

нию, определяющему процесс прохождения тока, величина тока через диск на единицу площади записывается в виде $-(1/\rho')(dV/dv)$ или $(2\pi/\rho')\sigma$.

Если V — потенциал на диске, а ds — элемент его поверхности, то скорость совершения работы равна $[C/(\pi a^2)] \int V ds$,

$$\begin{aligned} &= \frac{2C}{\pi a^2} \frac{P}{\sigma}, \text{ поскольку } P = \frac{1}{2} \int V \sigma ds, \\ &= \frac{4\pi}{\rho'} P \quad (\text{по формуле (20)}). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$C^2 R' = (4\pi/\rho') P, \quad (22)$$

откуда с учетом (20) и (21)

$$R' = 8\rho'/(3\pi^2 a),$$

и поправка, которую нужно добавить к длине цилиндра, равна

$$(\rho'/\rho)(8/3\pi)a,$$

причем это значение поправки превышает истинное значение. Таким образом, истинная поправка, которую нужно добавить к длине, равна $(\rho'/\rho)an$, где n — число, лежащее между $\pi/4$ и $8/3\pi$, или между 0,785 и 0,849.

Лорд Рэлей⁶ во втором приближении уменьшил верхний предел для n до 0,8282.

ГЛАВА IX

ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

*Об условиях, которые должны выполняться
на поверхности раздела между двумя проводящими средами*

310. Имеются два условия, которым всегда должно удовлетворять распределение токов: условие, что потенциал должен быть непрерывен, и условие «непрерывности» электрических токов.

На поверхности раздела между двумя средами первое из этих условий требует, чтобы потенциалы в двух точках, расположенных по разные стороны поверхности, но бесконечно близко друг от друга, были равны. Подразумевается, что потенциалы должны измеряться электрометром, приведенным в соединение с данной точкой посредством электрода, который изготовлен из данного металла. Если

⁶ *Phil. Mag., Nov., 1872, p. 344.* В дальнейшем лорд Рэлей получил для верхнего предела значение 0,8242. См. *London Math. Soc. Proc., VII, p. 74;* также *Theory of Sound, vol. II, Appendix A, p. 291* (имеется перевод на русский язык: Рэлей «Теория звука». М.: ГИТТЛ, 1955. Т. II. С. 468.— *Примеч. пер.*).

потенциалы измеряются по методу, описанному в п. 222, 246, в котором конец электрода помещается внутри заполненной воздухом полости в проводнике, то измеренные таким путем потенциалы в прилегающих точках различных металлов будут отличаться на величину, зависящую от температуры и от природы этих двух металлов.

Другое условие на поверхности состоит в том, что ток через любой элемент поверхности имеет одно и то же значение при измерении в любой из сред.

Таким образом, если V_1 и V_2 обозначают потенциалы в двух средах, то в любой точке поверхности раздела

$$V_1 = V_2, \quad (1)$$

и если u_1, v_1, ω_1 и u_2, v_2, ω_2 — составляющие токов в этих двух средах, а l, m, n — направляющие косинусы нормали к поверхности раздела, то

$$u_1 l + v_1 m + \omega_1 n = u_2 l + v_2 m + \omega_2 n. \quad (2)$$

В самом общем случае составляющие u, v, ω являются линейными функциями производных потенциала V ; вид этих линейных функций определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} u &= r_1 X + p_3 Y + q_2 Z, \\ v &= q_3 X + r_2 Y + p_1 Z, \\ \omega &= p_2 X + q_1 Y + r_3 Z, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где X, Y, Z — производные функции V соответственно по x, y, z .

Возьмем случай поверхности, которая отделяет среду с такими коэффициентами проводимости от изотропной среды, имеющей коэффициент проводимости, равный r .

Обозначим значения X, Y, Z в изотропной среде через X', Y', Z' , тогда на поверхности имеем

$$V = V', \quad (4)$$

или

$$X dx + Y dy + Z dz = X' dx + Y' dy + Z' dz, \quad (5)$$

если

$$l dx + m dy + n dz = 0. \quad (6)$$

Это условие приводит к

$$X' = X + 4\pi\sigma l, \quad Y' = Y + 4\pi\sigma m, \quad Z' = Z + 4\pi\sigma n, \quad (7)$$

где σ — поверхностная плотность.

В изотропной среде имеем также

$$u' = rX', \quad v' = rY', \quad \omega' = rZ', \quad (8)$$

и условие на границе для тока таково:

$$u' l + v' m + \omega' n = u l + v m + \omega n, \quad (9)$$

или

$$r(lX + mY + nZ + 4\pi\sigma) = l(r_1 X + p_3 Y + q_2 Z) + m(q_3 X + r_2 Y + p_1 Z) + n(p_2 X + q_1 Y + r_3 Z), \quad (10)$$

откуда

$$4\pi\sigma r = \{l(r_1 - r) + mq_3 + np_2\}X + \{lp_3 + m(r_2 - r) + nq_1\}Y + \{lq_2 + mp_1 + n(r_3 - r)\}Z. \quad (11)$$

Величина σ представляет собой поверхностную плотность заряда на поверхности раздела. В кристаллизованных и упорядоченных веществах эта величина зависит от направления поверхности, а также и от перпендикулярной к ней силы. В изотропных веществах коэффициенты p и q равны нулю, а все коэффициенты r равны между собой, и, таким образом,

$$4\pi\sigma = \left(\frac{r_1}{r} - 1\right)(lX + mY + nZ), \quad (12)$$

где r_1 — проводимость рассматриваемого вещества, r — проводимость внешней среды, а l , m , n — направляющие косинусы нормали, проведенной в ту среду, проводимость которой равна r .

В случае, когда обе среды изотропны, эти условия можно значительно упростить, ибо если k есть удельное сопротивление единицы объема, то

$$u = -\frac{1}{k} \frac{dV}{dx}, \quad v = -\frac{1}{k} \frac{dV}{dy}, \quad w = -\frac{1}{k} \frac{dV}{dz}, \quad (13)$$

и если ν есть нормаль, проведенная из первой среды во вторую в любой точке поверхности раздела, то условие непрерывности есть

$$\frac{1}{k_1} \frac{dV_1}{d\nu} = \frac{1}{k_2} \frac{dV_2}{d\nu}. \quad (14)$$

Если углы, которые линии тока в первой и во второй средах составляют с нормалью к поверхности раздела, равны соответственно θ_1 и θ_2 , то касательные к этим линиям тока лежат по обе стороны от границы раздела в одной плоскости с нормалью и

$$k_1 \operatorname{tg} \theta_1 = k_2 \operatorname{tg} \theta_2 \quad (15)$$

Это соотношение можно назвать законом преломления линий тока.

311. В качестве примера условий, которые должны быть выполнены, когда электричество пересекает границу раздела двух сред, рассмотрим сферическую поверхность радиуса a , при этом внутри сферы удельное сопротивление равно k_1 , а снаружи k_2 .

Разложим потенциал как внутри, так и вне поверхности по пространственным гармоникам и пусть слагаемые, которые зависят от поверхностной гармоники S_i , равны

$$V_1 = (A_1 r^l + B_1 r^{-(l+1)}) S_i, \quad (1)$$

$$V_2 = (A_2 r^l + B_2 r^{-(l+1)}) S_i \quad (2)$$

соответственно внутри и вне сферы.

На поверхности раздела, где $r = a$, мы должны иметь

$$V_1 = V_2 \text{ и } \frac{1}{k_1} \frac{dV_1}{dr} = \frac{1}{k_2} \frac{dV_2}{dr}. \quad (3)$$

Из этих условий мы получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} (A_1 - A_2) a^{2i+1} + B_1 - B_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{k_1} A_1 - \frac{1}{k_2} A_2 \right) i a^{2i+1} - \left(\frac{1}{k_1} B_1 - \frac{1}{k_2} B_2 \right) (i+1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эти уравнения, если мы знаем две из четырех величин A_1, A_2, B_1, B_2 , достаточны для определения двух других величин.

Предположим, что A_1 и B_1 известны, тогда для A_2 и B_2 мы получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{\{k_1(i+1) + k_2 i\} A_1 + (k_1 - k_2)(i+1) B_1 a^{-(2i+1)}}{k_1(2i+1)}, \\ B_2 &= \frac{(k_1 - k_2) i A_1 a^{2i+1} + \{k_1 i + k_2(i+1)\} B_1}{k_1(2i+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Таким путем мы можем найти условия, которым должен удовлетворять каждый член разложения потенциала по гармоникам для случая любого числа слоев, ограниченных concentрическими сферическими поверхностями.

312. Пусть радиус первой сферической поверхности равен a_1 , и пусть имеется вторая сферическая поверхность большего радиуса a_2 , вне которой удельное сопротивление равно k_3 . Если внутри этих сфер отсутствуют источники или стоки электричества, потенциал V не принимает бесконечных значений, и мы имеем $B_1 = 0$.

Тогда для A_3 и B_3 , коэффициентов во внешней среде, мы находим

$$\left. \begin{aligned} A_3 k_1 k_2 (2i+1)^2 &= \left[\{k_1(i+1) + k_2 i\} \{k_2(i+1) + k_3 i\} + \right. \\ &\quad \left. + i(i+1)(k_1 - k_2)(k_3 - k_3) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{2i+1} \right] A_1, \\ B_3 k_1 k_2 (2i+1)^2 &= [i(k_2 - k_3) \{k_1(i+1) + k_2 i\} a_2^{2i+1} + \\ &\quad + i(k_1 - k_2) \{k_2 i + k_3(i+1)\} a_1^{2i+1}] A_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Значение потенциала во внешней среде частично зависит от внешних источников электричества, которые производят токи независимо от наличия сферы с неоднородным заполнением, а частично от возмущения, вызванного введением неоднородной сферы.

Первая часть должна зависеть от пространственных гармоник только положительных степеней, потому что она не может принимать бесконечных значений внутри сферы. Вторая часть должна зависеть от гармоник отрицательных степеней, потому что она должна исчезать на бесконечном расстоянии от центра сферы.

Таким образом, потенциал, вызванный внешними электродвижущими силами, должен разлагаться в ряд по пространственным гармоникам положительной степени. Пусть A_3 — коэффициент одной из этих гармоник, имеющей вид $A_3 S_i r^i$. Тогда с помощью соотношения (6) мы можем найти соответствующий коэффициент A_1 для внутренней сферы и отсюда вывести A_2, B_2 и B_3 . При этом B_3 представляет влияние на потенциал во внешней среде, вызванное введением неоднородной сферы.

Предположим теперь, что $k_3 = k_1$, т. е. рассмотрим случай полой оболочки, для которой $k = k_2$, разделяющей внутреннюю и внешнюю части среды, для которой $k = k_1$.

Если мы положим

$$C = [(2i + 1)^2 k_1 k_2 + i(i + 1)(k_2 - k_1)^2 (1 - (a_1/a_2)^{2i+1})]^{-1},$$

то

$$\begin{aligned} A_1 &= k_1 k_2 (2i + 1)^2 C A_3, \\ A_2 &= k_2 (2i + 1) (k_1 (i + 1) + k_2 i) C A_3, \\ B_2 &= k_2 i (2i + 1) (k_1 - k_2) a_1^{2i+1} C A_3, \\ B_3 &= i (k_2 - k_1) (k_1 (i + 1) + k_2 i) (a_2^{2i+1} - a_1^{2i+1}) C A_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Разность между невозмущенным коэффициентом A_3 и его значением A_1 в полости внутри сферической оболочки равна

$$A_3 - A_1 = (k_2 - k_1)^2 i (i + 1) (1 - (a_1/a_2)^{2i+1}) C A_3. \quad (8)$$

Поскольку эта величина всегда имеет тот же самый знак, что и A_3 , каковы бы ни были значения k_1 и k_2 , отсюда следует, что независимо от того, лучше или хуже остальной среды проводит сферическая оболочка, электрическое действие в пространстве, окруженном оболочкой, оказывается меньше, чем оно было бы без нее. Если оболочка оказывается лучшим проводником, чем остальная среда, она стремится выровнять потенциал вокруг внутренней сферы. Если она является худшим проводником, она вообще препятствует электрическим токам достичь внутренней сферы.

Случай сплошной сферы может быть получен из рассмотренного выше, если положить $a_1 = 0$, или же этот случай может быть рассмотрен независимо.

313. Наиболее важным членом в разложении по гармоникам является член с $i = 1$, для которого

$$\begin{aligned} C &= [9k_1 k_2 + 2(k_1 - k_2)^2 (1 - (a_1/a_2)^3)]^{-1}, \\ A_1 &= 9k_1 k_2 C A_3, \quad A_2 = 3k_2 (2k_1 + k_2) C A_3, \\ B_2 &= 3k_2 (k_1 - k_2) a_1^3 C A_3, \quad B_3 = (k_1 - k_2) (2k_1 + k_2) (a_2^3 - a_1^3) C A_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Случай сплошной сферы с сопротивлением k_2 может быть получен отсюда, если положить $a_1 = 0$. Мы тогда получаем

$$A_2 = \frac{3k_2}{k_1 + 2k_2} A_3, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + 2k_1} a_2^3 A_3. \quad (10)$$

С помощью общих формул легко показать, что коэффициент B_3 в случае полой сферы, имеющей ядро с сопротивлением k_1 и окруженной оболочкой с сопротивлением k_2 , записывается точно так же, как и в случае однородной сплошной сферы с радиусом внешней поверхности и с сопротивлением K , где

$$K = \frac{(2k_1 + k_2) a_2^3 + (k_1 - k_2) a_1^3}{(2k_1 + k_2) a_2^3 - 2(k_1 - k_2) a_1^3} k_2. \quad (11)$$

314. Если имеется n сфер радиуса a_1 и сопротивления k_1 , помещенные в среду, сопротивление которой равно k_2 , на таких расстояниях друг от друга, что вызы-

ваемое каждой из сфер возмущение протекающего тока можно рассматривать независимо, если все эти сферы заключены внутри сферы радиуса a_2 , потенциал на больших расстояниях r от центра этой сферы будет иметь вид

$$V = \left(Ar + nB \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (12)$$

где значение B равно

$$B = \frac{k_1 - k_2}{2k_1 + k_2} a_1^3 A. \quad (13)$$

Отношение объема n малых сфер к объему содержащей их большой сферы равно

$$p = (na_1^3)/a_2^3. \quad (14)$$

Поэтому значение потенциала на большом расстоянии от сферы может быть записано в виде

$$V = A \left(r + pa_2^3 \frac{k_1 - k_2}{2k_1 + k_2} \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (15)$$

Если бы вся сфера радиуса a_2 была сделана из вещества с удельным сопротивлением K , мы бы имели

$$V = A \left\{ r + a_2^3 \frac{K - k_2}{2K + k_2} \frac{1}{r^2} \right\} \cos \theta. \quad (16)$$

Одно выражение эквивалентно другому, если

$$K = \frac{2k_1 + k_2 + p(k_1 - k_2)}{2k_1 + k_2 - p(k_1 - k_2)} k_2. \quad (17)$$

Это, таким образом, и есть удельное сопротивление составной среды, образованной из вещества с удельным сопротивлением k_2 , в которое вкраплены малые сферы с удельным сопротивлением k_1 , причем отношение суммарного объема всех малых сфер ко всему объему равно p . Для того чтобы действие этих сфер не вызывало явлений, зависящих от их взаимодействия, их радиусы должны быть малы в сравнении с расстояниями между ними, и поэтому величина p должна быть малой дробью.

Этот результат может быть получен и другими способами, но тот, который приведен здесь, содержит только повторение результата, уже полученного для случая одной сферы.

Если расстояние между сферами не велико по сравнению с их радиусами, и если величина $(k_1 - k_2)/(2k_1 + k_2)$ существенна, то в этот результат войдут другие члены, которые мы сейчас не будем рассматривать. Эти члены приводят к тому, что при определенных системах расположения сфер сопротивление составной среды оказывается различным в различных направлениях.

Приложение принципа изображений

315. Возьмем в качестве примера случай двух сред, разделенных плоской поверхностью, и предположим, что в первой среде на расстоянии a от этой плоской поверхности расположен источник электричества S , причем количество электричества, вытекающее из источника за единицу времени, равно S .

Если бы первая среда была бесконечно протяженной, ток в любой точке P был бы направлен по SP , а потенциал в P равнялся бы E/r_1 , где $E=(Sk_1)/4\pi$, а $r_1=SP$.

В настоящем случае условия могут быть удовлетворены, если взять во второй среде точку I , изображение источника S , такую, что отрезок IS перпендикулярен плоскости раздела и точка пересечения с границей делит отрезок пополам. Пусть расстояние любой точки от I равно r_2 , тогда на поверхности раздела

$$r_1 = r_2, \quad (1)$$

$$\frac{dr_1}{dv} = -\frac{dr_2}{dv}. \quad (2)$$

Пусть потенциал V_1 в любой точке первой среды будет определяться количеством электричества E , помещенным в S , и воображаемым количеством E_2 в точке I , и пусть потенциал V_2 в любой точке второй среды будет равен потенциалу воображаемого количества E_1 , помещенного в точке S . Тогда, если

$$V_1 = \frac{E}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{E_1}{r_1}, \quad (3)$$

условие на поверхности $V_1 = V_2$ дает

$$E + E_2 = E_1, \quad (4)$$

а условие

$$\frac{1}{k_1} \frac{dV_1}{dv} = \frac{1}{k_2} \frac{dV_2}{dv} \quad (5)$$

дает

$$\frac{1}{k_1} (E - E_2) = \frac{1}{k_2} E_1, \quad (6)$$

откуда

$$E_1 = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} E, \quad E_2 = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} E. \quad (7)$$

Таким образом, потенциал в первой среде оказывается таким же, какой был бы создан в воздухе, согласно электростатической теории, зарядом E , помещенным в S , и зарядом E_2 , помещенным в I , а потенциал во второй среде совпадает с тем, который был бы создан в воздухе зарядом E_1 , помещенным в точке S .

Ток в любой точке первой среды оказывается таким, как если бы он был вызван источником S и источником $(k_2 - k_1)S/(k_2 + k_1)$, расположенным в I , если бы первая среда была бесконечной, а ток в любой точке второй среды оказывается таким же, как если бы он был вызван источником $2k_2S/(k_1 + k_2)$, расположенным в S , если бы вторая среда была бесконечной.

Таким образом, в случае двух сред, разделенных плоской границей, мы имеем полную теорию электрических изображений. Какова бы ни была природа электродвижущих сил в первой среде, потенциал, создаваемый ими в первой среде, может быть определен сочетанием их прямого действия с действием их изображения.

Если мы предположим, что вторая среда является идеальным проводником, то $k_2 = 0$, и изображение, расположенное в точке I , равно по величине и противоположно по знаку источнику в S . Это есть случай электрических изображений, аналогичный теории Томсона в электростатике.

Если мы предположим, что вторая среда является совершенным изолятором, то $k_2 = \infty$, и изображение в точке I равно источнику в S и имеет тот же знак. То же самое имеет место и в гидрокинетике, когда жидкость ограничена жесткой плоской поверхностью.

316. Метод инверсии, который столь полезен в электростатике, когда предполагается, что граничная поверхность является поверхностью идеального проводника, неприменим к более общему случаю поверхности, разделяющей два проводника с различным электрическим сопротивлением. Однако метод инверсии применим в случае двух измерений, так же как и более общий метод преобразования для случая двух измерений, изложенный в п. 190¹.

*Прохождение электричества через пластину,
разделяющую две среды*

317. Рассмотрим теперь влияние пластины толщиной AB из среды с сопротивлением k_2 , разделяющей две среды с сопротивлениями k_1 и k_3 , на изменение потенциала источника S , расположенного в первой среде.

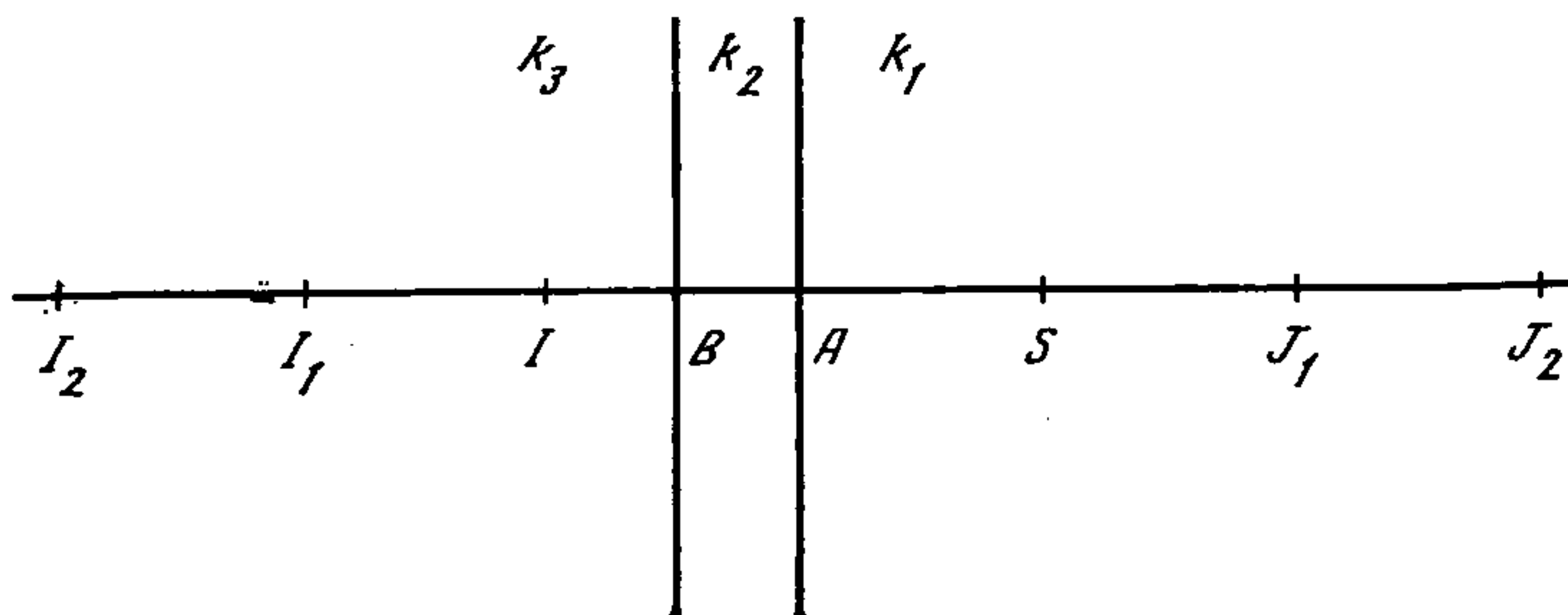


Рис. 24

Потенциал в этом случае будет равен потенциалу системы зарядов, расположенных в воздухе в определенных точках на прямой линии, перпендикулярной к пластине и проходящей через S .

Положим

$$AI = SA, \quad BI_1 = SB, \quad AJ_1 = I_1A, \quad BI_2 = J_1B, \quad AJ_2 = I_2A \text{ и т. д.},$$

тогда мы имеем два ряда точек, находящихся на расстоянии друг от друга, равных удвоенной толщине пластины [рис. 24].

318. Потенциал в первой среде в любой точке P равен

$$\frac{E}{PS} + \frac{I}{PI} + \frac{I_1}{PI_1} + \frac{I_2}{PI_2} + \text{и т. д.} \quad (8)$$

Потенциал в точке P' во второй среде равен

$$\frac{E'}{P'S} + \frac{I'}{P'I} + \frac{I'_1}{P'I_1} + \frac{I'_2}{P'I_2} + \text{и т. д.} + \frac{J'_1}{P'J_1} + \frac{J'_2}{P'J_2} + \text{и т. д.} \quad (9)$$

¹ См. Kirchhoff, Pogg. Ann., LXIV, 497 и LXVII, 344; Quincke, Pogg., XCVII, 382; Smith, Proc. R. S. Edin., 1869—70, p. 79.

и потенциал в точке P'' в третьей среде равен

$$\frac{E''}{P''S} + \frac{J_1}{P''J_1} + \frac{J_2}{P''J_2} + \text{и т. д.}, \quad (10)$$

где I, I' и т. д.— воображаемые заряды, расположенные в точках I и т. д., а штрих означает, что потенциал следует брать внутри пластины.

Тогда, согласно п. 315, из условий на поверхности, проходящей через A , мы имеем

$$I = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} E, \quad E' = \frac{2k_2}{k_1 + k_2}. \quad (11)$$

Для поверхности, проходящей через B , находим

$$I'_1 = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2} E', \quad E'' = \frac{2k_3}{k_2 + k_3} E'. \quad (12)$$

Подобным же образом снова для поверхности, проходящей через A ,

$$J'_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} I'_1, \quad I_1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} I'_1, \quad (13)$$

и для поверхности, проходящей через B ,

$$I'_2 = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2} J'_1, \quad J_1 = \frac{2k_3}{k_3 + k_2} J'_1. \quad (14)$$

Если мы обозначим

$$\rho = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \text{ и } \rho' = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2},$$

то найдем для потенциала в первой среде

$$V = \frac{E}{PS} - \rho \frac{E}{PJ} + (1 - \rho^2) \rho' \frac{E}{PJ_1} + \rho' (1 - \rho^2) \rho \rho' \frac{E}{PJ_2} + \text{и т. д.} + \\ + \rho' (1 - \rho^2) (\rho \rho')^{n-1} \frac{E}{PJ_n} + \dots \quad (15)$$

Для потенциала в третьей среде мы найдем

$$V = (1 + \rho') (1 - \rho) E \left\{ \frac{1}{PS} + \frac{\rho \rho'}{PJ_1} + \text{и т. д.} + \frac{(\rho \rho')^n}{PJ_n} + \dots \right\}. \quad (16)$$

Если первая среда такая же, как третья, то $k_1 = k_3$, $\rho = \rho'$, и потенциал по другую сторону пластины будет равен

$$V = (1 - \rho^2) E \left\{ \frac{1}{PS} + \frac{\rho^2}{PJ_1} + \text{и т. д.} + \frac{\rho^{2n}}{PJ_n} + \dots \right\}. \quad (17)$$

Если пластина является намного более хорошим проводником, чем остальная среда, величина ρ очень близка к 1. Если среда является почти идеальным изолятором, величина ρ очень близка к -1 , а если проводимость пластины мало отличается от проводимости среды, ρ есть малая величина, положительная или отрицательная.

Эта задача была впервые поставлена Грином в его работе «Теория магнитной индукции» (*Essay*, p. 65). Его результат, однако, верен только в случае, когда ве-

личина ρ почти равна единице ². Величина g , которую использует Грин, связана с ρ уравнениями

$$g = \frac{2\rho}{3-\rho} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + 2k_2}, \quad \rho = \frac{3g}{2+g} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.$$

Если мы положим $\rho = 2\pi k / (1 + 2\pi k)$, то получим решение задачи о магнитной индукции, наведенной магнитным полюсом в бесконечной пластине с коэффициентом намагничения k .

О слоистых проводниках

319. Пусть проводник составлен из чередующихся слоев с толщинами c и c' из двух веществ с различными коэффициентами проводимости. Требуется определить коэффициенты сопротивления и проводимости у составного проводника.

Будем считать, что плоскости слоев нормальны к оси z . Будем помечать штрихом каждую величину, относящуюся к слою второго вещества, а величины, относящиеся к составному проводнику, будем помечать чертой сверху, например, \bar{X} . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{X} &= X = X', & (c + c')\bar{u} &= cu + c'u', \\ \bar{Y} &= Y = Y', & (c + c')\bar{v} &= cv + c'v', \\ (c + c')\bar{Z} &= cZ + c'Z', & \bar{w} &= w = w'. \end{aligned}$$

Сначала мы должны определить u, u', v, v', Z и Z' через \bar{X}, \bar{Y} и w из уравнений сопротивления, п. 297, или уравнений проводимости, п. 298. Если мы обозначим через D детерминант, составленный из коэффициентов сопротивления, мы найдем

$$\begin{aligned} ur_3 D &= R_2 \bar{X} - Q_3 \bar{Y} + \bar{w} q_2 D, \\ ur_3 D &= R_1 \bar{Y} - P_3 \bar{X} + \bar{w} p_1 D, \quad Zr_3 = -p_2 \bar{X} - q_1 \bar{Y} + \bar{w}. \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения для штрихованных величин дают значения u', v' и Z' . Выразив \bar{u}, \bar{v} и \bar{w} через \bar{X}, \bar{Y} и \bar{Z} , мы можем написать уравнения проводимости для слоистого проводника. Полагая $h = (c/r_3)$ и $h' = (c'/r_3)$, мы найдем

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{hp_1 + h'p'_1}{h + h'}, & \bar{q}_1 &= \frac{hq_1 + h'q'_1}{h + h'}, \\ \bar{p}_2 &= \frac{hp_2 + h'p'_2}{h + h'}, & \bar{q}_2 &= \frac{hq_2 + h'q'_2}{h + h'}, \\ \bar{p}_3 &= \frac{cp_3 + c'p'_3}{c + c'} - \frac{hh'(q_1 - q'_1)(q_2 - q'_2)}{(h + h')(c + c')}, \\ \bar{q}_3 &= \frac{cq_3 + c'q'_3}{c + c'} - \frac{hh'(p_1 - p'_1)(p_2 - p'_2)}{(h + h')(c + c')}, \\ \bar{r}_1 &= \frac{cr_1 + c'r'_1}{c + c'} - \frac{hh'(p_2 - p'_2)(q_2 - q'_2)}{(h + h')(c + c')}, \\ \bar{r}_2 &= \frac{cr_2 + c'r'_2}{c + c'} - \frac{hh'(p_1 - p'_1)(q_1 - q'_1)}{(h + h')(c + c')}, & \bar{r}_3 &= \frac{c + c'}{h + h'}. \end{aligned}$$

320. Если ни одно из двух веществ, составляющих слои, не обладает свойством вращения, рассмотренным в п. 303, значение любой из величин P или p будет рав-

² См. сэр У. Томсон «О наведенном магнетизме в пластине», *Camb. and Dub. Math. Journal*, Nov., 1845 или *Reprint*, art. IX, § 156.

но значению соответствующей величины Q или q . Отсюда следует, что в слоистом проводнике также $\bar{p}_1 = \bar{q}_1$, $\bar{p}_2 = \bar{q}_2$, $\bar{p}_3 = \bar{q}_3$.

Другими словами, разделение на слои не приводит к свойству вращения, если этого свойства нет ни у одного из веществ, составляющих слои.

321. Если мы теперь предположим, что свойство вращения отсутствует и что оси x , y , z являются главными осями, тогда коэффициенты p и q исчезают и

$$\bar{r}_1 = \frac{cr_1 + c'r_1'}{c + c'}, \quad \bar{r}_2 = \frac{cr_2 + c'r_2'}{c + c'}, \quad \bar{r}_3 = \frac{c + c'}{(c/r_3) + (c'/r_3')}.$$

Если мы начнем со случая, когда обе среды изотропны, но имеют различные проводимости r и r' , то, поскольку $\bar{r}_1 - \bar{r}_3 = \frac{cc'}{c + c'} \cdot \frac{(r - r')^2}{(cr' + c'r)}$, разбиение на слои приводит к тому, что в направлении, перпендикулярном слоям, сопротивление оказывается наибольшим, а сопротивления по всем направлениям в плоскости слоев одинаковы.

322. Возьмем изотропную среду проводимости r , разобьем ее на исключительно тонкие слои толщиной a и расположим их попеременно со слоями вещества, проводимость которого равна s , а толщина $k_1 a$.

