АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ

JAMES CLERK MAXWELL

A TREATISE ON ELECTRICITY AND MAGNETISM

Volume II

ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ

В ДВУХ ТОМАХ
Том II

ПЕРЕВОД:
Б. М. БОЛОТОВСКОГО, И. Л. БУРШТЕЙНА,
М. А. МИЛЛЕРА, Е. В. СУВОРОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ:
доктора физико-математических наук
М. Л. ЛЕВИНА,
доктора физико-математических наук
М. А. МИЛЛЕРА,
кандидата физико-математических наук
Е. В. СУВОРОВА

МОСКВА «НАУКА» 1989

УДК 537.8

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

Дж. К. Максвелл. **Трактат об электричестве и магнетизме.** В двух томах. Т. II. М.: Наука, 1989.
ISBN 5—02—000042—6

Второй том «Трактата» посвящен магнетизму и электромагнетизму (в I том Максвелл включил электростатику и электрокинематику — электрические токи). Именно в этом (II томе) Максвелл обосновывает необходимость введения тока смещения, приводит полную систему уравнений электромагнитного поля, указывает на существование электромагнитных волн в вакууме и отождествляет свет с этими волнами.

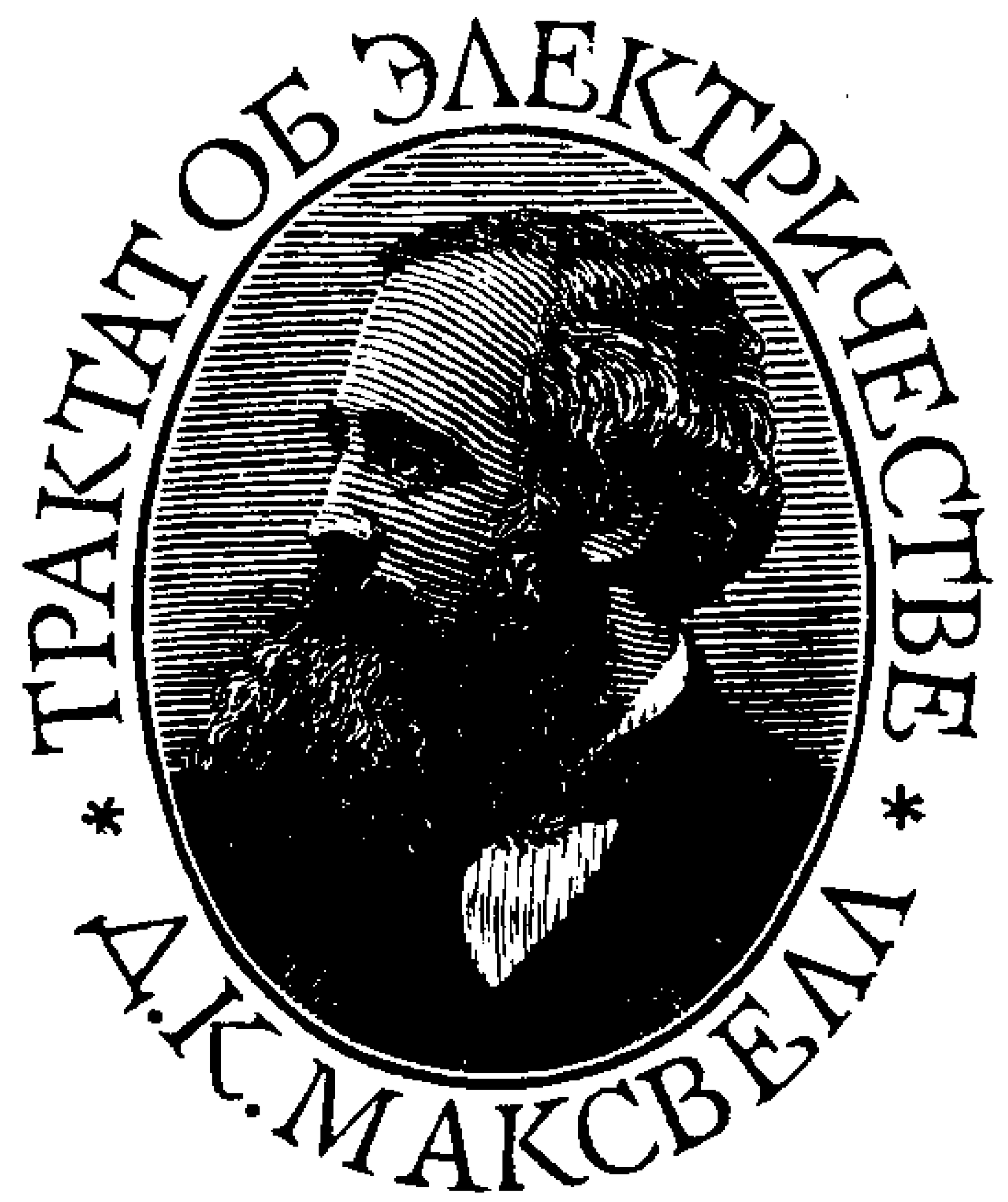
В Приложении приводятся краткие комментарии к обоим томам «Трактата», послесловия редакторов, а также список опубликованных в СССР монографий по электродинамике.

Издание рассчитано на физиков, историков науки и читателей, желающих ознакомиться с трудом, давно ставшим классическим и впервые полностью издающимся на русском языке.

Рецензент:
академик *А. В. Гапонов-Грехов*

М $\frac{1604050000\text{-}235}{055\,(02)\text{-}89}$ 116—89, кн. 2

ISBN 5—02—000042—6


ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ
Д.К.МАКСВЕЛЛ

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ III
МАГНЕТИЗМ

ГЛАВА I
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МАГНЕТИЗМА

ГЛАВА II
МАГНИТНАЯ СИЛА И МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

ГЛАВА III
МАГНИТНЫЕ СОЛЕНОИДЫ И ОБОЛОЧКИ

ГЛАВА IV
ИНДУЦИРОВАННАЯ НАМАГНИЧЕННОСТЬ

ГЛАВА V

ЧАСТНЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

ГЛАВА VI

ВЕБЕРОВСКАЯ ТЕОРИЯ ИНДУЦИРОВАННОГО МАГНЕТИЗМА

ГЛАВА VII

МАГНИТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

ГЛАВА VIII

О ЗЕМНОМ МАГНЕТИЗМЕ

ЧАСТЬ IV

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СИЛА

ГЛАВА III

ОБ ИНДУКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

ГЛАВА IV

О САМОИНДУКЦИИ ТОКА

ГЛАВА V

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ

ГЛАВА VI

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

ГЛАВА VII
ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТУРОВ

ГЛАВА VIII
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ ПРИ ПОМОЩИ ВТОРИЧНОГО КОНТУРА

ГЛАВА IX
ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ГЛАВА X
РАЗМЕРНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

ГЛАВА XI
ОБ ЭНЕРГИИ И НАПРЯЖЕНИИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

ГЛАВА XII
ТОКОВЫЕ ЛИСТЫ

ГЛАВА XVI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

ГЛАВА XVII
СРАВНЕНИЕ КАТУШЕК

ГЛАВА XVIII
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ЕДИНИЦА СОПРОТИВЛЕНИЯ

ГЛАВА XIX
СРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЕДИНИЦ

ГЛАВА XX
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА

ГЛАВА XXI

МАГНИТНОЕ ДЕЙСТВИЕ НА СВЕТ

ГЛАВА XXII

ОБЪЯСНЕНИЕ ФЕРРОМАГНЕТИЗМА И ДИАМАГНЕТИЗМА МОЛЕКУЛЯРНЫМИ ТОКАМИ

ГЛАВА XXIII

ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИЯ НА РАССТОЯНИИ

ЧАСТЬ III
МАГНЕТИЗМ

ГЛАВА I
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МАГНЕТИЗМА

371. Некоторые тела, такие, например, как железная руда, носящая название «магнитный жалезняк», сама Земля, а также куски стали, подвергнутые специальной обработке, называются Магнитами; обнаружено, что они обладают следующими свойствами.

Если вблизи любой части земной поверхности, кроме Магнитных Полюсов, подвесить магнит, свободно вращающийся вокруг вертикальной оси, то он, вообще говоря, будет стремиться установиться по определенному азимуту, а при выведении из этого положения начнет колебаться около него. Ненамагниченное тело таких стремлений не проявляет — оно находится в равновесии одинаково при всех значениях азимута.

372. Было найдено, что сила действует на тело таким образом, чтобы некоторая линия внутри него, называемая Осью Магнита, стремилась стать параллельной некоторой линии в пространстве, называемой Направлением Магнитной Силы.

Предположим, что магнит подвешен так, что может свободно вращаться во всех направлениях около одной закрепленной точки. Чтобы исключить действие его веса, можно считать, что эта точка совпадает с центром тяжести. Пусть магнит придет в состояние равновесия. Пометим на магните две точки и установим их положения в пространстве. Затем поместим магнит в новое состояние равновесия и найдем новое положение отмеченных точек в пространстве.

Так как ось магнита в обоих состояниях совпадает с направлением магнитной силы, мы должны отыскать в магните линию, занимающую одно и то же пространственное положение до и после перемещения. Из теории движения недеформируемых тел следует, что такая линия всегда существует, причем перемещение магнита эквивалентно простому повороту вокруг нее.

Чтобы найти эту линию, построим две плоскости перпендикулярно отрезкам прямых, соединяющих начальные и конечные положения отмеченных точек и рассекающих эти отрезки пополам; пересечение этих плоскостей определит искомую линию, которая дает одновременно и направление оси магнита, и направление магнитной силы в пространстве.

Для практического определения этих направлений описанный метод неудобен; мы вернемся еще к этому вопросу при рассмотрении Магнитных Измерений.

Обнаружено, что в разных частях земной поверхности магнитная сила направлена по-разному. Если сделать метку на кончике магнита, указывающем на север, то окажется, что он устанавливается в направлении, которое в общем случае существенно отличается от направления истинного меридиана, причем в северном полушарии этот кончик всегда отклоняется еще и вниз, а в южном полушарии — вверх.

Азимут направления магнитной силы, отсчитываемой от истинного направления на север в сторону запада, называется Вариацией или Магнитным Склонением. Угол между направлением магнитной силы с горизонтальной плоскостью называется Магнитным Наклонением. Эти два угла задают направление магнитной силы; если также известна и ее интенсивность, то магнитная сила определена полностью. Измерение этих трех элементов в различных местах земной поверхности, обсуждение характера их вариаций от места к месту и с течением времени наблюдения, а также исследование причин, порождающих магнитную силу и вызывающих ее изменения,— все это составляет содержание науки о Земном Магнетизме.

373. Предположим теперь, что определены оси нескольких магнитов и у каждого из них помечен конец, указывающий на север. Подвесим свободно один из магнитов, а другой будем к нему приближать. Окажется, что два помеченных конца отталкиваются друг от друга и два непомеченных конца тоже отталкиваются друг от друга, а отмеченный и неотмеченный концы притягиваются друг к другу.

Установлено, что для магнитов, сделанных в виде длинных однородно и продольно намагниченных стержней или проволок (см. далее п. 384), наибольшее проявление силы происходит, когда конец одного магнита находится вблизи конца другого, и что эти явления можно рассматривать, исходя из предположения о том, что однотипные концы магнита отталкиваются, разнотипные концы притягиваются, а серединные части магнитов не проявляют ощутимого взаимодействия.

Концы длинного тонкого магнита обычно принято называть его Полюсами. В случае сколь угодно тонкого магнита, однородно намагниченного по длине, его концы действуют как центры силы, а остальные его части кажутся лишенными магнитного действия. У всех реальных магнитов намагниченность отличается от однородной, так что никакие отдельные точки не могут быть выбраны в качестве полюсов. Тем не менее Кулон, используя длинные тонкие стержни, намагниченные с особой тщательностью, установил закон для силы, действующей между двумя одноименными магнитными полюсами (средой между ними был воздух) [1].

Отталкивание между двумя одноименными магнитными полюсами происходит по прямой линии, их соединяющей, и численно равно произведению мощностей (strengths) полюсов, деленному на квадрат расстояния между ними.

374. Этот закон, конечно, содержит предположение о том, что мощность каждого из полюсов измеряется с помощью некоторой единицы, величина которой может быть выражена через входящие в данный закон члены.

Единичным полюсом является такой полюс, который указывает на север и, будучи помещенным на единичном расстоянии от другого единичного полюса, отталкивается от него в воздухе с единичной силой (последняя определяется как в п. 6). Полюс, указывающий на юг, считается отрицательным.

Если мощности магнитных полюсов m_1 и m_2, расстояние между ними l и

[1] Coulomb, *Mém. de l'Acad.* 1785, p. 603 and in Biot's *Traité de Physique*, tome III.

сила отталкивания f выражены численно, то

$$f=\frac{m_1 m_2}{l^2}.$$

Но если $[m]$, $[L]$ и $[F]$ — конкретные единицы магнитного полюса, длины и силы, тогда

$$f[F]=\left[\frac{m}{L}\right]^2 \frac{m_1 m_2}{l^2},$$

откуда следует, что

$$[m^2]=[L^2 F]=\left[L^2 \frac{ML}{T^2}\right],$$

или

$$[m]=[L^{3/2}T^{-1}M^{1/2}].$$

Следовательно, единичный полюс имеет по отношению к длине размерность, равную $^3/_2$ по отношению ко времени — размерность, равную — 1 а по отношению к массе — размерность, равную $+^1/_2$; это совпадает с размерностью электростатической единицы электричества, установленной ранее в п. 41, 42 совершенно аналогичным путем.

375. Точность этого закона можно считать установленной опытами Кулона с Крутильными Весами и подтвержденной опытами Гаусса и Вебера, равно как и всеми наблюдателями в магнитных обсерваториях, осуществляющими ежедневные магнитные измерения и получающими результаты, которые должны были бы стать несовместимыми друг с другом, если бы закон для силы был принят ошибочно. Дополнительное подтверждение вытекает из его согласованности с законами электромагнитных явлений.

376. Величину, названную нами мощностью полюса, можно было бы назвать также и количеством «Магнетизма», если не приписывать «Магнетизму» никаких иных свойств, кроме тех, которые обнаруживаются в полюсах магнита.

Закон для силы между двумя заданными количествами «Магнетизма» выражается математически в той же форме, что и закон для силы между численно равнозначными количествами «Электричества», поэтому многие из математических четодов теории магнетизма должны быть аналогичны методам теории электримества. Существуют, однако, и другие свойства магнитов, о которых следует помнить и которые могут в какой-то мере пролить свет на электрические свойства тел вообще.

Соотношение между полюсами магнита

377. Количество магнетизма на одном полюсе магнита всегда равно и противоположно количеству магнетизма на другом полюсе, или более обще:

В каждом Магните общее количество Магнетизма (суммируемое алгебраически) *равно нулю.*

Следовательно, в поле силы, однородной и параллельной во всем занимаемом магнитном пространстве, сила, действующая на помеченный конец магнита, в точности равна, противоположна и параллельна силе, действующей на непомеченный конец, поэтому в результате образуется статическая пара сил, стремящаяся установить ось магнита в определенном направлении, но никуда не сдвигающая магнит в целом.

Это можно легко доказать, пустив магнит плавать по воде на маленьком кораблике. Чтобы ось магнита и направление земной магнитной силы по возможности сблизились, кораблик будет определенным образом разворачиваться, не совершая при этом в целом никаких перемещений ни в каком направлении, так что не может появиться никакой избыточной силы, действующей в сторону севера, по отношению к силе, действующей к югу, и наоборот. Это можно также показать, исходя из того факта, что намагничивание куска стали не меняет его веса: оно изменяет лишь видимое положение центра тяжести, смещая его в наших широтах вдоль оси по направлению к северу. Центр инерции, определяемый через явления вращения, остается неизменным.

378. Если исследовать середину длинного тонкого магнита, то обнаружится, что она не обладает никакими магнитными свойствами; если же в этой точке разломать магнит, окажется, что в каждом куске появляется магнитный полюс в месте разлома, причем этот новый полюс точно равен и противоположен другому полюсу, принадлежащему данному куску. Ни намагничиванием, ни разламыванием магнитов, ни какими-либо другими способами невозможно образовать магнит с неравными полюсами.

Разломив длинный тонкий магнит на несколько коротких кусков, мы получим набор коротких магнитов, каждый из которых имеет полюса почти той же веиочины, что и полюса первоначального длинного магнита. Само размножение полюсов необязательно связано с образованием энергии, однако следует помнить, чтл после разламывания магнита необходимо совершить работу по разделению его частей вследствие их притяжения друг к другу.

