги открыл периодические изменения в магнитных элементах, период которых равен 26,33 суток, что почти точно совпадает с периодом синодического вращения Солнца, найденным по наблюдениям солнечных пятен вблизи экватора. Этот метод измерения периода вращения невидимого твердого тела Солнца по его действию на магнитную стрелку является первым взносом магнетизма в уплату его долга перед астрономией, *Anzeiger der k. Akad.*, Wien, June 15, 1871. См. *Proc. R. S.*, Nov. 16, 1871.

## II. Возмущения

473. Помимо более регулярных изменений, магнитные элементы подвержены внезапным возмущениям той или иной степени. Обнаружено, что эти возмущения в какие-то интервалы времени оказываются более мощными и частыми, чем в другие, и тогда во время больших возмущений закономерности регулярных вариаций завуалированы, хотя во время малых возмущений они проявляются очень отчетливо. Поэтому этим возмущениям было уделено много внимания; было выяснено, что возмущения какого-то частного типа с большей вероятностью происходят в определенные времена суток, в определенные времена года или в определенные интервалы времени, хотя каждое отдельное возмущение появляется абсолютно нерегулярно. Время от времени наряду с этими более обычными возмущениями возникают чрезвычайно большие возмущения, сильно нарушающие магнетизм в течение одного или двух дней. Их называют Магнитными Бурями. Отдельные возмущения иногда наблюдаются одновременно на станциях, разнесенных на большие расстояния.

М-р Эйри обнаружил, что значительная часть возмущений, возникающих в Гринвиче, соответствует появлению электрических токов, собираемых электродами, размещаемыми поблизости в земле; причем эти возмущения оказались такими же, какими они вызывались бы прямо в магните, когда *под ним* протекал бы земной ток, сохраняющий свое истинное направление, но текущий по проводу.

Было выяснено, что периоды максимума возмущений бывают каждые одиннадцать лет и, кажется, совпадают с периодами максимального количества солнечных пятен.

474. Область исследований, в которую мы проникли при изучении земного магнетизма, является столь же глубокой, сколь и обширной.

Мы знаем, что Солнце и Луна воздействуют на земной магнетизм. Доказано, что это воздействие нельзя объяснить, исходя из предположения, что эти тела являются магнитами, и, следовательно, это воздействие не является непосредственным.

В случае Солнца часть его воздействия может оказаться тепловым, но этого нельзя приписать Луне. Может быть, притяжение этих тел, вызывая напряжение во внутренних частях Земли, производит (п. 447) изменения в магнетизме, уже существующем в Земле, как разновидность приливного действия, дающая полусуточные вариации?

Но величина всех этих изменений очень мала по сравнению с большими вековыми изменениями земного магнетизма.

Какой же источник, внешний ли по отношению к Земле или таящийся в ее внутренних глубинах, производит столь огромные изменения в земном магнетизме, что ее магнитные полюса медленно смещаются из одной части земного шара в другую? Если мы примем во внимание, что интенсивность намагниченности огромного земного шара вполне сравнима с той, которую мы с большим трудом создаем в своих стальных магнитах, эти обширные изменения в таком огромном теле вынуждают нас заключить, что мы все еще не знакомы с одним из наиболее мощных действующих в природе агентов, сцена активности которого лежит в тех внутренних глубинах Земли, к познанию которых у нас так мало средств доступа.