Пусть эти слои будут нормальны к оси x . Затем разобьем этот составной проводник на гораздо более толстые слои толщины b , перпендикулярные оси y , и расположим эти слои попеременно со слоями, проводимость которых равна s , а толщина $k_2 b$.

Наконец, разобьем этот новый проводник на еще более толстые слои толщины c , перпендикулярные к оси z , и расположим эти слои попеременно со слоями, проводимость которых равна s , а толщина $k_3 c$.

В результате этих трех операций вещество проводимости r разобьется на прямоугольные параллелепипеды с размерами a , b , c , причем размер b крайне мал по сравнению с c и размер a крайне мал по сравнению с b . Эти параллелепипеды погружены в вещество с проводимостью s , так что они отдалены друг от друга на расстояния $k_1 a$ вдоль оси x , $k_2 b$ — в направлении оси y и $k_3 c$ — в направлении оси z . Проводимости образованного таким образом проводника можно определить, если трижды последовательно воспользоваться результатами п. 321.

При этом мы получим

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\{1 + k_1(1 + k_2)(1 + k_3)\}r + (k_2 + k_3 + k_2 k_3)s}{(1 + k_2)(1 + k_3)(k_1 r + s)} s, \\ r_2 &= \frac{(1 + k_2 + k_2 k_3)r + (k_1 + k_3 + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_2 k_3)s}{(1 + k_3)\{k_2 r + (1 + k_1 + k_1 k_2)s\}} s, \\ r_3 &= \frac{(1 + k_3)(r + (k_1 + k_2 + k_1 k_2)s)}{k_3 r + (1 + k_1 + k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1 + k_1 k_2 + k_1 k_2 k_3)s} s. \end{aligned}$$

Точность этого рассмотрения определяется тем, что три размера параллелепипедов имеют разные порядки величины, так что мы можем пренебречь условиями, которые должны быть выполнены на ребрах и в вершинах. Если мы положим каждую из величин k_1 , k_2 , k_3 равной единице, то получим

$$r_1 = \frac{5r + 3s}{4r + 4s} s, \quad r_2 = \frac{3r + 5s}{2r + 6s} s, \quad r_3 = \frac{2r + 6s}{r + 7s} s.$$

Если $r=0$, т. е. если среда, из которой сделаны параллелепипеды, представляет собой совершенный изолятор, то $r_1=(3/4)s$, $r_2=(5/6)s$, $r_3=(6/7)s$.

Если $r=\infty$, т. е. если параллелепипеды являются идеальными проводниками, $r_1=(5/4)s$, $r_2=(3/2)s$, $r_3=2s$.

В любом случае, если $k_1=k_2=k_3$, можно показать, что r_1 , r_2 и r_3 расположены в порядке возрастания величины, так что наибольшая проводимость имеет место в направлении наибольшего размера параллелепипеда, а наибольшее сопротивление — в направлении наименьших размеров.

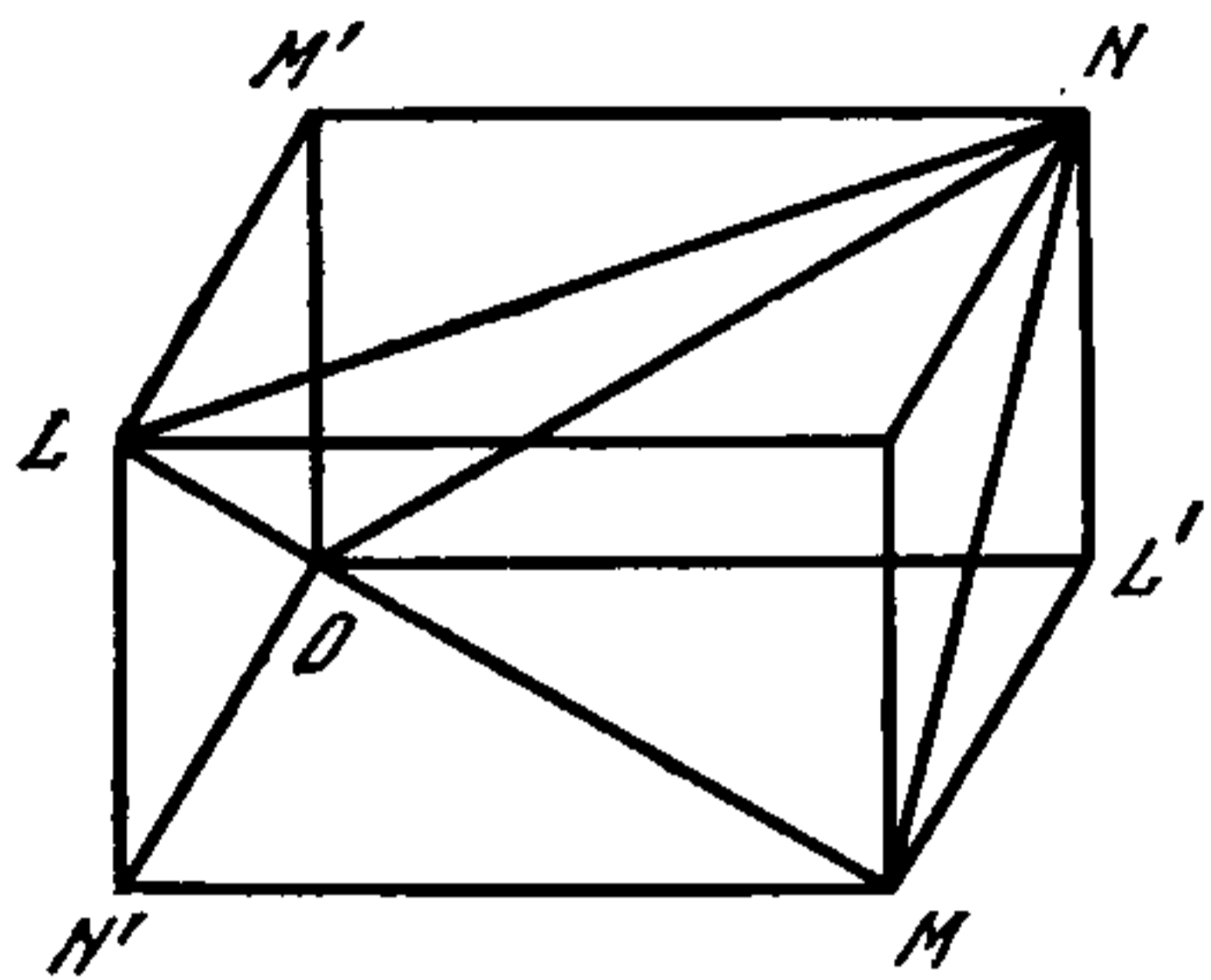


Рис. 25

323. Пусть в прямоугольном параллелепипеде, сделанном из проводящего твердого тела, имеется проводящий канал между противоположными вершинами, представляющий собой провод, покрытый изолирующим материалом. Пусть поперечные размеры канала настолько малы, что проводимость тела не изменяется, если не считать тока, идущего по проводу.

Пусть размеры параллелепипеда в направлениях координатных осей будут равны a , b и c , и пусть проводимость канала, идущего от начала координат к точке (abc) , равна $abcK$.

Электродвижущая сила, действующая между концами канала, равна $aX + bY + cZ$, и если ток вдоль канала равен C' , то $C' = Kabc(aX + bY + cZ)$.

Ток, идущий через грань параллелепипеда bc , равен bci , и он складывается из тока, обусловленного проводимостью тела, и из тока, обусловленного проводимостью канала, или

$$bci = bc(r_1X + p_3Y + q_2Z) + Kabc(aX + bY + cZ),$$

или

$$i = (r_1 + Ka^2)X + (p_3 + Kab)Y + (q_2 + Kca)Z.$$

Таким же путем мы можем найти значения v и w . Коэффициенты проводимости с учетом изменения, которое вызвано влиянием канала, имеют вид

$$\begin{array}{lll} r_1 + Ka^2, & r_2 + Kb^2, & r_3 + Kc^2, \\ p_1 + Kbc, & p_2 + Kca, & p_3 + Kab, \\ q_1 + Kbc, & q_2 + Kca, & q_3 + Kab. \end{array}$$

В этих выражениях добавки к значениям p_1 и т. д., вызванные действием канала, равны добавкам к значениям q_1 и т. д. Следовательно, значения p_1 и q_1 не могут стать неравными из-за введения линейного канала в каждый элемент объема тела, и поэтому свойство вращения, рассмотренное в п. 303, если оно первоначально отсутствовало у тела, не может быть создано таким способом.

324. Как построить решетку из проводников, которая будет иметь любые заданные коэффициенты проводимости, образующие симметричную систему.

Пусть пространство разбито на одинаковые малые кубы, один из которых представлен на рис. 25. Обозначим координаты точек O , L , M , N и потенциалы

этих точек следующим образом:

	x	y	z	Потенциал
O	0	0	0	$X+Y+Z$
L	0	1	1	X
M	1	0	1	Y
N	1	1	0	Z

Пусть эти четыре точки соединены шестью проводниками

$OL, OM, ON, MN, NL, LM,$

у которых значения проводимости соответственно равны

$A, B, C, P, Q, R.$

Электродвижущие силы вдоль этих проводников будут равны

$Y+Z, Z+X, X+Y, Y-Z, Z-X, X-Y,$

а токи —

$A(Y+Z), B(Z+X), C(X+Y), P(Y-Z), Q(Z-X), R(X-Y).$

Те из этих токов, которые переносят электричество в положительном направлении оси x , протекают вдоль проводников LM, LN, OM и ON , а переносимое количество равно

$$u = (B + C + Q + R)X + (C - R)Y + (B - Q)Z.$$

Подобным же образом,

$$v = (C - R)X + (C + A + R + P)Y + (A - P)Z,$$

$$w = (B - Q)X + (A - P)Y + (A + B + P + Q)Z.$$

Откуда путем сравнения с уравнениями проводимости, п. 298, находим

$$\begin{aligned} 4A &= r_2 + r_3 - r_1 + 2p_1, & 4P &= r_2 + r_3 - r_1 - 2p_1, \\ 4B &= r_3 + r_1 - r_2 + 2p_2, & 4Q &= r_3 + r_1 - r_2 - 2p_2, \\ 4C &= r_1 + r_2 - r_3 + 2p_3, & 4R &= r_1 + r_2 - r_3 - 2p_3. \end{aligned}$$

ГЛАВА X

ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА В ДИЭЛЕКТРИКАХ

325. Мы видели, что, когда электродвижущая сила действует на диэлектрическую среду, она производит в среде состояние, которое мы назвали электрической поляризацией и которое мы описали как электрическое смещение внутри среды в направлении, в изотропной среде совпадающем с направлением электродвижущей силы, сопровождаемое появлением поверхностного заряда на каждом из элементов объема, на которые, как мы можем предположить, разбит диэлектрик. По-

верхностный заряд положителен на той стороне, по направлению к которой действует электродвижущая сила, и отрицателен на той стороне, от которой она действует.

Если электродвижущая сила действует на проводящую среду, она также производит то, что называется электрическим током.

Но диэлектрические среды, за очень немногими исключениями, если такие исключения вообще имеются, являются также более или менее несовершенными проводниками, и многие среды, которые не представляют собой хороших изоляторов, обнаруживают явления диэлектрической индукции. Таким образом, мы приходим к необходимости изучать такое состояние среды, в котором одновременно имеют место индукция и прохождение электричества.

Для простоты мы будем предполагать, что среда изотропна в каждой точке, но не обязательно однородна в различных точках. В этом случае уравнение Пуассона, согласно п. 83, становится таким:

$$\frac{d}{dx} \left(K \frac{dV}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(K \frac{dV}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(K \frac{dV}{dz} \right) + 4\pi\rho = 0, \quad (1)$$

где K — «удельная индуктивная способность».

«Уравнение непрерывности» для электрического тока будет

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dz} \right) - \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (2)$$

где r — удельное сопротивление на единицу объема.

Если функции K или r имеют разрывы, эти уравнения нужно преобразовать в такие, которые будут удобны для рассмотрения поверхностей разрыва.

В строго однородной среде обе величины r и K являются постоянными, так что мы находим

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi \frac{\rho}{K} = r \frac{d\rho}{dt}, \quad (3)$$

откуда

$$\rho = C e^{-\frac{4\pi}{Kr} t}, \quad (4)$$

или, если положим

$$T = \frac{Kr}{4\pi}, \quad \rho = C e^{-\frac{t}{T}}. \quad (5)$$

Этот результат показывает, что если на однородную среду действуют любые внешние электрические силы и если в объеме среды первоначально был любым способом создан электрический заряд, этот внутренний заряд будет вымирать со скоростью, которая не зависит от внешних сил, так что в конце концов внутри среды не будет электрического заряда, после чего никакие внешние силы не смогут ни создать, ни удержать заряд в любой внутренней части среды, если только соотношение между электродвижущей силой, электрической поляризацией и током остается неизменным. Если возникает пробой, эти соотношения теряют свою справедливость, и внутренний заряд может быть создан.

О прохождении тока через конденсатор

326. Пусть C — емкость конденсатора, R — его сопротивление, а E — электродвижущая сила, действующая на конденсатор, т. е. разность потенциалов на поверхностях металлических электродов.

Тогда количество электричества на той стороне, от которой действует электродвижущая сила, будет равно CE , а ток через вещество конденсатора в направлении электродвижущей силы будет равен E/R .

Если предполагается, что электризация производится электродвижущей силой E , действующей на контур, частью которого является рассматриваемый конденсатор, и если dQ/dt есть ток в этом контуре, то

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} + C \frac{dE}{dt}. \quad (6)$$

Введем в эту цепь батарею с электродвижущей силой E_0 , сопротивление которой вместе с сопротивлением подводящих проводов равно r_1 , тогда

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{E_0 - E}{r_1} = \frac{E}{R} + C \frac{dE}{dt}. \quad (7)$$

Таким образом, в любое время t_1

$$E (= E_1) = E_0 \frac{R}{R + r_1} (1 - e^{-t_1/T_1}), \quad \text{где } T_1 = \frac{CRr_1}{R + r_1}. \quad (8)$$

Пусть, далее, цепь с сопротивлением r_1 разрывается на время t_2 . Полагая r_1 бесконечной величиной, мы получим из (7)

$$E (= E_2) = E_1 e^{-t_2/T_2}, \quad \text{где } T_2 = CR. \quad (9)$$

Наконец, соединим поверхности конденсатора проводом, сопротивление которого равно r_3 , и пусть длительность этого соединения равна t_3 , тогда, полагая в (7) $E_0 = 0$, $r_1 = r_3$, мы получим

$$E (= E_3) = E_2 e^{-t_3/T_3}, \quad \text{где } T_3 = \frac{CRr_3}{R + r_3}. \quad (10)$$

Если Q_3 есть полный разряд через этот провод за время t_3 , то

$$Q_3 = E_0 \frac{CR^2}{(R + r_1)(R + r_3)} (1 - e^{-t_1/T_1}) e^{-t_2/T_2} (1 - e^{-t_3/T_3}). \quad (11)$$

Таким путем мы можем найти разряд через провод, с помощью которого соединяются поверхности конденсатора после того, как конденсатор в течение времени t_1 заряжается, а потом в течение времени t_2 изолируется. Если, как это обычно бывает, время зарядки достаточно для того, чтобы образовался полный заряд, и если время разрядки достаточно для полной разрядки, то разряд равен

$$Q_3 = E_0 \frac{CR^2}{(R + r_1)(R + r_3)} e^{-t_2/CR}. \quad (12)$$

327. Если такого рода конденсатор сначала любым способом заряжается, затем разряжается через провод с малым сопротивлением, а потом изолируется, то не возникает никакой новой электризации. Однако обнаружено, что в большинст-

ве реальных конденсаторов после разрядки и изоляции постепенно нарастает новый заряд того же знака, что и первоначальный, но меньший по величине. Он называется остаточным зарядом. Для того чтобы его объяснить, мы должны признать, что строение диэлектрической среды отличается от того, какое мы только что описывали. Однако мы увидим, что среда, составленная из смеси малых частиц различных простых сред, обладала бы таким свойством.

Теория составного диэлектрика

328. Для простоты мы будем предполагать, что диэлектрик состоит из некоторого числа плоских слоев различных веществ, что слои имеют единичную площадь и что электрические силы действуют в направлении нормали к слоям.

Обозначим:

a_1, a_2 и т. д. — толщины различных слоев;

X_1, X_2 и т. д. — результирующие электрические силы внутри слоев;

p_1, p_2 и т. д. — токи, вызванные прохождением электричества через слои;

f_1, f_2 и т. д. — электрические смещения;

u_1, u_2 и т. д. — полные токи, которые частично обусловлены прохождением электричества, а частично — изменением смещения;

r_1, r_2 и т. д. — удельные сопротивления, отнесенные к единице объема;

K_1, K_2 и т. д. — удельные индуктивные способности;

k_1, k_2 и т. д. — величины, обратные удельным индуктивным способностям;

E — электродвижущая сила вольтовой батареи, помещенной в ту часть цепи, которая ведет от последнего слоя к первому. Эти слои мы будем считать хорошими проводниками;

Q — полное количество электричества, которое прошло через эту часть цепи к моменту времени;

R_0 — сопротивление батареи вместе с подводными проводами;

σ_{12} — поверхностная плотность электричества на поверхности, которая разделяет первый и второй слои.

Тогда в первом слое мы имеем по закону Ома

$$X_1 = r_1 p_1, \quad (1)$$

по теории электрического смещения

$$X_1 = 4\pi k_1 f_1, \quad (2)$$

по определению полного тока

$$u_1 = p_1 + (df_1/dt) \quad (3)$$

и аналогичные уравнения для других слоев, в каждом из которых соответствующие величины имеют индекс, принадлежащий данному слою.

Для определения поверхностной плотности на каждом слое мы имеем уравнение вида

$$\sigma_{12} = f_2 - f_1, \quad (4)$$

а для определения ее изменения имеем

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = p_1 - p_2. \quad (5)$$

Дифференцируя (4) по t и приравнивая результат к (5), мы получим

$$\rho_1 + \frac{df_1}{dt} = \rho_2 + \frac{df_2}{dt} = u, \quad (6)$$

или, учитывая (3),

$$u_1 = u_2 = \text{и т. д.} = u. \quad (7)$$

Это означает, что полный ток u имеет одно и то же значение для всех слоев и равен току, идущему через провод и батарею.

В силу уравнений (1) и (2) имеем также

$$u = \frac{1}{r_1} X_1 + \frac{1}{4\pi k_1} \frac{dX_1}{dt}, \quad (8)$$

откуда, произведя над u обратную операцию, получим X_1 :

$$X_1 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{4\pi k_1} \frac{d}{dt} \right)^{-1} u. \quad (9)$$

Полная электродвижущая сила E равна

$$E = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \text{и т. д.}, \quad (10)$$

или

$$E = \left\{ a_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{4\pi k_1} \frac{d}{dt} \right)^{-1} + a_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{4\pi k_2} \frac{d}{dt} \right)^{-1} + \text{и т. д.} \right\} u. \quad (11)$$

Уравнение (11) дает соотношение между внешней электродвижущей силой E и внешним током u .

Если отношение r к k имеет одно и то же значение для всех слоев, уравнение сводится к

$$E + \frac{r}{4\pi k} \frac{dE}{dt} = (a_1 r_1 + a_2 r_2 + \text{и т. д.}) u. \quad (12)$$

Это — тот случай, уже рассмотренный в п. 326, в котором, как мы нашли, явление остаточного заряда не может иметь места.

Если имеется n веществ с различными значениями отношения r/k , общее уравнение (11) после избавления от обратных операций будет линейным дифференциальным уравнением n -го порядка по отношению к E и $(n-1)$ -го порядка по отношению к u , причем независимой переменной является t .

Из вида уравнения ясно, что порядок, в котором различные слои следуют друг за другом, безразличен, так что, если имеется несколько слоев, сделанных из одного и того же вещества, мы можем считать, что они объединены в один и явления при этом не меняются.

329. Теперь предположим, что сначала f_1, f_2 и т. д. все равны нулю и что электродвижущая сила E_0 внезапно начинает действовать, и найдем ее мгновенный эффект.

Интегрируя (8) по времени, мы находим

$$Q = \int u dt = \frac{1}{r_1} \int X_1 dt + \frac{1}{4\pi k_1} X_1 + \text{const}, \quad (13)$$

Но, поскольку величина X_1 в этом случае всегда конечна, $\int X_1 dt$ представляет собой неощутимо малую величину, если t есть неощутимо малая величина. Поэтому, так как величина X_1 первоначально равнялась нулю, мгновенный результат будет

$$X_1 = 4\pi k_1 Q_1. \quad (14)$$

Отсюда, согласно уравнению (10),

$$E_0 = 4\pi (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \text{и т. д.}) Q, \quad (15)$$

и если C — электрическая емкость системы, измеренная таким мгновенным способом, то

$$C = (Q/E_0) = [4\pi (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \text{и т. д.})]^{-1}. \quad (16)$$

Как раз такой результат мы получили бы, если бы пренебрегли проводимостью слоев.

Предположим далее, что электродвижущая сила E_0 остается неизменной в течение неопределенно долгого времени или до тех пор, пока в системе не установится постоянный ток проводимости, равный ρ .

Мы тогда имеем $X_1 = r_1 \rho$ и т. д., и поэтому, с учетом (10),

$$E_0 = (r_1 a_1 + r_2 a_2 + \text{и т. д.}) \rho. \quad (17)$$

Если R — полное сопротивление системы, то

$$R = (E_0/\rho) = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \text{и т. д.} \quad (18)$$

В этом состоянии из (2) имеем $f_1 = (r_1 \rho)/(4\pi k_1)$, так что

$$\sigma_{12} = \left(\frac{1}{4\pi k_2} - \frac{1}{4\pi k_1} \right) \rho. \quad (19)$$

Если мы теперь быстро соединим крайние слои проводом с малым сопротивлением, значение E быстро изменится от начального значения E_0 до нуля, а через проводник пройдет некоторое количество электричества Q .

Для того чтобы определить величину Q , заметим, что если X'_1 есть новое значение величины X_1 , то, с учетом (13),

$$X'_1 = X_1 + 4\pi k_1 Q. \quad (20)$$

Отсюда, с учетом (10), полагая $E=0$, получаем

$$0 = a_1 X_1 + \text{и т. д.} + 4\pi (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \text{и т. д.}) Q, \quad (21)$$

или

$$0 = E_0 + (Q/C). \quad (22)$$

Отсюда $Q = -CE_0$, где C — емкость, определяемая уравнением (16). Таким образом, мгновенный разряд равен мгновенному заряду.

Предположим теперь, что немедленно после разряда соединение разрывается. Тогда мы будем иметь $u=0$, так что, согласно уравнению (8),

$$X_1 = X'_1 e^{-(4\pi k_1 / r_1) t}, \quad (23)$$

где X'_1 есть начальное значение после разряда.

Отсюда для любого момента t получаем, с учетом (23) и (20):

$$X_1 = E_0 \left\{ \frac{r_1}{R} - 4\pi k_1 C \right\} e^{-(4\pi k_1/r_1) t}.$$

Поэтому значение E в любой момент равно

$$E_0 \left\{ \left(\frac{a_1 r_1}{R} - 4\pi a_1 k_1 C \right) e^{-(4\pi k_1/r_1) t} + \left(\frac{a_2 r_2}{R} + 4\pi a_2 k_2 C \right) e^{-(4\pi k_2/r_2) t} + \text{и т. д.} \right\}, \quad (24)$$

и мгновенный заряд по истечении любого времени t равен ES . Эта величина и называется остаточным разрядом.

Если отношение r/k имеет одно и то же значение для всех слоев, величина E сводится к нулю. Если, однако, это отношение не одинаково, расположим слагаемые в соответствии со значением этого отношения, в порядке уменьшения величины.

Сумма всех коэффициентов, очевидно, равна нулю, так что при $t=0$ имеем $E=0$. Коэффициенты также расположены в порядке уменьшения величины, и таким же оказывается порядок расположения экспоненциальных членов при положительных значениях t . Таким образом, при положительных t величина E также будет положительной, т. е. остаточный разряд всегда имеет тот же знак, что и первичный разряд.

Если время t бесконечно велико, все слагаемые исчезают, если только некоторые из слоев не являются идеальными изоляторами. В этом случае для такого слоя величина r_1 бесконечна, значение R для всей системы также становится бесконечным и значение E в конце равно не нулю, а

$$E = E_0(1 - 4\pi a_1 k_1 C). \quad (25)$$

Таким образом, если некоторые, но не все из слоев оказываются идеальными изоляторами, остаточный разряд может постоянно удерживаться в системе.

330. Мы теперь определим полный разряд через провод с сопротивлением R_0 , соединенный все время с крайними слоями системы, предполагая, что эта система сперва была заряжена с помощью приложенной на долгое время электродвижущей силы E_0 .

Для любого момента времени мы имеем

$$E = a_1 r_1 p_1 + a_2 r_2 p_2 + \text{и т. д.} + R_0 u = 0, \quad (26)$$

кроме того, с учетом (3),

$$u = p_1 + \frac{df_1}{dt}. \quad (27)$$

Отсюда

$$(R + R_0) u = a_1 r_1 \frac{df_1}{dt} + a_2 r_2 \frac{df_2}{dt} + \text{и т. д.} \quad (28)$$

Интегрируя по t , для того чтобы найти Q , получаем

$$(R + R_0) Q = a_1 r_1 (f'_1 - f_1) + a_2 r_2 (f'_2 - f_2) + \text{и т. д.}, \quad (29)$$

где f_1 — начальное, а f'_1 — конечное значения величины f_1 .

В нашем случае $f_1' = 0$, и с учетом (2) и (20) имеем

$$f_1 = E_0 \left(\frac{r_1}{4\pi k_1 R} - C \right).$$

Отсюда

$$(R + R_0) Q = - \frac{E}{4\pi R} \left(\frac{a_1 r_1^2}{k_1} + \frac{a_2 r_2^2}{k_2} + \text{и т. д.} \right) + E_0 C R, \quad (30)$$

$$= - \frac{C E_0}{R} \sum \sum \left[a_1 a_2 k_1 k_2 \left(\frac{r_1}{k_1} - \frac{r_2}{k_2} \right) \right], \quad (31)$$

где суммирование проводится по всем выражениям этого вида, относящимся к каждой паре слоев.

Отсюда следует, что величина Q всегда отрицательна, т. е. имеет, так сказать, противоположное направление по отношению к направлению того тока, который использовался при зарядке системы.

Это исследование показывает, что диэлектрик, составленный из различного рода слоев, проявляет свойства, известные как электрическое поглощение и остаточный разряд, хотя ни одно из веществ, составляющих этот диэлектрик, взятое само по себе, не проявляет этих свойств. Рассмотрение таких случаев, в которых вещества расположены иначе, чем слоями, привело бы к сходным результатам, хотя соответствующие вычисления были бы более сложными. Поэтому мы можем заключить, что явления электрического поглощения возможны для таких веществ, которые составлены из частей различной природы, даже несмотря на то, что эти части могут быть микроскопически малы.

Отсюда никак не следует, что каждое вещество, обнаруживающее это явление, построено именно таким образом, потому что это может указывать на некоторый **новый** вид электрической поляризации, возможный для однородного вещества, который в некоторых случаях, вероятно, больше напоминает электрохимическую поляризацию, чем диэлектрическую поляризацию.

Цель этого рассмотрения состоит только в том, чтобы указать на чисто математические особенности так называемого электрического поглощения и показать, насколько фундаментально оно отличается от тепловых явлений, которые на первый взгляд кажутся аналогичными.

331. Если мы возьмем толстую пластину любого вещества и нагреем ее с одной стороны так, чтобы создать ток тепла через нее, и если мы затем быстро охладим нагретую сторону до той температуры, при которой находится другая сторона, и предоставим пластину самой себе, то нагревавшаяся сторона пластины опять станет теплее другой в результате прихода тепла изнутри.

Можно осуществить электрическое явление, в точности аналогичное этому, и оно действительно имеет место в телеграфных кабелях, но его математические законы, хотя и полностью согласуются с законами теории тепла, совершенно отличны от законов слоистого конденсатора.

В случае тепла имеет место настоящее поглощение тепла веществом, в результате вещество нагревается. В электричестве невозможно получить полностью аналогичное явление, но мы можем имитировать его следующим образом в форме лекционной демонстрации.

Пусть A_1, A_2 и т. д.— внутренние проводящие поверхности последовательно-сти конденсаторов, у которых внешними поверхностями являются B_0, B_1, B_2 и т. д.

Пусть A_1, A_2 и т. д. соединены последовательно проводниками с сопротивлениями R , и пусть ток идет по этой цепи слева направо [рис. 26].

Предположим сначала, что каждая из пластин B_0, B_1, B_2 изолирована и свободна от заряда. Тогда полное количество электричества на каждой из пластин

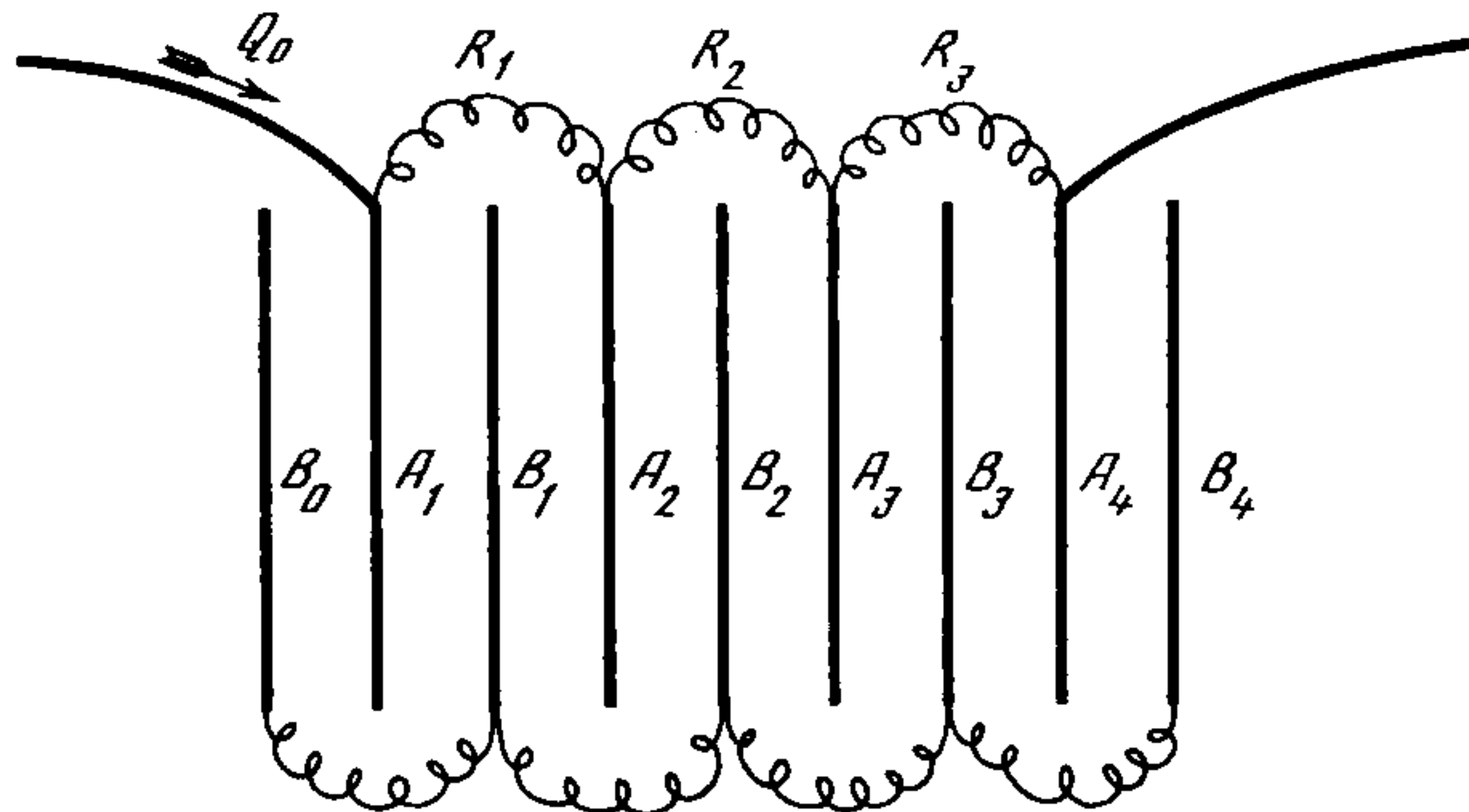


Рис. 26

B будет оставаться равным нулю, и, поскольку электричество на пластинах A в каждом случае равно и противоположно электричеству на противоположной поверхности, пластины A не будут электризованы и не будет наблюдаться никакого изменения тока.