379. Сложим теперь все куски магнита вместе, как было вначале. В каждой точке соединения будут существовать два одинаковых по мощности полюса противоположного типа, приведенные в соприкосновение друг с другом, так что их совместное действие на любой другой полюс будет равным нулю. Восстановленный таким образом магнит имеет, следовательно, те же свойства, что и первоначальный, а именно: у него существуют равные и противоположные полюса на каждом конце и срединная часть, не проявляющая никакого магнитного действия.

Поскольку в этом случае мы знаем, что длинный магнит составлен из маленьких коротких магнитов, а все явления происходят с ним как с неразломанным, то можно даже до разламывания считать его состоящим из маленьких частиц, каждая из которых имеет два равных и противоположных полюса. Если предположить, что все магниты образованы из таких частиц, то в силу равенства нулю количества магнетизма в каждой частице общее количество магнетизма во всем магните, очевидно, будет тоже равно нулю, или, другими словами, он будет иметь равные по величине полюса противоположного типа.

Теория магнитной «материи»

380. Поскольку законы магнитного и электрического действия по форме идентичны друг другу, то доводы, приводимые при сведении электрических явлений к действию одной «жидкости» или двух «жидкостей», могут быть высказаны также и в пользу существования одного вида магнитной материи или двух видов магнитной материи, будь то жидкость или что-либо иное. В действительности теория магнитной материи, используемая в чисто математическом смысле, не может потерпеть неудачу при объяснении явлений, если для учета реальных фактов вводить в нее какие-то новые законы, допускающие некоторый произвол.

Один из этих новых законов должен заключаться в том, что магнитные жидкости не могут переходить от одной молекулы или частицы магнита к другой, а процесс намагничивания состоит в разделении двух жидкостей в пределах каждой частицы, что приводит к повышению концентрации одной из жидкостей на одном из концов, а другой — на другом. Эта теория принадлежит Пуассону.

Согласно этой теории, частица намагничивающегося тела уподобляется маленькому изолированному незаряженному проводнику, содержащему, однако (в двухжидкостном варианте теории), сколь угодно большие, точно равные друг другу количества противоположного электричества; под действием на проводник электродвижущей силы происходит разделение этих электричеств и их появление на противоположных концах проводника. Аналогично и намагничивающая сила будет — по этой теории — вызывать разделение двух разновидностей магнетизма, первоначально пребывавших в нейтрализованном состоянии, и их появление на противоположных концах намагниченной частицы.

В некоторых веществах это магнитное состояние, сходное с состоянием наэлектризованности проводника, исчезает при снятии индуцирующей силы; к ним относятся мягкое железо и магнитные вещества, которые не могут быть постоянно намагниченными. Другие вещества, такие, как, например, твердая сталь, переходят в магнитное состояние с трудом, однако после перехода сохраняют его даже при удалении индуцирующей силы. Принято говорить, что в последнем случае существует стремящаяся препятствовать изменению намагниченности Коэрцитивная Сила, которую необходимо преодолеть, прежде чем мощность магнита может быть увеличена или уменьшена. В случае электризованных тел это соответствовало бы такому виду электрического сопротивления, которое, в отличие от сопротивления, наблюдаемого в металлах, для электродвижущих сил при значениях ниже некоторого было бы эквивалентно полной изоляции.

Эта теория магнетизма, как и соответствующая теория электричества, слишком просторна для фактов и, чтобы ее ограничить, требуется введение каких-то искусственных условий; действительно, она не только не выдвигает никаких соображений, почему одно тело не может отличаться от другого за счет большего содержания обеих жидкостей, но и не позволяет нам судить, каковы были бы свойства тела при наличии избытка в нем одной из этих магнитных жидкостей. Правда, приводится соображение, почему такое тело не может существовать вообще, но оно привнесено для объяснения этого частного факта лишь после его установления и не вытекает из самой теории.

381. Мы должны поэтому найти какой-то иной способ описания, который не вбирал бы в себя слишком многое, оставляя место для введения новых идей по мере их выявления из новых фактов. Я думаю, мы придем к этому, начав с высказывания о том, что частицы магнита Поляризованы.

Смысл термина «Поляризация»

Если частица какого-то тела обладает некоторыми свойствами, связанными с определенной линией или направлением внутри тела, а тело, сохраняющее эти свойства, поворачивается, обращая это направление на противоположное, то, если эти свойства частицы по отношению к другим телам тоже обращаются, про частицу говорят, что она поляризована относительно этих свойств, а про сами свойства — что они составляют определенный вид поляризации.

Так, мы можем сказать, что вращение тела вокруг оси относится к одному из видов поляризации, потому что, если, не прекращая вращения, повернуть ось так, что ее концы поменяются местами, то направление вращения тела относительно пространства изменится на противоположное.

Можно назвать поляризованной и проводящую частицу, через которую протекает ток электричества, так как если бы частица повернулась вокруг себя, а ток относительно ее сохранил свое направление, то его направление в пространстве оказалось бы обращенным.

Короче говоря, если любая математическая или физическая величина имеет векторную природу, как было определено в п. 11, то любое тело или частица, к которым относится эта направленная величина или вектор, может быть названа поляризованной [2], поскольку она имеет противоположные свойства в двух противоположных направлениях или на двух противоположных полюсах направленной величины.

Полюса Земли, например, связаны с ее вращением и носят соответственно разные названия.

Смысл термина «Магнитная Поляризация»

382. Когда мы говорим о состоянии, в котором пребывают частицы магнита, как о магнитной поляризации, то подразумеваем, что каждая из самых маленьких порций, на какие только можно разделить магнит, обладает определенными свойствами по отношению к определенному направлению, проходящему через частицу и называемому Осью Намагниченности; причем эти свойства противоположны для разных концов оси.

Свойства, приписываемые нами частице, относятся к свойствам того же типа, что и наблюдаемые для всего цельного магнита; принимая, что частицы обладают этими свойствами, мы тем самым делаем лишь такие предположения, которые можем доказать, разламывая магнит на мелкие кусочки, ибо каждый из этих кусочков оказывается магнитом.

Свойства намагниченной частицы

383. Предположим, что элемент $dxdydz$ является частицей магнита и обладает магнитными свойствами магнита, имеющего мощность положительного полюса m

---

[2] Слово Поляризация употреблено здесь в таком значении, которое не согласуется с термином, используемым в Оптике. Там луч света называют поляризованным, если он обладает свойствами, связанными с его боковыми сторонами, и притом такими, которые на взаимно противоположных сторонах одинаковы. Этот вид поляризации относится к другому типу Направленной Величины, которая может быть названа Диполярной, в противоположность величине прежнего типа, которая может быть названа δ-униполярной.

Когда диполярная величина поворачивается, меняя местами свои концы, она остается той же, как и до поворота. Натяжение и давление в твердых телах, растяжение, сжатие и изгиб, а также большинство оптических, электрических и магнитных свойств кристаллических тел являются диполярными величинами.

Эффект, производимый магнетизмом в прозрачных телах и состоящий в повороте плоскости поляризации падающего света, как и сам магнетизм, относится к униполярным свойствам. Вращательное свойство, отмеченное в п. 303, также является униполярным.

и длину ds. Тогда в произвольной точке пространства P, отстоящей на расстоянии r от положительного полюса и на расстоянии r' от отрицательного, магнитный потенциал V будет состоять из потенциала m/r, создаваемого положительным полюсом, и потенциала $-m/r'$, создаваемого отрицательным полюсом, т. е.

$$V=\frac{m}{rr'}(r'-r). \tag{1}$$

Если расстояние между полюсами ds очень мало, можно положить

$$r'-r=ds\cos\varepsilon, \tag{2}$$

где ε — угол между вектором, направленным от магнита в точку P, и осью магнита. В пределе получим

$$V=\frac{mds}{r^2}\cos\varepsilon. \tag{3}$$

Магнитный момент

384. Произведение длины стержневого магнита, однородно и продольно намагниченного, на мощность его положительного полюса называется Магнитным Моментом магнита.

Интенсивность намагниченности

Интенсивность намагниченности магнитной частицы определяется как отношение ее магнитного момента к объему. Мы будем обозначать ее буквой I.

Намагниченность в любой точке магнита может быть определена по ее интенсивности и направлению. Направление можно задать с помощью направляющих косинусов λ, μ, ν.

Составляющие намагниченности

Намагниченность в какой-либо точке магнита, будучи вектором или направленной величиной, может быть выражена через три ее составляющих, отнесенных к осям координат. Назовем их A, B, C:

$$A=I\lambda, \qquad B=I\mu, \qquad C=I\nu. \tag{4}$$

Абсолютное или численное значение величины I задается уравнением

$$I^2=A^2+B^2+C^2. \tag{5}$$

385. Если рассматриваемая нами часть магнита есть дифференциальный элемент объема $dxdydz$, а I — интенсивность намагниченности этого элемента, то его магнитный момент равен $Idxdydz$. Подставляя его вместо mds в уравнение (3) и помня, что

$$r\cos\varepsilon=\lambda(\xi-x)+\mu(\eta-y)+\nu(\zeta-z), \tag{6}$$

где ξ, η, ζ — координаты конца вектора r, выходящего из точки (x, y, z), для потенциала в точке (ξ, η, ζ), обусловленного намагниченным элементом, находящимся в (x, y, z), найдем

$$\{A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z)\}\frac{1}{r^3}\,dx\,dy\,dz. \tag{7}$$

Чтобы получить потенциал, создаваемый в точке (ξ, η, ζ) магнитом конечных размеров, необходимо найти интеграл от этого выражения по всем элементам объема, входящим в пространство, занятого магнитом, т. е.

$$V=\iiint \{A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z)\}\frac{1}{r^3}\,dx\,dy\,dz. \tag{8}$$

После интегрирования по частям получаем

$$V=\iint A\frac{1}{r}\,dy\,dz+\iint B\frac{1}{r}\,dz\,dx+\iint C\frac{1}{r}\,dx\,dy-$$
$$-\iiint \frac{1}{r}\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

где двойной интеграл в первых трех членах берется по поверхности магнита, а тройной интеграл в четвертом члене — по его объему.

Обозначим через l, m, n направляющие косинусы нормали, направленной из элемента поверхности dS наружу, тогда, как и в п. 21, для суммы первых трех членов можно написать

$$\iint (lA+mB+nC)\ (1/r)\ dS,$$

где интегрирование распространяется на всю поверхность магнита.

Если ввести теперь новые обозначения σ и ρ, определив их с помощью равенств

$$\sigma=lA+mB+nC, \quad \rho=-\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right),$$

то выражение для потенциала может быть записано в виде

$$V=\iint \frac{\sigma}{r}\,dS+\iiint \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

386. Это совпадает с выражением для электрического потенциала, создаваемого телом, на поверхности которого существует электризация с поверхностной плотностью σ и одновременно во всем веществе которого имеется объемная электризация с объемной плотностью ρ. Следовательно, если считать величины σ и ρ поверхностной и объемной плотностями распределения некоторого воображаемого вещества, названного нами «магнитной материей», то потенциал, обусловленный ими, будет равен потенциалу, создаваемому истинной намагниченностью всех элементов объема.

Поверхностная плотность σ есть составляющая намагниченности вдоль направления внешней нормали к поверхности, а объемная плотность ρ есть «конвергенция» (см. п. 25) намагниченности в данной точке магнита.

Этот метод представления действия магнита как действия, обусловленного распределением «магнитной материи», очень удобен, однако всегда следует помнить, что он является лишь искусственным приемом описания действия, создаваемого некоторой системой поляризованных частиц.

О действии одной магнитной молекулы на другую

387. Если, как и в п. 129 б главы о сферических гармониках, положить

$$\frac{d}{dh}=l\frac{d}{dx}+m\frac{d}{dy}+n\frac{d}{dz}, \tag{1}$$

где l, m, n — направляющие косинусы оси h; то потенциал, обусловленный магнитной молекулой с магнитным моментом m_1 и осью, параллельной h_1, помещенной в начало координат, будет равен

$$V_1=-\frac{d}{dh_1}\frac{m_1}{r}=\frac{m_1}{r^2}\lambda_1, \tag{2}$$

где λ_1 — косинус угла между h_1 и r.

Если имеется вторая магнитная молекула с моментом m_2 и осью, параллельной h_2, помещенная в точке, где оканчивается радиус-вектор r, то потенциальная энергия, обусловленная действием одного магнита на другой, будет равна

$$W=m_2\frac{dV_1}{dh_2}=-m_1m_2\frac{d^2}{dh_1\,dh_2}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{3}$$

$$=\frac{m_1m_2}{r^3}(\mu_{12}-3\lambda_1\lambda_2), \tag{4}$$

где μ_{12} — косинус угла между осями, а λ_1 и λ_2 — косинусы углов между радиус-вектором и осями.

Определим далее момент пары сил, с которым первый магнит стремится повернуть второй вокруг его центра.

Предположим, что второй магнит повернулся на угол $d\varphi$ в плоскости, перпендикулярной некоторой третьей оси h_3; тогда работа, совершенная против магнитных сил, будет равна $(dW/d\varphi)\,d\varphi$, а момент сил, действующий на магнит в этой плоскости,

$$-\frac{dW}{d\varphi}=-\frac{m_1m_2}{r^3}\left(\frac{d\mu_{12}}{d\varphi}-3\lambda_1\frac{d\lambda_2}{d\varphi}\right). \tag{5}$$

Истинный момент, действующий на второй магнит, можно, следовательно, рассматривать как результирующую двух пар сил: первая действует в плоскости, параллельной осям обоих магнитов, и стремится увеличить угол между ними; ее момент равен

$$(m_1m_2/r^3)\ \sin\ (h_1h_2), \tag{6}$$

в то время как вторая действует в плоскости, проходящей через r и ось второго магнита, и стремится уменьшить угол между этими направлениями; она имеет момент

$$3(m_1m_2/r^3)\cos(rh_1)\sin(rh_2), \tag{7}$$

где через (rh_1), (rh_2), (h_1h_2) обозначены углы между линиями r, h_1, h_2.

Для определения силы, действующей на второй магнит в направлении, параллельном линии h_3, необходимо вычислить

$$-\frac{dW}{dh_3}=m_1m_2\frac{d^3}{dh_1\,dh_2\,dh_3}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{8}$$

$$=-m_1m_2\frac{3!\,Y_3}{r^4}\quad\text{(по п. 129в)},$$

$$=3\frac{m_1m_2}{r^4}\{\lambda_1\mu_{23}+\lambda_2\mu_{31}+\lambda_3\mu_{12}-5\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}\quad\text{(по п. 133)}, \tag{9}$$

$$=3\lambda_3\frac{m_1m_2}{r^4}(\mu_{12}-5\lambda_1\lambda_2)+3\mu_{13}\frac{m_1m_2}{r^4}\lambda_2+3\mu_{23}\frac{m_1m_2}{r^4}\lambda_1. \tag{10}$$

Предположим, что истинная сила состоит из трех сил — R, H_1 и H_2, действующих соответственно в направлениях r, h_1 и h_2, тогда сила в направлении h_3 будет равна

$$\lambda_3R+\mu_{13}H_1+\mu_{23}H_2. \tag{11}$$

Поскольку направление h_3 произвольно, мы должны иметь

$$R=\frac{3m_1m_2}{r^4}(\mu_{12}-5\lambda_1\lambda_2),\ H_1=\frac{3m_1m_2}{r^4}\lambda_2,\ H_2=\frac{3m_1m_2}{r^4}\lambda_1. \tag{12}$$

Сила R является отталкивающей — она стремится увеличить r; силы H_1 и H_2 действуют на второй магнит в направлении осей первого и второго магнита соответственно.

Этот анализ сил, действующих между двумя маленькими магнитами, был впервые проведен профессором Тэтом в терминах кватернионного анализа в *Quarterly Math. Journ.* за январь 1860. См. также его работу по кватернионам (*Quaternions*, Arts 442—443, 2nd Edition).

Частные случаи расположения магнитов

388. (1). Если λ_1 и λ_2 одинаковы и равны единице, т. е. оси магнитов лежат на одной прямой и направлены вдоль нее, то $\mu_{12}=1$ и сила отталкивания между магнитами будет равна

$$R+H_1+H_2=-(6m_1m_2)/r^4. \tag{13}$$

Отрицательный знак указывает на притяжение.

(2). Если λ_1 и λ_2 равны нулю, а μ_{12} — единице, т. е. оси магнитов параллельны друг другу и перпендикулярны r, то сила окажется отталкивающей и равной

$$3m_1m_2/r^4; \tag{14}$$

ни в одном из этих случаев не возникает никаких вращающих моментов.

(3). Если $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=0$, то $\mu_{12}=0$. (15)

Сила $3\,m_1m_2/r^4$ будет действовать на второй магнит в направлении его оси, а пара сил с моментом $2\,m_1m_2/r^3$ будет стремиться развернуть его параллельно первому магниту. Это эквивалентно действию одной силы $3\,m_1m_2/r^4$, параллельной оси второго магнита и пересекающей радиус-вектор r в точке, отстоящей от m_2 на расстоянии двух третей его длины.