Но соединим между собой все пластины B или заземлим каждую из них. Тогда, поскольку потенциал пластины A_1 положителен, а потенциал пластин B равен нулю, пластина A_1 будет электризована положительно, а B_1 — отрицательно.

Если потенциалы пластин A_1, A_2 и т. д. равны P_1, P_2 и т. д., а емкость каждой пластины равна C , и если мы предполагаем, что через левый подводный провод прошло количество электричества Q_0 , через сопротивление R_1 прошло количество электричества Q_1 и т. д., тогда то количество, которое имеется на пластине A_1 , равно $Q_0 - Q_1$, и мы имеем $Q_0 - Q_1 = CP_1$.

Подобным же образом $Q_1 - Q_2 = CP_2$ и т. д.

Но по закону Ома

$$P_1 - P_2 = R_1 \frac{dQ_1}{dt}, \quad P_2 - P_3 = R_2 \frac{dQ_2}{dt}.$$

Мы предположили, что все пластины имеют одно и то же значение C . Если мы предположим, что значения R также одинаковы для каждого из проводов, мы получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} Q_0 - 2Q_1 + Q_2 &= RC \frac{dQ_1}{dt}, \\ Q_1 - 2Q_2 + Q_3 &= RC \frac{dQ_2}{dt}. \end{aligned}$$

Если требуется определить n количеств электричества и если задана полная электродвижущая сила или какое-нибудь другое эквивалентное условие, то диф-

ференциальное уравнение для определения любого из этих количеств электричества будет линейным и n -го порядка.

С помощью такой установки г-н Варлей (Varley) успешно воспроизвел электрическое действие кабеля длиной 12 000 миль.

Если сделать так, что вдоль провода, расположенного слева, начнет действовать электродвижущая сила, то электричество, втекающее в систему, будет главным образом идти на зарядку различных конденсаторов, начиная с A_1 , и до тех пор, пока не пройдет значительное время, справа будет выходить только очень малая часть тока. Если включить в цепь гальванометры в R_1 , R_2 и т. д., то они будут испытывать воздействие тока один за другим, причем интервал во времени между равными показаниями будет возрастать по мере нашего продвижения вправо.

332. В случае телеграфного кабеля проводящая жила отделена от внешних проводников цилиндрическим слоем гуттаперчи или другого изолирующего материала. Таким образом, каждая часть кабеля становится конденсатором, внешняя поверхность которого всегда находится при нулевом потенциале. Следовательно, в данной части кабеля количество свободного электричества на поверхности проводящей жилы равно произведению потенциала на емкость этой части кабеля, рассматриваемого как конденсатор.

Если внешний и внутренний радиусы изолирующего слоя равны a_1 и a_2 и если удельная диэлектрическая способность слоя равна K , то емкость единицы длины кабеля, по п. 126, равна

$$c = K / \ln (a_1 / a_2). \quad (1)$$

Пусть потенциал в любой точке жилы равен v . Мы будем считать, что потенциал имеет одно и то же значение для каждой части одного и того же сечения.

Пусть Q будет полное количество электричества, которое прошло через это сечение от начала прохождения тока. Тогда количество, которое в момент времени t заключено между сечениями x и $x + \delta x$, равно

$$Q - \left(Q + \frac{dQ}{dx} \delta x \right) \quad \text{или} \quad - \frac{dQ}{dx} \delta x,$$

и, по сказанному выше, эта величина равна $cv\delta x$.

Следовательно,

$$cv = - \frac{dQ}{dx}. \quad (2)$$

Но электродвижущая сила в любом сечении равна $-dv/dx$, и по закону Ома

$$- \frac{dv}{dx} = k \frac{dQ}{dt}, \quad (3)$$

где k — сопротивление единицы длины проводника, а dQ/dt — сила тока. Исключая Q из уравнений (2) и (3), находим

$$ck \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (4)$$

Это уравнение в частных производных, которое нужно решить для того, чтобы получить потенциал в любой момент времени в любой точке кабеля. Оно совпадает с тем уравнением, которое Фурье дает для определения температуры в любой

точке слоя, через который течет тепло в направлении, перпендикулярном к слою. В случае тепла c означает емкость единицы объема (эту величину Фурье обозначает через CD), а k означает величину, обратную проводимости.

Если прослойка не является совершенным изолятором и если ее сопротивление на единицу длины равно k_1 при прохождении тока через слой в радиальном направлении, тогда, если удельное сопротивление изолирующего материала равно ρ_1 , легко показать, что

$$k_1 = \frac{1}{2\pi} \rho_1 \ln \frac{a_1}{a_2}. \quad (5)$$

Уравнение (2) уже не будет справедливым, поскольку электричество расходуется не только на зарядку жилы до величины, определяемой выражением cv , но и на утечку, скорость которой определяется выражением v/k_1 . Поэтому скорость расхода электричества будет

$$-\frac{d^2Q}{dx dt} = c \frac{dv}{dt} + \frac{1}{k_1} v, \quad (6)$$

откуда, сравнивая с (3), получаем

$$ck \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{k}{k_1} v. \quad (7)$$

Такой вид, согласно Фурье, имеет уравнение теплопроводности для стержня или кольца ¹.

333. Если бы мы приняли, что при повышении потенциала тело электризуется во всем своем объеме так, как если бы электричество нагнеталось внутрь тела, мы бы пришли к уравнению точно такого же вида. Примечательно, что сам Ом, будучи введен в заблуждение этой аналогией между электричеством и теплотой, поддержал мнение такого рода и потому из-за этой ошибочной точки зрения использовал уравнение Фурье для того, чтобы описать истинные законы прохождения электричества по длинному проводу, задолго до того, как были усмотрены действительные причины применимости этих уравнений.

Механическое истолкование свойств диэлектриков

334. Пять трубок A , B , C , D и P равного поперечного сечения расположены так, как показано на рисунке. A , B , C и D расположены вертикально, а P — горизонтально [рис. 27].

У трубок A , B , C , D нижняя половина наполнена ртутью, а их верхняя половина и горизонтальная трубка P наполнены водой.

Трубка с запорным краном Q соединяет нижнюю часть трубок A и B с нижней частью трубок C и D , а поршень P сделан так, чтобы он мог скользить в горизонтальной трубке.

Начнем с предположения, что уровень ртути во всех четырех трубках один и тот же, и обозначим этот уровень через A_0 , B_0 , C_0 и D_0 . Пусть при этом поршень находится в положении P_0 , а запорный кран Q закрыт.

¹ *Théory de la Chaleur*, Art. 105.

Пусть теперь поршень перемещается из положения P_0 в положение P_1 на расстояние a . Тогда, поскольку сечения всех трубок равны, уровень ртути в A и C поднимется на высоту a , т. е. до отметок A_1 и C_1 , а ртуть в B и D опустится на такое же расстояние a , т. е. до отметок B_1 и D_1 .

Разность давлений по обе стороны поршня будет представлена величиной $4a$.

Эту установку можно использовать для того, чтобы представить диэлектрик, на который действует электродвижущая сила, равная $4a$.

Можно считать, что избыток воды в трубке D представляет положительный заряд электричества на одной стороне диэлектрика, а избыток ртути в трубке A может представлять отрицательный заряд на другой стороне. Тогда избыток давления в трубке P с той стороны поршня, которая обращена к D , будет представлять избыток потенциала на положительной стороне диэлектрика.

Если поршень может двигаться, он будет двигаться назад к положению P_0 , где он будет в равновесии. Это представляет полный разряд диэлектрика.

Во время разряда имеет место обратное движение жидкостей во всей установке, и оно представляет то изменение электрического смещения, которое, по нашему предположению, имеет место в диэлектрике.

Я предположил, что каждая часть системы трубок наполнена несжимаемыми жидкостями, с тем чтобы представить свойство полного электрического смещения, состоящее в том, что ни в каком месте не происходит действительного накопления электричества.

Теперь рассмотрим, что произойдет, если мы откроем запорный кран Q в то время, когда поршень P находится в положении P_1 .

Уровни A_1 и D_1 останутся неизменными, но уровни в трубках B и C станут одинаковыми и будут совпадать с B_0 и C_0 .

Открытый запорный кран Q отвечает наличию в диэлектрике части, которая обладает некоторой проводящей способностью, но которая не простирается через весь диэлектрик так, чтобы образовать открытый канал.

Заряды на противоположных сторонах диэлектрика остаются изолированными, но отвечающая им разность потенциалов уменьшается.

Действительно, за время прохождения жидкости через Q разность давлений по обе стороны от поршня падает с $4a$ до $2a$.

Если мы теперь закроем запорный кран Q и дадим возможность поршню P свободно двигаться, он придет к равновесию в точке P_2 , и разряд, очевидно, будет равен половине заряда.

Уровень ртути в A и B будет выше первоначального уровня на $a/2$, в то время как уровень в трубках C и D будет на $a/2$ ниже первоначального. Эти уровни изображены отметками A_2 , B_2 , C_2 , D_2 .

Если теперь закрепить поршень и открыть кран, ртуть будет перетекать из B в C до тех пор, пока уровень в этих двух трубках не придет снова к отметкам B_0 и C_0 . Тогда разность давлений по обе стороны от поршня P будет равна a . Если

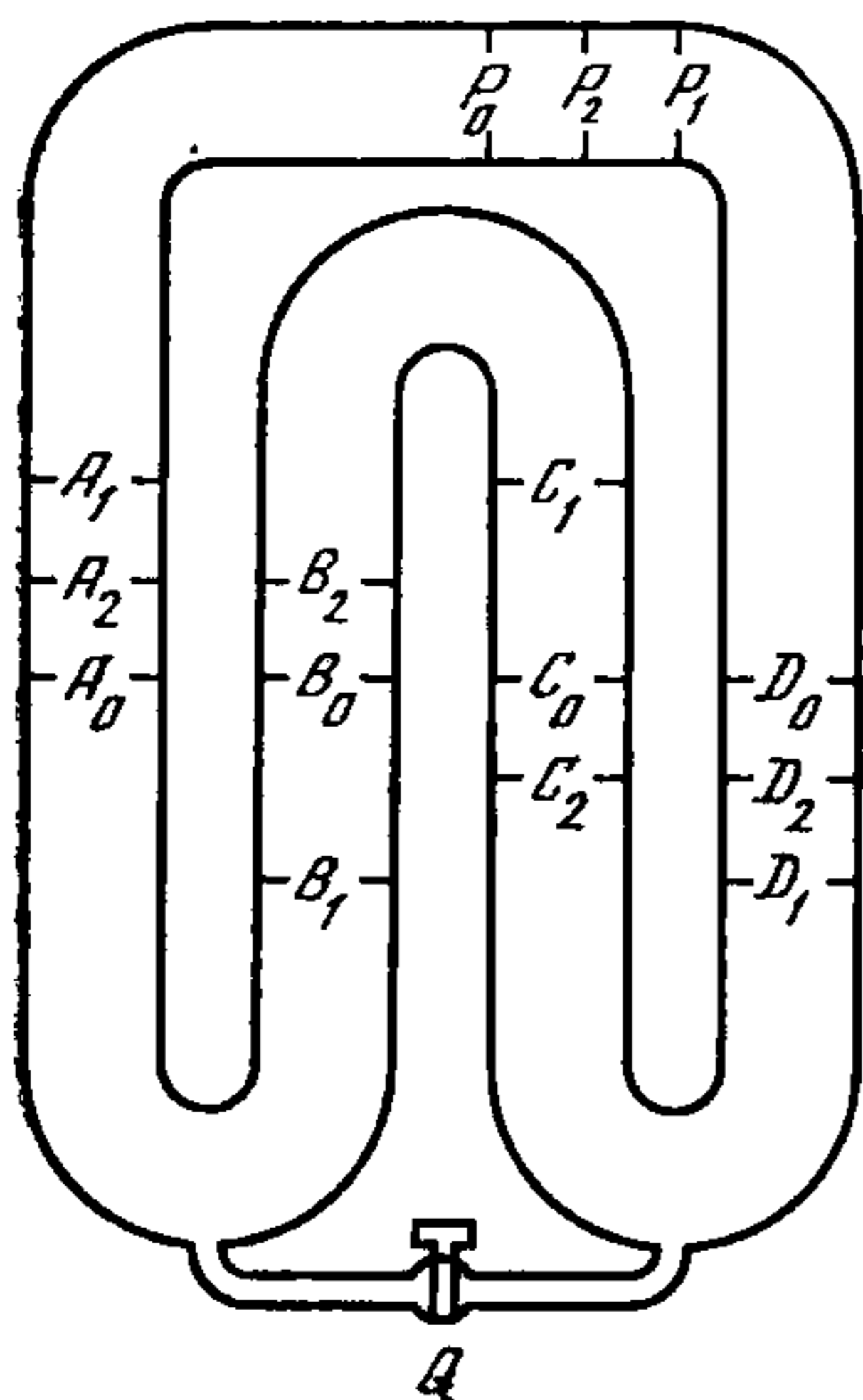


Рис. 27

теперь закрыть запорный кран и освободить поршень P , он опять придет к равновесию в некоторой точке P_3 , находящейся на полпути между точками P_2 и P_0 . Это соответствует остаточному заряду, который наблюдается, когда заряженный диэлектрик сперва разряжается, а потом предоставляется самому себе. Он постепенно восстанавливает часть своего заряда, и если его потом опять разрядить, образуется третий заряд, причем эти последовательные заряды убывают по величине. В случае рассматриваемого иллюстративного эксперимента каждый заряд равен половине предыдущего, а разряды, которые равны $1/2$, $1/4$ и т. д. от первоначального заряда, образуют ряд, сумма которого равна первоначальному заряду.

Если бы вместо открывания и закрывания крана мы бы в течение всего эксперимента держали кран почти, но не совсем закрытым, мы бы получили случай, напоминающий случай электризации некоторого диэлектрика, который является совершенным изолятором и, кроме того, обнаруживает явление, называемое «электрическим поглощением».

Чтобы представить случай, в котором имеется истинное прохождение тока, мы должны либо сделать так, чтобы поршень пропускал жидкость, либо установить соединение между верхней частью трубки A и верхней частью трубки D .

Таким способом мы можем построить механическую иллюстрацию свойств диэлектрика любого вида, причем два вида электричества представлены двумя настоящими жидкостями, а электрический потенциал представлен давлением жидкости. Заряд и разряд представлены движением поршня P , а электродвижущая сила — равнодействующей сил, действующих на поршень.

ГЛАВА XI

ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

335. При нынешнем состоянии науки об электричестве определение электрического сопротивления проводника можно рассматривать как основную операцию в электричестве в том же смысле, в каком определение веса является основной операцией в химии.

Причина этого заключается в том, что определение абсолютного значения других электрических величин, таких, как количество электричества, электродвижущие силы, токи и т. д., требует в каждом случае выполнения сложного ряда операций, в том числе, в общем случае, наблюдения времени, измерения расстояний, а также определения моментов инерции, и эти операции, по крайней мере некоторые из них, должны повторяться для каждого нового определения, потому что невозможно сохранить в неизменном состоянии единицу электричества, или электродвижущей силы, или тока так, чтобы эти количества были пригодны для прямого сравнения.

Но если один раз определено электрическое сопротивление проводника, имеющего подходящую форму и сделанного из должным образом выбранного материала, то, как установлено, эта величина всегда остается той же самой для той же самой температуры, так что этот проводник может быть использован как стандарт

сопротивления, с которым можно сравнивать сопротивление других проводников, а сравнение двух сопротивлений — это такая операция, которая может быть проведена с исключительной точностью.

После того как установлена единица электрического сопротивления, изготавливаются вещественные копии этой единицы в виде «Катушек Сопротивления» для использования их исследователями электричества и, таким образом, в любой части света электрические сопротивления могут быть выражены через одну и ту же единицу. Эти катушки с единичным сопротивлением в настоящее время представляют собой единственный пример вещественных электрических стандартов, которые могут быть сохранены, воспроизведены и использованы с целью измерения. Меры электрической емкости, которые также имеют большое значение, до сих пор еще несовершенны из-за возмущающего действия электрической абсорбции.

336. Единица электрического сопротивления может быть совершенно произвольной, как в случае Эталона Якоби, который представлял собой определенный медный провод весом 22,4932 грамма, длиной 7,61975 метра и диаметром 0,667 миллиметра. Копии этого эталона изготовлялись Лейзером (Leyser) в Лейпциге, и их можно найти в разных местах.

В соответствии с другим методом единица сопротивления может быть определена как сопротивление образца, сделанного из определенного вещества и имеющего определенные размеры. Так, единица Сименса определяется как сопротивление столба ртути длиной в один метр и поперечным сечением в один квадратный миллиметр при температуре 0 °С.

337. Наконец, эта единица может быть определена в электростатической или в электромагнитной системе единиц. На практике во всех телеграфных операциях используется электромагнитная система, и потому единственные единицы, которые действительно употребляются, — это единицы этой системы.

В электромагнитной системе, как мы это покажем в своем месте, сопротивление есть величина, имеющая размерность скорости и поэтому может быть выражено как скорость (см. п. 628).

338. Первые фактические измерения в этой системе были проведены Вебером, который использовал в качестве своей единицы один миллиметр в секунду. Позднее, сэр У. Томсон использовал в качестве единицы один фут в секунду, однако большое число исследователей электричества согласились использовать единицу Британской Ассоциации (В. А.). Эта единица представляет такое сопротивление, которое, будучи выражено как скорость, равно десяти миллионам метров в секунду. Величина этой единицы более удобна, чем величина единицы Вебера, которая слишком мала. Иногда эту единицу называют единицей В. А., но, для того чтобы связать ее с именем того, кто открыл законы сопротивления, эта единица называется Ом.

339. Чтобы запомнить ее абсолютную величину, полезно знать, что десять миллионов метров по определению представляют собой расстояние от полюса до экватора, измеренное вдоль парижского меридиана. Таким образом, тело, проходящее за одну секунду путь вдоль меридиана от полюса до экватора, имело бы скорость, величина которой, по определению, равна величине одного Ома в электромагнитной системе.

Я говорю «по определению» потому, что если бы более точные исследования показали, что вещественный стандарт одного Ома, созданный Британской Ассо-

циацией, по своей величине отличается от этого значения скорости, то исследователи электричества не стали бы менять свои стандарты, а внесли бы поправку. Точно так же, метр, по определению, равен одной десятиллионной доле определенной дуги в четверть окружности, но, хотя было найдено, что это не совсем верно, длина метра не была изменена, зато размеры Земли выражаются менее простым числом.

В соответствии с методом Британской Ассоциации абсолютное значение величины *первоначально подбирается* так, чтобы представлять как можно точнее величину, выведенную из электромагнитной абсолютной системы.

340. Если создана вещественная единица, представляющая эту абстрактную величину, другие стандарты создаются путем копирования этой единицы. Этот процесс может быть выполнен с крайней точностью — во много раз большей точностью, чем, например, изготовление линейки длиной в один фут путем копирования стандартного фута.

Эти копии, изготовленные из наиболее стойких материалов, распределены по всем частям мира, и если первоначальные стандарты будут утрачены, вряд ли возникнут какие-либо трудности в получении их копий.

Но такие единицы, как единица Сименса, могут быть без очень большого труда воспроизведены со значительной точностью, и, поскольку соотношение между Омом и единицей Сименса известно, Ом можно воспроизвести, даже не имея стандарта для копирования, хотя для этого придется затратить много больше труда, а точность будет много меньше, чем в методе копирования.

Наконец, Ом можно воспроизвести электромагнитным методом, с помощью которого он и был первоначально определен. Этот метод является значительно более трудоемким, чем определение фута с помощью секундного маятника, и, по видимому, уступает последнему в точности. С другой стороны, определение электромагнитной единицы, выраженной через Ом, со степенью точности, отвечающей прогрессу электрической науки, представляет собой необычайно важную физическую задачу, вполне достойную повторного исследования.

Существующие катушки сопротивления, созданные для того, чтобы представлять один Ом, сделаны из сплава, состоящего из двух частей серебра и одной части платины, в виде проводов диаметром от 0,5 до 0,8 мм и длиной от одного до двух метров. Эти провода припаяны к толстым медным электродам. Сам провод покрыт двумя слоями шелка, окружен застывшим парафином и помещен в тонкостенный латунный футляр, так что катушка сопротивления легко может быть доведена до температуры, при которой ее сопротивление в точности равно одному Ому. Это значение температуры указано на изолирующей подставке катушки (см. рис. 28).

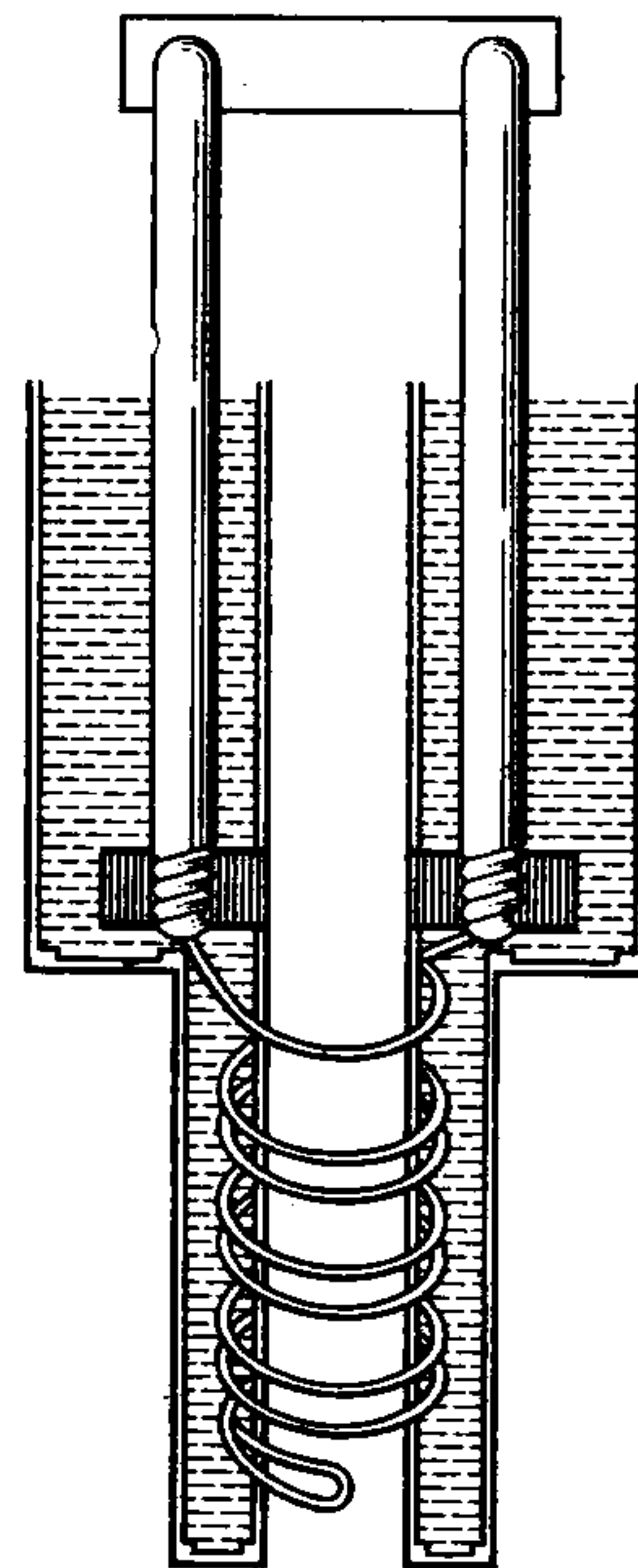


Рис. 28

О форме катушек сопротивления

341. Катушка сопротивления — это проводник, который легко можно включить в вольтову цепь, с тем чтобы ввести в эту цепь известное сопротивление.

Электроды или концы катушки должны быть сделаны так, чтобы способ соединения не вносил заметной ошибки. Для сопротивлений заметной величины важно, чтобы электроды были сделаны из толстых медных проводов или стержней, чтобы концы электродов были хорошо амальгамированы ртутью и были прижаты к плоским амальгамированным медным поверхностям, помещенным в чашки со ртутью.

Для очень больших сопротивлений достаточно, чтобы электроды были сделаны из массивной латуни и чтобы можно было производить соединения, вставляя латунный или медный клин в промежуток между электродами. Этот метод оказался очень удобным.

Сама катушка сопротивления состоит из полностью покрытого шелком провода, концы которого постоянно припаяны к электродам.

Катушка должна быть устроена так, чтобы легко было определить ее температуру. Для этой цели провод наматывается на трубку и закрывается другой трубкой, с тем чтобы его можно было поместить в сосуд с водой и чтобы вода имела доступ и к внешней, и к внутренней частям катушки.

Для того чтобы избежать электромагнитного воздействия от тока в катушке, провод сначала складывается пополам, а затем наматывается на трубку, и, таким образом, в каждой части катушки имеются равные и противоположные токи в прилегающих частях провода.

В тех случаях, когда желательно держать две катушки при одной и той же температуре, провода иногда располагаются рядом и наматываются вместе. Этот метод особенно полезен в тех случаях, когда важнее обеспечить равенство сопротивлений, чем знать их точную величину, как, например, в случае равных плеч мостика Уитстона (п. 347).

Когда впервые приступали к измерениям сопротивления, широко использовалась катушка сопротивления, состоявшая из неизолированного провода, который был намотан вдоль спиральной канавки вокруг цилиндра, сделанного из изолирующего материала. Такое сопротивление было названо Реостатом. Точность, с которой оказалось возможно сравнивать сопротивления, стала вскоре несовместимой с применением любого прибора, в котором контакты не лучше, чем в реостате. Однако в тех случаях, когда точные измерения не требуются, реостат еще используется для регулировки сопротивления.

Катушки сопротивления изготавливаются, как правило, из металлов, имеющих наибольшее сопротивление и мало меняющихся с температурой. Этому требованию очень хорошо удовлетворяет нейзильбер (мельхиор), но оказалось, что некоторые образцы с годами меняют свои свойства. Поэтому для стандартных сопротивлений применяются некоторые чистые металлы, а также сплав платины и серебра; относительное сопротивление таких катушек на протяжении нескольких лет найдено постоянным в пределах современной точности.

342. Для очень больших сопротивлений, таких, как несколько миллионов Ом, провод должен быть очень длинным или очень тонким, и изготовление катушки оказывается дорогим и трудным. Поэтому в качестве материалов для стандартов

большого сопротивления были предложены теллур и селен. Очень остроумный и легкий метод изготовления был недавно предложен Филлипсом (Phillips)¹. На куске эбонита или матового стекла наносится тонкая карандашная линия. Концы этой нити из графита присоединяются к металлическим электродам, и все вместе затем покрывается изолирующим лаком. Если окажется, что сопротивление такой карандашной линии остается постоянным, это будет лучший метод получения сопротивления в несколько миллионов Ом.