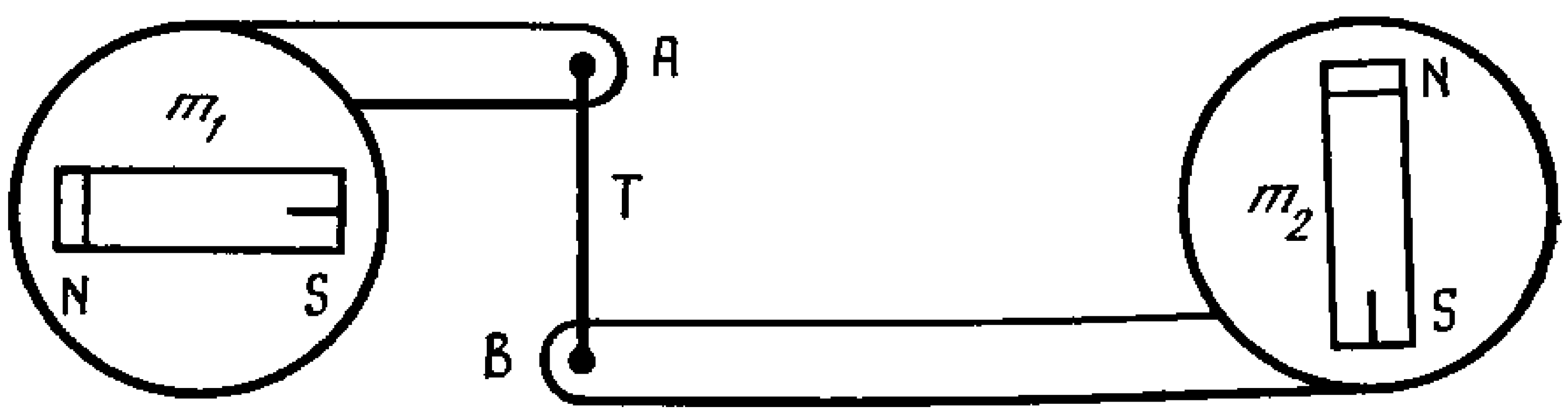


Рис. 1

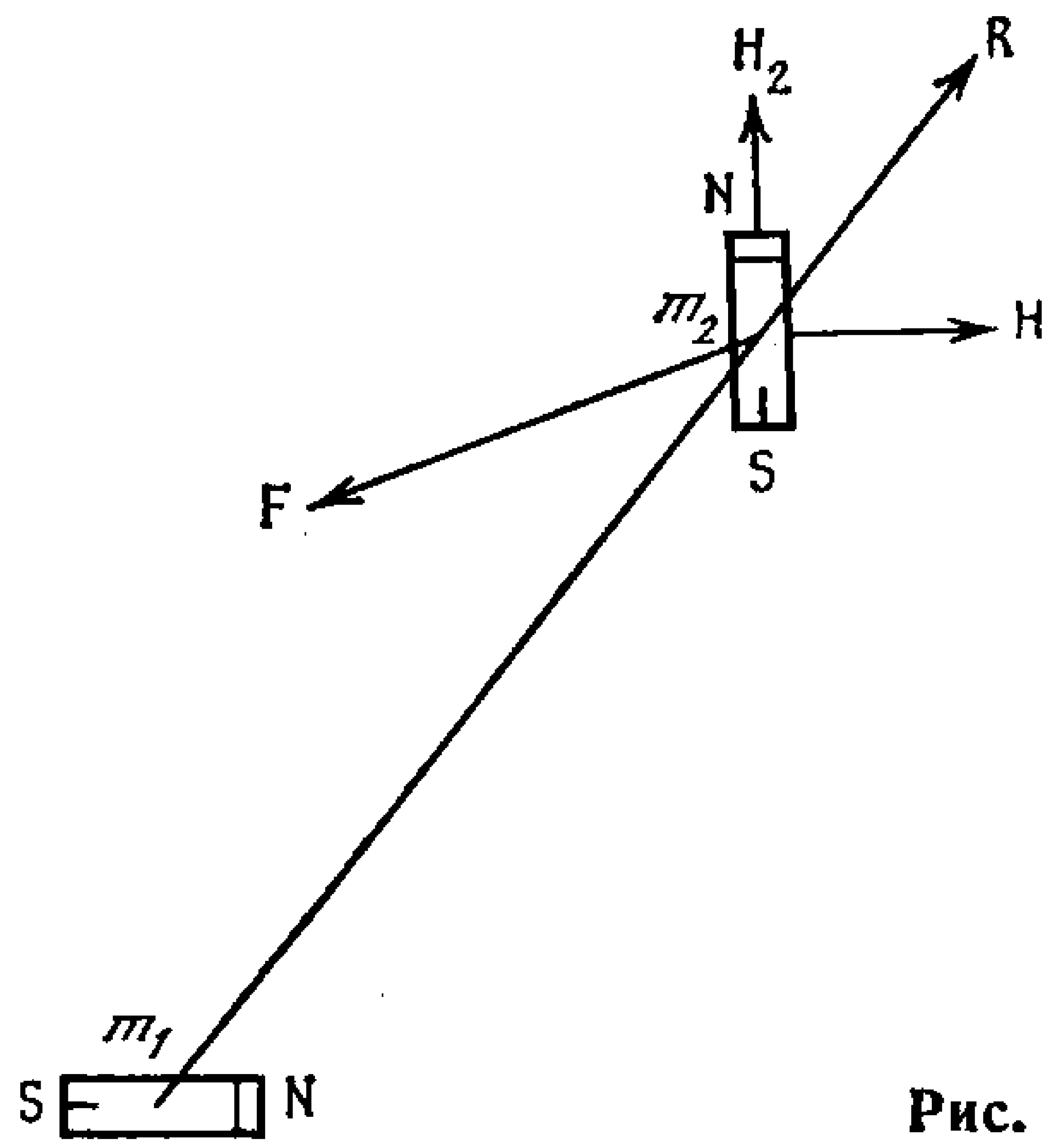


Рис. 2

На рис. 1 показаны плавающие на воде два магнита: магнит m_2 расположен на оси магнита m_1, а его собственная ось перпендикулярна оси m_1; две точки A и B, жестко связанные соответственно с m_1 и m_2, соединены между собой нитью T. Система будет находиться в равновесии, если T пересечет линию m_1m_2 под прямым углом в точке, отстоящей от m_1 на одну треть расстояния между m_1 и m_2.

(4) Если позволить второму магниту свободно вращаться вокруг своего центра, пока он не придет в положение устойчивого равновесия, то при этом энергия W окажется минимальной по h_2 и, следовательно, созданная магнитом m_2 составляющая силы в направлении h_1 будет иметь максимум. Таким образом, если мы хотим с помощью магнитов с фиксированным положением центров создать в данной точке и вдоль заданного направления максимально возможную магнитную силу, то для определения нужных направлений осей магнитов, при которых достигается этот эффект, необходимо: поместить один из магнитов в заданную точку, установив его в требуемом направлении; поместить центр другого магнита в любую из остальных задаваемых точек и установить положение его оси в состоянии устойчивого равновесия. После этого следует разместить все магниты так, чтобы их оси были установлены в направлениях, указанных вторым магнитом [рис. 2].

Разумеется, при выполнении этого опыта мы должны принимать во внимание земной магнетизм, если он существен.

Пусть второй магнит находится в положении устойчивого равновесия относительно своего направления, тогда действующая на него пара сил исчезает, и поэтому его ось должна располагаться в одной плоскости с осью первого магнита. Следовательно,

$$h_1h_2=(h_1r)+(rh_2), \tag{16}$$

и момент пары сил, равный

$$(m_1m_2/r^3)(\sin(h_1h_2) - 3\cos(h_1r)\sin(rh_2)) \tag{17}$$

обращается в нуль, как мы видим, при условии

$$\operatorname{tg}(h_1 r) = 2\operatorname{tg}(r h_2), \tag{18}$$

или

$$\operatorname{tg} H_1 m_2 R = 2 \operatorname{tg} R m_2 H_2. \tag{19}$$

Когда второй магнит занимает это положение, значение W становится равным $m_2(dV_1/dh_2)$, где h_2 — направление силовой линии в точке m_2, определяемое действием магнита m_1. Следовательно,

$$W = -m_2 \sqrt{\left(\frac{dV_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV_1}{dz}\right)^2}, \tag{20}$$

т. е. второй магнит будет стремиться двигаться туда, где результирующая сила больше.

Сила, действующая на второй магнит, может быть разложена на силу R, которая в этом случае всегда является силой притяжения к первому магниту, и силу H_1, параллельную оси первого магнита:

$$R = 3\frac{m_1 m_2}{r^4}\frac{4\lambda_1^2+1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}}, \quad H_1 = 3\frac{m_1 m_2}{r^4}\frac{\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}}. \tag{21}$$

На рис. XIV в конце этого тома нарисованы силовые линии и эквипотенциальные поверхности в двумерном случае. Предполагается, что они создаются магнитами в виде двух длинных цилиндрических поперечно намагниченных стержней, сечения которых показаны полыми кружками, а направление намагниченности — стрелками.

Если вспомнить о наличии натяжения вдоль силовых линий, то легко понять, что каждый из магнитов будет стремиться повернуться в направлении движения часовой стрелки.

Кроме того, в целом правый магнит будет стремиться смещаться вверх по странице, а левый магнит — вниз.

О потенциальной энергии магнита, помещенного в магнитное поле

389. Пусть V — магнитный потенциал, создаваемый любой системой магнитов, действующих на данный рассматриваемый магнит. Будем называть его потенциалом внешней магнитной силы.

Если маленький магнит длиной ds расположен так, что его положительный полюс величины m находится в точке с потенциалом V, а отрицательный — в точке с потенциалом V', то потенциальная энергия этого магнита будет равна $m(V - V')$ или, если ds измеряется от отрицательного полюса к положительному,

$$m(dV/ds)ds. \tag{1}$$

Если I — величина намагниченности, λ, μ, ν — ее направляющие косинусы, то можно написать

$$mds = I dx dy dz \quad \text{и} \quad \frac{dV}{ds} = \lambda\frac{dV}{dx} + \mu\frac{dV}{dy} + \nu\frac{dV}{dz},$$

и, наконец, если A, B, C — составляющие намагниченности, то $A=\lambda I$, $B=\mu I$, $C=\nu I$, так что выражение (1) для потенциальной энергии элемента магнита станет таким:

$$\left(A\frac{dV}{dx}+B\frac{dV}{dy}+C\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Чтобы получить потенциальную энергию магнита конечных размеров, необходимо проинтегрировать это выражение по всем элементам магнита. Таким образом получим

$$W=\iiint\left(A\frac{dV}{dx}+B\frac{dV}{dy}+C\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy\,dz. \tag{3}$$

Это и есть потенциальная энергия магнита относительно магнитного поля, в которое он помещен.

Она выражена здесь через составляющие намагниченности и магнитной силы, возникающей от внешних источников.

Интегрируя по частям, мы можем выразить ее через распределение магнитной материи и магнитного потенциала:

$$W=\iint(Al+Bm+Cn)V\,dS-\iiint V\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали к элементу поверхности dS. Подстановка в это уравнение выражений для поверхностной и объемной плотностей магнитной материи, приведенных в п. 385, дает

$$W=\iint V\sigma dS+\iiint V\rho dxdydz. \tag{5}$$

Уравнение (3) можно переписать в виде

$$W=-\iiint(A\alpha+B\beta+C\gamma)\;dxdydz, \tag{6}$$

где α, β и γ — составляющие внешней магнитной силы.

О магнитном моменте и оси магнита

390. Если во всем пространстве, занятом магнитом, внешняя магнитная сила однородна и по направлению, и по величине, то составляющие α, β, γ постоянны. Записав

$$\iiint Adxdydz=lK,\quad \iiint Bdxdydz=mK,\quad \iiint Cdxdydz=nK \tag{7}$$

и распространив интегрирование на все вещество магнита, величину W можно представить в виде

$$W=-K(l\alpha+m\beta+n\gamma). \tag{8}$$

В этом выражении l, m, n — направляющие косинусы оси магнита, K — его магнитный момент. Если обозначить через ε угол между осью магнита и направлением магнитной силы $\mathfrak{H}$, то величину W можно переписать так:

$$W=-K\mathfrak{H}\cos\varepsilon. \tag{9}$$

Если магнит подвешен таким образом, что он может свободно вращаться, как обычная компасная стрелка, вокруг своей вертикальной оси, то, предположив, что он имеет азимут φ и наклонен на угол θ относительно горизонтальной плоскости, а направление силы земного магнетизма имеет азимут δ и наклонение ζ, получим

$$\alpha=\mathfrak{H}\cos\zeta\cos\delta,\quad \beta=\mathfrak{H}\cos\zeta\sin\delta,\quad \gamma=\mathfrak{H}\sin\zeta; \tag{10}$$

$$l=\cos\theta\cos\varphi,\quad m=\cos\theta\sin\varphi,\quad n=\sin\theta; \tag{11}$$

Откуда следует

$$W=-K\mathfrak{H}\{\cos\zeta\cos\theta\cos(\varphi-\delta)+\sin\zeta\sin\theta\}. \tag{12}$$

Момент силы, стремящейся повернуть магнит вокруг вертикальной оси и увеличить угол φ, равен

$$-\frac{dW}{d\varphi}=-K\mathfrak{H}\cos\zeta\cos\theta\sin(\varphi-\delta). \tag{13}$$

О разложении потенциала магнита по пространственным гармоникам

391. Пусть V — потенциал, создаваемый единичным полюсом, помещенным в точку (ξ, η, ζ), его значение в точке x, y, z равно

$$V=\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\}^{-1/2}. \tag{1}$$

Это выражение можно разложить по сферическим гармоникам с центром в начале координат. Будем иметь тогда

$$V=V_0+V_1+V_2+\ \text{и т. д.}, \tag{2}$$

где $V_0=(1/r)$, (3)

r — расстояние до точки (ξ, η, ζ) от начала координат,

$$V_1=\frac{\xi x+\eta y+\zeta z}{r^3}, \tag{4}$$

$$V_2=\frac{3(\xi x+\eta y+\zeta z)^2-(x^2+y^2+z^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{2r^5}, \tag{5}$$

и т. д.

Для того чтобы определить величину потенциальной энергии магнита, помещенного в поле силы, определяемой этим потенциалом, необходимо проинтегрировать выражение для W в уравнении (3) п. 389 по x, y и z, считая ξ, η, ζ и r постоянными.

Если рассмотреть только члены, представляемые гармониками V_0, V_1 и V_2, то результат будет зависеть от следующих объемных интегралов:

$$lK=\iiint A\,dx\,dy\,dz,\quad mK=\iiint B\,dx\,dy\,dz,\quad nK=\iiint C\,dx\,dy\,dz; \tag{6}$$

$$L=\iiint Ax\,dx\,dy\,dz,\quad M=\iiint By\,dx\,dy\,dz,\quad N=\iiint Cz\,dx\,dy\,dz; \tag{7}$$

$$P=\iiint (Bz+Cy)\,dx\,dy\,dz,\qquad Q=\iiint (Cx+Az)\,dx\,dy\,dz,$$

$$R=\iiint (Ay+Bx)\,dx\,dy\,dz. \tag{8}$$

Таким образом, для величины потенциальной энергии магнита в присутствии единичного полюса, находящегося в точке (ξ, η, ζ), находим

$$W = K\frac{l\xi+m\eta+n\zeta}{r^3}+$$
$$+\frac{\xi^2(2L-M-N)+\eta^2(2M-N-L)+\zeta^2(2N-L-M)+3(P\eta\zeta+Q\zeta\xi+R\xi\eta)}{r^5}+\text{ и т. д.} \qquad (9)$$

Это выражение можно также рассматривать как потенциальную энергию единичного полюса в присутствии магнита или просто как создаваемый магнитом потенциал в точке (ξ, η, ζ).

О центре магнита
и о главной и побочных осях магнита

392. Это выражение можно упростить, изменив направление координатных осей и положение начала координат. Прежде всего направим ось x параллельно оси магнита. Это эквивалентно тому, что

$$l=1, \quad m=0, \quad n=0. \qquad (10)$$

Если перенести начало координат в точку (x', y', z'), сохранив направление осей, то объемные интегралы lK, mK и nK останутся неизменными, а остальные изменятся следующим образом:

$$L'=L-lKx', \qquad M'=M-mKy', \qquad N'=N-nKz' \qquad (11)$$
$$P'=P-K(mz'+ny'), \qquad Q'=Q-K(nx'+lz'), \qquad R'=R-K(ly'+mx'). \qquad (12)$$

Если сделать направление оси x параллельным оси магнита и положить

$$x'=(2L-M-N)/2K, \qquad y'=R/K, \qquad z'=Q/K, \qquad (13)$$

то для новых осей значения M и N останутся прежними, а значение L' окажется равным $(M+N)/2$; не изменится также и величина P, в то время как Q и R обратятся в нуль. Следовательно, мы можем для потенциала записать

$$K\frac{\xi}{r^3}+\frac{\frac{3}{2}(\eta^2-\zeta^2)(M-N)+3P\eta\zeta}{r^5}+\ldots . \qquad (14)$$

Мы нашли, следовательно, фиксированную относительно магнита точку, такую, что если ее выбрать в качестве начала координат, второй член в разложении потенциала выразится в наиболее простой форме; поэтому эту точку можно определить как центр магнита, а проведенную через нее ось в направлении, ранее названном направлением магнитной оси, определить как главную ось магнита.

Мы можем упростить результат еще больше, повернув оси y и z вокруг оси x на половину угла, тангенс которого равен $P/(M-N)$. Тогда P станет равным нулю, и окончательное выражение для потенциала примет вид

$$K\frac{\xi}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{(\eta^2-\zeta^2)(M-N)}{r^5}+\text{ и т. д.} \qquad (15)$$

Это есть простейшая форма представления первых двух членов потенциала магнита. Оси y и z, направленные таким образом, могут быть названы побочными осями магнита.

Центр магнита мы можем определить и иначе, отыскав такое положение начала координат, при котором поверхностный интеграл от квадрата второго члена в разложении потенциала, взятый по сфере единичного радиуса, минимален.

Величина, которую следует сделать минимальной, согласно п. 141 равна

$$4(L^2+M^2+N^2-MN-NL-LM)+3(P^2+Q^2+R^2). \tag{16}$$

Изменения значений этой величины, вызванные изменением положения начала координат, можно вывести из уравнений (11) и (12). Условия минимума следующие:

$$\begin{aligned} &2l(2L-M-N)+3nQ+3mR=0,\\ &2m(2M-N-L)+3lR+3nP=0,\\ &2n(2N-L-M)+3mP+3lQ=0. \end{aligned} \tag{17}$$

Если положить $l=1$, $m=0$, $n=0$, то эти условия станут такими:

$$2L-M-N=0, \qquad Q=0, \qquad R=0, \tag{18}$$

т. е. они совпадут с условиями, использованными в предыдущем рассмотрении.

Это исследование можно сравнить с тем, которое проводится при разложении потенциала системы, состоящей из гравитирующей материи. Там наиболее удобной точкой при выборе начала координат является центр тяжести системы, а наиболее удобными осями — проходящие через эту точку главные оси инерции.

В случае магнита точка, соответствующая центру тяжести, бесконечно удалена в направлении оси, и то, что мы назвали центром магнита, по своим свойствам отличается от центра тяжести. Величины L, M, N соответствуют моментам инерции, а P, Q, R — произведениям инерции материального тела с той разницей, что L, M, N не должны быть обязательно положительными.

Когда центр магнита взят в качестве начала координат, то сферическая гармоника второго порядка становится секторной, а ее ось совпадает с осью магнита; ни для какой другой точки это не справедливо.

Когда магнит, как в случае тела вращения, симметричен по всем направлениям относительно этой оси, что член, содержащий гармонику второго порядка, полностью исчезает.

393. Во всех частях земной поверхности, кроме некоторых участков Полярных областей, один конец магнита показывает на север, или, по крайней мере, в северном направлении, а другой — в южном. Следуя распространенному способу образования наименований, мы, говоря о концах магнита, будем называть конец, указывающий на север, его северным концом. Если, однако, прибегать к языку теории магнитных жидкостей, мы должны использовать слова Борейный и Аустральный (boreal — северный, austral — южный). Борейный магнетизм — это воображаемый вид материи, который предполагается более распространенным в северных частях Земли, а Аустральный магнетизм — воображаемая магнитная материя, преобладающая в южных областях Земли. Магнетизм северного конца магнита является Аустральным, а магнетизм южного конца — Борейным . Следовательно, когда мы говорим о северном и южном концах магнита, мы не сравниваем его с Землей, как с большим магнитом, а просто обозначаем направление, которое он стремится принять при своем свободном движении. С другой стороны, когда мы хотим сравнить распределение воображаемой магнитной жидкости в магните с распределением в Земле, мы будем применять эти более величественные слова — Борейный и Аустральный магнетизм.

394. Говоря о поле магнитной силы, мы будем использовать выражение Магнитный Север для обозначения направления, в котором указывает северный конец стрелки компаса, помещенного в поле силы.

Говоря о линии магнитной силы, мы всегда будем считать ее проведенной от магнитного юга к магнитному северу и называть это направление положительным. Аналогично направление намагниченности магнита обозначается линией, проведенной от южного конца магнита к северному, а конец магнита, указывающий на север, называется положительным.

Мы будем считать Аустральный магнетизм, т. е. магнетизм конца магнита, указывающего на север, положительным. Обозначив его численное значение через m, для магнитного потенциала будем иметь $V=\sum(m/r)$, и положительным является такое направление силовой линии, в котором V убывает.

ГЛАВА II

МАГНИТНАЯ СИЛА И МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

395. Магнитный потенциал данной точки, обусловленный магнитом с заданной всюду внутри его вещества намагниченностью, был уже определен нами в п. 385. Мы показали, что математически этот результат может быть выражен как через истинную намагниченность каждого из элементов магнита, так и через некоторое воображаемое распределение «магнитной материи», часть которой рассеяна по веществу внутри магнита, а часть сосредоточена на его поверхности.

Определенный таким образом магнитный потенциал вычисляется с помощью одной и той же математической процедуры для точек, заданных внутри магнита и вне его. Сила, испытываемая единичным магнитным полюсом, помещенным в произвольную точку вне магнита, получается из потенциала аналогичным дифференцированием, что и в соответствующей электрической задаче. Если составляющие этой силы равны α, β, γ, то

$$\alpha=-dV/dx, \qquad \beta=-dV/dy, \qquad \gamma=-dV/dz. \tag{1}$$

Для экспериментального определения магнитной силы в точке внутри магнита необходимо прежде всего удалить часть намагниченного вещества, чтобы образовать полость для внесения в нее магнитного полюса. Сила, действующая на полюс, будет, вообще говоря, зависеть от формы этой полости и от наклона ее стенок по отношению к направлению намагниченности. Поэтому во избежание неоднозначности, говоря о магнитной силе в магните, необходимо уточнять форму и положение полости, внутри которой следует измерять магнитную силу. Ясно, что когда форма и положение полости заданы, точку внутри нее, куда помещается магнитный полюс, уже не следует считать принадлежащей веществу магнита; это делает сразу же применимыми к ней обычные методы определения магнитной силы.

396. Рассмотрим теперь часть магнита, намагниченность внутри которой однородна по направлению и величине. Образуем внутри нее полость в виде цилиндра, ось которого параллельна направлению намагниченности, и на оси в центре поместим магнитный полюс.

Поскольку образующие цилиндра параллельны направлению намагниченности, на его боковой поверхности не возникнет поверхностного распределения магнетизма, а на круглых торцах, поскольку они перпендикулярны направлению намагниченности, появится однородное поверхностное распределение с поверхностной плотностью I на отрицательном конце и $-I$ — на положительном.

Обозначим длину цилиндра через $2b$, а радиус через a. Сила, действующая со стороны этих поверхностных распределений на магнитный полюс в центральной точке оси, будет обусловлена притяжением к положительному концу диска и отталкиванием от отрицательного конца диска. По величине и по направлению обе силы одинаковы, а сумма их равна

$$R = 4\pi I\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right). \tag{2}$$

Из этого выражения следует, что сила зависит не от абсолютных размеров полости, а от отношения длины цилиндра к его диаметру. Следовательно, какой бы малой ни делать полость, сила, связанная с поверхностным распределением магнетизма на ее стенках, остается, вообще говоря, конечной.

397. Выше мы предполагали, что намагниченность той части магнита, из которой удаляется цилиндрический кусок, однородна и одинаково направлена. В общем случае, при отсутствии этого ограничения, во всем веществе магнита должно появиться объемное распределение воображаемой магнитной материи, часть которой, вырезая цилиндр, мы удаляем. Однако поскольку в геометрически подобных объемных телах силы в соответствующих точках пропорциональны линейным размерам тел, то изменение силы, действующей на магнитный полюс, обусловленное объемной плотностью магнитной материи, будет неограниченно убывать с уменьшением размера полости, в то время как эффект, обусловленный поверхностной плотностью на стенках полости, остается, вообще говоря, конечным.

Таким образом, если размеры цилиндра настолько малы, что намагниченность удаленной части можно считать всюду параллельной оси цилиндра и имеющей постоянную величину I, сила, действующая на магнитный полюс, помещенный в среднюю точку на оси цилиндрической полости, будет состоять из двух сил. Первая обусловлена распределением магнитной материи как на внешней поверхности магнита, так и по всему его объему, за исключением удаленной части. Составляющие этой силы равны величинам α, β и γ, полученным из потенциала с помощью уравнений (1). Вторая часть — это сила R, действующая вдоль оси цилиндра в направлении намагниченности. Величина этой силы зависит от отношения длины цилиндрической полости к ее диаметру.

398. *Случай I.* Пусть это отношение очень велико, т. е. диаметр цилиндра мал по сравнению с его длиной. Разлагая выражение для R в ряд по степеням a/b, находим

$$R = 4\pi I \left\{\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2} - \frac{3}{8}\frac{a^4}{b^4} + \text{и т. д.}\right\}, \tag{3}$$

величина R обращается в нуль, когда отношение b/a становится бесконечным.

Следовательно, если полость имеет форму очень тонкого цилиндра с осью, параллельной направлению намагниченности, то поверхностное распределение на торцах цилиндра не сказывается на магнитной силе, и ее составляющие просто равны величинам α, β и γ:

$$\alpha = -dV/dX, \quad \beta = -dV/dy, \quad \gamma = -dV/dz. \tag{4}$$

Силу внутри такой полости мы определим как магнитную силу внутри магнита. Сэр Уильям Томсон назвал это Полярным определением магнитной силы. Когда нам представится случай рассматривать эту силу как вектор, мы будем обозначать ее через $\mathfrak{H}$.

399. *Случай II*. Пусть длина цилиндра очень мала по сравнению с его диаметром, так что цилиндр становится тонким диском. Выражение для R после разложения в ряд по степеням b/a принимает вид

$$R = 4\pi I \left\{1 - \frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{b^3}{a^3} - \text{и т. д.}\right\}, \tag{5}$$

предельное значение при стремлении отношения a/b к бесконечности равно $4\,\pi I$.

Следовательно, когда полость имеет вид тонкого диска, плоскость которого перпендикулярна направлению намагниченности, на единичный полюс, находящийся на ее оси в центре, действует в направлении намагниченности сила $4\,\pi I$, возникающая из-за поверхностного магнетизма, распределенного на круговых поверхностях диска [1].

Так как намагниченность I имеет составляющие A, B и C, компоненты этой силы равны $4\pi A$, $4\pi B$ и $4\pi C$. Это следует объединить с силой, имеющей составляющие α, β, γ,

400. Пусть реальная сила, действующая на магнитный полюс, обозначена вектором $\mathfrak{B}$, а ее составляющие — a, b и c, тогда

$$a = \alpha + 4\pi A, \quad b = \beta + 4\pi B, \quad c = \gamma + 4\pi C. \tag{6}$$

Мы определим силу внутри полого диска, плоские стороны которого ортогональны намагниченности, как Магнитную Индукцию внутри магнита. Сэр Уильям Томсон назвал это Электромагнитным определением магнитной силы.

---

[1] *О силах внутри полостей других конфигураций*

1. Произвольная узкая пещерка (crevasse). Сила, обусловленная поверхностным магнетизмом, равна $4\pi\ I \cos\varepsilon$ и направлена по нормали к поверхности пещерки; ε — угол между этой нормалью и направлением намагниченности. Когда пещерка параллельна направлению намагниченности, сила совпадает с магнитной силой $\mathfrak{H}$; если пещерка перпендикулярна направлению намагниченности, сила совпадает с магнитной индукцией $\mathfrak{B}$.

2. В бесконечно вытянутом цилиндре, ось которого образует угол ε с направлением намагниченности, сила, обусловленная поверхностным магнетизмом, равна $2\pi I \sin\varepsilon$; она перпендикулярна оси и лежит в плоскости, содержащей ось цилиндра и направление намагниченности.

3. В сфере сила, обусловленная поверхностным магнетизмом, равна $(4/3)\ \pi I$ и направлена вдоль намагниченности.

Три вектора: намагниченность $\mathfrak{J}$, магнитная сила $\mathfrak{H}$ и магнитная индукция $\mathfrak{B}$, связаны векторным равенством

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{J}. \tag{7}$$

Криволинейный интеграл от магнитной силы

401. Поскольку магнитная сила, определенная в п. 398, обусловлена свободным магнетизмом, распределенным как на поверхности магнита, так и внутри него, и не зависит от поверхностного магнетизма полости, ее можно вычислить непосредственно из общего выражения для потенциала магнита; криволинейный интеграл от магнитной силы, взятый вдоль произвольной кривой между точками A и B, равен

$$\int_A^B \left(\alpha \frac{dx}{ds}+\beta\frac{dy}{ds}+\gamma\frac{dz}{ds}\right) ds = V_A - V_B, \tag{8}$$

где через V_A и V_B обозначены потенциалы в точках A и B соответственно.

Поверхностный интеграл от магнитной индукции

402. Поток магнитной индукции через поверхность S определяется как величина интеграла

$$Q=\iint \mathfrak{B} \cos\varepsilon\, dS, \tag{9}$$

где $\mathfrak{B}$ — величина магнитной индукции на элементе поверхности dS, ε — угол между направлением индукции и нормалью к элементу поверхности; интегрирование распространяется на всю поверхность, которая может быть либо замкнутой поверхностью, либо поверхностью, ограниченной некоторой замкнутой кривой.

Если обозначить составляющие магнитной индукции через a, b, c и направляющие косинусы нормали через l, m, n, то поверхностный интеграл может быть записан в виде

$$Q=\iint (la+mb+nc)\, dS. \tag{10}$$

Выражая составляющие магнитной индукции через составляющие намагниченности и магнитной силы, как в п. 400, получим

$$Q=\iint (l\alpha+m\beta+n\gamma) dS+4\pi\iint (lA+mB+nC)\, dS. \tag{11}$$

Предположим теперь, что поверхность, по которой производится интегрирование, замкнута, и исследуем значения величин двух членов в правой части этого уравнения.

Математическая форма связи между магнитной силой и свободным магнетизмом такая же, как между электрической силой и свободным электричеством, поэтому мы можем применить результаты п. 77 к первому члену выражения для Q, заменив составляющие электрической силы X, Y, Z в п. 77 на составляющие магнитной силы α, β, γ, а алгебраическую сумму свободного электричества e на алгебраическую сумму свободного магнетизма M.

Таким образом, получаем уравнение

$$\iint (l\alpha+m\beta+n\gamma)dS=4\pi M. \tag{12}$$

Так как каждая магнитная частица имеет два полюса одинаковой величины и противоположных знаков, алгебраическая сумма магнетизма частицы равна нулю. Поэтому частицы, которые целиком находятся внутри замкнутой поверхности S, не могут дать вклада в алгебраическую сумму магнетизма внутри S, т. е. величина M должна зависеть только от магнитных частиц, которые рассечены поверхностью S.

Рассмотрим маленький элемент магнита длиной s с поперечным сечением k^2, намагниченный в направлении его длины так, что мощность его полюсов равна m. Момент этого небольшого магнита равен ms, а намагниченность, равная отношению магнитного момента к объему,

$$I=m/k^2. \tag{13}$$

Пусть этот маленький магнит так рассечен поверхностью S, что направление намагниченности образует с наружной нормалью к поверхности угол ε'; тогда, если обозначить через dS площадь сечения,

$$k^2=dS\cos\varepsilon'. \tag{14}$$

Отрицательный полюс этого магнита — m находится внутри поверхности S.

Следовательно, если обозначить через dM вклад этого маленького магнита в ту часть свободного магнетизма, которая находится внутри S, то

$$dM=-m=-Ik^2=-I\cos\varepsilon' dS. \tag{15}$$

Для того чтобы найти алгебраическую сумму свободного магнетизма M внутри замкнутой поверхности S, необходимо проинтегрировать это выражение по замкнутой поверхности S:

$$M=-\iint I\cos\varepsilon' dS,$$

или через составляющие намагниченности A, B, C и направляющие косинусы наружной нормали l, m, n:

$$M=-\iint (lA+mB+nC)\,dS. \tag{16}$$

Это дает значение интеграла во втором члене правой части уравнения (11). Величину Q в (11) можно, таким образом, найти, используя уравнения (12) и (16):

$$Q=4\pi M-4\pi M=0, \tag{17}$$

или *интеграл от магнитной индукции, взятый по произвольной замкнутой поверхности, равен нулю.*

403. Если предположить, что замкнутая поверхность есть поверхность дифференциального элемента объема $dx\,dy\,dz$, мы получим уравнение

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0. \tag{18}$$

Это есть условие соленоидальности, которому всегда удовлетворяют составляющие магнитной индукции.