343. Существуют различные устройства, с помощью которых катушки сопротивления могут легко вводиться в цепь. Например, ряд катушек, сопротивления

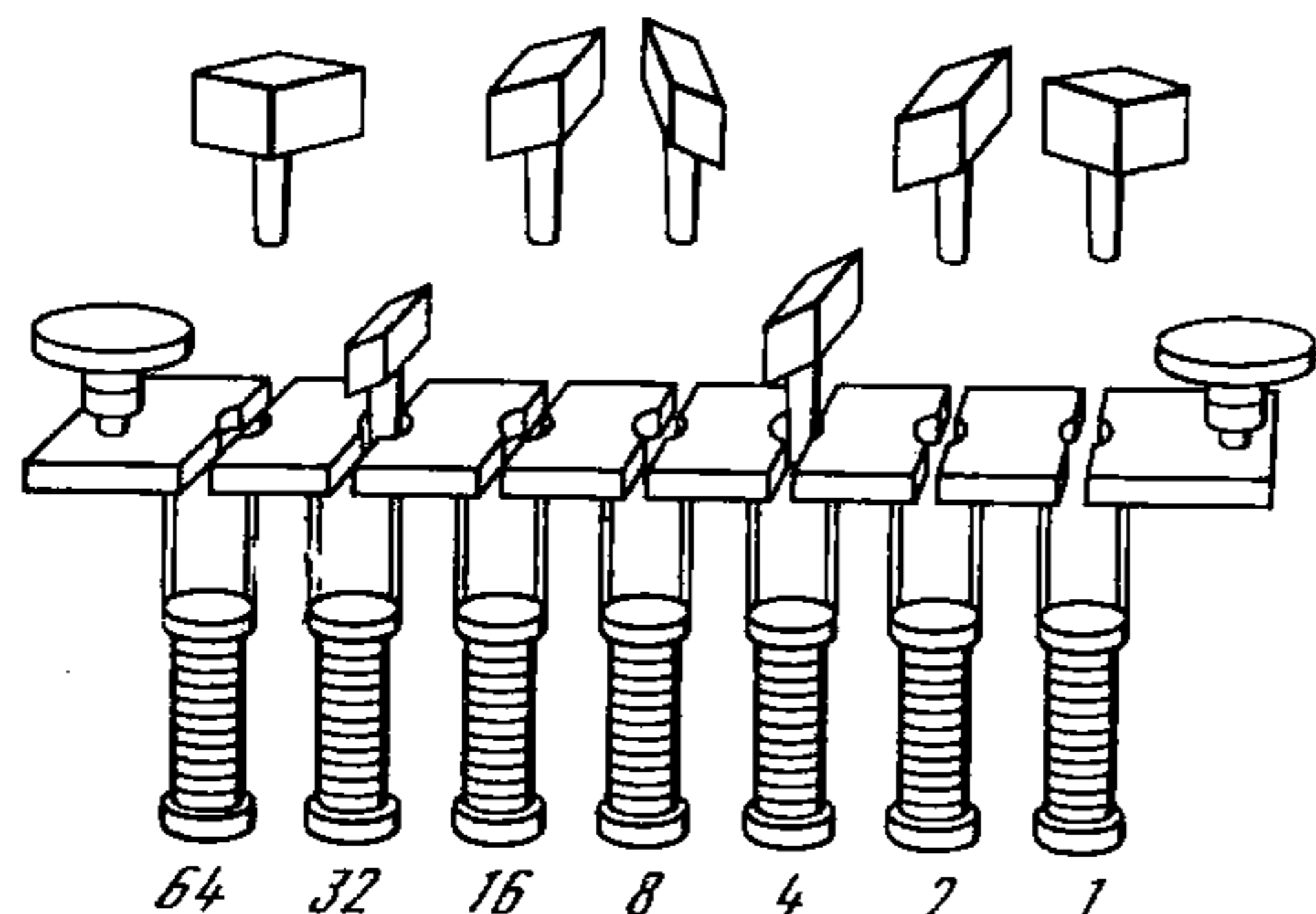


Рис. 29

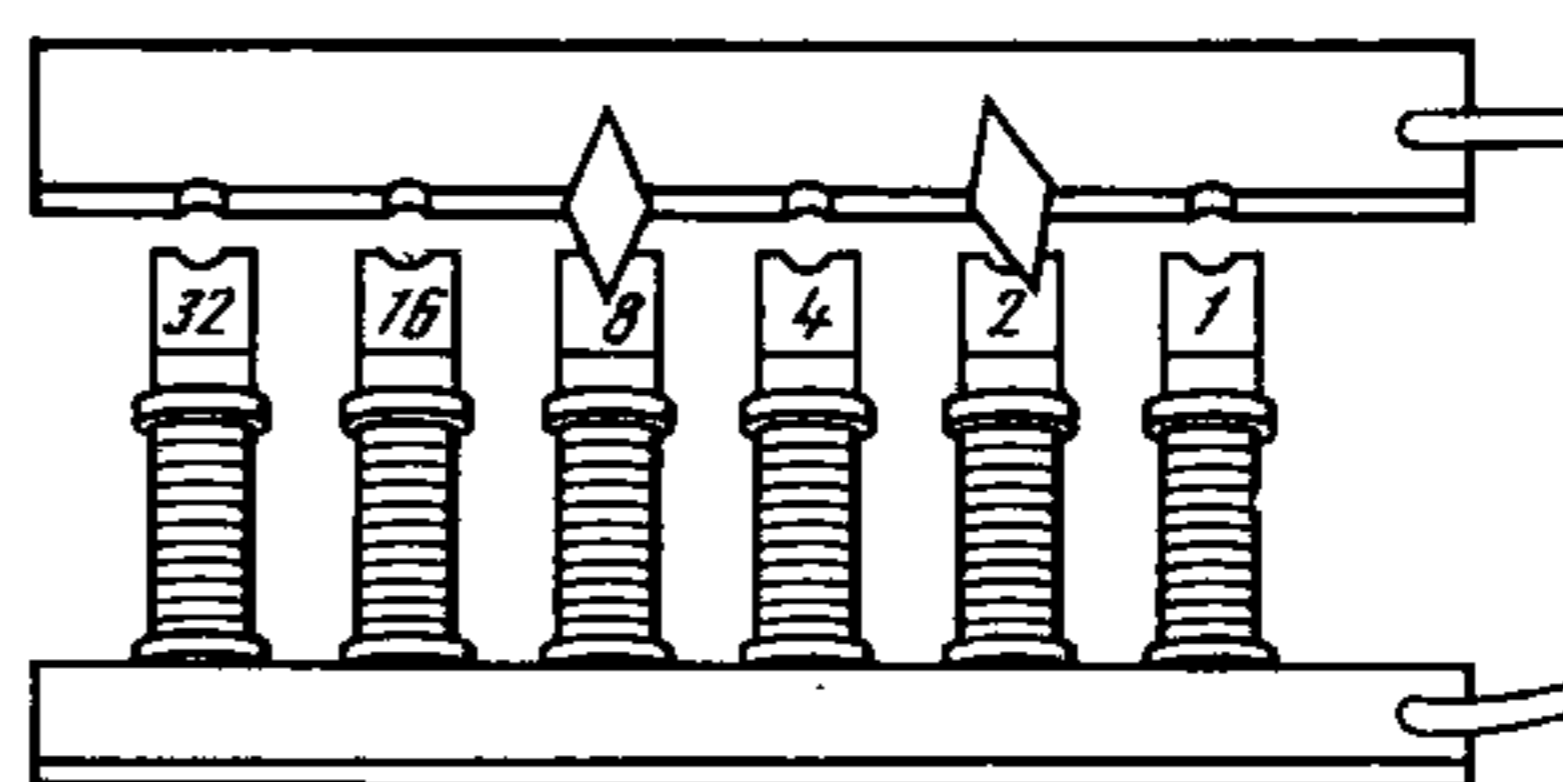


Рис. 30

которых равны 1, 2, 4, 16 и т. д., расположенные по возрастающим степеням числа 2, могут быть помещены в ящик друг за другом последовательно.

Электроды состоят из толстых латунных пластин, расположенных на внешней стороне ящика таким образом, что, если между двумя из них вставить в качестве шунта латунный штеккер или клин, сопротивление соответствующей катушки может быть убрано из цепи. Это устройство было введено Сименсом.

В каждом промежутке между электродами обозначено сопротивление соответствующей катушки, так что, если, например, мы хотим, чтобы сопротивление в ящике было равно 107, мы выражаем 107 в двоичной системе как сумму $64 + 32 + 8 + 2 + 1$, т. е. как число 1101011. Затем мы вынимаем штеккеры из отверстий, соответствующих числам 64, 32, 8, 2 и 1, и оставляем штеккеры в 16 и 4 [рис. 29].

Этот метод, основанный на двоичной системе, требует наименьшего числа отдельных катушек, а также легче всего проверяется. Потому что, если мы имеем другую катушку, равную 1, мы можем проверить равенство катушек 1 и 1', затем равенство $1 + 1'$ и 2, затем равенство $1 + 1' + 2$ и 4 и т. д.

Единственным недостатком этого устройства является то, что требуется знакомство с двоичной системой счисления, а такое знакомство не всегда есть у тех, кто привык выражать каждое число в десятичной системе.

344. Если измеряются проводимости, а не сопротивления, ящик с катушками сопротивления можно устроить по-другому.

Катушки располагаются таким образом, что один конец каждой из них соединен с длинным толстым куском металла, который образует один электрод ящика,

¹ *Phil. Mag.*, July, 1870.

а другой конец, как в предыдущем случае, соединен с массивной латунной пластиной.

Другим электродом ящика является длинная латунная пластина, расположенная таким образом, что, вставляя латунные штекеры в промежутки между этой пластиной и электродами катушек, мы можем соединить ее с первым электродом через любой заданный набор катушек. Тогда проводимость ящика равняется сумме проводимостей включенных катушек.

На рис. 30 сопротивления катушек равны 1, 2, 4 и т. д., а штекеры включают катушки 2 и 8, поэтому проводимость ящика равна $1/2 + 1/8 = 5/8$ и, следовательно, сопротивление ящика равно $8/5$ или 1,6.

Этот метод соединения катушек сопротивления для измерения дробных сопротивлений был введен сэром У. Томсоном под названием метода многократного (параллельного) соединения (см. п. 276).

О сравнении сопротивлений

345. Если электродвижущая сила батареи равна E , а сопротивление батареи и всех соединений, включая сопротивление гальванометра, измеряющего ток, равно R и если сила тока при включенной батарее равна I , а после введения в цепь добавочных сопротивлений r_1 , r_2 сила тока принимает соответственно значения I_1 , I_2 то по закону Ома

$$E = IR = I_1 (R + r_1) = I_2 (R + r_2).$$

Исключая электродвижущую силу батареи E и сопротивление R батареи и ее соединений, получаем формулу Ома

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{(I - I_1) I_2}{(I - I_2) I_1}.$$

Этот метод требует измерения отношений I , I_1 и I_2 , а потому гальванометр должен быть градуирован для абсолютных измерений.

Если сопротивления r_1 и r_2 равны, то равны токи I_1 и I_2 , и мы можем проверить равенство токов с помощью гальванометра, не дающего возможности определить их отношения.

Но этот подход следует скорее рассматривать как пример ошибочного подхода, а не как практический метод определения сопротивления. Электродвижущая сила не может поддерживаться строго постоянной, и внутреннее сопротивление батареи также очень сильно меняется, поэтому не следует основываться на любых методах измерений, в которых эти величины даже на короткое время предполагаются неизменными.

346. Сравнение сопротивлений может быть проведено с крайней точностью при помощи любого из двух методов, в которых результат не зависит от изменений R и E .

Первый из этих методов основан на использовании дифференциального гальванометра, прибора, в котором имеются две катушки, причем ток в каждой из них является независимым от тока в другой, поэтому, если сделать так, что эти токи текут в противоположных направлениях, они оказывают противоположное воздействие на стрелку, и если отношение этих токов равно отношению m к n , они не оказывают суммарного воздействия на стрелку гальванометра [рис. 31].

Обозначим через I_1 , I_2 токи, текущие через эти две катушки гальванометра. Тогда отклонение стрелки может быть записано в виде $\delta = mI_1 - nI_2$.

Пусть теперь ток батареи I разделяется между катушками гальванометра, и пусть в цепь первой и второй катушек введены соответственно сопротивления A и B . Обозначим остальные сопротивления в цепях этих катушек и их соединений соответственно через α и β , сопротивление батареи и ее соединений между точками C и D обозначим через r , а ее электродвижущую силу — через E .

Тогда, по Закону Ома, для разности потенциалов между точками C и D находим

$$I_1 (A + \alpha) = I_2 (B + \beta) = E - Ir,$$

и так как $I_1 + I_2 = I$, то

$$I_1 = E \frac{B + \beta}{D}, \quad I_2 = E \frac{A + \alpha}{D},$$

$$I = E \frac{A + \alpha + B + \beta}{D},$$

где

$$D = (A + \alpha)(B + \beta) + r(A + \alpha + B + \beta).$$

Поэтому отклонение стрелки гальванометра равно

$$\delta = (E/D) \{m(B + \beta) - n(A + \alpha)\},$$

и, если не наблюдается никакого отклонения, тогда мы знаем, что величина, заключенная в фигурные скобки, не может отличаться от нуля больше, чем на некоторое малое количество, зависящее от мощности батареи, от выбора подходящего устройства, от чувствительности гальванометра и от точности наблюдателя.

Предположим, что катушка B подобрана так, что не наблюдается видимого отклонения.

Пусть теперь вместо A вставляется другой проводник A' , и пусть проводник A' подбирается так, чтобы не было видимого отклонения. Тогда, очевидно, в первом приближении, $A' = A$.

Чтобы установить степень точности этой оценки, обозначим штрихами измененные количества, относящиеся ко второму наблюдению. Тогда

$$m(B + \beta) - n(A + \alpha) = \frac{D}{E} \delta,$$

$$m(B + \beta) - n(A' + \alpha) = \frac{D'}{E'} \delta';$$

отсюда

$$n(A' - A) = \frac{D}{E} \delta - \frac{D'}{E'} \delta'.$$

Если наблюдения дают, что δ и δ' , вместо того чтобы видимым образом обратиться в нуль, только равны друг другу, то, пока мы не можем ручаться, что $E =$

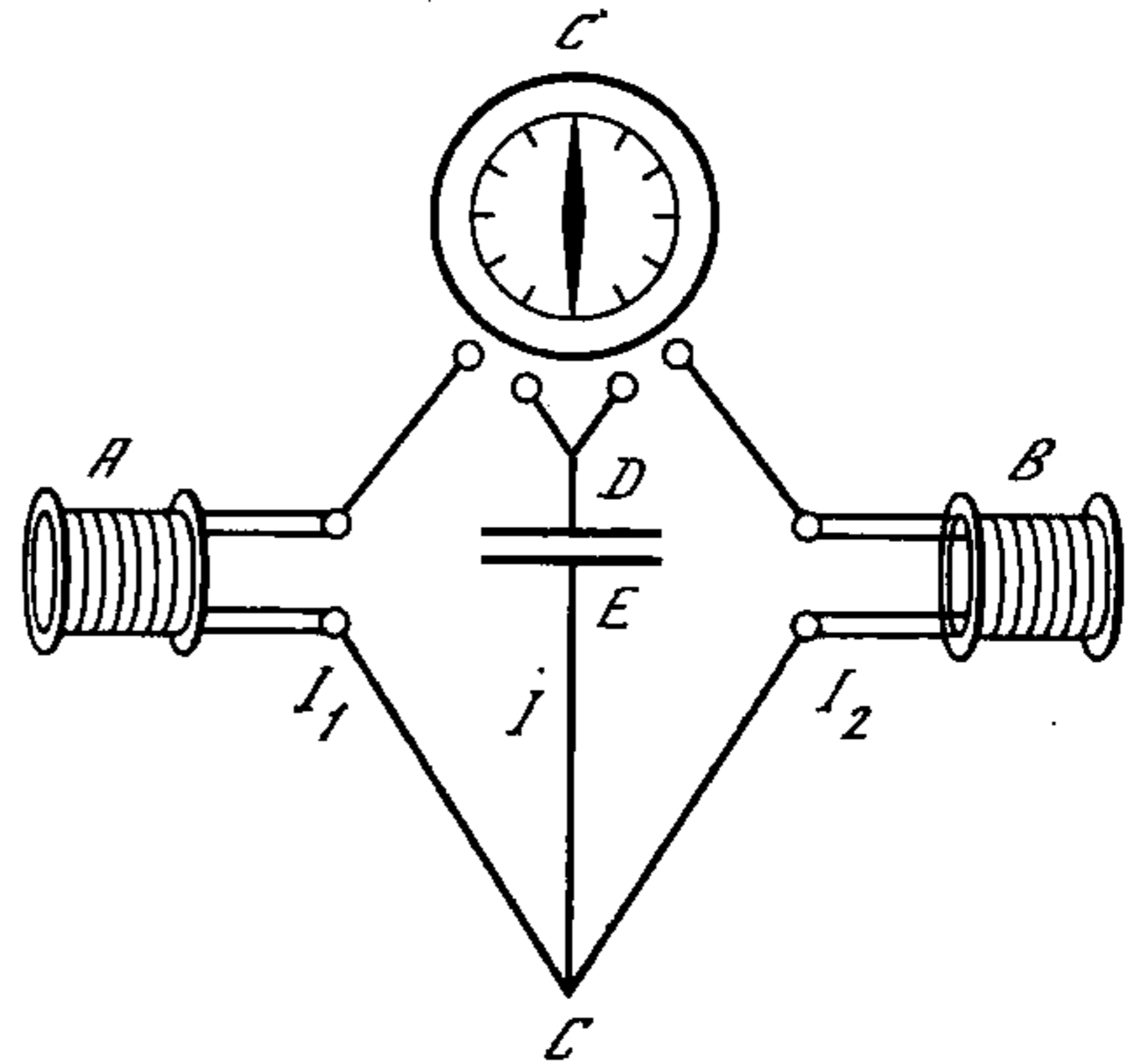


Рис. 31

$= E'$, правая часть последнего уравнения может не обратиться в нуль. В этом случае метод был бы только видоизменением метода, описанного выше.

Достоинство излагаемого метода состоит в том, что предметом наблюдения является отсутствие какого бы то ни было отклонения, или, иными словами, этот метод является Нулевым методом, в котором отсутствие силы определяется из такого наблюдения, в котором сила, если бы она отличалась от нуля больше чем на некоторую определенную малую величину, произвела бы наблюдаемый эффект.

Нулевые методы имеют большое значение там, где их можно применить, но они применимы только в тех случаях, когда мы можем сделать так, чтобы два равные и противоположные количества одного и того же вида одновременно входили в эксперимент.

В рассматриваемом нами случае обе величины δ и δ' являются слишком малыми для того, чтобы их можно было наблюдать, и поэтому любое изменение в величине E не нарушает точности результата.

Действительную степень точности этого метода можно определить, проведя некоторое число наблюдений, в каждом из которых A' подстраивается отдельно, и сравнивая результат каждого наблюдения со средним значением, полученным по всей последовательности измерений.

Но если мы выведем A' из настройки, изменив эту величину известным образом, например, включив в цепь A или в цепь B добавочное сопротивление, равное одной сотой части от величины A или B , и если мы затем определим результирующее отклонение стрелки гальванометра, мы можем узнать, сколько делений соответствует ошибке в один процент. Чтобы оценить действительную степень точности, мы должны оценить наименьшее отклонение, которое еще поддается наблюдению, и сравнить его с отклонением, соответствующим ошибке в один процент.

² Если нужно сравнить величины A и B и если A и B поменять местами, то уравнение станет таким:

$$m(A + \beta) - n(B + \alpha) = \frac{D'}{E'} \delta',$$

откуда

$$(m + n)(B - A) = \frac{D}{E} \delta - \frac{D'}{E'} \delta'.$$

Если m и n , A и B , α и β , E и E' приблизительно равны, то

$$B - A = (1/2nE)(A + \alpha)(A + \alpha + 2r)(\delta - \delta').$$

Здесь за величину $\delta - \delta'$ можно принять наименьшее наблюдаемое отклонение гальванометра.

Если бы провод гальванометра был длиннее и тоньше при неизменной полной массе, тогда величина n менялась бы как длина провода, а величина α — как квадрат длины. Поэтому величина $(A + \alpha)(A + \alpha + 2r)/n$ будет иметь минимум при

$$\alpha = \frac{1}{3}(A + r) \left\{ 2 \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{r^2}{(A + r)^2}} - 1 \right\}.$$

Если мы предположим, что сопротивление батареи r пренебрежимо мало в сравнении с A , это даст $\alpha = A/3$, или *сопротивление каждой катушки гальванометра должно быть равно одной трети от величины измеряемого сопротивления.*

² Это исследование взято из трактата Вебера по гальванометрам. *Göttingen Transactions*. X. p. 65.

Мы тогда находим

$$B - A = \frac{8}{9} \frac{A^2}{nE} (\delta - \delta').$$

Если мы пустим ток только через одну из катушек гальванометра и если при этом отклонение будет равно Δ (предполагаем, что отклонение строго пропорционально отклоняющей силе), то

$$\Delta = \frac{nE}{A + \alpha + r} = \frac{3}{4} \frac{nE}{A}, \quad \text{если } r = 0 \text{ и } \alpha = 1/3A.$$

Отсюда $(B - A)/A = 2(\delta - \delta')/3\Delta$.

В дифференциальном гальванометре два тока должны производить равное и противоположное воздействие на подвешенную стрелку. Сила, с которой каждый из токов действует на стрелку, зависит не только от величины этого тока, но и от положения витков провода относительно стрелки. Поэтому, если катушка намотана недостаточно тщательно, отношение m к n может меняться при изменении положения стрелки, и, следовательно, если возникают подозрения о любом изменении положения стрелки, необходимо соответствующими методами определять это отношение m к n каждый раз в течение хода измерений.

В другом методе, в котором используется мостик Уитстона, требуется только обычный гальванометр, и наблюдаемое нулевое отклонение стрелки вызвано не противодействием двух токов, а отсутствием тока в проводе. Поэтому мы наблюдаем не только нулевое отклонение, но и нулевой ток, и не может возникнуть ошибок от недостаточной регулярности или от изменений любого вида в катушках гальванометра. От гальванометра только требуется, чтобы он был достаточно чувствителен, для того чтобы определять существование и направление тока, и не нужно каким-либо способом определять величину тока или сравнивать величину этого и другого тока.

347. Мостик Уитстона состоит, по существу, из шести проводников, соединяющих четыре точки. К двум из этих точек прикладывается электродвижущая сила E с помощью вольтовой батареи, введенной между B и C . Ток между двумя другими точками O и A измеряется гальванометром [рис. 32].

При определенных условиях этот ток обращается в нуль. Тогда говорят, что проводники BC и OA сопряжены один другому, что накладывает определенную связь на сопротивления других четырех проводников, и эта связь используется при измерении сопротивлений.

Если ток через OA равен нулю, потенциал в точке O должен быть равен потенциалу в точке A . Но если мы знаем потенциалы в B и C , мы можем определить потенциалы в O и A с помощью правил, данных в п. 275, с учетом того, что ток в

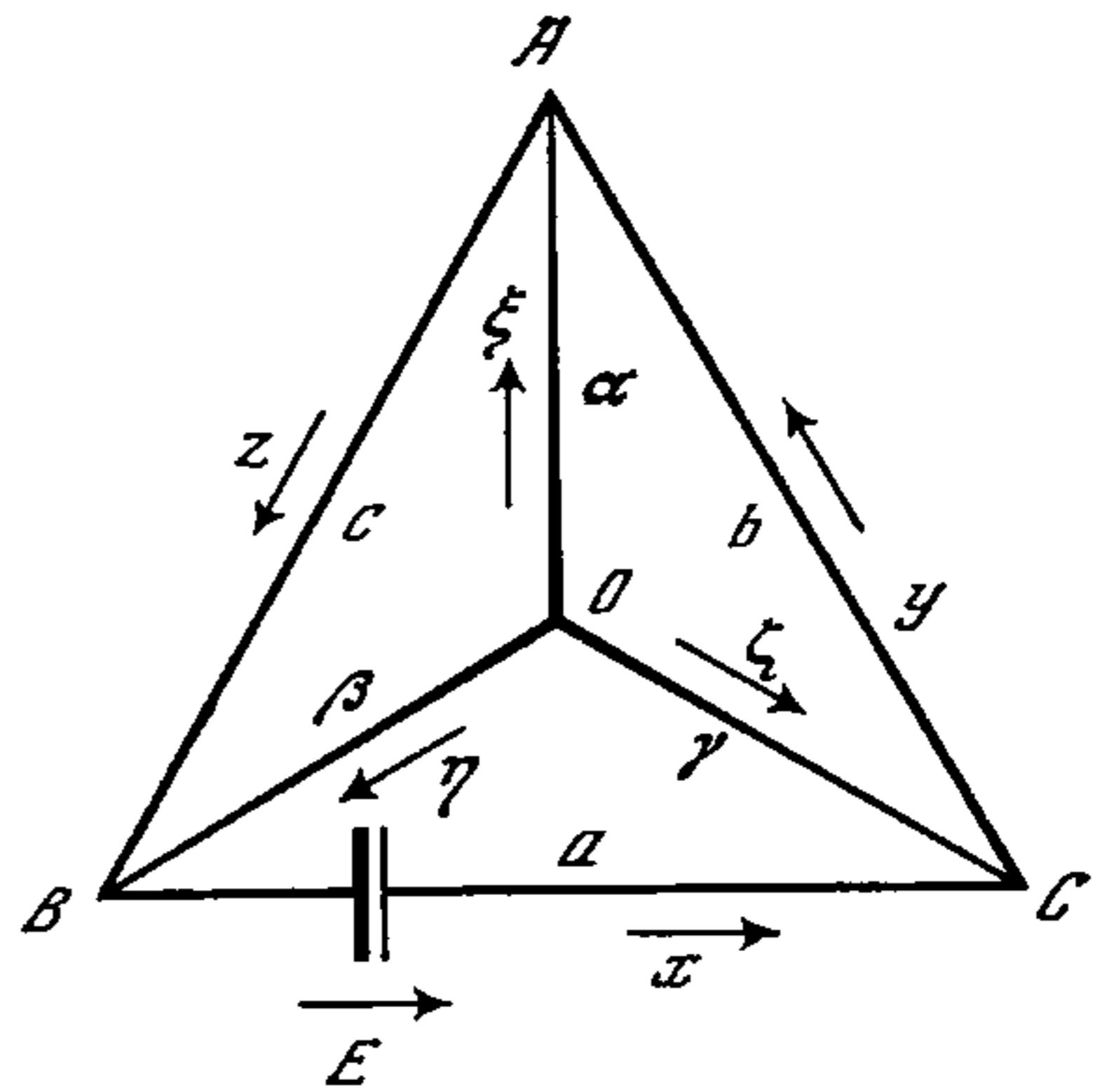


Рис. 32

OA отсутствует:

$$O = \frac{B\gamma + C\beta}{\beta + \gamma}, \quad A = \frac{Bb + Cc}{b + c},$$

откуда получаем условие $b\beta = c\gamma$, где b, c, β, γ обозначают соответственно сопротивления участков CA, AB, BO и OC .

Чтобы определить степень точности, достижимую в этом методе, мы должны определить силу тока в OA , если это условие не выполнено точно.

Пусть A, B, C и O — четыре точки. Пусть токи, текущие вдоль BC, CA и AB равны соответственно x, y и z , а сопротивления этих проводников — a, b и c . Пусть токи, текущие вдоль OA, OB и OC равны ξ, η, ζ , а соответствующие сопротивления равны α, β и γ . Пусть электродвижущая сила E действует вдоль BC . Требуется определить ток ξ через OA .

Обозначим потенциалы в точках A, B, C и O буквами A, B, C и O . Уравнения, определяющие прохождение тока, будут

$$\begin{aligned} ax &= B - C + E, & \alpha\xi &= O - A, \\ by &= C - A, & \beta\eta &= O - B, \\ cz &= A - B, & \gamma\zeta &= O - C, \end{aligned}$$

а уравнения непрерывности:

$$\begin{aligned} \xi + y + z &= 0, \\ \eta + z - x &= 0, \\ \zeta + x - y &= 0. \end{aligned}$$

Рассматривая систему как образованную тремя цепями OBC, OCA и OAB , в которых токи соответственно равны x, y и z , и применяя к каждой замкнутой цепи правило Кирхгофа, мы исключаем значения потенциалов O, A, B, C и токов ξ, η, ζ и получаем следующие уравнения для x, y и z :

$$\begin{aligned} (a + \beta + \gamma)x & & -\gamma y & & -\beta z &= E, \\ -\gamma x + (b + \gamma + \alpha)y & & & & -\alpha z &= 0, \\ -\beta x & & -\alpha y + (c + \alpha + \beta)z & & &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, если мы положим

$$D = \begin{vmatrix} a + \beta + \gamma, & -\gamma, & -\beta, \\ -\gamma, & b + \gamma + \alpha, & -\alpha, \\ -\beta, & -\alpha, & c + \alpha + \beta \end{vmatrix},$$

найдем

$$\xi = \frac{E}{D} (b\beta - c\gamma)$$

и

$$x = \frac{E}{D} \{ (b + \gamma)(c + \beta) + \alpha(b + c + \beta + \gamma) \}.$$

348. Значение D можно выразить в симметричной форме

$$D = abc + bc(\beta + \gamma) + ca(\gamma + \alpha) + ab(\alpha + \beta) + (a + b + c)(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta),$$

или, так как мы предполагаем, что батарея составляет часть проводника a , а гальванометр — часть проводника α , можем вместо a писать сопротивление батареи B , а вместо α — сопротивление гальванометра G . Мы тогда находим

$$D = BG(b+c+\beta+\gamma) + B(b+\gamma)(c+\beta) + G(b+c)(\beta+\gamma) + bc(\beta+\gamma) + \beta\gamma(b+c).$$

Если бы электродвижущая сила E действовала вдоль отрезка OA , причем сопротивление отрезка OA было бы по-прежнему равно a , и если бы гальванометр был включен в BC , причем сопротивление BC было бы по-прежнему равно α , то величина D не изменилась бы и ток в BC , вызванный электродвижущей силой E , действующей вдоль OA , был бы равен току в OA , вызванному электродвижущей силой E , действующей в BC .

Но если мы просто отъединим батарею и гальванометр и, не меняя их соответствующих сопротивлений, присоединим батарею к точкам O и A , а гальванометр — к точкам B и C , то в выражении для D мы должны поменять местами B и G . Если обозначить через D' выражение, в которое переходит D после такой перестановки, мы находим

$$D - D' = (G - B)\{(b+c)(\beta+\gamma) - (b+\gamma)(\beta+c)\} = (B - G)\{(b-\beta)(c-\gamma)\}.$$

Предположим, что сопротивление гальванометра больше, чем сопротивление батареи.

Предположим также, что в своем первоначальном положении гальванометр соединяет контакт двух проводников, β и γ , обладающих наименьшими сопротивлениями, с контактом двух проводников b , c , обладающих наибольшими сопротивлениями. Другими словами, мы будем предполагать, что если величины b , c , γ , β расположены в порядке возрастания, то b и c стоят рядом и γ и β стоят рядом. Поэтому величины $b - \beta$ и $c - \gamma$ имеют один и тот же знак, вследствие чего их произведение положительно, и потому $D - D'$ имеет тот же самый знак, что $B - G$.

Следовательно, если сделать так, чтобы гальванометр соединял контакт между двумя наибольшими сопротивлениями с контактом между двумя наименьшими сопротивлениями, и если у гальванометра сопротивление больше, чем у батареи, то величина D будет меньше, а величина отклонения гальванометра — больше по сравнению с тем случаем, когда соединения переставлены местами.

Отсюда вытекает следующее правило для получения наибольших отклонений гальванометра в данной системе: из двух сопротивлений, батареи и гальванометра, большее нужно подключить так, чтобы оно соединяло два наибольших и два наименьших из остальных четырех сопротивлений.

349. Предположим, что нам нужно определить отношение сопротивлений двух проводников AB и AC и что это нужно сделать, отыскав такую точку O проводника BC , что если точки O и A соединить проводом с введенным в него гальванометром, а между B и C включить батарею, то заметного отклонения стрелки гальванометра не произойдет.

Можно предположить, что проводник BC представляет собой провод с однородным сопротивлением, разделенный на равные части, и поэтому отношение сопротивлений BO и OC можно отсчитывать сразу.

Можно не делать весь проводник однородным, а сделать из однородного провода только часть проводника, прилегающую к точке O , а те части, которые на-

ходятся по обе стороны, могут быть катушками любой формы, сопротивление которых точно известно.

Теперь мы будем использовать обозначения, отличающиеся от симметричных обозначений, с которых мы начали.

Пусть сопротивление BAC равно R , $c=mR$ и $b=(1-m)R$, полное сопротивление BOC равно S , $\beta=nS$ и $\gamma=(1-n)S$.

Величина n отсчитывается непосредственно, а величина m определяется по n в положении, когда нет заметного отклонения гальванометра.

Обозначим сопротивление батареи и ее соединений через B , а сопротивление гальванометра и его соединений — через G .

Находим, как раньше,

$$D = G\{BR + BS + RS\} + m(1-m)R^2(B+S) + n(1-n)S^2(B+R) + (m+n-2mn)BRS,$$

и если ξ — ток в проводе гальванометра, то $\xi = (ERS/D)(n-m)$.

Чтобы получить наиболее точные результаты, мы должны сделать отклонение стрелки настолько большим, насколько это возможно в сравнении с $(n-m)$. Этого можно добиться, подбирая надлежащим образом размеры гальванометра и провод стандартного сопротивления.

Когда мы дойдем до Гальванометрии, п. 716, будет показано, что если у проволоки в гальванометре менять форму, оставляя неизменной массу, то отклонение стрелки на единицу тока пропорционально длине, но сопротивление возрастает как квадрат длины. Отсюда следует, что максимальное отклонение имеет место в том случае, когда сопротивление проволоки в гальванометре равно постоянному сопротивлению остальной цепи.

Для настоящего случая, если отклонение обозначить через δ , имеем $\delta = CV\bar{G}\xi$, где C — некоторая постоянная, а G — сопротивление гальванометра, которое меняется как квадрат длины проволоки. Отсюда мы находим, что, когда величина δ достигает максимума, та часть выражения для D , которая содержит G , должна быть равна остальной части выражения.

Если мы также положим $m=n$, как это имеет место в случае, если мы произвели правильное измерение, мы находим, что наилучшее значение G равно $G = n(1-n)(R+S)$.

Этот результат легко получить, рассматривая сопротивление системы между точками A и O с учетом того, что отрезок BC сопряжен отрезку AO и не влияет на это сопротивление.