Так как распределение магнитной индукции соленоидально, то поток индукции через любую поверхность, ограниченную замкнутой кривой, зависит только от формы и положения этой замкнутой кривой и не зависит от формы и положения самой поверхности.

404. Поверхности, во всех точках которых

$$la+mb+nc=0, \tag{19}$$

называются поверхностями с нулевым потоком индукции, а пересечение двух этих поверхностей называется линией индукции. Условия, при которых некоторая кривая s может быть линией индукции, таковы:

$$\frac{1}{a}\frac{dx}{ds}=\frac{1}{b}\frac{dy}{ds}=\frac{1}{c}\frac{dz}{ds}. \tag{20}$$

Совокупность линий индукции, проведенных через каждую точку замкнутой кривой, образует трубчатую поверхность, называемую трубкой индукции.

Поток индукции через любое сечение такой трубки одинаков. Если поток индукции в трубке равен единице, она называется единичной трубкой индукции.

Все, что Фарадей[2] говорит о магнитных силовых линиях и магнитных «спондилоидах» (sphondiloids), математически верно, если под ними понимать линии и трубки магнитной индукции.

Вне магнита магнитная сила и магнитная индукция совпадают, однако внутри вещества магнита их следует тщательно различать.

В случае прямого однородно намагниченного стержня магнитная сила, создаваемая самим магнитом, направлена от конца, указывающего на север (мы называем его положительным полюсом), к южному концу (отрицательному полюсу) как внутри магнита, так и вне его.

С другой стороны, магнитная индукция вне магнита тоже направлена от положительного полюса к отрицательному, но внутри магнита — от отрицательного полюса к положительному, так что линии и трубки индукции образуют сами в себя входящие, или замкнутые, кривые.

Важность магнитной индукции как физического понятия будет видна более отчетливо при изучении электромагнитных явлений. Когда магнитное поле создается движущимся проводом, как в опытах Фарадея {*Exp. Res.* 3076), непосредственно измеряемой величиной является именно магнитная индукция, а не магнитная сила.

Вектор-потенциал магнитной индукции

405. Как показано в п. 403, поток магнитной индукции через поверхность, ограниченную замкнутой кривой, зависит от этой кривой, но не зависит от формы ограничиваемой ею поверхности; поэтому должен существовать способ определения потока индукции внутри замкнутой кривой с помощью процедуры, зависящей только от характера кривой и не включающей конструкцию поверхности, которая диафрагмирует эту кривую.

Это можно сделать, отыскав вектор $\mathfrak{A}$, связанный с магнитной индукией $\mathfrak{B}$

[2] *Exp. Res.*, series XXVIII.

таким образом, чтобы линейный интеграл от $\mathfrak{A}$ по замкнутой кривой был равен поверхностному интегралу от $\mathfrak{B}$ по поверхности, ограниченной этой кривой.

Обозначив, как и в п. 24, через F, G, H составляющие $\mathfrak{A}$, через a, b, c составляющие $\mathfrak{B}$, получим между ними следующую связь:

$$a=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz},\quad b=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx},\quad c=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}. \tag{21}$$

Вектор $\mathfrak{A}$ с составляющими F, G, H называется вектор-потенциалом магнитной индукции.

Поместим в начало координат магнитную молекулу с моментом m и направлением оси намагниченности (λ, μ, ν). Согласно п. 387, ее потенциал в точке (x, y, z), на расстоянии r от начала координат будет равен

$$-m\left(\lambda\frac{d}{dx}+\mu\frac{d}{dy}+\nu\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{r};$$

$$c=m\left(\lambda\frac{d^2}{dx\,dz}+\mu\frac{d^2}{dy\,dz}+\nu\frac{d^2}{dz^2}\right)\frac{1}{r}.$$

С помощью уравнения Лапласа последнему выражению можно придать вид

$$m\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{d}{dz}-\nu\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{r}-m\frac{d}{dy}\left(\nu\frac{d}{dy}-\mu\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{r}.$$

Аналогично можно преобразовать величины a, b.

Следовательно,

$$F=m\left(\nu\frac{d}{dy}-\mu\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{r}=\frac{m(\mu z-\nu y)}{r^3}.$$

Составляющие G, H можно получить из этого выражения, руководствуясь симметрией. Таким образом, вектор-потенциал в данной точке, создаваемый намагниченной частицей, помещенной в начало координат, численно равен магнитному моменту этой частицы, деленному на квадрат радиус-вектора и умноженному на синус угла между осью намагниченности и радиус-вектором; направление вектор-потенциала перпендикулярно плоскости оси намагниченности и радиус-вектора, причем если смотреть в положительном направлении оси намагниченности, то вектор-потенциал указывает в направлении движения часовой стрелки.

Следовательно, для магнита произвольной формы с составляющими намагниченности A, B, C в точке (x, y, z) составляющие вектор-потенциала в точке (ξ, η, ζ) равны

$$\begin{aligned} F&=\iiint\left(B\frac{dp}{dz}-C\frac{dp}{dy}\right)dx\,dy\,dz,\\ G&=\iiint\left(C\frac{dp}{dx}-A\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz,\\ H&=\iiint\left(A\frac{dp}{dy}-B\frac{dp}{dx}\right)dx\,dy\,dz, \end{aligned} \tag{22}$$

где через p для краткости обозначено обратное расстояние между точками (ξ, η, ζ) и (x, y, z), а интегрирование распространяется на весь объем, занятый магнитом.

406. Скалярный, или обычный, потенциал магнитной силы, введенный в п. 385, в этих обозначениях принимает вид

$$V=\iiint\left(A\frac{dp}{dx}+B\frac{dp}{dy}+C\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz. \tag{23}$$

Помня, что $(dp/dx)=-(dp/d\xi)$ и что интеграл

$$\iiint A\left(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz$$

равен $-4\pi(A)$, когда точка (ξ, η, ζ) находится внутри объема интегрирования, и нулю, когда она вне его, где (A) — значение A в точке (ξ, η, ζ), получаем для x-составляющей магнитной индукции

$$\begin{aligned}\alpha=\frac{dH}{d\eta}-\frac{dG}{d\zeta}&=\iiint\left\{A\left(\frac{d^2p}{dy\,d\eta}+\frac{d^2p}{dz\,d\zeta}\right)-B\frac{d^2p}{dx\,d\eta}-C\frac{d^2p}{dx\,d\zeta}\right\}dx\,dy\,dz=\\ &=-\frac{d}{d\xi}\iiint\left\{A\frac{dp}{dx}+B\frac{dp}{dy}+C\frac{dp}{dz}\right\}dx\,dy\,dz-\\ &\quad-\iiint A\left(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz.\end{aligned} \tag{24}$$

Первый член этого выражения равен, очевидно,— $dV/d\xi$ или составляющей магнитной силы α.

Величина же, стоящая под знаком интеграла во втором члене, равна нулю для любого элемента объема, кроме того, в котором находится точка (ξ, η, ζ). Легко показать, что второй член равен $4\pi(A)$, где (A) — значение A в точке (ξ, η, ζ); во всех точках вне магнита величина (A) равна нулю.

Теперь можно x-составляющую магнитной индукции записать в виде

$$a=\alpha+4\pi(A), \tag{25}$$

что равнозначно первому из уравнений, приведенных в п. 400; уравнения для b и c также совпадают с соответствующими уравнениями п. 400.

Как мы уже видели, магнитная сила вычисляется через скалярный потенциал V путем применения к нему оператора Гамильтона ∇; следуя п. 17, можно записать

$$\mathfrak{H}=-\nabla V, \tag{26}$$

это уравнение справедливо как вне, так и внутри магнита.

Из проведенных сейчас исследований явствует, что магнитная индукция вычисляется через вектор-потенциал $\mathfrak{A}$ путем применения к нему того же самого оператора; и этот результат справедлив внутри магнита так же, как вне его.

Применение этого оператора к векторной функции может дать в общем случае и скалярную и векторную величину. Однако скалярная часть, названная нами конвергенцией векторной функции, исчезает, если векторная функция удовлетворяет условию соленоидальности

$$\frac{dF}{d\xi}+\frac{dG}{d\eta}+\frac{dH}{d\zeta}=0. \tag{27}$$

Дифференцируя выражения (22) для F, G, H, убеждаемся, что эти величины удовлетворяют условию соленоидальности.

Таким образом, мы можем записать между магнитной индукцией и ее вектор-потенциалом:

$$\mathfrak{B} = \nabla \mathfrak{A},$$

которую можно выразить такими словами: магнитная индукция является вихрем (ротором) своего вектор-потенциала, см. п. 25.

ГЛАВА III

МАГНИТНЫЕ СОЛЕНОИДЫ И МАГНИТНЫЕ ОБОЛОЧКИ[1]

О частных формах магнитов

407. Если длинная тонкая нить из магнитной материи, напоминающая проволоку, всюду является намагниченной в продольном направлении, то произведение любого ее поперечного сечения на интенсивность намагниченности, среднюю по этому сечению, называется мощностью магнита в этом сечении. Если бы нить оказалась разрезанной на две части без изменения ее намагниченности, то на двух поверхностях разреза после их разделения обнаружилось бы наличие равных и противоположных величин поверхностной намагниченности, численно совпадающих с мощностью магнита в данном сечении.

Нить магнитной материи, намагниченная таким образом, что ее мощность в любом произвольно по длине нити проведенном сечении одинакова, называется Магнитным Соленоидом.

Если m — мощность соленоида, ds — элемент его длины, причем s отсчитывается от отрицательного полюса магнита к положительному, r — расстояние от данной точки до этого элемента, ε — угол, который образует r с осью намагниченности элемента, то потенциал, обусловленный элементом магнита в данной точке, равен

$$\frac{m\,ds\cos\varepsilon}{r^2} = -\frac{m}{r^2}\frac{dr}{ds}ds.$$

Чтобы учесть все элементы соленоида, проинтегрируем это выражение по s; потенциал будет равен

$$V = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

где r_1 и r_2 — расстояния от положительного и отрицательного концов соленоида до точки, где измеряется V.

Таким образом, обусловленный соленоидом потенциал и, следовательно, все связанные с ним магнитные эффекты зависят только от его мощности и положе-

[1] См. работу сэра У. Томсона «Математическая теория магнетизма» (W. Thomson «Mathematical Theory of Magnetism»). См. *Phil. Trans.*, June 1849 and June 1850 или *Reprint* of Papers on Electrostatics and Magnetism, p. 340.

ния концов соленоида и совсем не зависят от формы соленоида между конечными точками, т. е. от того, является ли он прямым или изогнутым.

Поэтому концы соленоида можно назвать его полюсами в строгом смысле этого слова.

Если соленоид образует замкнутую кривую, то обусловленный им потенциал равен нулю в любой точке; такой соленоид не проявляет никакого магнитного действия, и его намагниченность нельзя обнаружить без разламывания его в какой-либо точке и разнесения концов.

Если магнит можно разделить на отдельные соленоиды, каждый из которых либо образует замкнутую кривую, либо выходит своими концами на внешнюю поверхность магнита, то про его намагниченность говорят, что она является соленоидальной; поскольку действие магнита целиком определяется концами соленоидов, распределение воображаемой магнитной материи будет чисто поверхностным.

Следовательно, условие соленоидальности намагниченности будет таким:

$$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}=0,$$

где A, B, C — составляющие намагниченности в произвольной точке магнита.

408. Продольно намагниченную нить, мощность которой различна на разных участках ее длины, можно считать изготовленной из пучка соленоидов различной длины; при этом сумма мощностей всех соленоидов, проходящих через данное сечение нити, является магнитной мощностью нити в этом сечении. Поэтому любую продольно намагниченную нить можно назвать Сложным Соленоидом.

Если мощность сложного соленоида в произвольном сечении равна m, то потенциал, обусловленный его действием, равен

$$V=-\int\frac{m}{r^2}\frac{dr}{ds}ds, \quad \text{где } m \text{ — переменная величина},$$

$$=\frac{m_1}{r_1}-\frac{m_2}{r_2}-\int\frac{1}{r}\frac{dm}{ds}ds.$$

Отсюда видно, что кроме действия двух концов, которые в этом случае могут иметь разные мощности, появляется еще и действие, связанное с распределением воображаемой магнитной материи вдоль нити с линейной плотностью: $\lambda=-(dm/ds)$.

Магнитные оболочки

409. Если тонкая оболочка магнитного вещества намагничена повсюду в направлении, нормальном к ее поверхности, то произведение интенсивности намагниченности в произвольном месте на толщину пленки в том же месте называется Мощностью магнитной оболочки в этом месте.

Если мощность оболочки повсюду одинакова, то она называется Простой магнитной оболочкой; если же мощность меняется от точки к точке, то такую оболочку можно считать составленной из нескольких наложенных друг на друга перекрывающихся простых оболочек. Поэтому она называется Сложной магнитной оболочкой.

Пусть dS является элементом поверхности оболочки мощности Φ, находящимся в точке Q; тогда потенциал в произвольной точке P, обусловленный этим элементом, равен

$$dV=\Phi\frac{1}{r^2}dS\cos\varepsilon,$$

где ε — угол между вектором QP (или r) и внешней нормалью, выходящей из положительной стороны оболочки.

Но если $d\omega$ есть телесный угол с вершиной в точке P, опирающийся на элемент dS, то $r^2d\omega=dS\cos\varepsilon$, отсюда $dV=\Phi\,d\omega$, и, следовательно, в случае простой магнитной оболочки имеем $V=\Phi\omega$, или потенциал в произвольной точке, обусловленный магнитной оболочкой, равен произведению ее мощности на телесный угол с вершиной в этой точке, опирающийся на край оболочки [2].

410. Этот же результат можно получить другим путем, предположив, что магнитная оболочка помещена в произвольное поле магнитной силы, и определив потенциальную энергию, связанную с положением оболочки.

Если V — потенциал на элементе dS, то энергия, связанная с этим элементом, равна

$$\Phi\left(l\frac{dV}{dx}+m\frac{dV}{dy}+n\frac{dV}{dz}\right)dS,$$

или *произведению мощности оболочки на часть поверхностного интеграла от $dV/d\nu$, связанную с элементом dS оболочки.*

Следовательно, интегрируя по всем таким элементам, мы получим, что энергия, обусловленная положением оболочки в поле, равна произведению мощности оболочки на поверхностный интеграл от магнитной индукции, взятый по поверхности оболочки.

Так как для любых двух поверхностей, имеющих одну и ту же границу и не содержащих между собой какого-нибудь центра силы, поверхностный интеграл одинаков, то действие магнитной оболочки зависит только от формы ее границы.

Предположим теперь, что поле силы создается магнитным полюсом мощности m. Мы уже видели (п. 76), что поверхностный интеграл по поверхности, ограниченной заданной кривой, равен произведению мощности полюса на телесный угол с вершиной в точке полюса, опирающийся на эту границу. Поэтому энергия взаимодействия полюса и оболочки равна $\Phi m\omega$, а это, по теореме Грина, равно произведению мощности полюса на потенциал, обусловленный оболочкой в точке полюса. Таким образом, потенциал обусловленный оболочкой, равен $\Phi\omega$.

411. Если магнитный полюс m из точки, находящейся на отрицательной стороне поверхности, начинает перемещаться по произвольному пути в пространстве и, обогнув край оболочки, возвращается в точку близкую к начальной, но уже находящуюся на положительной стороне оболочки, то телесный угол будет непрерывно меняться и возрастет в процессе обхода на 4π. Работа, совершенная полюсом, окажется равной $4\pi\Phi m$, а потенциал в произвольной точке на положительной стороне оболочки будет превышать потенциал в соседней к ней точке, находящейся на отрицательной стороне, на величину $4\pi\Phi$.

---

[2] Этой теоремой мы обязаны Гауссу,— *General Theory of Terrestrial* Magnetism, § 38.

Если магнитная оболочка образует замкнутую поверхность, потенциал вне ее всюду равен нулю, а в пространстве внутри нее — всюду равен $4\pi\Phi$, будучи положительным, когда оболочка обращена внутрь положительной стороной. Следовательно, такая оболочка не оказывает действия на магнит, помещенный внутри нее или снаружи.