Таким же путем мы могли бы найти, что если задана полная площадь активных поверхностей батареи, то, поскольку в этом случае величина E пропорциональна \sqrt{B} , наиболее выгодное устройство батареи достигается при условии

$$B = RS/(R+S).$$

Наконец, мы определим такое значение S , при котором данное изменение величины n вызывает наибольшее отклонение гальванометра. Дифференцируя по S выражения для ξ , мы находим, что оно максимально при

$$S^2 = \frac{BR}{B+R} \left(R + \frac{G}{n(1-n)} \right).$$

Если нам нужно проделать очень много измерений сопротивления, в которых

величина имеющихся сопротивлений примерно одна и та же, имеет смысл специально подготовить для этой цели батарею и гальванометр. В этом случае мы находим, что наилучшее устройство достигается при $S=R$, $B=R/2$, $G=2n(1-n)R$, и если $n=1/2$, то $G=R/2$.

Об использовании Мостика Уитстона

350. Мы уже объяснили общую теорию Мостика Уитстона, теперь рассмотрим некоторые из его применений.

С наибольшей точностью может быть проведено сравнение двух равных сопротивлений.

Предположим, что β — стандартная катушка сопротивления и мы хотим отрегулировать катушку γ так, чтобы по своему сопротивлению она была равна β [рис. 33].

Приготавливаются еще две катушки b и c , которые равны или почти равны друг другу, и электроды всех четырех катушек помещаются в ртутные чашки таким образом, что ток батареи разделяется между двумя ветвями, из которых одна состоит из β и γ , а другая — из b и c . Катушки b и c соединены проводом PR , сопротивление которого настолько однородно, насколько это возможно. Вдоль провода PR расположена шкала с равными делениями.

Провод гальванометра подведен одним концом к точке соединения β и γ , другим — к точке Q на проводе PR , и точка контакта Q перемещается до такого положения, при котором после замыкания сначала цепи батареи, а затем цепи гальванометра не наблюдается отклонения стрелки гальванометра.

После этого катушки β и γ меняют местами и отыскивается новое положение Q .

Если это новое положение оказывается тем же, что и старое, то мы знаем, что перемена местами сопротивлений β и γ не привела к изменению в соотношении сопротивлений, и, следовательно, катушка γ отрегулирована правильно. Если контакт Q нужно перемещать, то направление и величина перемещения указывают на характер и величину изменений в длине провода γ , после которых сопротивление катушки γ станет таким же, как у катушки β .

Если сопротивления катушек b и c , каждое из которых включает в себя сопротивление части провода PR до его нулевого отсчета, равны соответственно сопротивлениям b и c делений провода и если x — показание шкалы для точки Q в первом случае, а y — во втором, то

$$\frac{c+x}{b-x} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{c+y}{b-y} = \frac{\gamma}{\beta},$$

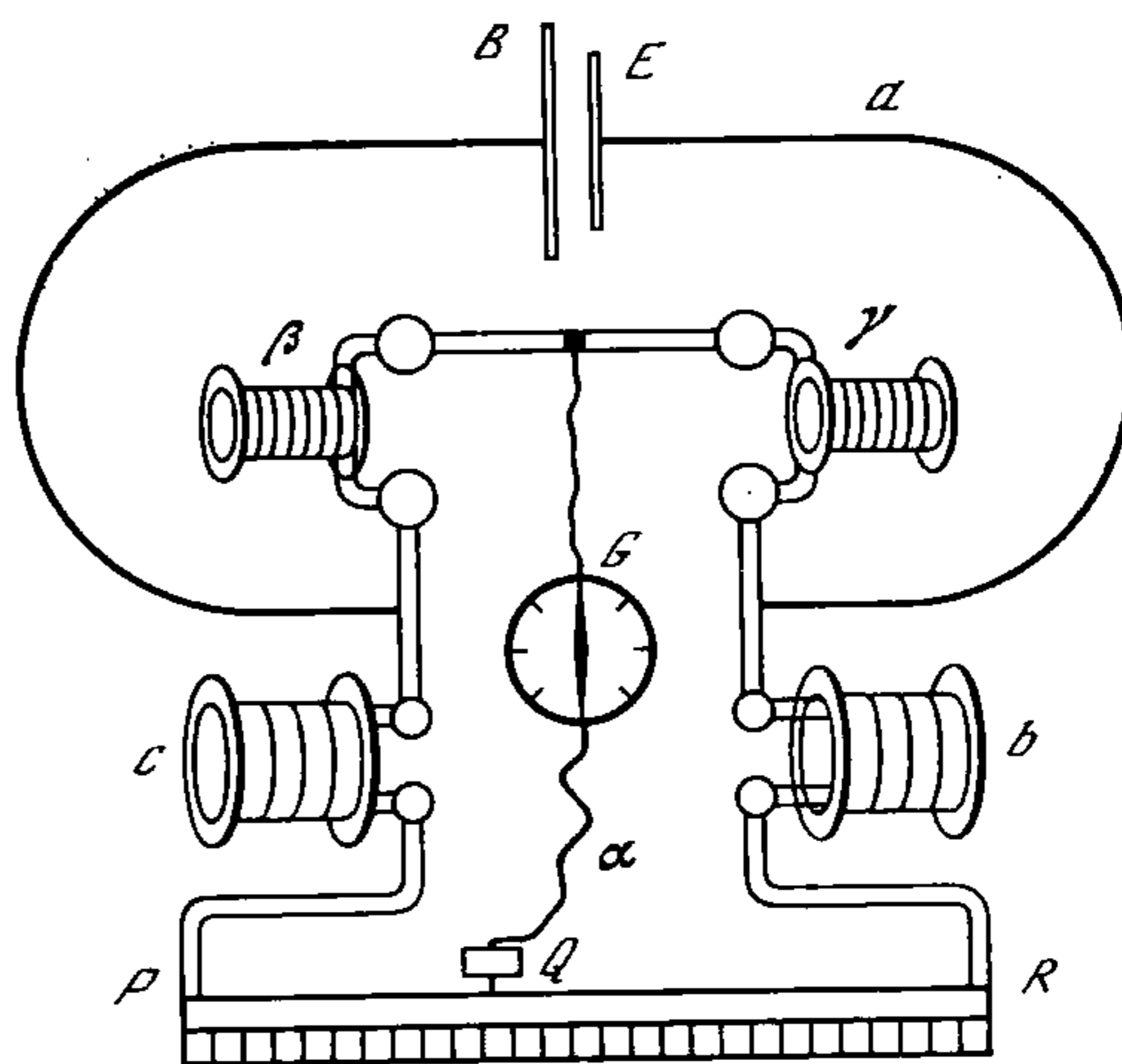


Рис. 33

откуда

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2} = 1 - \frac{(b+c)(y-x)}{(c+x)(b-y)}.$$

Поскольку величина $b - y$ примерно равна величине $c + x$ и обе эти величины велики в сравнении с x или y , мы можем записать последнее равенство в виде

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2} = 1 + 4 \frac{y-x}{b+c}$$

и

$$\gamma = \beta \left(1 + 2 \frac{y-x}{b+c} \right).$$

После того как величина γ подобрана настолько хорошо, насколько это возможно, мы заменяем катушки b и c на другие, сопротивление которых, скажем, в десять раз больше.

Остающееся различие между β и γ вызовет теперь в десять раз большее различие в положении Q , чем при первоначальных катушках b и c , и таким путем мы можем постепенно увеличивать точность сравнения.

Регулировка с помощью провода со скользящим контактом проводится быстрее, чем при использовании ящика сопротивлений, и позволяет плавное изменение.

Ни в коем случае нельзя вместо гальванометра вводить в провод со скользящим контактом батарею, потому что прохождение сильного тока в точке контакта может повредить поверхность провода. Поэтому такое устройство рассчитано для случая, в котором сопротивление гальванометра больше, чем сопротивление батареи.

³ Если γ — измеряемое сопротивление, a — сопротивление батареи и α — сопротивление гальванометра, то наилучшие значения других сопротивлений, как показал м-р Оливер Хэвисайд (*Phil. Mag.*, Feb., 1873), равны

$$c = \sqrt{a\alpha}, \quad b = \sqrt{\alpha\gamma \frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\gamma}}, \quad \beta = \sqrt{\alpha\gamma \frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\gamma}}.$$

Об измерении малых сопротивлений

351. Если в цепь вводится короткий и толстый проводник, его сопротивление оказывается настолько малым по сравнению с сопротивлением, возникающим из-за неизбежных дефектов в соединениях, таких, как плохие контакты или несовершенная пайка, что с помощью описанных выше способов нельзя получить правильную величину сопротивления.

Цель подобных экспериментов, как правило, состоит в том, чтобы определить удельное сопротивление вещества, и к ним прибегают в тех случаях, когда вещество не может быть получено в виде длинной тонкой проволоки или когда нужно определить как продольную, так и поперечную проводимость.

Сэр У. Томсон ⁴ описал применимый к подобным случаям метод, который мы можем рассматривать как пример системы, состоящей из девяти проводников [рис. 34].

³ Последний абзац п. 350 отсутствует в первом издании. — *Примеч. ред.*

⁴ *Proc. R. S.*, June 6, 1881.

Самая главная часть метода состоит в измерении сопротивления не проводника полной длины, а части проводника, заключенной между двумя отметками на некотором малом расстоянии от его концов.

Сопротивление, которое мы хотим измерить, — это сопротивление, испытываемое током, величина которого однородна в любом сечении проводника и который течет в направлении, параллельном оси проводника. Но непосредственно вблизи

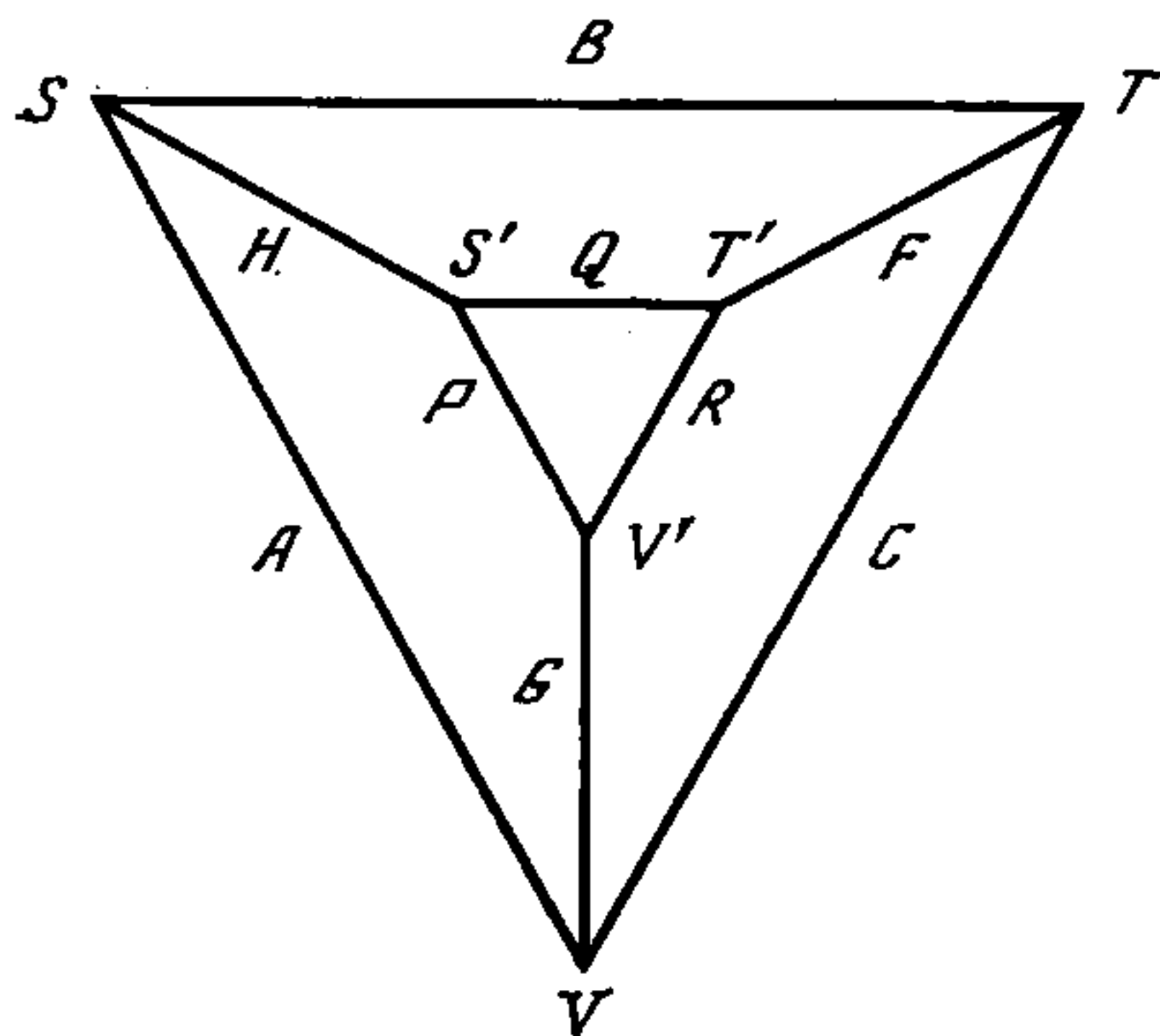


Рис. 34

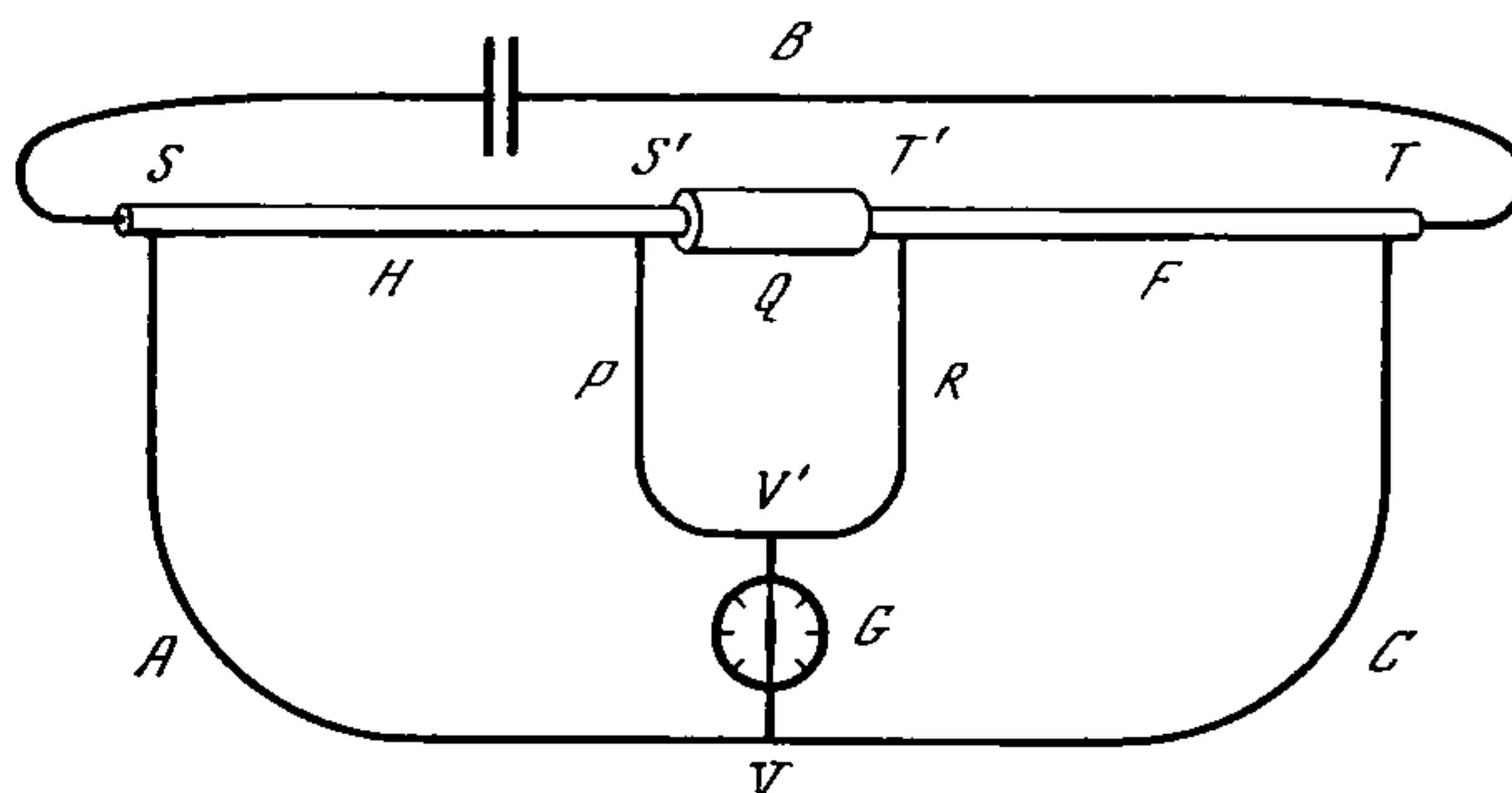


Рис. 35

концов, когда ток подводится с помощью электродов, припаянных, амальгмированных или просто прижатых к концам проводника, однородность в распределении тока по проводнику, как правило, отсутствует. На малых расстояниях от краев ток становится заметно однородным. Читатель может убедиться в этом, обратившись к исследованию и графикам в п. 193, где ток входит в металлическую пластину с параллельными границами через одну из границ, но быстро становится параллелен границам.

Требуется сравнить сопротивление проводников между определенными отметками S , S' и T , T' .

Проводники включаются последовательно в цепь батареи, обладающей малым сопротивлением, причем соединения должны быть настолько идеально проводящими, насколько это возможно. Провод подводится к проводникам в точках S и T , другой провод $S'V'T'$ касается проводников в точках S' и T' .

Провода гальванометра соединены с точками V и V' этих проводов [рис. 35].

Сопротивления проводов SVT и $S'V'T'$ настолько велики, что сопротивлением, происходящим от несовершенства соединений в точках S , T , S' или T' , можно пренебречь в сравнении с сопротивлением провода. Точки V и V' подбираются так, чтобы сопротивления ветвей каждого провода, ведущих к двум проводникам, относились друг к другу приблизительно так же, как сопротивления этих двух проводников.

Обозначим через H и F сопротивления проводников SS' и $T'T'$.

« » A и C сопротивления ветвей SV и VT .

« » P и R сопротивления ветвей $S'V'$ и $V'T'$.

« » Q сопротивление соединительной части $S'T'$.

« » B сопротивление батареи и ее соединений.

« » G сопротивление гальванометра и его соединений.

Симметрия системы может быть уяснена с помощью скелетной схемы, изображенной на рис. 34.

Условие, при выполнении которого батарея B и гальванометр G могут быть сопряженными проводниками, в этом случае таково:

$$\frac{F}{C} - \frac{H}{A} + \left(\frac{R}{C} - \frac{P}{A} \right) \frac{Q}{P+Q+R} = 0.$$

Но сопротивление Q соединительного провода является настолько малым, насколько это возможно. Если бы оно равнялось нулю, это уравнение свелось бы к следующему: $(F/C) = (H/A)$, и отношение сравниваемых между собой сопротивлений равнялось бы отношению C к A , как в обычном Мостике Уитстона.

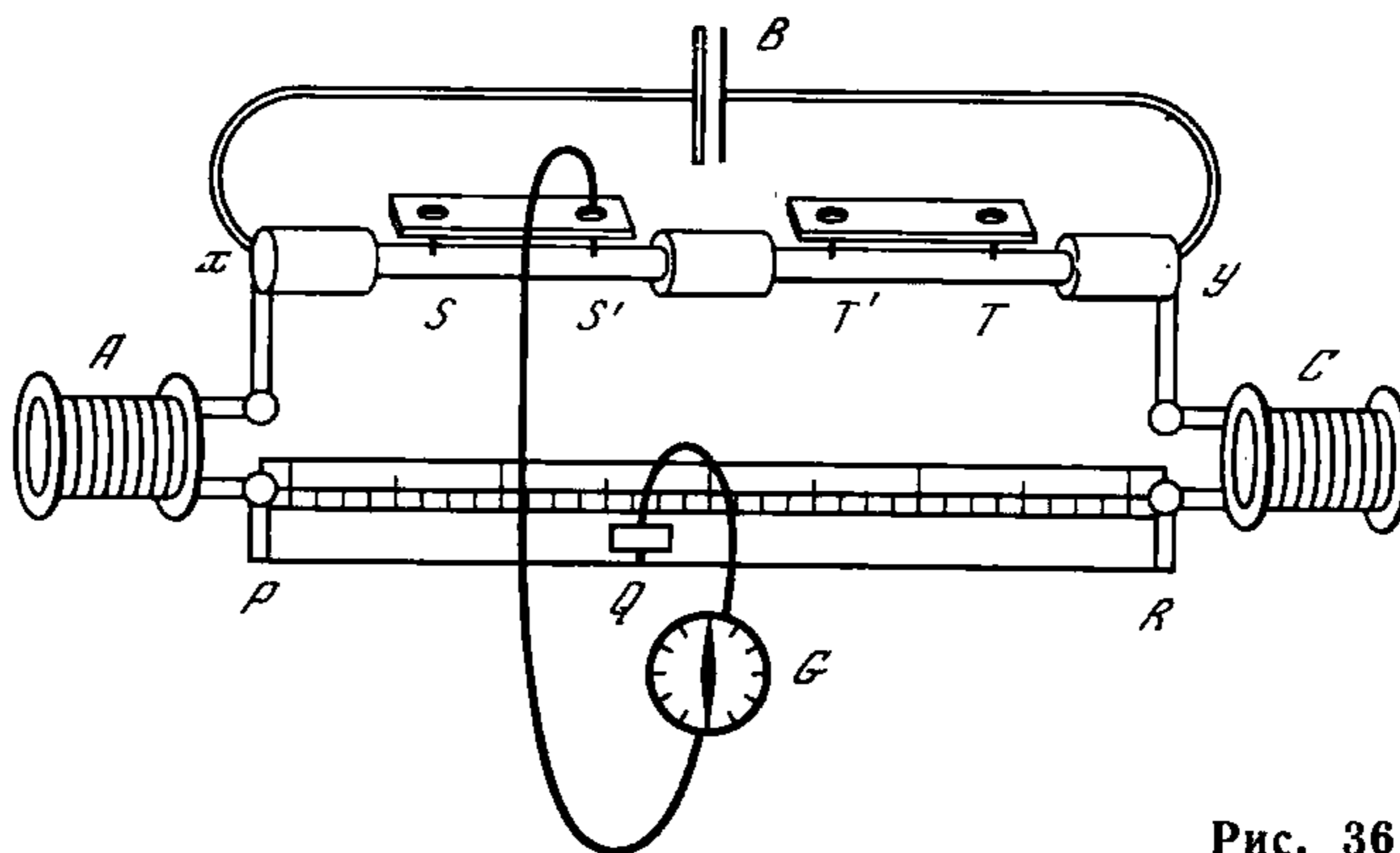


Рис. 36

В нашем случае величина Q мала в сравнении с P или R , и, если мы выберем точки V и V' таким образом, чтобы отношение R к C приблизительно равнялось отношению P к A , последний член в уравнении исчезнет, и мы будем иметь

$$F : H = C : A.$$

Успех этого метода в некоторой степени зависит от совершенства контактов между проводами и сравниваемыми проводниками в точках S , S' , T' и T . Следующий метод, который применяют г-да Матиссен и Хоккин⁵, позволяет обойтись без этого ограничения.

352. Испытуемые проводники располагаются уже описанным образом, причем соединения выполняются как можно лучше. Требуется сравнить сопротивление между отметками SS' на первом проводнике с сопротивлением между отметками $T'T$ на втором проводнике.

Два проводящих острия или острых лезвия закреплены в куске изолирующего материала таким образом, что расстояние между ними может быть точно измерено. Это устройство накладывается на испытуемый проводник, и тогда точки контакта с проводником находятся на известном расстоянии SS' друг от друга. Каждый из этих двух контактов соединен со ртутной чашкой, в которую может быть погружен один из электродов гальванометра [рис. 36].

⁵ *Laboratory. Matthiessen and Hockin on Alloys.*

В остальном прибор устроен так же, как Мостик Уитстона, с катушками или ящиками сопротивлений A и C ; провод PR снабжен скользящим контактом Q , к которому присоединен другой электрод гальванометра.

Пусть гальванометр соединен с точками S и Q и пусть мы так подобрали сопротивления A_1 и C_1 и так определили положение Q (обозначим это положение Q_1), что в проводе гальванометра нет тока.

Тогда мы знаем, что

$$\frac{XS}{SY} = \frac{A_1 + PQ_1}{C_1 + Q_1R},$$

где XS , PQ_1 и т. д. обозначают сопротивления соответствующих проводников.

Отсюда мы получаем

$$\frac{XS}{XY} = \frac{A_1 + PQ_1}{A_1 + C_1 + PR}.$$

Пусть теперь электрод гальванометра присоединен к S' и пусть сопротивление передается от C к A (путем переноса катушек сопротивления с одной стороны на другую) до тех пор, пока не возникнет возможность установить электрическое равновесие гальванометра, поместив Q в некоторой точке провода, скажем в точке Q_2 . Пусть в этом случае значения C и A равны C_2 и A_2 . Положим

$$A_2 + C_2 + PR = A_1 + C_1 + PR = R.$$

Тогда получаем, как раньше, $\frac{XS'}{XY} = \frac{A_2 + PQ_2}{R}$, откуда $\frac{SS'}{XY} = \frac{A_2 - A_1 + Q_1Q_2}{R}$.

Точно так же, помещая это устройство на второй проводник в точках T , T' и снова перенося сопротивление, мы получаем при положении электрода в T' $\frac{XT'}{XY} = \frac{A_3 + PQ_3}{R}$, а при положении электрода в I имеем $\frac{XT}{XY} = \frac{A_4 + PQ_4}{R}$.

Отсюда $\frac{T'T}{XY} = \frac{A_4 - A_3 + Q_3Q_4}{R}$.

Теперь мы можем вывести отношение сопротивлений SS' и $T'T$:

$$\frac{SS'}{T'T} = \frac{A_2 - A_1 + Q_1Q_2}{A_4 - A_3 + Q_3Q_4}.$$

Если не требуется большой точности, мы можем не учитывать катушек сопротивления A и C и тогда находим

$$\frac{SS'}{T'T} = \frac{Q_1Q_2}{Q_3Q_4}.$$

Отсчеты положения Q на проводе длиной в метр не могут превышать точность в одну десятую миллиметра, а сопротивление на разных участках может существенно различаться из-за неравенства температуры, трения и т. д. Поэтому в тех случаях, когда требуется большая точность, в A и C вводятся катушки со значительным сопротивлением, и отношение сопротивлений этих катушек может быть определено более точно, чем отношение сопротивлений тех частей, на которые разделяется провод точкой Q .

В дальнейшем будет видно, что в этом методе точность определения ни в какой степени не зависит от совершенства контактов в S , S' или T' , T .

Этот метод можно назвать дифференциальным методом использования Мостика Уитстона, поскольку он основан на сравнении независимо сделанных наблюдений.

Существенным условием точности в этом методе является условие, чтобы сопротивление соединений оставалось тем же самым в продолжение цикла из четырех измерений, необходимых для полного определения. Поэтому серию измерений следует всегда повторять, чтобы отметить любое изменение в сопротивлениях.

О сравнении больших сопротивлений

353. Когда сопротивления, которые нужно измерить, очень велики, сравнение потенциалов в различных точках системы может быть проведено с помощью чувствительного электрометра, такого, как Квадрантный Электрометр, описанный в п. 219.

Если проводники, сопротивление которых требуется измерить, соединены последовательно и через них проходит один и тот же ток от батареи с большой электродвижущей силой, разность потенциалов на концах каждого проводника будет пропорциональна сопротивлению этого проводника. Поэтому, соединяя электроды электрометра с концами сначала одного, а затем другого проводника, можно определить отношение их сопротивлений.

Этот метод определения сопротивлений является самым прямым. Он связан с использованием электрометра, на показания которого можно полагаться, и мы также должны иметь некоторую гарантию того, что во время эксперимента ток остается постоянным.

Четыре проводника с большим сопротивлением можно также расположить по схеме Мостика Уитстона, при этом сам Мостик может быть образован электродами электрометра, а не электродами гальванометра. Преимущество этого метода заключается в том, что для отклонения стрелки электрометра не требуется постоянного тока, в то время как стрелка гальванометра не может отклоняться, если по проводу не идет постоянный ток.

354. Если сопротивление проводника настолько велико, что ток, который может создать в нем любая достижимая электродвижущая сила, является слишком малым для прямого измерения с помощью гальванометра, можно использовать конденсатор, для того чтобы в течение определенного времени накапливать электричество, а затем оценить накопленное количество, разряжая конденсатор через гальванометр. Этот метод предложили г-да Брайт (Bright) и Кларк (Clark) для испытания соединений в подводных кабелях:

355. Но самый простой метод, позволяющий измерить сопротивление такого проводника, — это зарядить конденсатор большой емкости, а затем соединить две его поверхности с электродами электрометра, а также с концами этого проводника. Если E — разность потенциалов, которую показывает электрометр, S — емкость конденсатора, Q — заряд на каждой из двух поверхностей, R — сопротивление проводника и x — ток в нем, то по теории конденсаторов $Q = SE$.

По Закону Ома $E = Rx$, и по определению тока $x = -(dQ/dt)$.

Отсюда — $Q = RS(dQ/dt)$ и $Q = Q_0 e^{-t/(RS)}$, где Q_0 — заряд вначале, при $t = 0$.

Аналогичным образом $E = E_0 e^{-t/(RS)}$, где E_0 — начальный отсчет по шкале электрометра, а E — отсчет, сделанный после того, как пройдет время t .

Отсюда мы находим $R = t / \{S[\ln E_0 - \ln E]\}$, что дает значение R в абсолютных единицах. Для пользования этим выражением не требуется знать цену деления по шкале электромметра.

Если емкость конденсатора S задана в электростатических единицах и равна определенному числу метров, то величина R также задана в электростатических единицах, как величина, обратная скорости.

Если емкость S задана в электромагнитных единицах, ее размерность есть T^2/L , а размерность R — скорость.

Поскольку сам конденсатор не является идеальным изолятором, необходимо провести два опыта. В первом мы определяем сопротивление R_0 самого конденсатора, а во втором — сопротивление конденсатора, когда к его поверхностям присоединен исследуемый проводник. Обозначим это сопротивление R' . Тогда сопротивление R проводника определяется соотношением

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_0}.$$

Этот метод был разработан г-дами Сименс.

Метод Томсона⁶ для определения сопротивления гальваномметра

356. Сэр У. Томсон с успехом применил устройство, подобное Мостику Уитстона, для того чтобы определить сопротивление гальваномметра во время его действия. Наводящей идеей для сэра У. Томсона послужил метод Манса (Mance). См. п. 357.

Пусть на чертеже в п. 347 батарея, как и раньше, помещена между B и C , но гальваномметр помещен не в OA , а в CA [рис. 37]. Если величина $b\beta - c\gamma$ равна нулю, то проводник OA сопряжен проводнику BC , и, поскольку батарея в BC не производит никакого тока в OA , сила тока в любом другом проводнике не зависит от сопротивления OA . Следовательно, если гальваномметр помещен в CA , его отклонение будет оставаться тем же самым как при малом, так и при большом сопротивлении OA . Мы поэтому устанавливаем, являются ли показания гальваномметра одинаковыми в случаях, когда O и A соединены проводником с малым сопротивлением и когда это соединение разорвано. Если мы получаем такой результат, подобрав нужным образом сопротивления проводников, мы знаем, что сопротивление гальваномметра равно $b = (c\gamma)/\beta$, где c , γ и β — катушки сопротивления с известными величинами сопротивлений.