412. Если магнит можно разделить на простые магнитные оболочки, либо замкнутые, либо выходящие своими краями на поверхность магнита, то распределение магнетизма называется Слоистым (ламеллярным). Если φ — сумма мощностей всех оболочек, пересекаемых движущейся точкой при ее перемещении по линии, расположенной внутри магнита, от заданной точки до точки (x, y, z), то условия ламеллярности таковы: $A=d\varphi/dx$, $B=d\varphi/dy$, $C=d\varphi/dz$.

Величину φ, которая таким образом, полностью определяет намагниченность в любой точке, можно назвать Потенциалом Намагниченности. Его следует тщательно отличать от Магнитного Потенциала.

413. Про магнит, который можно разделить на сложные магнитные оболочки, говорят, что он имеет сложное ламеллярное распределение магнетизма. Условие такого распределения состоит в том, чтобы линии намагниченности допускали построение системы поверхностей, пересекающих их под прямым углом; это выражается хорошо известным уравнением

$$A\left(\frac{dC}{dy}-\frac{dB}{dz}\right)+B\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)+C\left(\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy}\right)=0.$$

Вид потенциалов соленоидальных и ламеллярных магнитов

414. Общее выражение для скалярного потенциала магнита имеет вид

$$V=\iiint\left(A\frac{dp}{dx}+B\frac{dp}{dy}+C\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

где p обозначает потенциал, создаваемый в точке (x, y, z) единичным магнитным полюсом, помещенным в (ξ, η, ζ), или, другими словами, обратное расстояние между точкой (ξ, η, ζ), в которой измеряется потенциал, и точкой (x, y, z), в которой расположен элемент магнита, создающий этот потенциал.

Это выражение можно проинтегрировать по частям, как в п. 96, 386:

$$V=\iint p(Al+Bm+Cn)\,dS-\iiint p\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали, проведенной наружу от элемента поверхности магнита dS.

В случае соленоидального магнита выражение под знаком интеграла во втором члене равно нулю для всех точек внутри магнита, так что тройной интеграл равен нулю, а скалярный потенциал в любой точке как вне, так и внутри магнита задается поверхностным интегралом, стоящим в первом члене.

Таким образом, скалярный потенциал соленоидального магнита полностью определен, если в каждой точке поверхности известна нормальная составляющая намагниченности, и этот потенциал не зависит от формы соленоидов внутри магнита.

415. В случае ламеллярного магнита намагниченность определяется потенциалом намагниченности φ, так что $A=d\varphi/dx$, $B=d\varphi/dy$, $C=d\varphi/dz$.

Выражение для V можно поэтому переписать в виде

$$V=\iiint\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dp}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz.$$

Интегрируя это выражение по частям, находим

$$V=\iint\varphi\left(l\frac{dp}{dx}+m\frac{dp}{dy}+n\frac{dp}{dz}\right)dS-\iiint\varphi\left(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Второй член равен нулю, если точка (ξ, η, ζ) не принадлежит магниту, в противном случае он равен $4\pi\varphi$, где φ — значение φ в точке (ξ, η, ζ). Поверхностный интеграл можно выразить через величину r, равную длине отрезка между точками (x, y, z) и (ξ, η, ζ), и через угол ϑ, который этот отрезок образует с внешней нормалью к элементу поверхности dS, так что потенциал можно записать в виде

$$V=\iint\frac{1}{r^2}\varphi\cos\vartheta\,dS+4\pi(\varphi),$$

где второй член, конечно, равен нулю, если точка (ξ, η, ζ), не принадлежит веществу магнита.

Потенциал V, выражаемый этим уравнением, непрерывен даже на поверхности магнита, где значение φ скачком обращается в нуль, потому что, если записать

$$\Omega=\iint\frac{1}{r^2}\varphi\cos\vartheta\,dS$$

и обозначить через Ω_1 значение Ω в точке, непосредственно находящейся на поверхности, а Ω_2— значение Ω в точке, близкой к первой, но вне поверхности, то

$$\Omega_2=\Omega_1+4\pi(\varphi),\quad \text{или}\quad V_2=V_1.$$

Величина Ω не является непрерывной на поверхности магнита.

Составляющие магнитной индукции связаны с Ω уравнениями

$$a=-(d\Omega/dx),\qquad b=-(d\Omega/dy),\qquad c=-(d\Omega/dz).$$

416. В случае ламеллярного распределения магнетизма мы можем упростить также и вектор-потенциал магнитной индукции.

Его x-составляющую можно записать:

$$F=\iiint\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{dp}{dz}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{dp}{dy}\right)dx\,dy\,dz.$$

Интегрируя по частям, мы можем представить это в виде поверхностного интеграла:

$$F=\iint\varphi\left(m\frac{dp}{dz}-n\frac{dp}{dy}\right)dS,$$

или

$$F=-\iint p\left(m\frac{d\varphi}{dz}-n\frac{d\varphi}{dy}\right)dS.$$

Остальные составляющие вектор-потенциала можно получить, сделав соответствующие замены в этих выражениях.

О телесных углах

417. Мы уже доказали, что потенциал, создаваемый магнитной оболочкой в произвольной точке P, равен мощности оболочки, умноженной на телесный угол, опирающийся на ее край. Поскольку нам придется еще раз обратиться к телесным углам в теории электрических токов, мы сейчас объясним, как их можно измерять.

Определение. Телесный угол с вершиной в данной точке, опирающийся на замкнутую кривую, измеряется площадью сферической поверхности единичного радиуса с центром в данной точке, границей которой служит след пересечения сферы с радиус-вектором при его движении по замкнутой кривой. Эта площадь должна считаться положительной или отрицательной в соответствии с тем, лежит ли она по левую или по правую сторону относительно движения радиус-вектора, видимого из данной точки.

Обозначим заданную точку через (ξ, η, ζ), а точку на замкнутой кривой через (x, y, z). Координаты x, y, z являются функциями длины кривой s, отсчитываемой от некоторой точки, причем периодическими функциями s, восстанавливающими свои значения при увеличении s на полную длину замкнутой кривой.

Мы можем вычислить телесный угол непосредственно из его определения следующим образом. Используя сферические координаты с центром в (ξ, η, ζ) и полагая

$$x-\xi=r\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad y-\eta=r\sin\vartheta\sin\varphi,\qquad z-\zeta=r\cos\vartheta,$$

найдем путем интегрирования площадь внутри произвольной кривой на сфере: $\omega=\int(1-\cos\vartheta)\,d\varphi$, или в прямоугольных координатах

$$\omega=\int d\varphi-\int_0^s\frac{z-\zeta}{r\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}}\left[(x-\xi)\frac{dy}{ds}-(y-\eta)\frac{dx}{ds}\right]ds,$$

где интегрирование производится по замкнутой кривой s.

Если ось z проходит один раз сквозь замкнутую кривую, то первый член равен 2π. Если же ось z не проходит сквозь нее, первый член равен нулю.

418. Этот метод вычисления телесного угла содержит произвольный до некоторой степени выбор оси и не зависит только лишь от вида замкнутой кривой. Поэтому для геометрической строгости уместно предложить следующий метод, в котором не предусматривается построение никаких поверхностей. Пусть по мере того как радиус-вектор, выходящий из данной точки, описывает замкнутую кривую, плоскость, проходящая через эту точку, катится по замкнутой кривой таким образом, что последовательно становится касательной плоскостью в каждой точке кривой. Проведем из данной точки перпендикулярно этой плоскости отрезок единичной длины. При качении плоскости по замкнутой кривой конец перпендикуляра описывает вторую замкнутую кривую, полярную по отношению к первой. Пусть ее длина равна σ, тогда телесный угол, опирающийся на первую кривую, будет равен $\omega=2\pi-\sigma$.

Это следует из хорошо известной теоремы о том, что площадь, ограниченная замкнутой кривой на сфере единичного радиуса, вместе с периметром полярной кривой численно равны длине большой окружности сферы.

Такое построение удобно иногда для вычисления телесного угла, опирающегося на контур, составленный из отрезков прямых. Для нашей цели, которая состоит в формировании ясных представлений о физических явлениях, более предпочтителен метод, излагаемый далее, поскольку в нем не используется никаких построений, не вытекающих непосредственно из физических данных о проблеме.

419. Замкнутая кривая s задана в пространстве, и мы должны найти телесный угол с вершиной в точке P, опирающийся на s.

Если рассматривать телесный угол как потенциал магнитной оболочки, край которой совпадает с замкнутой кривой и мощность которой равна единице, мы должны определить этот угол как работу, совершаемую единичным магнитным полюсом против магнитной силы при его перемещении из бесконечности в точку P. Следовательно, потенциал должен быть результатом криволинейного интегрирования вдоль пути σ, по которому полюс приближается к точке P. Но он также должен быть результатом криволинейного интегрирования по замкнутой кривой s. Поэтому соответствующее выражение для телесного угла должно иметь вид двойного интеграла по двум кривым s и σ.

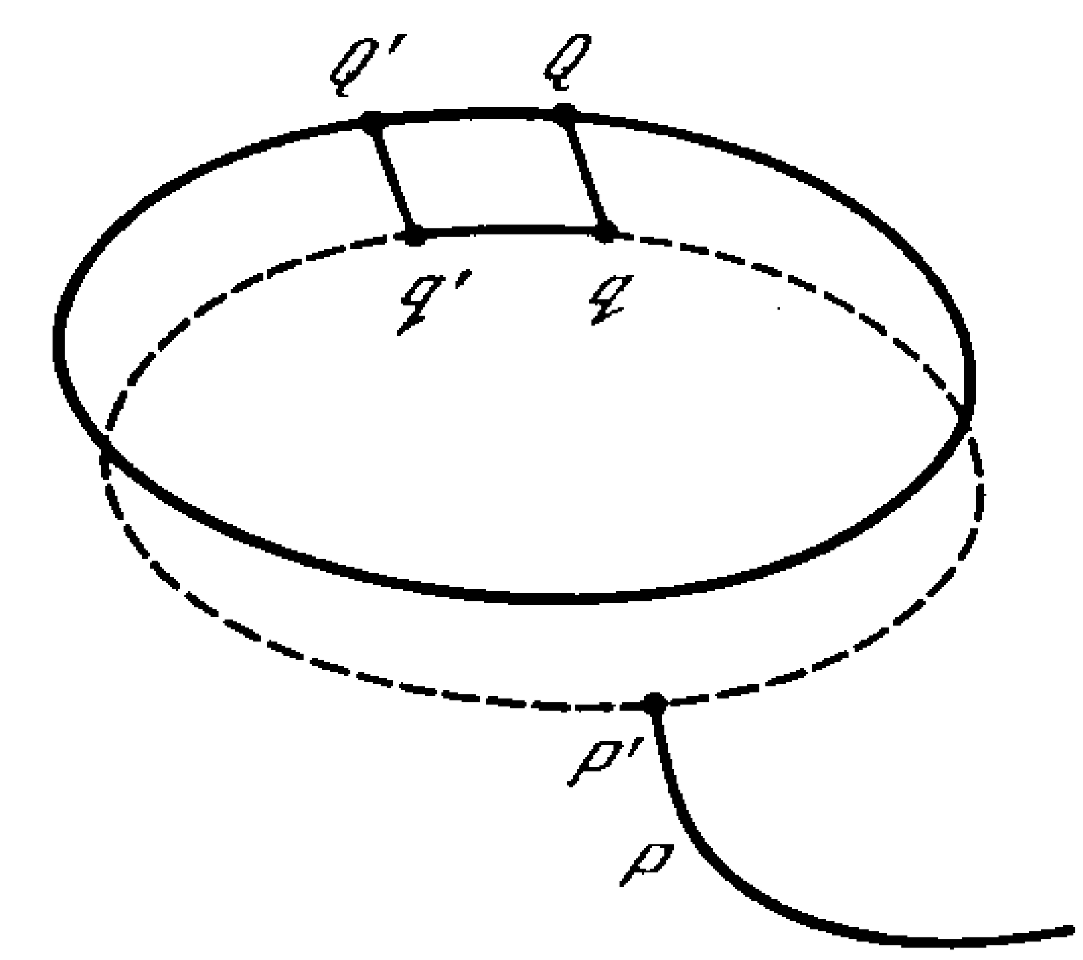


Рис. 3

Когда точка P находится на бесконечном расстоянии, телесный угол, очевидно, равен нулю. По мере приближения точки P замкнутая кривая, если смотреть на нее из движущейся точки, будет казаться раскрывающейся, и можно представлять себе, что полный телесный угол образуется в результате кажущегося перемещения различных элементов замкнутой кривой по мере приближения к ней движущейся точки P.

При движении точки P от P к P' вдоль элемента $d\sigma$ элемент замкнутой кривой QQ', который мы обозначим через ds, будет изменять свое положение относительно P, и линия на единичной сфере, соответствующая QQ', прочертит на сферической поверхности некоторую площадь, которую можно записать так [рис. 3]:

$$d\omega = \Pi \, ds d\sigma. \tag{1}$$

Чтобы найти Π, предположим, что точка P неподвижна, а замкнутая кривая перемещается параллельно самой себе на расстояние $d\sigma$, равное PP', но в противоположном направлении. При этом относительное движение точки P будет таким же, как и в действительности.

Во время этого движения элемент QQ' прочертит площадь в виде параллелограмма, стороны которого параллельны и равны QQ' и PP'. Если, взяв этот параллелограмм в качестве основания, построить пирамиду с вершиной в точке P, то телесный угол этой пирамиды будет равен искомому приращению $d\omega$.

Для того чтобы определить значение этого телесного угла, обозначим через ϑ и ϑ' углы, которые образуют соответственно ds и $d\sigma$ с PQ, через φ — угол между плоскостями этих углов. Тогда площадь проекции параллелограмма $ds\, d\sigma$ на плоскость, перпендикулярную PQ или r, будет равна $ds\, d\sigma \sin\vartheta \sin\vartheta' \sin\varphi$, и, поскольку она равна $r^2\, d\omega$, находим

$$d\omega = \Pi ds d\sigma = (1/r^2) \sin\vartheta \sin\vartheta' \sin\varphi \, ds d\sigma. \tag{2}$$

Откуда

$$\Pi=(1/r^2)\sin\vartheta\sin\vartheta'\sin\varphi. \qquad (3)$$

420. Мы можем выразить углы ϑ, ϑ' и φ через r и его производные по s и σ:

$$\cos\vartheta=\frac{dr}{ds},\qquad \cos\vartheta'=\frac{dr}{d\sigma},\qquad \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi=r\frac{d^2r}{ds\,d\sigma}. \qquad (4)$$

Для Π^2, таким образом, находим следующее выражение:

$$\Pi^2=\frac{1}{r^4}\left[1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right]-\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2r}{ds\,d\sigma}\right)^2. \qquad (5)$$

Третье выражение для Π через прямоугольные координаты можно вывести, исходя из того соображения, что объем пирамиды с телесным углом $d\omega$ и стороной r равен

$$\frac{1}{3}r^3 d\omega=\frac{1}{3}r^3\,\Pi\,ds\,d\sigma.$$

Но объем этой же пирамиды можно выразить также через проекции r, ds и $d\sigma$ на оси x, y, и z: он равен одной трети детерминанта, образованного из этих девяти проекций. Таким образом, для значения Π находим

$$\Pi=-\frac{1}{r^3}\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y, & \zeta-z, \\ \dfrac{d\xi}{d\sigma}, & \dfrac{d\eta}{d\sigma}, & \dfrac{d\zeta}{d\sigma}, \\ \dfrac{dx}{ds}, & \dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{dz}{ds}. \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Это выражение дает значение Π, лишенное неоднозначности в выборе знака, внесенной уравнением (5).

421. Теперь для телесного угла ω с вершиной в точке P, опирающегося на замкнутую кривую, можно записать

$$\omega=\iint\Pi\,ds\,d\sigma+\omega_0, \qquad (7)$$

где интегрирование по s производится по всей замкнутой кривой, а по σ — от некоторой фиксированной точки A до точки P. Константа ω_0 равна значению телесного угла в точке A. Она обращается в нуль, если точка A находится на бесконечном расстоянии от замкнутой кривой.

Значение ω в произвольной точке P не зависит от формы кривой между точками A и P при условии, что эта кривая не проходит через саму магнитную оболочку. Если оболочка предполагается бесконечно тонкой, а точки P и P' расположенными рядом, но P — на положительной стороне оболочки, а P' — на отрицательной, то кривые AP и AP' должны лежать по разные стороны от края оболочки, так что линия PAP' вместе с бесконечно короткой линией $P'P$ образует замкнутый контур, охватывающий край оболочки. Значение ω в точке P превышает значение ω в точке P' на 4π, т. е. на величину поверхности сферы единичного радиуса.

Поэтому, если замкнутая кривая проведена так, что она проходит сквозь оболочку один раз, или, другими словами, является однократно сцепленной с ее краем, то значение интеграла $\iint \Pi ds d\sigma$, взятого по обеим замкнутым кривым, равно 4π.

Следовательно, этот интеграл, зависящий только от замкнутой кривой s и произвольной кривой AP, является примером многозначной функции, так как, если переходить из A в P различными путями, интеграл будет принимать различные значения в соответствии с тем, сколько раз кривая AP обернется вокруг кривой s.

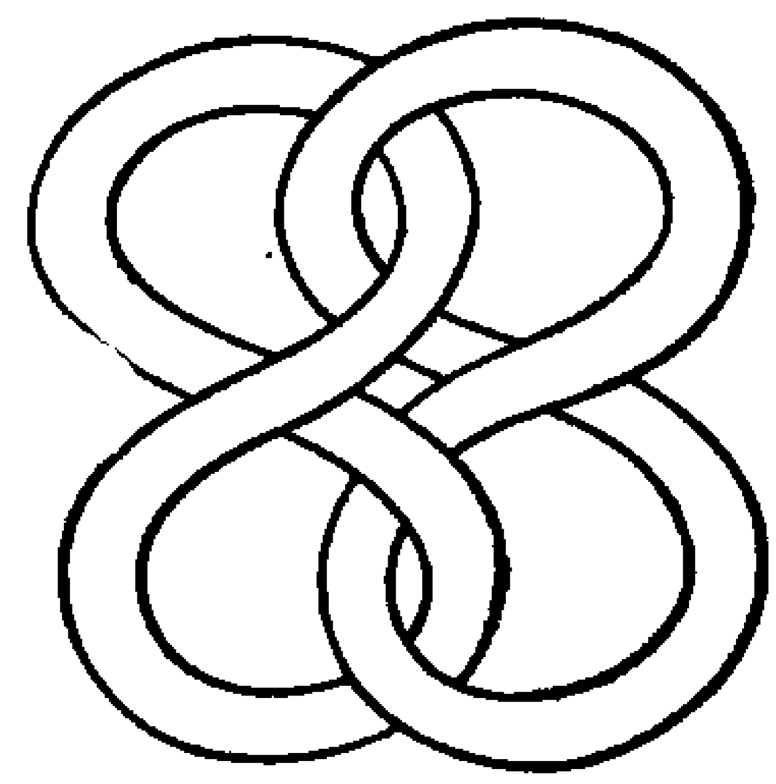


Рис. 4

Если одна кривая между точками A и P может быть трансформирована в другую непрерывным ее перемещением без пересечения кривой s, то интеграл будет иметь одинаковые значения для обеих кривых; если же в процессе трансформации она пересечет замкнутую кривую n раз, значения интеграла будут отличаться на $4\pi n$.

Таким образом, для двух произвольных замкнутых в пространстве кривых s и σ, не сцепленных друг с другом, интеграл, взятый однократно по обеим кривым, равен нулю.

Если же кривые охватывают друг друга n раз в одном и том же направлении, значение интеграла равно $4\pi n$. Возможно, однако, что две кривые охватывают друг друга попеременно в противоположных направлениях, оставаясь неразделимо сцепленными друг с другом при равном нулю значении интеграла, см. рис. 4.

Открытие Гауссом этого интеграла, выражающего работу, совершаемую магнитным полюсом при его движении по замкнутой кривой в присутствии замкнутого электрического тока, и характеризующего геометрическую связанность двух замкнутых кривых, побудило его сетовать на слабое развитие Геометрии Положений (топологии) со времен Лейбница, Эйлера и Вандермонда. Сейчас, однако, мы уже можем говорить о некотором прогрессе, обязанном Риману, Гельмгольцу и Листингу.

422. Исследуем теперь результат интегрирования по s вдоль замкнутой кривой. Один из членов, определяющих Π в уравнении (7), равен

$$-\frac{\xi-x}{r^3}\frac{d\eta}{d\sigma}\frac{dz}{ds}=\frac{d\eta}{d\sigma}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}\right). \tag{8}$$

Для краткости запишем

$$F=\int\frac{1}{r}\frac{dx}{ds}ds,\quad G=\int\frac{1}{r}\frac{dy}{ds}ds,\quad H=\int\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}ds, \tag{9}$$

где интегралы берутся однократно по замкнутой кривой s; тогда этот член в выражении для Π можно представить в виде $(d\eta/d\sigma)\cdot(d^2H/d\xi ds)$, а соответствующий ему член в $\int \Pi ds$ будет $(d\eta/d\sigma)\,(dH/d\xi)$.

Собрав все члены, входящие в Π, мы можем теперь записать

$$-\frac{d\omega}{d\sigma}=-\int\Pi ds=\left(\frac{dH}{d\eta}-\frac{dG}{d\zeta}\right)\frac{d\xi}{d\sigma}+\left(\frac{dF}{d\zeta}-\frac{dH}{d\xi}\right)\frac{d\eta}{d\sigma}+\left(\frac{dG}{d\xi}\quad\frac{dF}{d\eta}\right)\frac{d\zeta}{d\sigma}. \tag{10}$$

Эта величина является, очевидно, скоростью уменьшения магнитного потенциала ω при прохождении вдоль кривой σ, или, другими словами, она представляет собой магнитную силу в направлении $d\sigma$.

Полагая элемент $d\sigma$ поочередно направленным вдоль осей x, y и z, для значений составляющих магнитной силы получим

$$\alpha=-\frac{d\omega}{d\xi}=\frac{dH}{d\eta}-\frac{dG}{d\zeta}, \qquad \beta=-\frac{d\omega}{d\eta}=\frac{dF}{d\zeta}-\frac{dH}{d\xi}, \qquad \gamma=-\frac{d\omega}{d\zeta}=\frac{dG}{d\xi}-\frac{dF}{d\eta}. \quad (11)$$

Величины F, G, H являются составляющими вектор-потенциала магнитной оболочки единичной мощности, краем которой служит кривая s. В отличие от скалярного потенциала ω, они не относятся к функциям, принимающим целый ряд значений, а являются совершенно определенными для каждой точки пространства.

Вектор-потенциал, создаваемый в точке P магнитной оболочкой, ограниченной замкнутой кривой, можно найти путем следующих геометрических построений. Пусть точка Q движется вдоль замкнутой кривой со скоростью, численно равной ее расстоянию от точки P, а вторая точка R выходит из некоторой фиксированной точки A и движется с единичной скоростью в направлении, всюду параллельном направлению движения Q. Когда точка Q обойдет один раз замкнутую кривую, соединим точки A и R отрезком прямой. Отрезок AR по направлению и по величине представляет собой вектор-потенциал, создаваемый замкнутой кривой в точке P.

Потенциальная энергия магнитной оболочки, помещенной в магнитное поле

423. Мы уже показали в п. 410, что потенциальная энергия оболочки с мощностью φ, помещенной в магнитное поле с потенциалом V, равна

$$M=\varphi\int\int\left(l\frac{dV}{dx}+m\frac{dV}{dy}+n\frac{dV}{dz}\right)dS, \quad (12)$$

где l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к оболочке, проведенной наружу с положительной стороны; поверхностный интеграл берется по всей оболочке.

Этот поверхностный интеграл можно теперь преобразовать в криволинейный с помощью вектор-потенциала магнитного поля, записав

$$M=-\varphi\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds, \quad (13)$$

где интегрирование производится однократно по замкнутой кривой s, ограничивающей магнитную оболочку, а ds направлено против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оболочки.

Если предположить теперь, что магнитное поле создается второй магнитной оболочкой, имеющей мощность φ', то можно определить величину F непосредственно из результатов п. 416 или из п. 405.

Если l', m', n' — направляющие косинусы нормали к элементу второй оболочки, то мы имеем

$$F=\varphi'\iint\left(m'\frac{d}{dz'}\frac{1}{r}-n'\frac{d}{dy'}\frac{1}{r}\right)dS',$$

где r — расстояние между элементом dS' и точкой на границе первой оболочки.

Далее этот поверхностный интеграл также можно преобразовать в криволинейный, взятый по границе второй оболочки, а именно

$$\varphi'\int\frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'}ds'. \tag{14}$$

Аналогично $G=\varphi'\int\frac{1}{r}\frac{dy'}{ds'}ds'$, $H=\varphi'\int\frac{1}{r}\frac{dz'}{ds'}ds'$.

Подставляя эти величины в выражение для M, находим

$$M=-\varphi\varphi'\iint\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)dsds', \tag{15}$$

где интегрирование выполняется однократно по кривой s и однократно по s'. Это выражение дает потенциальную энергию, обусловленную взаимодействием двух оболочек, и, как это и должно быть, оно не изменяется от перестановки s и s'. Взятое с обратным знаком при мощности обеих оболочек, равной единице, это выражение называется потенциалом двух замкнутых кривых s и s'. Оно имеет большое значение в теории электрических токов. Если обозначить через ε угол между направлениями элементов ds и ds', можно записать потенциал s и s' в виде

$$\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}dsds'. \tag{16}$$

Очевидно, что эта величина имеет размерность длины.

ГЛАВА IV

ИНДУЦИРОВАННАЯ НАМАГНИЧЕННОСТЬ

424. Среди исследуемых величин мы рассматривали до сих пор истинное распределение намагниченности в магните, как распределение, заданное в явном виде. При этом мы не делали никаких предположений относительно того, является ли эта намагниченность постоянной или временной, кроме тех мест в наших рассуждениях, где допускалось, что магнит разламывается на малые доли, или где считалось, что небольшие участки магнита удаляются из него таким способом, при котором намагниченность других его частей остается неизменной.

Теперь мы должны рассмотреть намагниченность тел с точки зрения способов ее создания или изменения. Установлено, что железный стержень, удерживаемый параллельно направлению земной магнитной силы, становится магнитом с полюсами, повернутыми противоположно полюсам Земли, т. е. направленными так же, как полюса стрелки компаса в устойчивом равновесии.

Обнаружено, что любой кусок мягкого железа, помещенный в магнитное поле, проявляет магнитные свойства. Если его поместить в такой участок поля, где магнитная сила велика, как, например, между полюсами подковообразного магнита, то намагниченность железа становится интенсивной. При удалении железа из магнитного поля его магнитные свойства сильно ослабевают или исчезают полностью. Если магнитные свойства железа целиком определяются магнитной силой поля, в которое оно помещено, и исчезают при удалении из этого поля, то такое железо называют Мягким. Железо, мягкое в магнитном смысле, является мягким и буквально тоже: оно легко сгибается, принимает заданную форму, но с трудом разламывается.

Железо, сохраняющее магнитные свойства при удалении из магнитного поля, называется твердым. Оно не переходит в магнитное состояние с той податливостью, которая характерна для мягкого железа, но ковка или любой другой вид вибрации позволяет твердому железу под влиянием магнитной силы легче осуществлять переход в магнитное состояние и легче расставаться с этим состоянием при удалении намагничивающей силы. Магнитно-твердое железо обладает одновременно большей сопротивляемостью к изгибам и большей способностью к разломам.

Процессы ковки, прокатывания, растягивания и быстрого охлаждения способствуют повышению твердости железа, а процесс отжига способствует его размягчению.

И магнитные, и механические различия между сталью твердой и мягкой закалки гораздо больше, чем между твердым и мягким железом. Мягкая сталь намагничивается и размягчается почти так же легко, как железо, зато самая твердая сталь служит наилучшим материалом для магнитов, которые мы хотели бы сделать постоянными.

Чугун, хотя и содержит больше углерода, чем сталь, не так хорошо сохраняет магнетизм.

Если бы удалось сделать такой магнит, у которого распределение намагниченности не изменялось бы под действием любой приложенной магнитной силы, этот магнит можно было бы назвать жестко намагниченным телом. Единственным известным телом, удовлетворяющим этому условию, является проводящий контур, в котором поддерживается постоянный электрический ток.

Такой контур проявляет магнитные свойства, и поэтому он может быть назван электромагнитом; эти магнитные свойства не подвержены влиянию со стороны других магнитных сил в поле. К этому вопросу мы вернемся еще в IV части.

Все же реальные магниты независимо от того, изготовлены ли они из закаленной стали или магнитного железняка, подвержены, как выяснилось, влиянию любой магнитной силы, приложенной к ним.

Для научных целей удобно различать постоянную и временную намагниченность, определив постоянную намагниченность, как существующую независимо от магнитной силы, а временную намагниченность, как зависящую от этой силы. Следует заметить, однако, что это различие не основано на знании внутренней природы намагничивающихся веществ — это только выражение гипотезы, введенной ради выполнения расчетов, относящихся к данному явлению. Мы вернемся к физической теории намагниченности в главе VI.

425. Сейчас мы будем исследовать временную намагниченность в предположении, что намагниченность любой частицы вещества зависит только от магнитной силы, действующей на эту частицу. Эта магнитная сила может быть частично обусловлена внешними причинами, а частично временной намагниченностью соседних частиц.

Про тело, намагниченное посредством действия магнитной силы, говорят, что оно намагничено через индукцию, а про намагниченность такого тела говорят, что она индуцирована намагничивающей силой.

Намагниченность, индуцированная данной намагничивающей силой, в разных веществах различна. Она максимальна в самом чистом и мягком железе, где отношение намагниченности к магнитной силе может достигать значения 32 или даже 45 [1].

Другие вещества, такие, как металлы никель и кобальт, плохо поддаются намагничиванию, и все же под действием достаточно большой магнитной силы все вещества, как это было обнаружено, проявляют признаки полярности.

Когда направление намагниченности совпадает с направлением магнитной силы, как это имеет место в железе, никеле, кобальте и т. д., то такое вещество называется Парамагнитным, Ферромагнитным или просто Магнитным. Когда индуцированная намагниченность направлена противоположно магнитной силе, как это имеет место в висмуте и др., то про такое вещество говорят, что оно является Диамагнитным.

Во всех этих диамагнитных веществах отношение намагниченности к создающей ее магнитной силе чрезвычайно мало: в случае висмута, являющегося наиболее сильным диамагнитным веществом из числа известных, оно равно около 1/400 000.

В кристаллических, напряженных и органических веществах направление намагниченности не всегда совпадает с направлением создающей ее магнитной силы. Связь между составляющими намагниченности вдоль осей, связанных с телом, и составляющими магнитной силы можно выразить системой трех линейных уравнений. Мы покажем, что из девяти коэффициентов, входящих в эти уравнения, только шесть являются независимыми. Явления в телах такого рода фигурируют под названием Магнитокристаллических явлений.

При помещении в поле магнитной силы кристаллы стремятся установиться так, чтобы ось максимальной парамагнитной (или минимальной диамагнитной) индукции была параллельна линиям магнитной силы, см. п. 436.

В мягком железе направление намагниченности совпадает с направлением магнитной силы в точке, и при малых величинах магнитной силы намагниченность примерно пропорциональна ей. Однако с увеличением магнитной силы намагниченность возрастает более медленно и, как следует, по-видимому, из экспериментов, описанных в гл. VI, существует предельное значение намагниченности, которое она не может превысить при любой магнитной силе.

В приводимых далее некоторых элементах теории индуцированного магнетизма мы начнем с предположения о том, что намагниченность пропорциональна магнитной силе и направлена по одной линии с ней.

Определение коэффициента индуцированной намагниченности

426. Пусть $\mathfrak{H}$ — магнитная сила, определенная, как в п. 398, в каждой точке тела, а $\mathfrak{I}$ — намагниченность в этой точке; отношение $\mathfrak{I}$ к $\mathfrak{H}$ называется коэффициентом индуцированной намагниченности.

[1] Thalén, *Nova Acta, Reg. Soc. Sc.*, Upsal, 1863.

Обозначив этот коэффициент через $\varkappa$, запишем основное уравнение индуцированного магнетизма:

$$\mathfrak{I}=\varkappa\mathfrak{H}. \tag{1}$$

Коэффициент $\varkappa$ положителен для железа и парамагнитных веществ и отрицателен для висмута и диамагнитных веществ. В железе он достигает значения 1600, по некоторым сведениям он велик также для никеля и кобальта, но во всех остальных случаях это очень маленькая величина, не превышающая 0,00 001.

Сила $\mathfrak{H}$ возникает частично благодаря действию магнитов, внешних по отношению к телу, намагничиваемому по индукции, а частично благодаря индуцированной намагниченности самого этого тела. И обе эти составляющие удовлетворяют условию существования потенциала.

427. Пусть V является потенциалом, обусловленным внешним относительно тела магнетизмом, а Ω — потенциалом, связанным с индуцированной намагниченностью, тогда если U есть истинный потенциал, обусловленный обеими этими причинами, то

$$U=V+\Omega. \tag{2}$$

Пусть проекции магнитной силы $\mathfrak{H}$ на оси x, y, z равны α, β, γ, а проекции намагниченности $\mathfrak{I}$ — A, B, C, тогда согласно уравнению (1)

$$A=\varkappa\alpha,\quad B=\varkappa\beta,\quad C=\varkappa\gamma. \tag{3}$$

Умножив эти уравнения соответственно на dx, dy, dz и сложив, найдем

$$Adx+Bdy+Cdz=\varkappa\,(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz).$$

Но, поскольку α, β и γ получаются из потенциала U, мы можем записать второй член как $-\varkappa dU$.