Следует заметить, что хотя этот метод не является нулевым в смысле отсутствия тока в гальванометре, однако он является нулевым методом в том смысле,

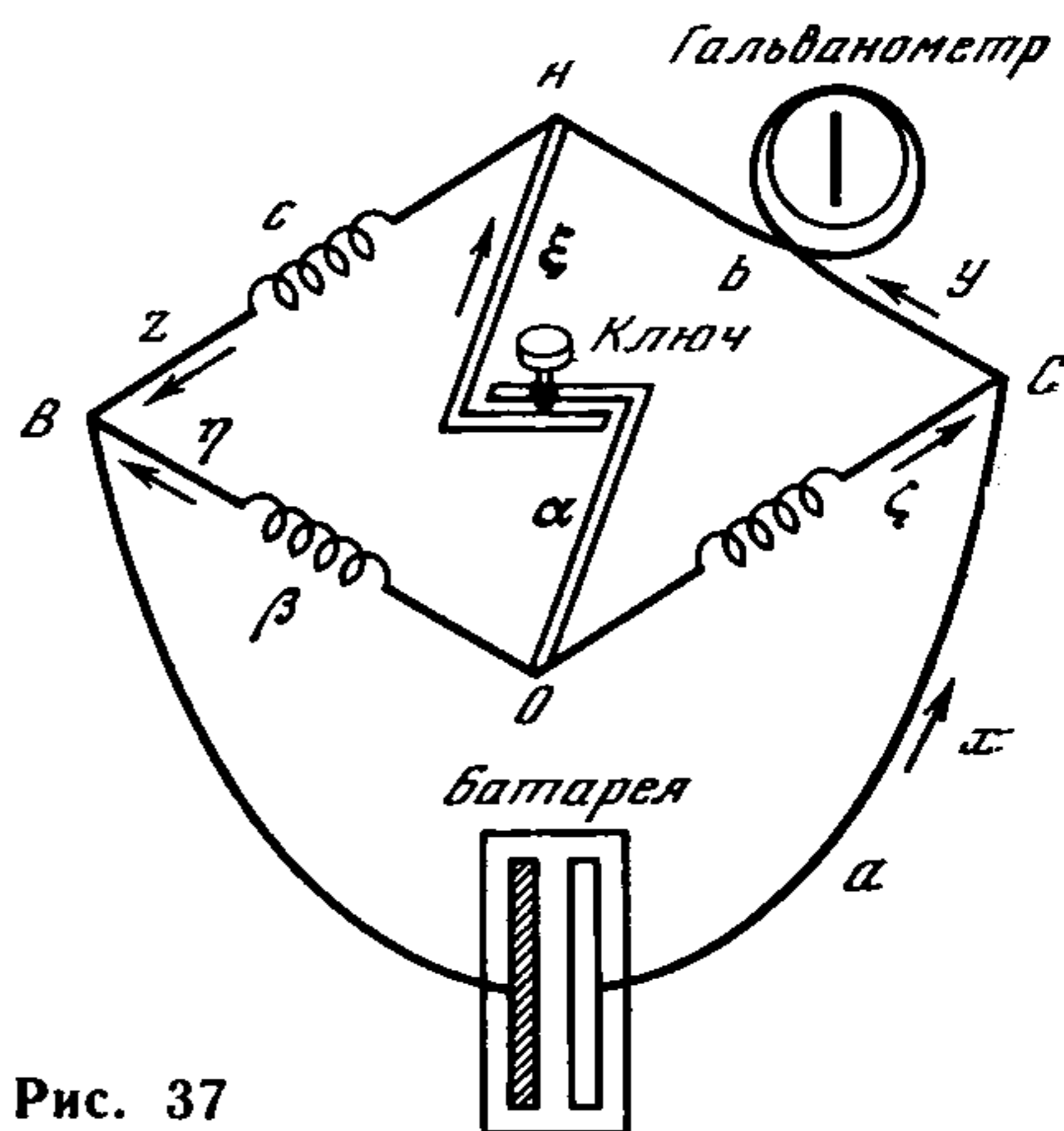


Рис. 37

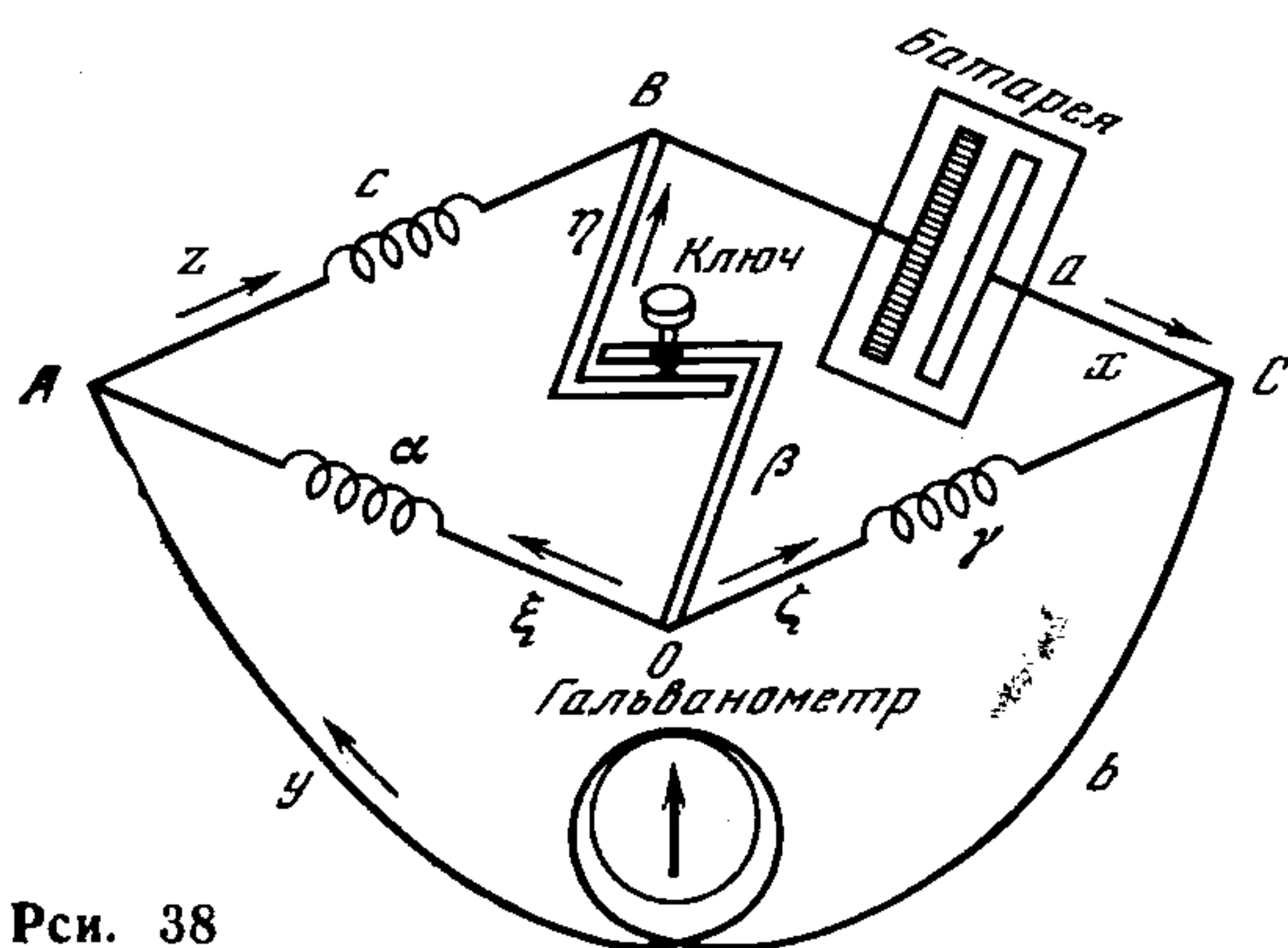
⁶ Proc. R. S., Jan. 19, 1871.

что наблюдаемый факт является негативным — отклонение гальванометра не меняется при замыкании определенного контакта. Наблюдение такого рода является более ценным, чем наблюдение равенства двух различных отклонений одного и того же гальванометра, потому что в последнем случае имеется время для изменения в силе батареи или в чувствительности гальванометра, если же отклонение остается неизменным, несмотря на то, что происходят определенные изменения, которые мы можем повторять по желанию, тогда мы уверены, что ток совершенно не зависит от этих изменений.

Определение сопротивления в катушке гальванометра легко можно выполнить обычным путем с помощью Мостика Уитстона, поместив другой гальванометр в OA . С помощью описанного здесь метода сам гальванометр используется для того, чтобы измерить свое собственное сопротивление.

Метод Манса ⁷ определения сопротивления батареи

357. Измерение сопротивления батареи во время ее работы представляет собой задачу намного более высокого порядка трудности, потому что сопротивление батареи, как оказалось, значительно меняется через некоторое время после того,



Рси. 38

как изменился текущий через нее ток. Во многих методах, обычно применяемых с целью измерить сопротивление батареи, указанные изменения силы тока через батарею происходят в процессе измерений, и поэтому полученные результаты сомнительны.

В методе Манса, свободном от этого возражения, батарея помещается в BC , а гальванометр — в CA . После этого соединение между O и B попеременно замыкается и размыкается [рис. 38].

При этом отклонение стрелки гальванометра не будет изменяться, как бы ни менялось сопротивление

OB , если только OB и AC сопряжены. Это можно рассматривать как частный случай результата, полученного в п. 347, или в этом можно убедиться непосредственно, исключив z и β из уравнений указанного раздела. Именно, мы тогда получаем

$$(a\alpha - c\gamma)x + (c\gamma + c\alpha + c\beta + ba)y = E\alpha.$$

Если y не зависит от x , а потому и от β , мы должны иметь $a\alpha = c\gamma$. Таким образом, сопротивление батареи выражается через c , γ и α .

Если выполнено условие $a\alpha = c\gamma$, ток y через гальванометр определяется соотношением

$$y = \frac{E\alpha}{cb + \alpha(a + b + c)} = \frac{E\gamma}{ab + \gamma(a + b + c)}.$$

⁷ Proc. R. S., Jan. 19, 1871.

Для того чтобы испытать чувствительность этого метода, предположим, что соотношение $c\gamma = a\alpha$ выполнено не точно, а приближенно. Пусть ток через гальванометр в случае, когда O и B соединены проводником без заметного сопротивления, равен y_0 , а в случае, когда O и B полностью разъединены, ток через гальванометр равен y_1 .

Чтобы найти эти значения, мы должны в общей формуле для y положить $\beta = 0$ и $\beta = \infty$, а затем сравнить результаты.

Общее значение для y таково: $\frac{c\gamma + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{D} E$, где D обозначает то же самое выражение, что и в п. 348. Полагая $\beta = 0$, получаем

$$y_0 = \frac{\gamma E}{ab + \gamma(a + b + c) + \frac{c(a\alpha - c\gamma)}{\alpha + c}}, \quad = y + \frac{c(c\gamma - a\alpha)}{\gamma(c + \alpha)} \frac{y^2}{E} \text{ (приближенно).}$$

Полагая $\beta = \infty$, получаем

$$y_1 = \frac{E}{a + b + c + \frac{ab}{\gamma} - \frac{(a\alpha - c\gamma)b}{(\gamma + \alpha)\gamma}}, \quad = y - \frac{b(c\gamma - a\alpha)}{\gamma(\gamma + \alpha)} \frac{y^2}{E}.$$

Из этих значений находим $\frac{y_0 - y_1}{y} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{c\gamma - a\alpha}{(c + \alpha)(\alpha + \gamma)}$.

Сопротивление c проводника AB должно быть равно сопротивлению батареи a ; сопротивления α и γ должны быть равны и настолько малы, насколько возможно; наконец, сопротивление b должно быть равно $a + \gamma$.

Поскольку гальванометр наиболее чувствителен при малых отклонениях, перед замыканием контакта между O и B мы должны с помощью закрепленных магнитов довести его стрелку почти до нуля.

В этом методе измерения сопротивления батареи ток в гальванометре никак не влияет на процесс измерения, и мы, таким образом, можем определить сопротивление батареи при любой заданной силе тока в гальванометре и тем самым определить, как сила тока влияет на сопротивление.

Если ток через гальванометр равен y , а ток, текущий через батарею, равен x_0 при замкнутом ключе и x_1 при разомкнутом, где

$$x_0 = y \left(1 + \frac{b}{\gamma} + \frac{a\alpha}{\gamma(\alpha + c)} \right), \quad x_1 = y \left(1 + \frac{b}{\alpha + \gamma} \right),$$

то сопротивление батареи равно $a = (c\gamma)/\alpha$, а электродвижущая сила батареи равна

$$E = y(b + c + (c/\alpha)(b + \gamma)).$$

Метод, по которому в п. 356 определялось сопротивление гальванометра, отличается от этого только тем, что контакт замыкается и размыкается между O и A , а не между O и B , и мы можем, поменяв местами α и β , a и b , получить для этого случая

$$\frac{y_0 - y_1}{y} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{c\gamma - b\beta}{(c + \beta)(\beta + \gamma)}.$$

О сравнении электродвижущих сил

358. Нижеследующий метод сравнения электродвижущих сил вольтовых и термоэлектрических устройств, при котором через них не проходит токов, нуждается только в наборе катушек сопротивления и в батарее постоянного тока.

Пусть электродвижущая сила E батареи больше, чем электродвижущая сила любого из сравниваемых источников электричества, тогда, если между точками A_1 и B_1 первичной цепи EB_1A_1E вставлено достаточное сопротивление R_1 , электродвижущая сила от B_1 до A_1 может быть сделана равной электродвижущей силе источника электричества E_1 [рис. 39]. Если теперь электроды этого источника электричества соединить с точками A_1 и B_1 , то через этот источник не будет течь никакого тока.

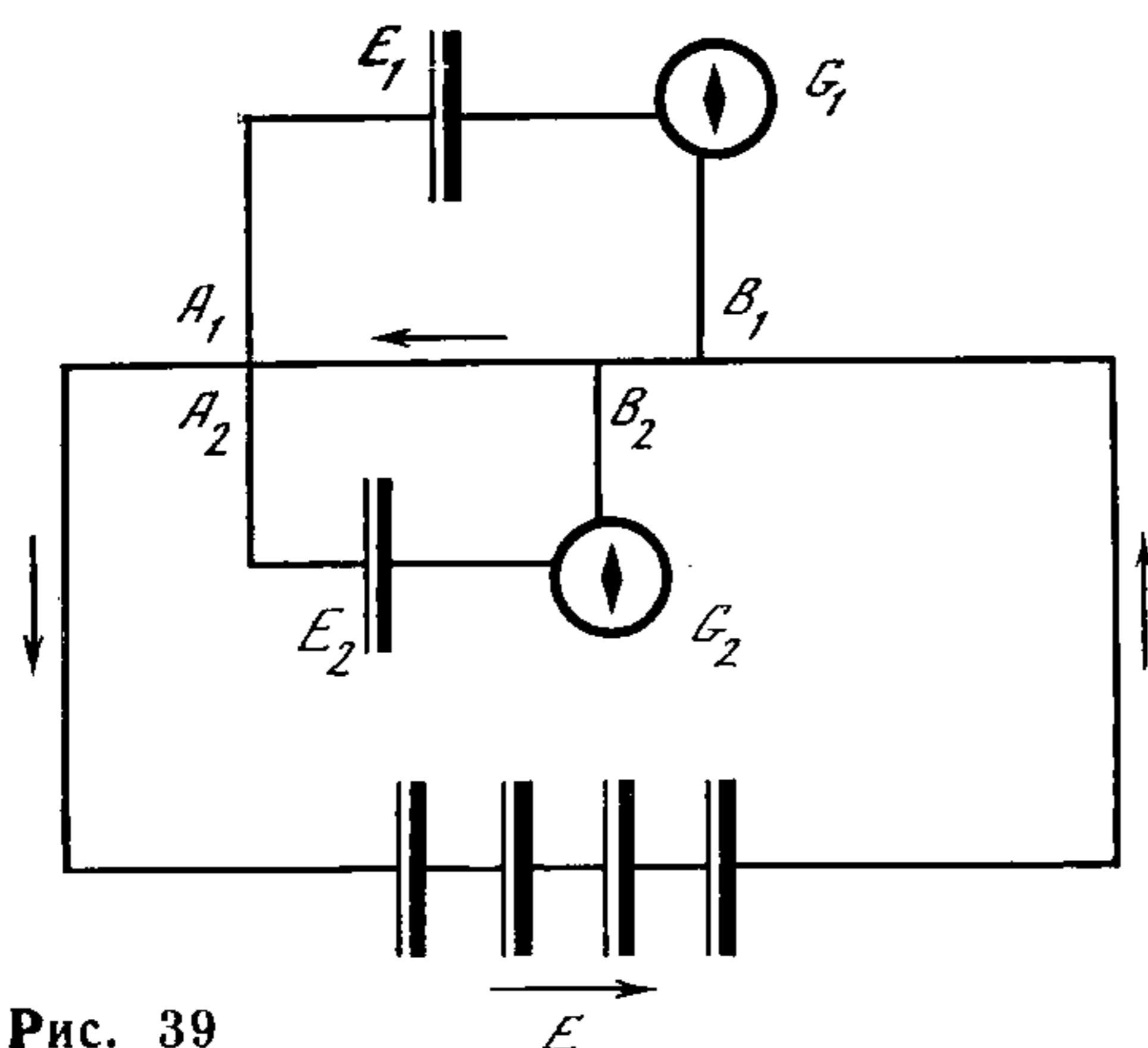


Рис. 39

Поместив гальванометр G_1 в цепь источника тока E_1 и подбирая сопротивление между A_1 и B_1 до тех пор, пока не прекратится ток через гальванометр G_1 , мы получаем уравнение $E_1 = R_1 C$, где R_1 — сопротивление между A_1 и B_1 , а C — сила тока в первичной цепи.

Тем же путем, взяв второй источник тока и поместив его электроды в точках A_2 и B_2 таким образом, что гальванометр G_2 не отмечает тока, мы получим $E_2 = R_2 C$, где R_2 — сопротивление между A_2 и B_2 . Если показания гальванометров G_1 и G_2 наблюдаются одновременно, значение C тока в первичном контуре является одним и тем же в обоих уравнениях, и мы находим $E_1 : E_2 = R_1 : R_2$.

Таким путем можно сравнить электродвижущие силы двух источников. Абсолютная электродвижущая сила источника может быть измерена или электростатически, с помощью электрометра, или электромагнитно, с помощью абсолютного гальванометра.

Этот метод, в котором во время сравнения не идет ток ни через один из источников, представляет собой содификацию метода Поггендорфа и предложен г-ном Латимером Кларком, который вывел следующие значения электродвижущих сил:

				Концентриро- ванный раствор	Вольты
Даниэль	I.	Амальгамированный цинк	$H_2SO_4 + 4 \text{ aq.}$	$CuSO_4$	Медь 1,079
»	II.	»	$H_2SO_4 + 12 \text{ aq.}$	$CuSO_4$	Медь 0,978
»	III.	»	$H_2SO_4 + 12 \text{ aq.}$	$Cu(NO_3)_2$	Медь 1,00
Бунзен	I.	»	»	HNO_3	Углерод 1,964
Бунзен	II.	»	»	Уд. вес 1,38	Углерод 1,888
Гроув		»	$H_2SO_4 + 4 \text{ aq.}$	HNO_3	Платина 1,956

Один вольт есть электродвижущая сила, равная 100 000 000 единиц в системе сантиметр-грамм-секунда.

ГЛАВА XII

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ВЕЩЕСТВ

359. Различные вещества по отношению к прохождению через них электричества мы можем разбить на три класса.

Первый класс содержит все металлы и их сплавы, некоторые соединения серы и другие соединения, содержащие металлы, к которым мы должны добавить углерод в виде кокса и селен в кристаллической форме.

Во всех этих веществах прохождение тока происходит без какого бы то ни было разложения или изменения химической природы вещества как внутри, так и там, где ток входит и выходит из тела. Во всех этих веществах сопротивление растет по мере того, как температура повышается.

Второй класс состоит из веществ, которые называются электролитами, потому что ток связан с разложением этих веществ на две компоненты, которые появляются у электродов. Как правило, вещество является электролитом только в жидкой фазе, хотя некоторые коллоидные вещества, как, например, стекло при 100°C , которые кажутся твердыми, представляют собой электролиты. Из экспериментов сэра Б. Броди (В. С. Brodie) вытекает, что в некоторых газах можно вызвать электролиз с помощью мощной электродвижущей силы.

Во всех веществах, которые проводят электролитически, сопротивление уменьшается с ростом температуры.

Третий класс состоит из веществ, сопротивление которых настолько велико, что только с помощью наиболее тонких методов можно определить прохождение электричества через эти вещества. Они называются Диэлектриками. К этому классу принадлежит значительное количество твердых тел, многие из которых в расплавленном состоянии являются электролитами, как, например, скипидар, нефть, расплавленный парафин и т. д., а также все газы и пары. К этому классу относятся углерод в виде алмаза и селен в аморфной форме.

Сопротивление этого класса тел огромно в сравнении с сопротивлением металлов. Оно уменьшается с ростом температуры. Из-за огромного сопротивления этих веществ трудно определить, связан или нет с электролизом тот ничтожный ток, который мы можем вызвать в этих телах.

Об электрическом сопротивлении металлов

360. Нет такого раздела электрических исследований, в котором были бы проведены более многочисленные и более точные эксперименты, чем при определении сопротивления металлов. Для электрической телеграфии необычайно важно, чтобы металл, из которого сделаны провода, имел наименьшее возможное сопротивление. Поэтому перед выбором материала должны быть проведены измерения сопротивления. Если в линии возникнет какая-либо неисправность, ее местоположение сразу устанавливается с помощью измерений сопротивления, а эти измерения, в которых ныне занято так много лиц, требуют использования катушек сопротивления, сделанных из металла, электрические свойства которого тщательно исследованы.

Электрические свойства металлов и их сплавов были с большой тщательностью исследованы г-дами Матиссенем (Matthiessen), Фогтом (Vogt) и Хоккином (Hockin), а также г-дами Сименс, которые так много сделали для того, чтобы внедрить точные электрические измерения в практику.

Из исследований д-ра Матиссена вытекает, что влияние температуры на сопротивление оказывается примерно одинаковым для большого числа *чистых* металлов, причем сопротивление при 100°C относится к сопротивлению при 0°C , как 1,414 относится к 1,000, или 100 к 70,7. Для чистого железа это отношение равно 1,6197, а для чистого таллия 1,458.

Д-р К. В. Сименс¹ наблюдал сопротивление металлов в гораздо более широком интервале температур, простирающемся от точки замерзания до 350°C , а в некоторых случаях до 1000°C . Он находит, что сопротивление возрастает с ростом температуры, но скорость возрастания уменьшается по мере роста температуры. Формула, которая, по его мнению, очень тесно согласуется и с результатами д-ра Матиссена, измерявшего сопротивления при низких температурах, и с его собственными измерениями в интервале 1000°C , такова: $r = \alpha T^{1/2} + \beta T + \gamma$, где T — абсолютная температура, отсчитываемая от -273°C , α , β и γ — постоянные. Таким образом,

$$\text{для платины } r = 0,039\,369\, T^{1/2} + 0,002\,164\,07\, T - 0,241\,3;$$

$$\text{для меди } r = 0,026\,577\, T^{1/2} + 0,003\,144\,3\, T - 0,227\,51;$$

$$\text{для железа } r = 0,072\,545\, T^{1/2} + 0,003\,813\,3\, T - 1,239\,71.$$

Из этих данных можно определить температуру в печи, наблюдая сопротивление платиновой проволоки, помещенной в печь.

Д-р Матиссен обнаружил, что если два металла образуют сплав, сопротивление этого сплава в большинстве случаев оказывается больше, чем то, которое вычисляется по сопротивлению и относительному содержанию составляющих металлов. В случае сплавов золота и серебра сопротивление сплава оказывается больше, чем сопротивление и чистого золота, и чистого серебра, и при изменении в определенных пределах относительного содержания составляющих, оно очень мало меняется при незначительном изменении пропорции. В связи с этим д-р Матиссен предложил для воспроизведения единицы сопротивления сплав из двух частей золота и одной части серебра.

Как правило, влияние изменений температуры на сопротивление оказывается меньше в сплавах, чем в чистых металлах.

Поэтому обычные катушки сопротивления изготавливаются из нейзильбера (мельхиора) из-за большой величины его сопротивления и малых изменений с температурой.

Сплав серебра и платины также используется для стандартных катушек.

361. Электрическое сопротивление некоторых металлов меняется после отжига. Поэтому, пока провод не испытан повторным нагреванием до высокой температуры и не установлено, что это не приводит к стойким изменениям сопротивления, на этот провод нельзя полагаться как на меру сопротивления. Некоторые провода изменяют сопротивление с течением времени, не подвергаясь изменениям температуры. Поэтому важно установить удельное сопротивление ртути — металла,

¹ Proc. R. S., April 27, 1871.

который, будучи жидким, имеет всегда одно и то же молекулярное строение и который легко может быть очищен дистилляцией и воздействием азотной кислоты. Большая тщательность была проявлена в определении сопротивления этого металла В. и К. Ф. Сименсами, которые ввели эту величину как стандарт. Их исследования были дополнены исследованиям Матиссена и Хоккина.

Удельное сопротивление ртути определялось по наблюдаемому сопротивлению трубки длиной l , содержащей ртуть массы ω .

Не существует стеклянных трубок, у которых диаметр канала был бы одинаков по всей длине, но если небольшое количество ртути введено в трубку и занимает область длиной λ , средняя точка которой удалена от одного конца трубки на расстояние x , то площадь s сечения около этой точки будет равна $s = (C/\lambda)$, где C — некоторая постоянная.

Масса ртути, которая заполняет всю трубку, равна $\omega = \rho \int s dx = \rho C \Sigma \left(\frac{1}{\lambda} \right) \frac{l}{n}$, где n — число точек, находящихся на равном расстоянии друг от друга вдоль трубки, в которых измерена величина λ , а ρ — масса единицы объема.

Сопротивление всей трубки равно $R = \int \frac{r}{s} dx = \frac{r}{C} \Sigma (\lambda) \frac{l}{n}$, где r — удельное сопротивление на единицу объема. Отсюда

$$\omega R = r \rho \Sigma (\lambda) \Sigma \left(\frac{1}{\lambda} \right) \frac{l^2}{n^2} \quad \text{и} \quad r = \frac{\omega R}{\rho l^2} \cdot \frac{n^2}{\Sigma (\lambda) \Sigma \left(\frac{1}{\lambda} \right)}$$

дает удельное сопротивление единицы объема.

Чтобы найти сопротивление единицы длины и единицы массы, мы должны умножить это выражение на плотность.

Из опытов Матиссена и Хоккина следует, что сопротивление однородного столба ртути при 0°C длиной в один метр и весом в один грамм равно 13,071 единиц В. А. Отсюда следует, что если удельный вес ртути равен 13,595, то сопротивление столба длиной в один метр и сечением в один квадратный миллиметр равно 0,96146 единиц В. А.

362. В следующей таблице R — сопротивление в единицах В. А. столба длиной в один метр и весом в один грамм при 0°C , r — сопротивление в сантиметрах, деленных на секунду, куба с ребром в один сантиметр. Приводимые данные получены в опытах Матиссена², принято, что единица В. А. равна 0,98677 от квадранта большого круга Земли.

	Удельный вес		R	r	Возрастание в % на 1°C при 20°C
Серебро	10,50	Холодотянутое	0,1689	1 588	0,377
Медь	8,95	Холодотянутая	0,1469	1 620	0,388
Золото	19,27	Холодотянутое	0,4150	2 125	0,365
Свинец	11,391	Прессованный	2,257	19 584	0,387
Ртуть	13,595	Жидкая	13,071	94 874	0,072
Золото 2, Серебро 1	15,218	Твердое или отожженное	1,668	18 326	0,065
Селен при 100°C		Кристаллическая форма		6×10^{13}	1,00

² *Phil. Mag.*, May, 1865.

Об электрическом сопротивлении электролитов

363. Измерение электрического сопротивления электролитов затрудняется из-за поляризации электродов, которая приводит к тому, что наблюдаемая разность потенциалов металлических электродов оказывается больше, чем электродвижущая сила, которая в действительности вызывает ток.

Эту трудность можно преодолеть разными способами. В некоторых случаях мы можем избавиться от поляризации, используя электроды из подходящего материала, как, например, цинковые электроды в растворе сульфата цинка. Если сделать поверхность электродов очень большой в сравнении с сечением той части электролита, сопротивление которой нужно измерить, и использовать только токи малой длительности, идущие попеременно в противоположных направлениях, можно провести измерения до того, как прохождение тока вызовет заметную напряженность поляризации.

Наконец, проведя два разных опыта, в одном из которых путь тока через электролит намного длиннее, чем в другом, и подбирая электродвижущую силу так, чтобы протекающий ток и время, в течение которого он идет, были бы в каждом случае почти одинаковы, мы можем совсем исключить влияние поляризации.

364. В опытах, которые провел д-р Паальцов (Paalzow)³, электроды, имевшие форму больших дисков, были помещены в отдельные плоские сосуды, наполненные электролитом, а соединение осуществлялось с помощью длинного сифона, наполненного электролитом и погруженного в оба сосуда. Применялись два таких сифона разной длины.

Наблюдаемые сопротивления электролита в этих сифонах равны R_1 и R_2 . После измерений сифоны заполнялись ртутью. Сопротивления сифонов, заполненных ртутью, оказались равными R'_1 и R'_2 .

Отношение сопротивления электролита к сопротивлению некоторой массы ртути той же формы при 0°C определялось затем по формуле $\rho = (R_1 - R_2)/(R'_1 - R'_2)$.

Чтобы вывести из этих значений ρ сопротивление одного сантиметра в длину, имеющего сечение в квадратный сантиметр, мы должны умножить их на величину r для ртути при 0°C . См. п. 361.

Паальцов приводит следующие результаты:

Смеси серной кислоты и воды

	Темп. $^\circ\text{C}$	Сопротивление в сравнении со ртутью
H_2SO_4	15°C	96 950
$\text{H}_2\text{SO}_4 + 14\text{H}_2\text{O}$	19	14 157
$\text{H}_2\text{SO}_4 + 13\text{H}_2\text{O}$	22	13 310
$\text{H}_2\text{SO}_4 + 499\text{H}_2\text{O}$	22	184 773

Сульфат цинка и вода

$\text{ZnSO}_4 + 33\text{H}_2\text{O}$	23°C	194 400
$\text{ZnSO}_4 + 24\text{H}_2\text{O}$	23	191 000
$\text{ZnSO}_4 + 107\text{H}_2\text{O}$	23	354 000

Сульфат меди и вода

$\text{CuSO}_4 + 45\text{H}_2\text{O}$	22°C	202 410
$\text{CuSO}_4 + 105\text{H}_2\text{O}$	22	339 341

Сульфат магния и вода

$\text{MgSO}_4 + 45\text{H}_2\text{O}$	22°C	199 180
$\text{MgSO}_4 + 107\text{H}_2\text{O}$	22	324 600

Соляная кислота и вода

$\text{HCl} + 15\text{H}_2\text{O}$	23°C	13 626
$\text{HCl} + 500\text{H}_2\text{O}$	23	86 679

³ Berlin, Monatsbericht, July, 1868.

365. Г-да Кольрауш (F. Kohlraush) и Ниппольдт (W. A. Nippoldt) ⁴ определили сопротивление смесей серной кислоты и воды. Они использовали переменные магнитоэлектрические токи, электродвижущая сила которых менялась от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{74}$ от электродвижущей силы элемента Гроува, а с помощью термоэлектрической пары медь — железо они уменьшили электродвижущую силу до $\frac{1}{429000}$ от электродвижущей силы элемента Гроува. Они нашли, что закон Ома применим к этому электролиту во всей области значений этих электродвижущих сил.

Сопротивление минимально в смеси, содержащей приблизительно одну треть серной кислоты.

Сопротивление электролитов уменьшается с ростом температуры. Процентное возрастание проводимости при нагревании на 1°C дано в таблице [с. 399].

*Сопротивление смесей серной кислоты и воды при 22°C , выраженное через сопротивление ртути при 0°C .
Г-да Кольрауш и Ниппольдт*

Удельный вес при $18,5^\circ$	Процент H_2SO_4	Сопротивление при 22°C (Hg=1)	Процент возрастания проводимости на 1°C	Удельный вес при $18,5^\circ$	Процент H_2SO_4	Сопротивление при 22°C (Hg=1)	Процент возрастания проводимости на 1°C
0,9985	0,0	746 300	0,47	1,2631	35,2	13 132	1,259
1,00	0,2	465 100	0,47	1,3163	41,5	14 286	1,410
1,0504	8,3	34 530	0,653	1,3597	46,0	15 762	1,674
1,0989	14,2	18 946	0,646	1,3994	50,4	17 726	1,582
1,1431	20,2	14 990	0,799	1,4482	55,2	20 796	1,417
1,2045	28,0	13 133	1,317	1,5026	60,3	25 574	1,794

Об электрическом сопротивлении диэлектриков

366. Было проведено большое число измерений сопротивления гуттаперчи и других материалов, используемых для изоляции при изготовлении телеграфных кабелей. Измерения проводились с целью оценить качества этих материалов как изоляторов.

Как правило, материал подвергался испытанию после того, как из него изготовлялось покрытие для проводящего провода. Сам провод служил электродом, а вода в баке, куда был погружен кабель, служила другим электродом. Таким образом, ток проходил через цилиндрическое покрытие из изоляторов, имевшее большую площадь и малую толщину.

Найдено, что, когда электродвижущая сила начинает действовать, ток, как показывает гальванометр, ни в коей мере не является постоянным. Первое воздействие, конечно, представляет собой переходный ток значительной величины, причем полное количество электричества оказывается таким, какое требуется для зарядки поверхностей изолятора поверхностным распределением электри-

⁴ Pogg. Ann., CXXXVIII, p. 280, 370, 1869.

чества, соответствующим этой электродвижущей силе. Поэтому этот первый ток является мерой не проводимости, а емкости изолирующего слоя.

Но даже после того, как этот ток затухает, остаточный ток не является постоянным и не указывает на настоящую проводимость вещества. Найдено, что ток продолжает уменьшаться в течение по меньшей мере получаса, и, таким образом, определение сопротивления по току дает большую величину в случае, если подождать некоторое время, по сравнению со случаем, когда измерение производится немедленно по включении батареи.

Например, для изолирующего материала Хупера (Hooper) сопротивление, определенное через десять минут, оказалось в четыре раза больше, а через девятнадцать часов — в двадцать три раза больше, чем сопротивление, измеренное по истечении одной минуты. Если направление электродвижущей силы меняется, сопротивление падает так же низко, как сначала, или ниже, а затем постепенно возрастает.

Эти явления, по-видимому, вызваны тем свойством гуттаперчи, которое за неимением лучшего названия мы можем назвать поляризацией и которое мы можем сравнить, с одной стороны, со свойством последовательно соединенных заряжаемых Лейденских банок, а с другой стороны, со свойством вторичной батареи Риттера, п. 271.

Если некоторое число лейденских банок большой емкости соединить последовательно с помощью проводников, обладающих большим сопротивлением (как, например, влажные хлопчатые нити в опытах г-на Гогена (Gaugain)), то действующая на эту последовательность электродвижущая сила вызывает ток, отмечаемый гальванометром; ток будет постепенно падать, пока банки полностью не зарядятся.

Наблюдаемое сопротивление такой последовательности будет возрастать, и если диэлектрик в банках является идеальным изолятором, сопротивление будет возрастать неограниченно. Если отключить электродвижущую силу и соединить концы последовательности, будет наблюдаться обратный ток, полное количество которого в случае идеальной изоляции будет тем же самым, что и для прямого тока. Аналогичные явления наблюдаются и в случае вторичной батареи, с той разницей, что конечная изоляция не столь хороша, а емкость на единицу поверхности неизмеримо больше.

В случае кабеля, покрытого гуттаперчей и т. п., обнаружено, что если батарея включена в течение получаса, а затем провод соединяется с внешним электродом, возникает обратный ток, который идет в течение некоторого времени и постепенно приводит систему к ее первоначальному состоянию.

Эти явления имеют ту же природу, что и те, которые были названы «остаточным разрядом» лейденской банки, за исключением того, что степень поляризации оказывается гораздо больше в гуттаперче и т. п., чем в стекле.

Это состояние поляризации, по-видимому, является направленным свойством вещества, для возникновения которого требуется не только электродвижущая сила, но и прохождение значительного количества электричества путем смещения или иным способом, и это прохождение требует значительного времени. Когда поляризованное состояние установилось, имеется внутренняя электродвижущая сила, действующая на вещество в обратном направлении, которая существует либо до тех пор, пока не создаст обратного тока, равного первому по общему коли-

честву, либо до тех пор, пока состояние поляризации спокойно не исчезнет из-за истинного прохождения тока через вещество.

Полная теория того, что названо остаточным разрядом, поглощением электричества, электризацией или поляризацией, требует тщательного исследования и, по-видимому, приведет к важным открытиям, относящимся к внутреннему строению тел.

367. Сопротивление большей части диэлектриков уменьшается с ростом температуры.

Например, сопротивление гуттаперчи при 0°C приблизительно в двадцать раз больше, чем при 24°C . Господа Брайт и Кларк обнаружили, что следующая формула дает результаты, которые согласуются с их опытами. Если сопротивление гуттаперчи при температуре T по шкале Цельсия равно r , то сопротивление при температуре $T+t$ будет равно $R=r \times C^t$, где C для различных образцов гуттаперчи заключено между 0,8878 и 0,9.

Г-н Хоккин установил любопытный факт: после того как гуттаперча приняла свою окончательную температуру, сопротивление достигает своего соответствующего значения не раньше, чем через несколько часов.

Влияние температуры на сопротивление каучука оказывается не столь большим, как в случае гуттаперчи.

Сопротивление гуттаперчи значительно возрастает под действием давления.

Сопротивление в Омах кубического метра разных образцов гуттаперчи, использованных в различных кабелях, равно следующим величинам ⁵:

Название кабеля	
Красное море	$0,267 \cdot 10^{12}$ до $0,362 \cdot 10^{12}$
Мальта — Александрия	$1,23 \cdot 10^{12}$
Персидский залив	$1,80 \cdot 10^{12}$
Второй атлантический	$3,42 \cdot 10^{12}$
Персидский залив, сердечник Хупера	$7,47 \cdot 10^{12}$
Гуттаперча при 24°C	$3,53 \cdot 10^{12}$

368. Следующая таблица составлена на основе опытов Баффа (Buff), описанных в п. 271. Она показывает сопротивление в Омах одного кубического метра стекла при различных температурах:

Температура, $^{\circ}\text{C}$	Сопротивление	Температура, $^{\circ}\text{C}$	Сопротивление
200	227 000	350	1035
250	13 900	400	735
300	1 480		

369. М-р Варлей ⁶ исследовал недавно свойства тока, идущего через разреженные газы. Он находит, что электродвижущая сила E складывается из некоторой постоянной величины E_0 и части, зависящей от тока по закону Ома, т. е. $E = E_0 + RC$.

Например, электродвижущая сила, которая требуется для того, чтобы через

⁵ Jenkin's Cantor Lectures.

⁶ Proc. R. S., Jan. 12, 1871.

некоторую трубку начал проходить ток, равнялась электродвижущей силе 323 элементов Даниэля, но для поддержания этого тока достаточно было электродвижущей силы 304 элементов Даниэля. Сила тока, измеренная гальванометром, была пропорциональна числу элементов сверх 304. Так, для 305 элементов отклонение равнялось 2, для 306 оно было равно 4, для 307 отклонение равнялось 6 и т. д. до 380, или $304 + 76$, при этом отклонение равнялось 150, т. е. $76 \times 1,97$.

Из этих опытов явствует, что существует некий род поляризации электродов и соответствующая электродвижущая сила равна электродвижущей силе 304 элементов Даниэля; вплоть до этого значения электродвижущей силы батарея занята созданием этого состояния поляризации. После того как создана максимальная поляризация, избыток электродвижущей силы над той, какую дают 304 элемента Даниэля, идет на поддержание тока в соответствии с законом Ома.

Закон тока в разреженном газе, таким образом, очень похож на закон тока в электролите, в котором нам следует учесть поляризацию электродов.

В связи с этим вопросом следует обдумать результат Томсона, показавшего, что электродвижущая сила, потребная для создания искры в воздухе, оказалась пропорциональной не расстоянию, а расстоянию плюс некоторая постоянная величина. Электродвижущая сила, отвечающая этой постоянной величине, может рассматриваться как мера поляризации электродов.

370. Г-да Видеман и Рюльман (Rühlmann) недавно ⁷ исследовали прохождение электричества через газы. Электрический ток создавался машиной Гольца, а разряд происходил между двумя сферическими электродами в металлическом сосуде, содержащем разреженный газ. Разряд был, как правило, прерывистым, и промежуток времени между двумя последовательными разрядами измерялся с помощью зеркала, вращавшегося вместе с осью машины Гольца. Изображения последовательности разрядов наблюдались через гелиометр с разрезанным объективом, который регулировался так, чтобы одно изображение каждого разряда совпадало с другим изображением следующего разряда. Этим методом были получены хорошо согласующиеся результаты. Было найдено, что количество электричества в каждом разряде не зависит от силы тока и от материала электродов, а зависит от природы и плотности газа, от формы электродов и от расстояния между ними.

Эти исследования подкрепляют утверждение Фарадея ⁸, что электрическое натяжение, требуемое для того, чтобы вызвать пробойный разряд, возникающий на электризованной поверхности проводника, оказывается немного меньше в случае отрицательной электризации, чем в случае положительной. Но если разряд имеет место, то гораздо больше электричества проходит при каждом разряде, если он начинается на положительной поверхности. Они также, по-видимому, поддерживают предположение, высказанное в п. 57, что слой газа, сгущенного на поверхности электрода, играет важную роль в этом явлении, и они указывают, что это сгущение является наибольшим у положительного электрода.

КОНЕЦ ТОМА I.

⁷ *Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft*, Leipzig, Oct. 20, 1871.

⁸ *Exp. Res.*, 1501.

ИЛЛЮСТРАЦИИ

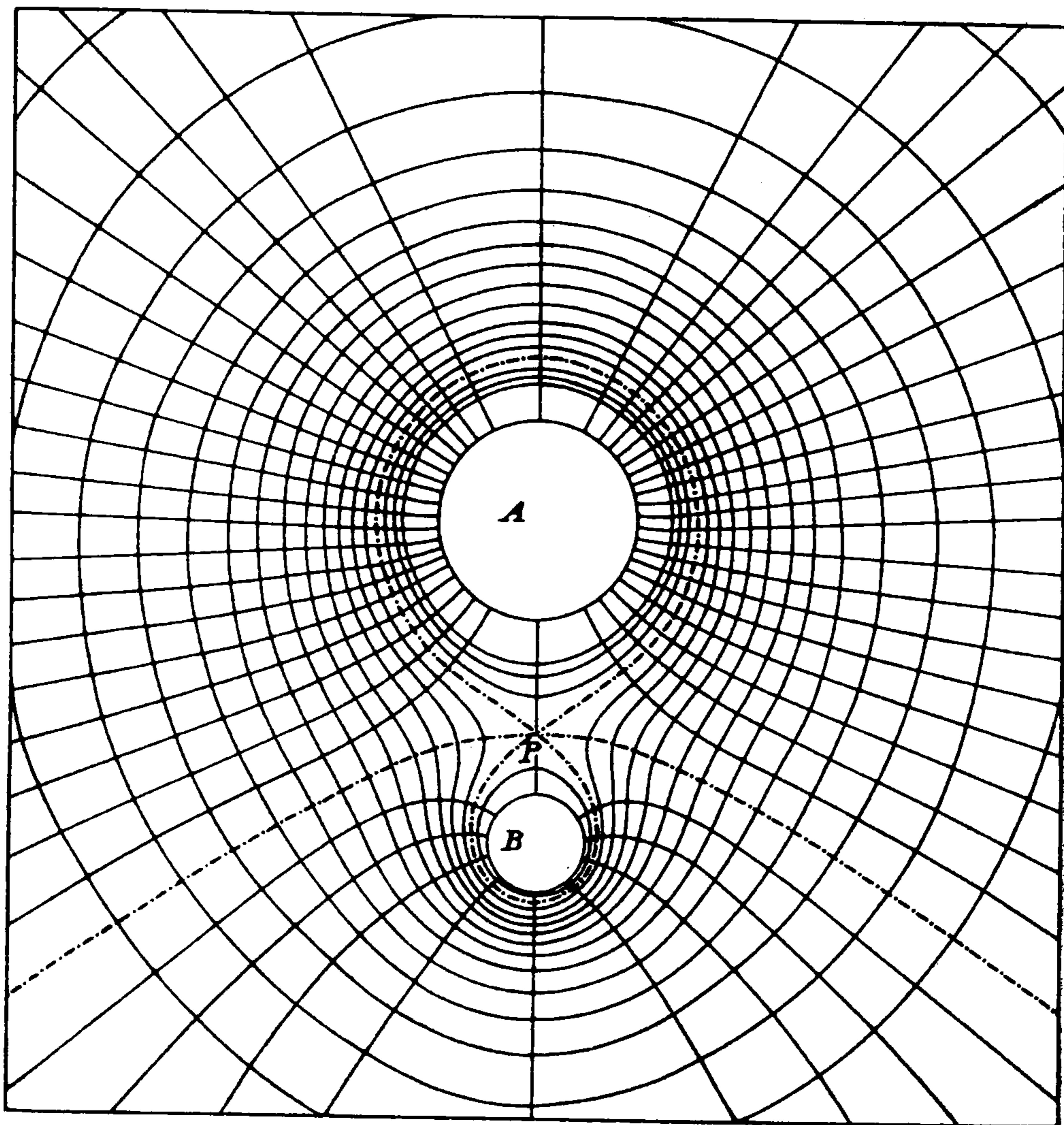


Рис. I, п. 118. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

$$A=20, B=5, P=\text{точка равновесия}, AP=\frac{2}{3}AB$$

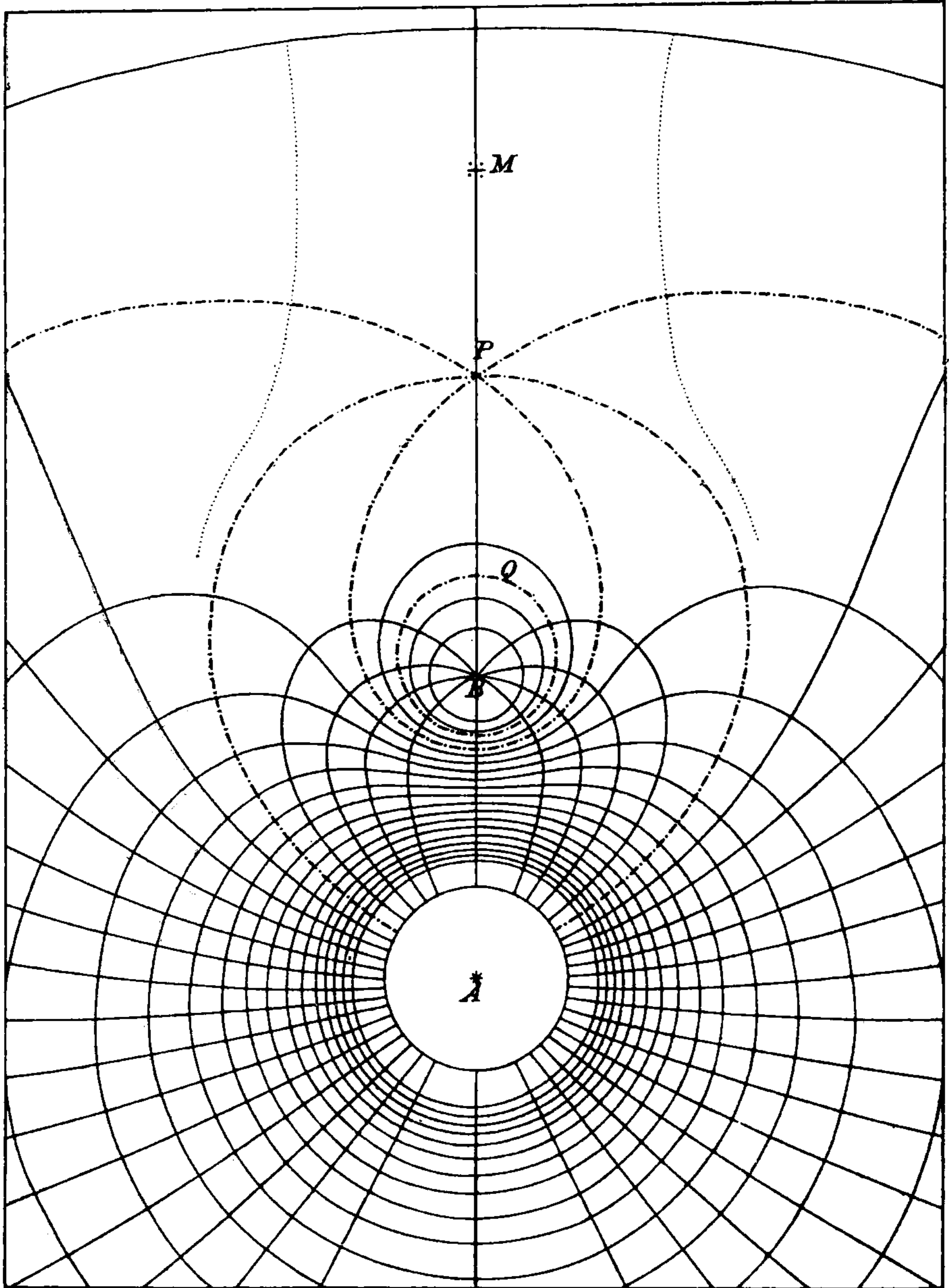


Рис. II, п. 119. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

$A=20$, $B=-5$, P —точка равновесия, $AP=2AB$, Q —сферическая поверхность нулевого потенциала, M —точка максимума силы вдоль оси. Пунктирная кривая — силовая линия $\Psi=0,1$

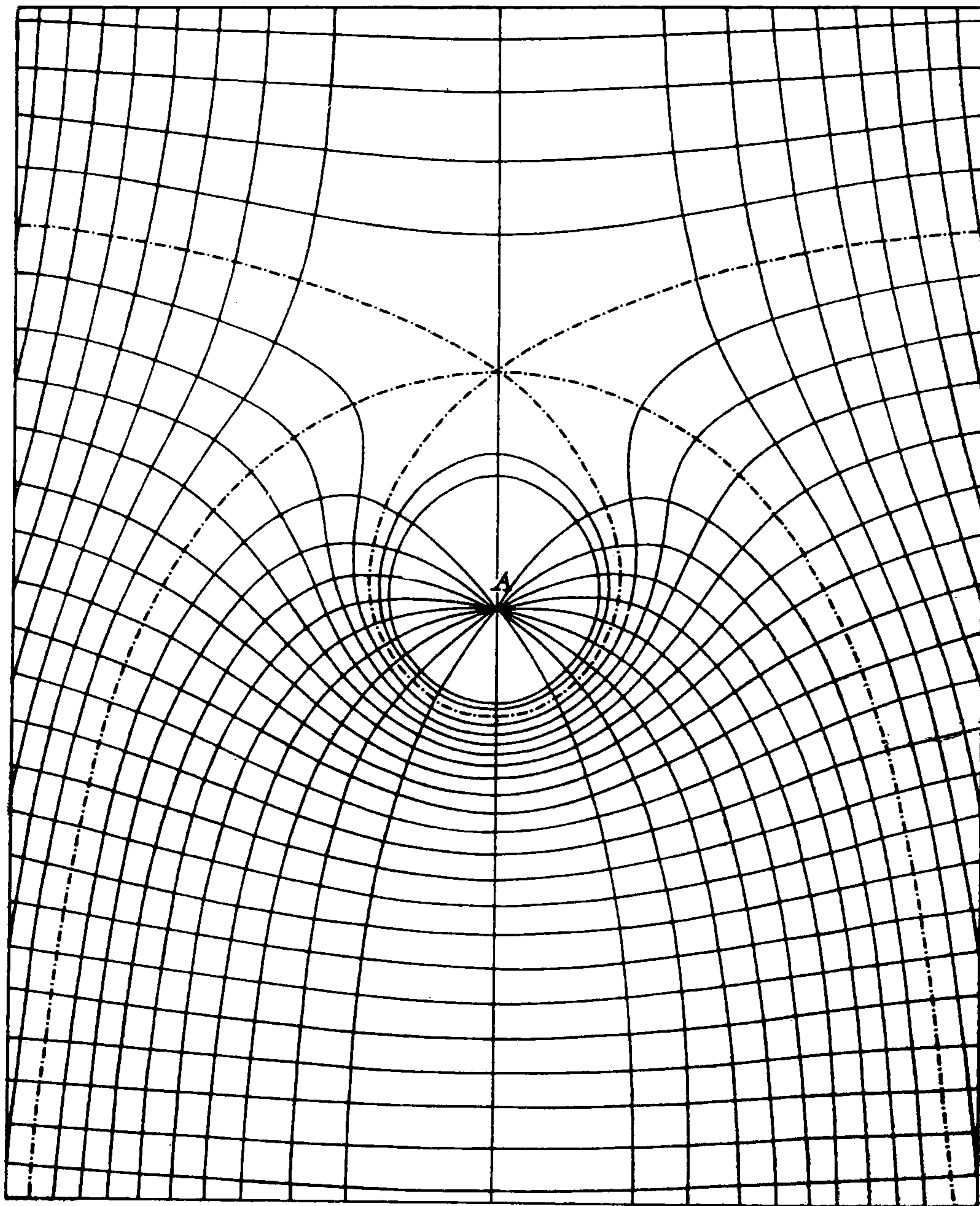


Рис: III, п. 120. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности $A=10$

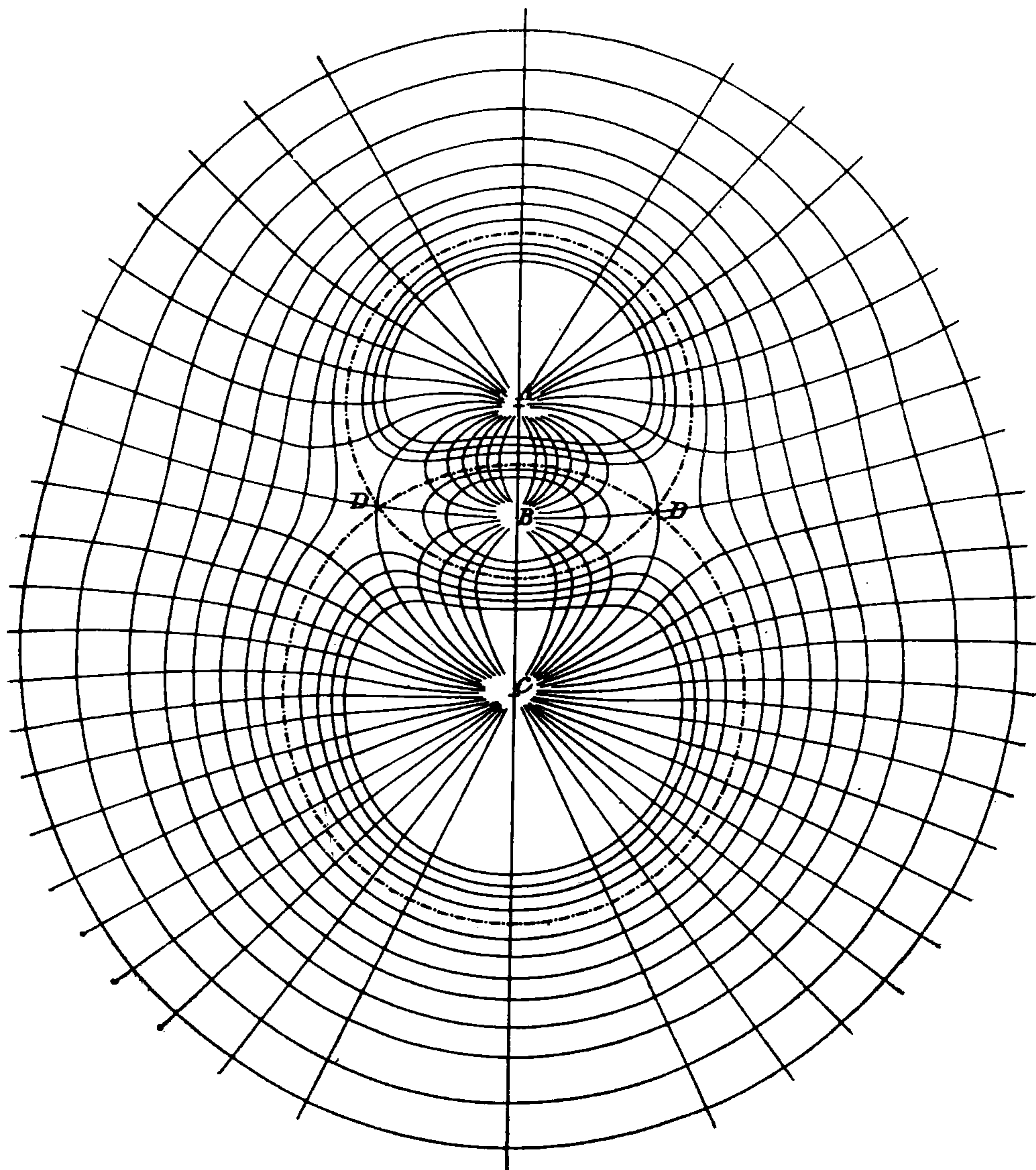


Рис. IV, п. 121. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности $A=15$, $B=12$, $C=20$

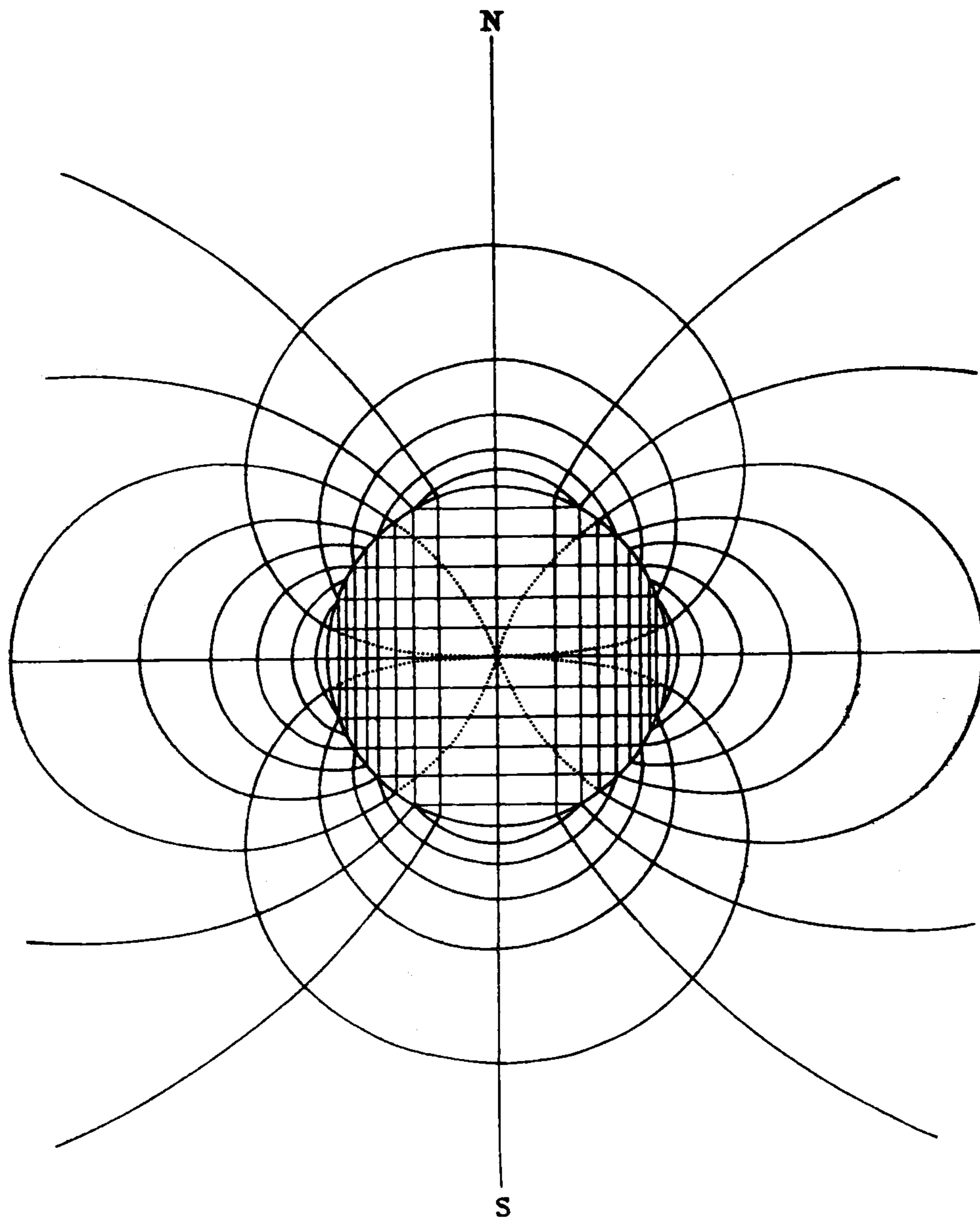


Рис. V, п. 143. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности в диаметральном сечении для сферической поверхности, на которой поверхностная плотность описывается сферической гармоникой первой степени