Следовательно, если коэффициент $\varkappa$ всюду внутри вещества постоянен, то первый член также должен быть полным дифференциалом некоторой функции x, y и z, которую мы назовем φ, после чего уравнение принимает вид

$$d\varphi=-\varkappa dU, \tag{4}$$

где

$$A=d\varphi/dx,\qquad B=d\varphi/dy,\qquad C=d\varphi/dz. \tag{5}$$

Следовательно, по определению, принятому в п. 412, намагниченность является ламеллярной.

В п. 385 было показано, что объемная плотность свободного магнетизма ρ равна

$$\rho=-\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right),$$

или с учетом уравнений (3)

$$\rho=-\varkappa\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right).$$

Но из п. 77

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=-4\pi\rho.$$

Поэтому $(1+4\pi\varkappa)\rho=0$, откуда следует, что

$$\rho=0. \tag{6}$$

внутри всего вещества, и поэтому намагниченность оказывается и соленоидальной, и ламеллярной, см. п. 407.

Таким образом, свободного магнетизма нет нигде, кроме поверхности, ограничивающей тело. Если обозначить через ν нормаль, проведенную внутрь от поверхности, то магнитная поверхностная плотность будет равна

$$\sigma=-d\varphi/d\nu. \tag{7}$$

Поэтому потенциал Ω в произвольной точке, создаваемый этой намагниченностью, можно найти из поверхностного интеграла

$$\Omega=\iint(\sigma/r)dS. \tag{8}$$

Значения Ω всюду конечны, непрерывны и удовлетворяют уравнению Лапласа в каждой точке внутри и вне поверхности. Если пометить штрихом потенциал Ω вне поверхности и обозначить через ν' нормаль, проведенную наружу, то на поверхности будем иметь

$$\Omega'=\Omega; \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{d\nu}+\frac{d\Omega'}{d\nu'}&=-4\pi\sigma \quad (\text{см. п. } 78б),\\ &=4\pi\frac{d\varphi}{d\nu} \quad (\text{см. } (7)),\\ &=-4\pi\varkappa\frac{dU}{d\nu} \quad (\text{см. } (4)),\\ &=-4\pi\varkappa\left(\frac{dV}{d\nu}+\frac{d\Omega}{d\nu}\right) \quad (\text{см. } (2)).\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем записать второе условие на поверхности:

$$(1+4\pi\varkappa)\frac{d\Omega}{d\nu}+\frac{d\Omega'}{d\nu'}+4\pi\varkappa\frac{dV}{d\nu}=0. \tag{10}$$

Итак, определение магнетизма, индуцированного в однородном изотропном ограниченном поверхностью S теле, находящемся под действием внешних магнитных сил, потенциал которых равен V, может быть сведено к следующей математической задаче.

Мы должны найти две функции Ω и Ω', удовлетворяющие следующим условиям.

Внутри поверхности S функция Ω должна быть конечной, непрерывной и должна удовлетворять уравнению Лапласа.

Вне поверхности S Ω' должна быть конечной и непрерывной, она должна обращаться в нуль при бесконечном удалении от S и удовлетворять уравнению Лапласа.

В каждой точке самой поверхности должно выполняться равенство $\Omega=\Omega'$, а производные от функции Ω, Ω' и V по нормали должны удовлетворять уравнению (10).

Такой подход к формулировке задачи об индуцированном магнетизме принадлежит Пуассону. Величина k, которую он использует в своих трудах, отличается от величины $\varkappa$ — они связаны между собой следующим соотношением:

$$4\pi\varkappa\ (k-1)+3k=0. \tag{11}$$

Коэффициент $\varkappa$, который мы здесь использовали, был введен Ф. Е. Нейманом.

428. Проблему индуцированного магнетизма можно рассматривать и другим способом, введя величину, которую мы, следуя Фарадею, назвали Магнитной Индукцией.

Связь между магнитной индукцией $\mathfrak{B}$, магнитной силой $\mathfrak{H}$ и намагниченностью $\mathfrak{I}$ выражается уравнением

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{I}. \tag{12}$$

Индуцированная намагниченность выражается через магнитную силу следующим уравнением:

$$\mathfrak{I}=\varkappa\mathfrak{H}. \tag{13}$$

Отсюда, исключая $\mathfrak{I}$, находим

$$\mathfrak{B}=(1+4\pi\varkappa)\mathfrak{H}, \tag{14}$$

что и является связью между магнитной индукцией и магнитной силой в веществах, намагниченность которых индуцирована магнитной силой.

В самом общем случае $\varkappa$ может быть функцией не только положения точки в веществе, но и направления вектора $\mathfrak{H}$, однако в случае, который мы сейчас рассматриваем, $\varkappa$ является числом.

Если далее записать

$$\mu=1+4\pi\varkappa, \tag{15}$$

то можно определить μ как отношение магнитной индукции к магнитной силе и называть это отношение магнитной индуктивной способностью вещества, отличая ее, таким образом, от коэффициента индуцированной намагниченности $\varkappa$.

Если обозначить через U полный магнитный потенциал, составленный из потенциала внешних источников V и потенциала Ω, обусловленного индуцированной намагниченностью, то можно выразить составляющие a, b, c магнитной индукции и составляющие α, β, γ магнитной силы следующим образом:

$$\begin{aligned} a&=\mu\alpha=-\mu\frac{dU}{dx}, \\ b&=\mu\beta=-\mu\frac{dU}{dy}, \\ c&=\mu\gamma=-\mu\frac{dU}{dz}. \end{aligned} \tag{16}$$

Составляющие a, b, c удовлетворяют условию соленоидальности:

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0. \tag{17}$$

Следовательно, потенциал U должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=0 \tag{18}$$

в любой точке, где величина μ постоянна, т. е. в каждой точке внутри однородного вещества или в пустом пространстве.

Если обозначить через ν нормаль, проведенную внутрь вещества магнита, а через ν' — нормаль, проведенную наружу, и вообще все величины вне вещества отмечать штрихами, то условие непрерывности магнитной индукции на самой поверхности будет таким:

$$a\frac{dx}{d\nu}+b\frac{dy}{d\nu}+c\frac{dz}{d\nu}+a'\frac{dx}{d\nu'}+b'\frac{dy}{d\nu'}+c'\frac{dz}{d\nu'}=0, \tag{19}$$

или с учетом уравнений (16)

$$\mu\frac{dU}{d\nu}+\mu'\frac{dU}{d\nu'}=0, \tag{20}$$

где μ' — коэффициент индукции вне магнита, равный единице, если окружающая среда не является магнитной или диамагнитной.

Выражая U через V и Ω и μ через $\varkappa$, получим то же самое уравнение (10), к которому мы пришли методом Пуассона.

Задача об индуцированном магнетизме, рассматриваемая с точки зрения связи между магнитной индукцией и магнитной силой, в точности соответствует задаче о протекании электрических токов в разнородной среде, рассмотренной в п. 310.

Магнитная сила выражается через магнитный потенциал точно так же, как электрическая сила выражается через электрический потенциал.

Магнитная индукция является величиной, имеющей природу потока, и она удовлетворяет тем же условиям непрерывности, что и электрический ток.

В изотропных средах зависимость магнитной индукции от магнитной силы точно соответствует зависимости электрического тока от электродвижущей силы.

Удельная магнитная индуктивная способность в первой задаче соответствует удельной проводимости во второй. Поэтому Томсон в своей «Теории индуцированного магнетизма» (*Reprint*, 1872, p. 484) назвал эту величину *проницаемостью* среды.

Теперь мы уже готовы к рассмотрению теории индуцированного магнетизма с той точки зрения, которой, как я полагаю, придерживался Фарадей.

Когда магнитная сила действует на произвольную среду, магнитную, диамагнитную или нейтральную, внутри нее возникает явление, называемое *Магнитной Индукцией*.

Магнитная индукция — это направленная величина, имеющая природу потока; она удовлетворяет тем же условиям непрерывности, что и электрический ток и другие потоки.

В изотропных средах магнитная сила и магнитная индукция одинаково направлены, причем магнитная индукция равна произведению магнитной силы на величину, называемую коэффициентом индукции, которую мы обозначили через μ.

В пустом пространстве коэффициент индукции равен единице. В телах, способных к индуцированному намагничиванию, коэффициент индукции равен $\mu=1+4\pi\varkappa$, где $\varkappa$ — величина, уже определенная как коэффициент индуцированной намагниченности.

429. Пусть μ и μ' — значения μ по разные стороны от поверхности, разделяющей две среды, а V и V' — потенциалы в этих двух средах, тогда проекции магнитной силы на нормаль к поверхности в этих средах равны $dV/d\nu$ и $dV'/d\nu'$.

Величины потоков магнитной индукции через элемент поверхности dS в направлении этого элемента dS равны соответственно в двух средах $\mu\ (dV/d\nu)dS$ и $\mu'\ (dV'/d\nu')dS$.

Поскольку общий поток, направленный к dS, равен нулю, то

$$\mu\frac{dV}{d\nu}+\mu'\frac{dV'}{d\nu'}=0.$$

Но из теории потенциала следует, что вблизи поверхности с плотностью σ

$$\frac{dV}{d\nu}+\frac{dV'}{d\nu'}+4\pi\sigma=0.$$

Поэтому

$$\frac{dV}{d\nu}\left(1-\frac{\mu}{\mu'}\right)+4\pi\sigma=0.$$

Если $\varkappa_1$ есть отношение поверхностной намагниченности к силе, действующей по нормали в первой среде, коэффициент индукции которой равен μ, то мы имеем

$$4\pi\varkappa_1=\frac{\mu-\mu'}{\mu'}.$$

Отсюда следует, что $\varkappa_1$ будет положительным или отрицательным в зависимости от того, превышает или не превышает величина μ величину μ'. Если подставить $\mu=4\pi\varkappa+1$ и $\mu'=4\pi\varkappa'+1$, то

$$\varkappa_1=\frac{\varkappa-\varkappa'}{4\pi\varkappa'+1}.$$

В этом выражении $\varkappa$ и $\varkappa'$ — коэффициенты индуцированной намагниченности первой и второй сред, подсчитанные на основании экспериментов, проделанных в воздухе, а $\varkappa_1$ — коэффициент индуцированной намагниченности первой среды, окруженной второй средой.

Если коэффициент $\varkappa'$ больше, чем $\varkappa$, то $\varkappa_1$ отрицателен, т. е. кажущаяся намагниченность первой среды противоположна по направлению намагничивающей силе.

Поэтому, если взять сосуд, содержащий слабый водный раствор парамагнитной соли железа, и, погрузив его в более сильный раствор той же соли, подействовать магнитом, то этот сосуд будет двигаться как намагниченный в направле нии, противоположном тому, в котором установился бы помещенный в это место какой-либо магнит.

Это может быть объяснено, если выдвинуть гипотезу, что раствор в сосуде на самом деле намагничен вдоль направления магнитной силы, но окружающий его раствор намагничен в том же направлении еще сильнее. Сосуд поэтому подобен слабому магниту, помещенному между двумя сильными магнитами при условии, что все они намагничены в одном и том же направлении, а их противоположные полюса находятся в контакте друг с другом. Северный полюс слабого магнита указывает в том же направлении, что и северные полюсы сильных магнитов, но при наличии контакта с южным полюсом одного из сильных магнитов около него образуется избыток южного магнетизма, который и является причиной того, что слабый магнит кажется намагниченным в противоположном направлении.

У некоторых веществ, однако, кажущаяся намагниченность отрицательна даже при погружении их в так называемый вакуум.

Если мы положим для вакуума $\varkappa=0$, то для этих веществ коэффициент $\varkappa$ будет отрицателен. Однако веществ, для которых отрицательное значение $\varkappa$ численно превышает $1/4\pi$, не обнаружено; поэтому для всех известных веществ величина μ положительна.

Вещества, для которых $\varkappa$ отрицательно и, следовательно, меньше единицы, называются Диамагнитными. Вещества, для которых величина $\varkappa$ положительна и μ больше единицы, называются Парамагнитными, Ферромагнитными или просто магнитными.

Мы рассмотрим физическую теорию диамагнитных и парамагнитных свойств, когда перейдем к электромагнетизму (п. 832—845).

430. Математическая теория магнитной индукции впервые была дана Пуассоном [2]. Физической гипотезой, на которой он основал свою теорию, служило допущение о наличии двух магнитных жидкостей; эта гипотеза обладала теми же математическими преимуществами и сталкивалась с теми же физическими трудностями, что и теория двух электрических жидкостей. Однако для объяснения того факта, что кусок мягкого железа хотя и может быть намагничен по индукции, но не может быть заряженным неравными количествами одного из двух видов магнетизма, Пуассон предположил, что, вообще говоря, вещество является непроводящим для обеих жидкостей и только в некоторых малых его объемах жидкости пребывают в условиях свободного подчинения действующим на них силам. Причем каждый из этих маленьких магнитных элементов веществ содержит точно равные количества обеих жидкостей, и, свободно перемещаясь внутри каждого элемента, эти жидкости никогда не могут переходить от одного элемента к другому. Поэтому задача оказывается однотипной с задачей о большом числе маленьких проводников электричества, распределенных в диэлектрической изолирующей среде. Проводники могут иметь любую форму при условии, что они малы и не касаются друг друга.

Если они являются вытянутыми телами, повернутыми в одном общем для них направлении, или если в одном из направлений они уплотнены сильнее, чем в другом, то среда, как показал сам Пуассон, не будет изотропной. Поэтому, чтобы избежать бесполезной запутанности, Пуассон рассматривает случай, когда все

---

[2] *Mémoires de l'Institut*, 1824, p. 247.

элементы являются сферическими и равномерно распределенными по всем направлениям. Он предполагает, что полный объем всех магнитных элементов в единице объема вещества равен k.

В п. 314 мы уже рассмотрели электрическую проводимость среды, внутри которой распределены маленькие сферы другой среды.

Для случая, когда проводимость среды равна μ_1, а проводимость сфер μ_2, мы получили, что проводимость составной среды равна

$$\mu=\mu_1\frac{2\mu_1+\mu_2+2k(\mu_2-\mu_1)}{2\mu_1+\mu_2-k(\mu_2-\mu_1)}.$$

При $\mu_1=1$ и $\mu_2=\infty$ это дает $\mu=\frac{1+2k}{1-k}$.

Эта величина μ определяет электрическую проводимость среды, состоящей из идеально проводящих сфер, распределенных в среде с единичной проводимостью, причем суммарный — агрегатный — объем всех сфер в единице объема равен k.

Величина μ также представляет собой коэффициент магнитной индукции среды, состоящей из сфер с бесконечной проницаемостью, рассеянных в среде с проницаемостью, равной единице.

Величина k, которую мы будем называть Магнитным Коэффициентом Пуассона, представляет собой отношение объема магнитных элементов к полному объему вещества.

Величина $\varkappa$ известна как Коэффициент Индуцированной Намагниченности Неймана. Она более удобна, чем коэффициент Пуассона.

Величину μ мы будем называть Коэффициентом Магнитной Индукции. Ее преимущество состоит в том, что она облегчает преобразование магнитных задач в соответствующие электрические и тепловые.

Соотношения между этими величинами таковы:

$$k=\frac{4\pi\varkappa}{4\pi\varkappa+3},\qquad k=\frac{\mu-1}{\mu+2},\qquad \varkappa=\frac{\mu-1}{4\pi},$$
$$\varkappa=\frac{3k}{4\pi(1-k)},\qquad \mu=\frac{1+2k}{1-k},\qquad \mu=4\pi\varkappa+1.$$

Если положить $\varkappa=32$ (именно такое значение дают эксперименты Талена[3] с мягким железом), то получим $k=134/135$. Но по теории Пуассона эта величина должна быть равна отношению объема, занимаемого магнитными молекулами, к полному объему железа. Однако ведь невозможно заполнить какое-либо пространство одинаковыми сферами так плотно, чтобы отношение их объема к объему этого пространства было бы столь близко к единице. И совершенно невероятно, чтобы такая большая доля объема железа была занята твердыми молекулами, какую бы форму они ни имели. В этом состоит одна из причин, по которой мы должны отказаться от гипотезы Пуассона. Другие будут приведены в главе VI. Но, конечно, при этом полностью сохраняется значение математических исследований Пуассона, ибо они основаны не на его гипотезе, а на экспериментальном факте наличия индуцированной намагниченности.

---

[3] *Recherches sur les propriétés magnétiques du fer, Nova Acta*, Upsal, 1863.