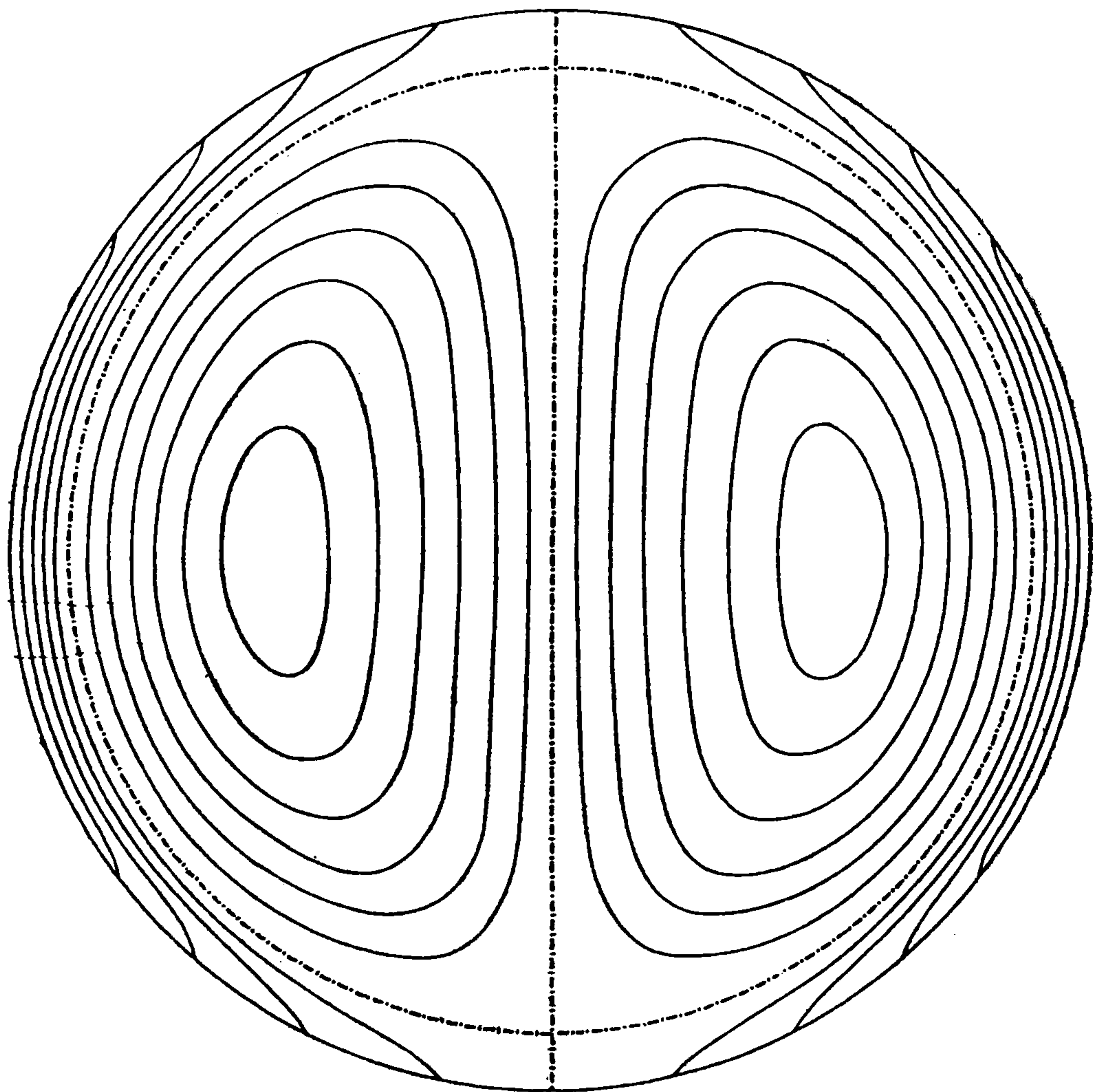


Рис. VI, п. 143. Сферическая гармоника третьего порядка $n=3$, $O=1$

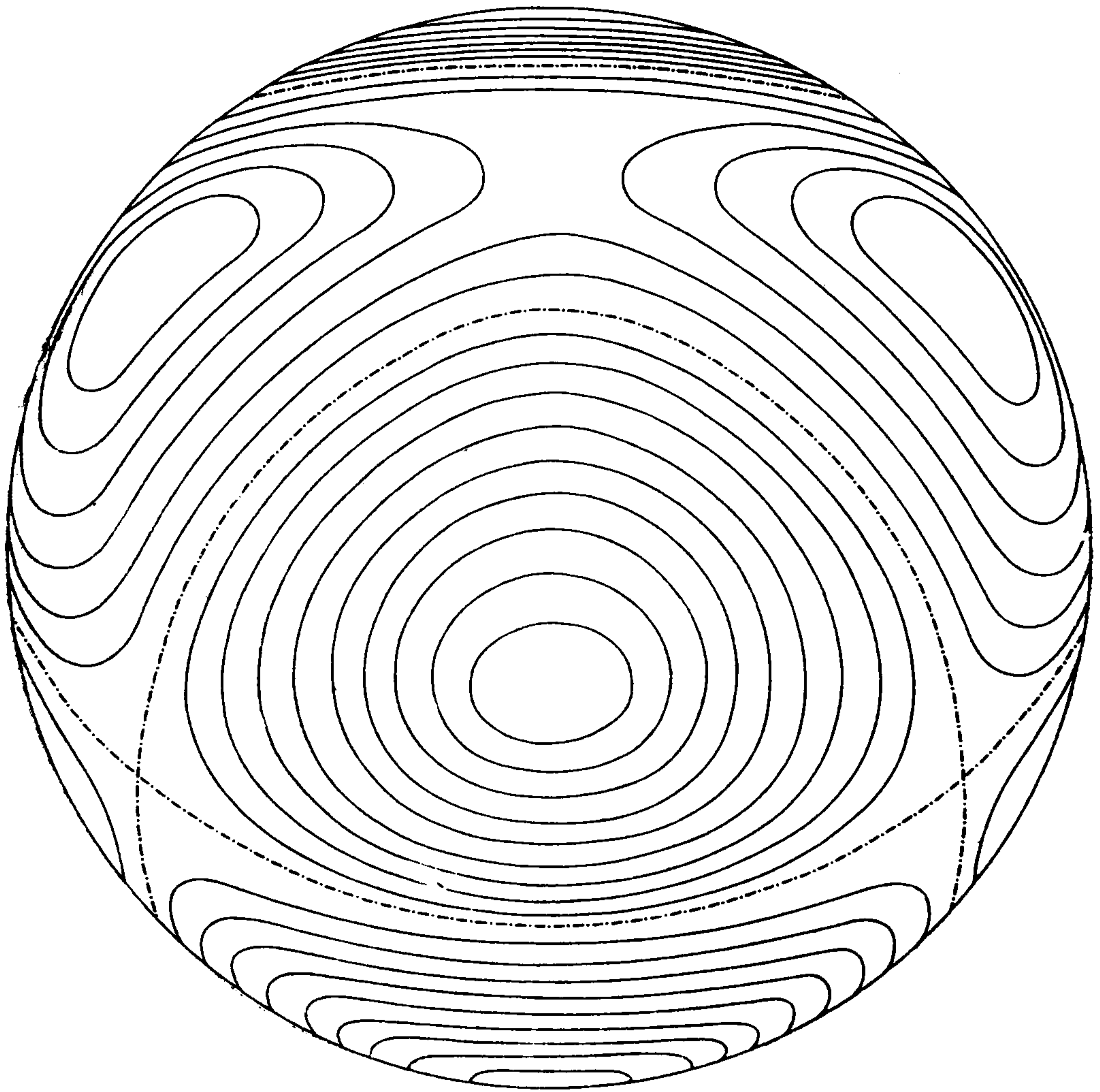


Рис. VII, п. 143. Сферическая гармоника третьего порядка $n=3$

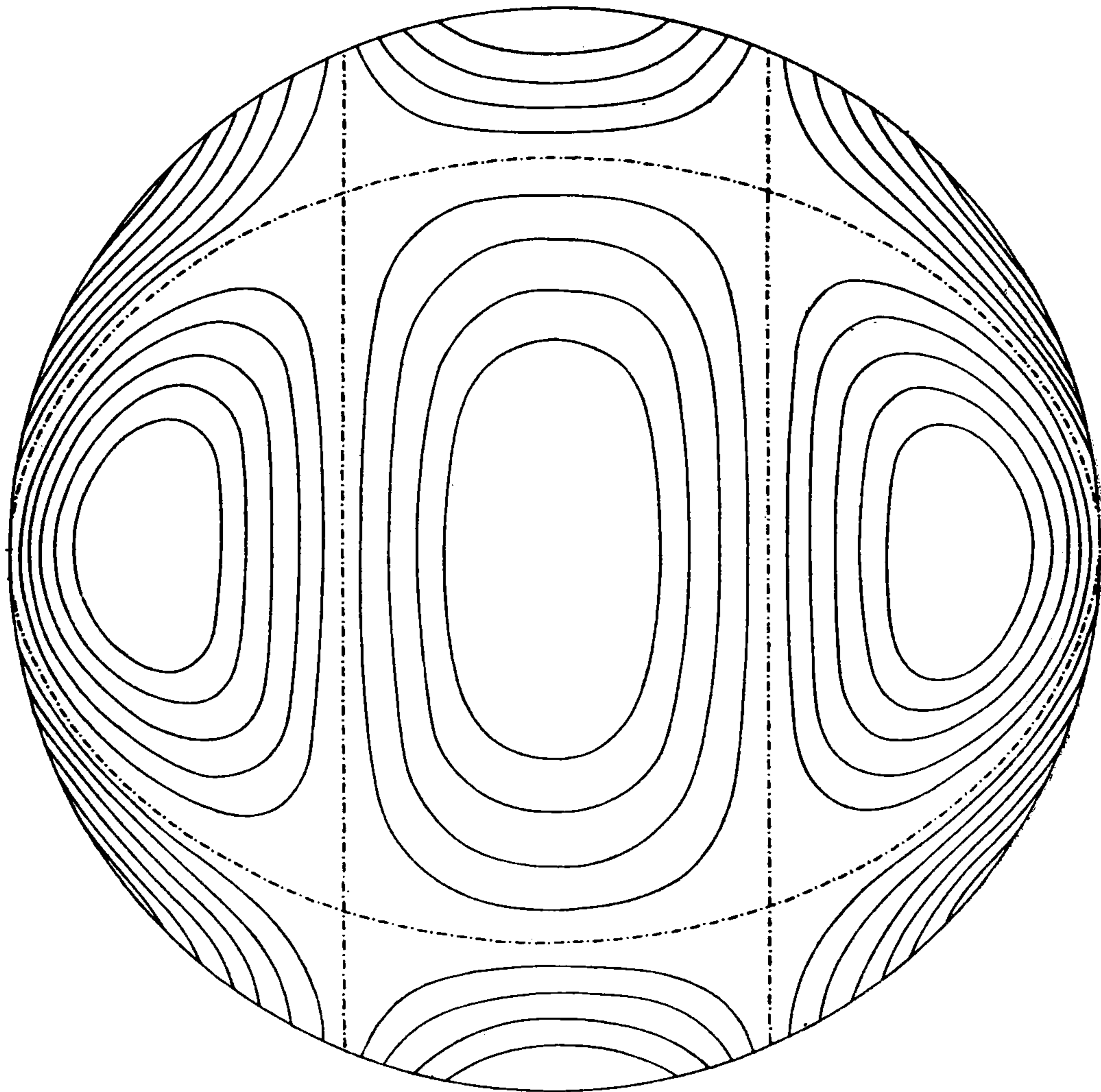


Рис. VIII, п. 143. Сферическая гармоника четвертого $n=4$, $\sigma=2$

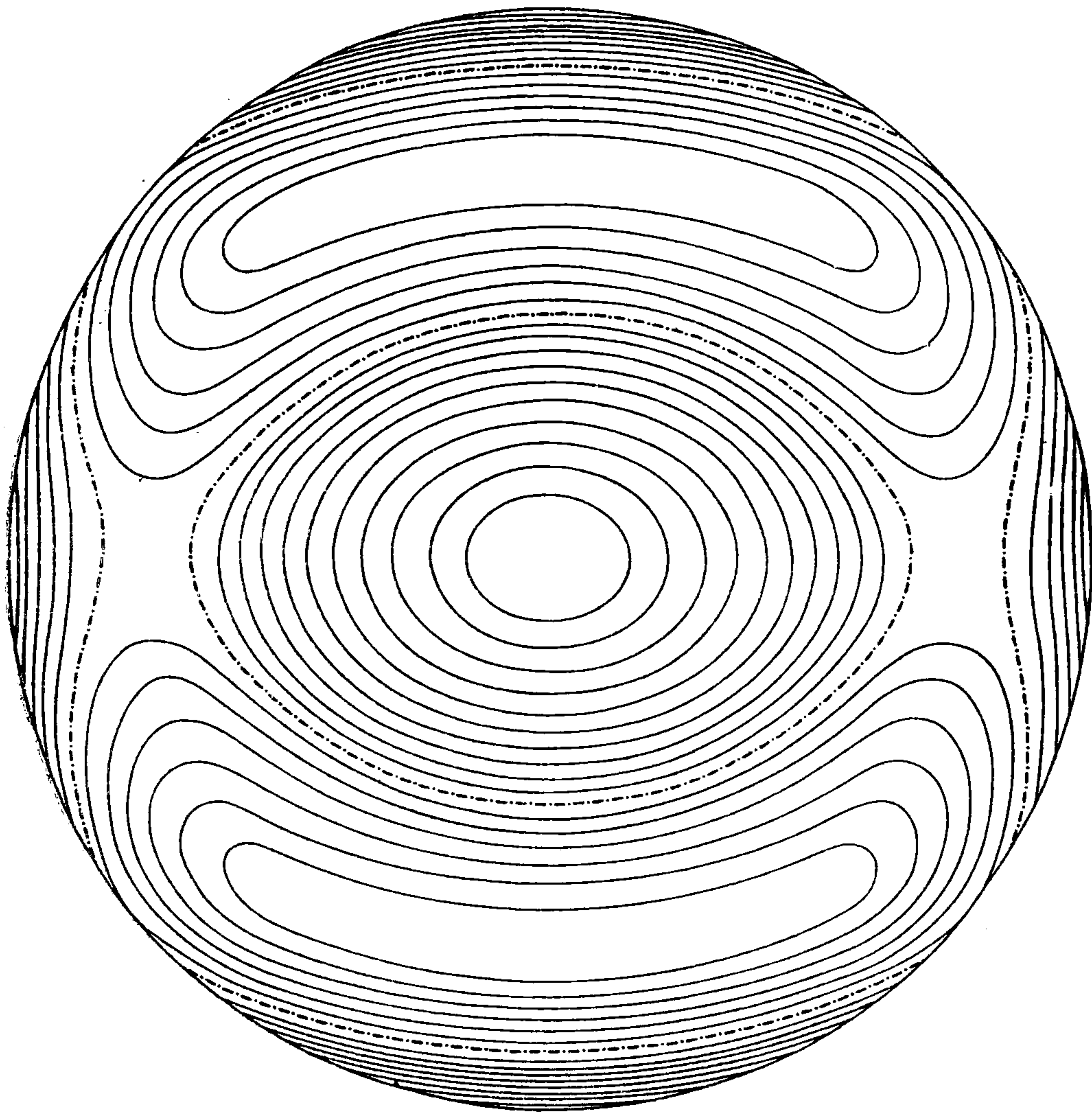


Рис. IX, п. 143. Сферическая гармоника четвертого порядка

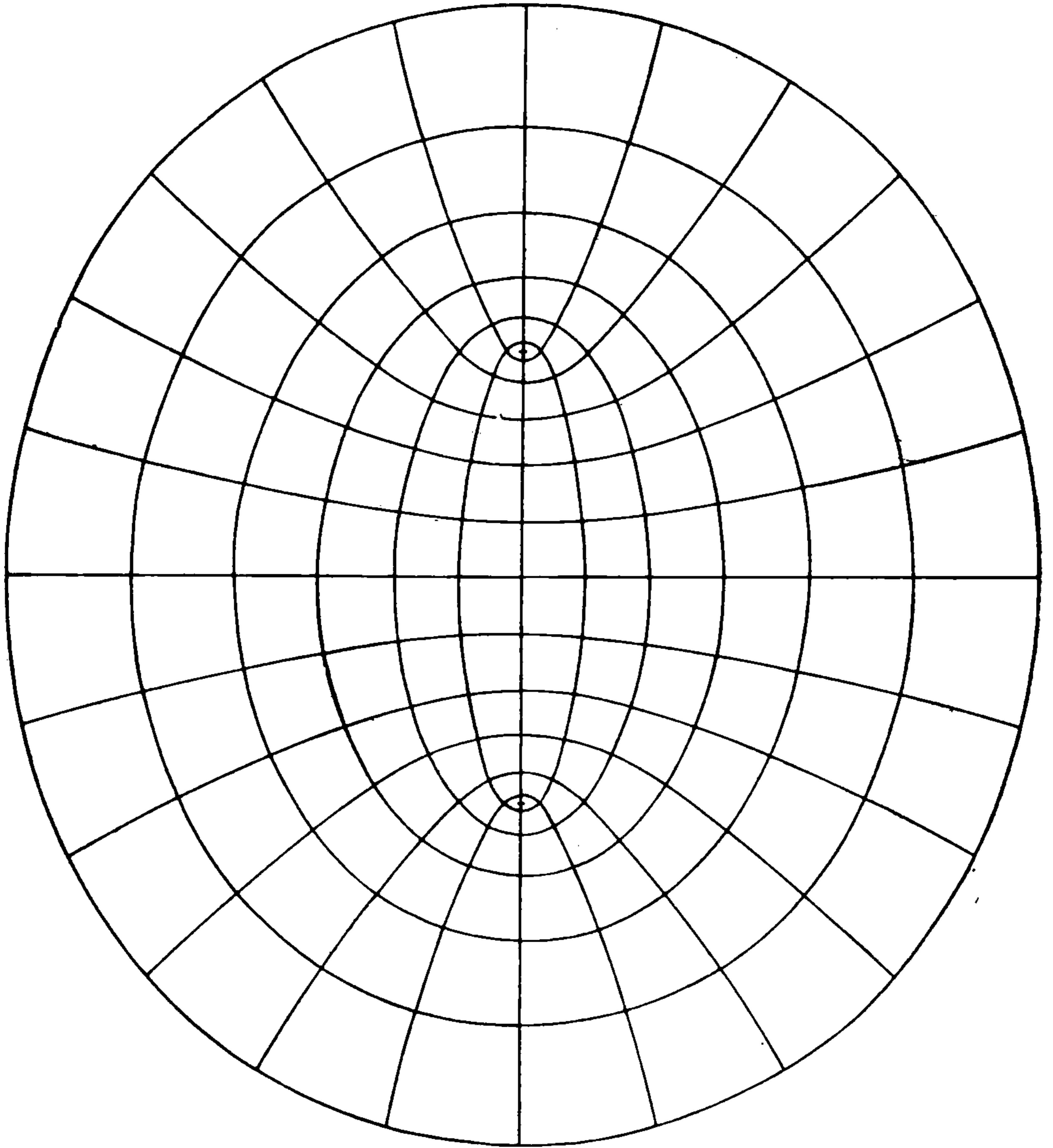


Рис. X, п. 192. Конфокальные эллипсы и гиперболы

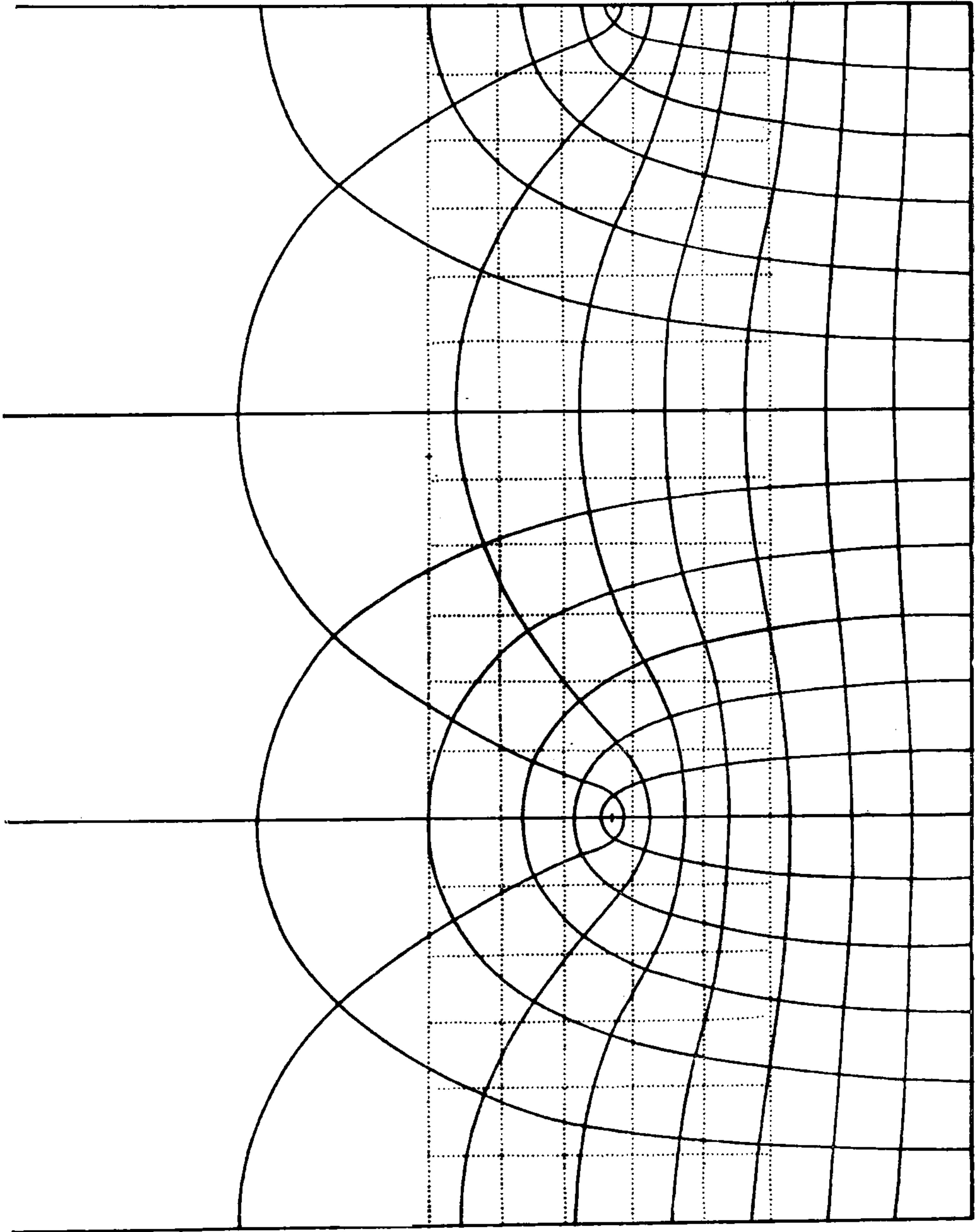


Рис. XI, п. 193. Силовые линии у ребра пластины

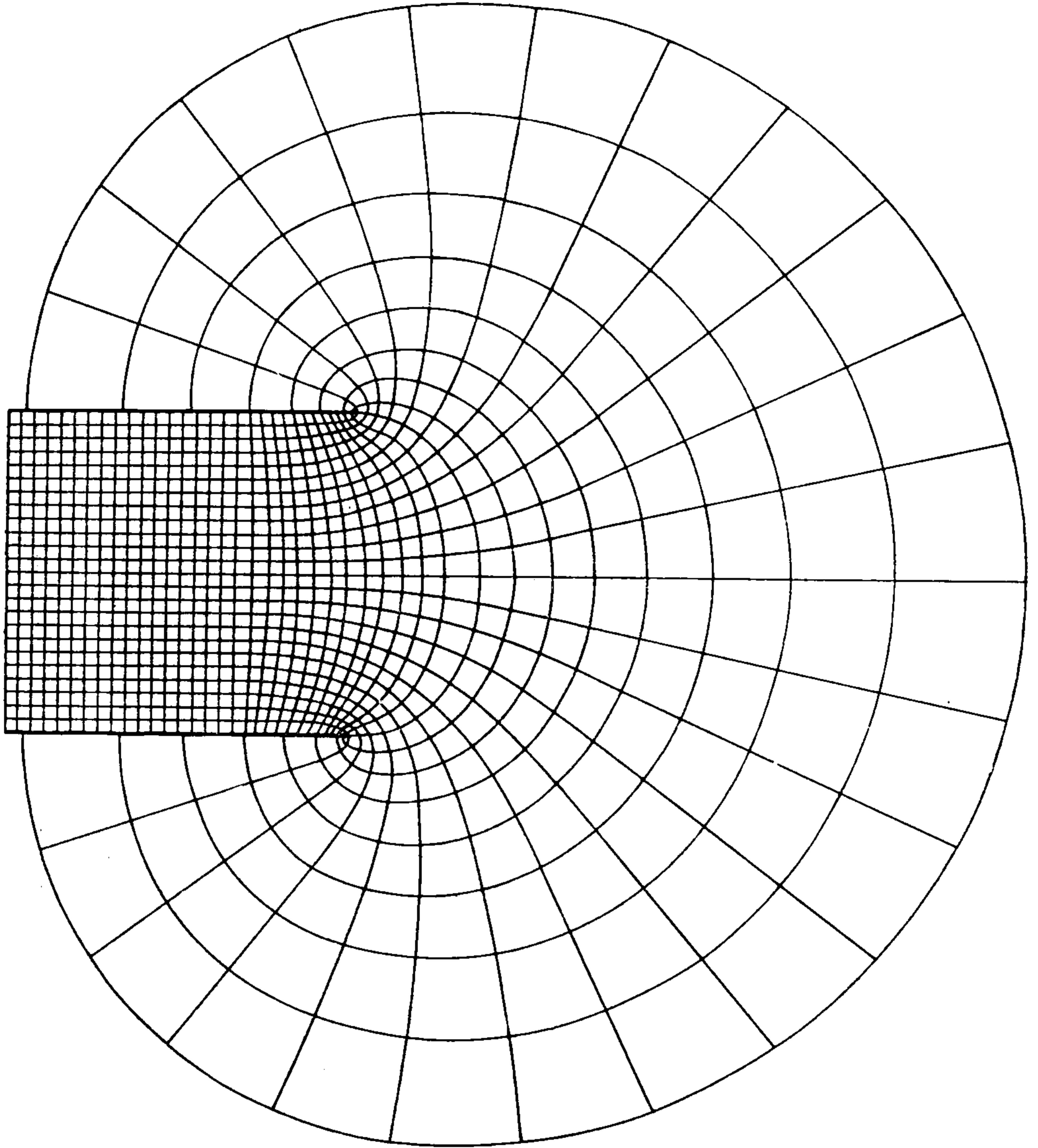


Рис. XII, п. 202. Силовые линии между двумя пластинами

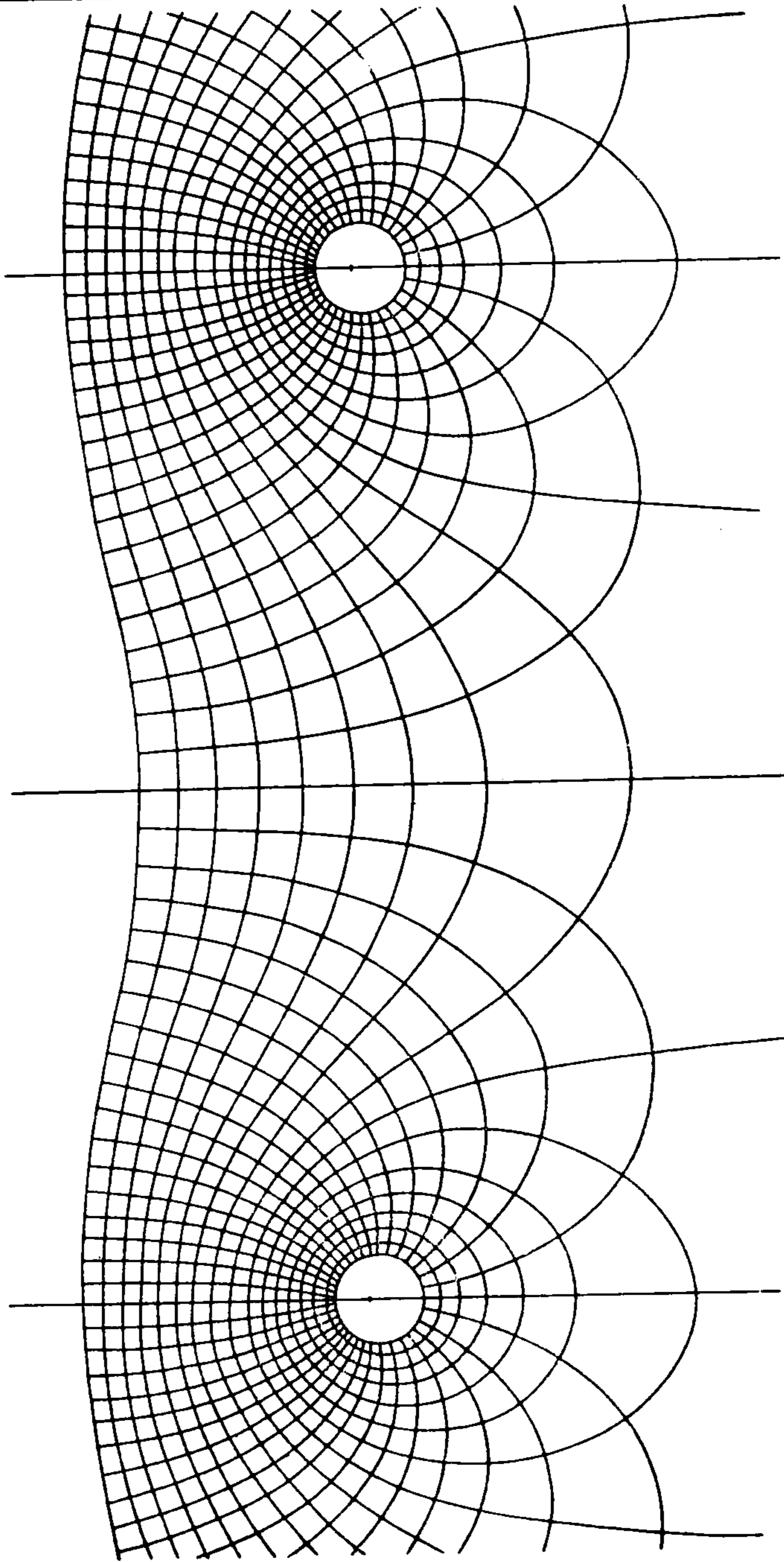


Рис. XIII, п. 203. Силовые линии вблизи решетки

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вместо предисловия	7
Предисловие к первому изданию	10
Содержание	16

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Предварительная глава. Об измерении величин	29
---	----

ЧАСТЬ I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Глава I. Описание явлений	55
Глава II. Элементарная математическая теория статического электричества	83
Приложение к главе II	106
Глава III. О работе электрических сил и энергии для системы проводников	107
Глава IV. Общие теоремы	121
Глава V. Механическое взаимодействие двух электрических систем	146
Глава VI. О точках и линиях равновесия	156
Глава VII. Формы эквипотенциальных поверхностей и линий индукции в простых случаях	161
Глава VIII. Простые случаи электризации	168
Глава IX. Сферические гармоники	173
Глава X. Конфокальные поверхности второго порядка	202
Глава XI. Теория электрических изображений и электрическая инверсия	211
Глава XII. Теория сопряженных функций в двух измерениях	239
Глава XIII. Электростатические приборы	262

ЧАСТЬ II

ЭЛЕКТРОКИНЕМАТИКА

Глава I. Электрический ток	280
Глава II. Проводимость и сопротивление	295
Глава III. Электродвижущая сила между соприкасающимися телами	298
Глава IV. Электролиз	304
Глава V. Электролитическая поляризация	313
Глава VI. Линейные электрические токи	322
Приложение к главе VI	329
Глава VII. Прохождение тока в трех измерениях	331
Глава VIII. Сопротивление и проводимость в трех измерениях	337
Глава IX. Прохождение электричества через неоднородные среды	349
Глава X. Прохождение электричества в диэлектриках	361
Глава XI. Измерение электрического сопротивления	373
Глава XII. Об электрическом сопротивлении веществ	365
Иллюстрации	403