ЧАСТЬ II
ЭЛЕКТРОКИНЕМАТИКА

ГЛАВА I
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

230. Мы видели в п. 45, что если проводник находится в электрическом равновесии, то потенциал в каждом токе проводника должен быть одним и тем же.

Зарядим два проводника A и B таким образом, чтобы потенциал проводника A был выше, чем потенциал B. Если теперь эти два тела связать посредством металлической проволоки C, касающейся их обоих, то часть заряда, находящегося на теле A, перейдет на B и за короткое время потенциалы A и B уравняются.

231. В это время в проволоке C наблюдаются определенные явления, которые называются явлениями электрического неравновесия (conflict), или электрического тока.

Первое из этих явлений состоит в переходе положительной электризации от A к B и отрицательной электризации от B к A. Этот переход можно осуществить более медленным способом, если взять небольшое изолированное тело и поочередно приводить его в соприкосновение с телами A и B. С помощью этого процесса, который мы можем назвать электрическим переносом, последовательные малые порции заряда с каждого тела переносятся на другое. Каждый раз некоторое количество электричества, или состояния электризации, переходит с одного места на другое по некоторому пути в пространство между этими телами.

Поэтому, каково бы ни было наше мнение о природе электричества, мы должны принять, что описанный нами процесс представляет собой ток электричества. Этот ток может быть описан как ток положительного электричества от A к B, или как ток отрицательного электричества от B к A, или как комбинация этих двух токов.

По теории Фехнера (Fechner) и Вебера (Weber), электрический ток рассматривается как комбинация двух токов: тока положительного электричества и в точности равного ему тока отрицательного электричества, движущихся в противоположном направлении через ту же среду. Это крайне искусственное предположение о структуре тока необходимо иметь в виду для того, чтобы понять формулировку наиболее ценных экспериментальных результатов, полученных Вебером.

Если, как в п. 36, мы будем считать, что за единицу времени от A к B передается P единиц положительного электричества, а от B к A передается N единиц отрицательного электричества, то по теории Вебера $P=N$, т. е. P или N следует принять за численную меру тока.

В противоположность этому мы не будем делать предположений относительно связи между P и N, принимая во внимание лишь результат протекания тока, а именно перенос $P+N$ единиц положительного электричества от A к B. Мы, таким образом, будем считать истинной мерой тока величину $P+N$. Поэтому ток, величину которого Вебер оценил бы в единицу, мы будем считать равным двум.

О постоянных токах

232. В случае тока между двумя изолированными проводниками, имеющими разные потенциалы, процесс быстро заканчивается выравниванием потенциалов этих двух тел, и поэтому ток является, по существу, Переходным Током.

Однако существуют способы, с помощью которых разность потенциалов между проводниками можно поддерживать постоянной. В этом случае ток будет продолжать идти с однородной силой как некоторый Постоянный Ток.

Вольтова батарея

Наиболее удобный способ получить постоянный ток дает Вольтова батарея. Для определенности мы опишем Элемент Даниэля.

Раствор сульфата цинка наливается в ячейку из пористой глины, а эта ячейка помещается в сосуд, в котором содержится насыщенный раствор сульфата меди. Кусок цинка погружается в сульфат цинка, а кусок меди — в сульфат меди. К цинку и меди над поверхностями жидкостей припаиваются проводники. Это устройство называется ячейкой, или элементом батареи Даниэля (см. п. 272).

233. Если изолировать элемент, поместив его на непроводящую подставку, и если проволоку, соединенную с медным электродом, привести в соприкосновение с каким-нибудь проводником A, а проволоку, соединенную с цинковым электродом, привести в соприкосновение с другим каким-нибудь проводником B, сделанным из того же металла, что и проводник A, то с помощью чувствительного электрометра можно показать, что потенциал проводника A будет превышать потенциал B на определенную величину. Эта разность потенциалов называется Электродвижущей Силой Элемента Даниэля.

Если теперь отъединить проводники A и B от элемента и соединить их между собой с помощью проволоки, то через нее пройдет переходный ток в направлении от A к B и потенциалы проводников A и B уравняются. Проводники A и B можно затем снова зарядить от гальванического элемента и повторять описанную процедуру до тех пор, пока элемент будет действовать. Но если проводники A и B соединены проволокой C и в то же время связаны с батареей, как описано выше, то элемент будет поддерживать постоянный ток в проволоке C и также постоянную разность потенциалов между проводниками A и B. Эта разность потенциалов, как мы увидим, не будет равна полной электродвижущей силе элемента, потому что часть этой силы расходуется на поддержание тока через сам элемент.

Несколько элементов, расположенных последовательно, так что цинк первого элемента соединен металлом с медью второго и т. д., называется Вольтовой батареей. Электродвижущая сила такой батареи равна сумме электродвижущих сил составляющих ее элементов. Если батарею изолировать и сообщить ей как целому электрический заряд, то при этом потенциал медного конца всегда будет превышать потенциал цинкового конца на величину, равную электродвижущей силе батареи, каково бы ни было абсолютное значение этих потенциалов. Элементы, входящие в батарею, могут очень сильно различаться по устройству, содержать различные химические вещества и различные металлы при условии, что химические реакции не идут, пока нет тока.

234. Рассмотрим теперь вольтову батарею, у которой концы изолированы друг от друга. Медный конец будет заряжен положительно или стеклообразно, а цинковый конец будет заряжен отрицательно или смолообразно.

Соединим теперь два конца батареи проволокой. Возникнет электрический ток, который очень скоро достигнет постоянной величины. Его и называют Постоянным Током.

Свойства тока

235. Ток образует замкнутую цепь, протекая по проводам в направлении от меди к цинку, а через растворы внутри элемента — в направлении от цинка к меди.

Если разорвать цепь, разрезав проволоку, соединяющую медь одного из элементов с цинком следующего элемента, ток прекратится, а потенциал того конца проволоки, который соединен с медью, будет превышать на постоянную величину потенциал того конца проволоки, который связан с цинком. Эта постоянная величина равна полной электродвижущей силе в цепи.

Электролитическое действие тока

236. Пока цепь разомкнута, в элементах, составляющих батарею, не происходит никаких химических реакций. Но если цепь замкнута, то в каждом элементе Даниэля цинк уходит в раствор с цинка, а медь из раствора осаждается на меди.

Количество сернокислого цинка увеличивается, а количество медного купороса уменьшается, если его непрерывно не добавлять.

Количество растворенного цинка в каждом из элементов Даниэля, составляющих цепь, одинаково, как и количество осажденной меди, независимо от размера пластин в элементах. Если какой-нибудь из элементов отличается своим устройством, химическое действие в этом элементе находится в постоянном соотношении с химическим действием в элементе Даниэля. Пусть, например, один из элементов состоит из двух платиновых пластин, погруженных в водный раствор серной кислоты. Тогда на поверхности той пластины, через которую ток входит в жидкость (а именно пластины, соединенной с медью элемента Даниэля), будет выделяться кислород, а на поверхности той пластины, через которую ток покидает жидкость (именно пластины, соединенной с цинком элемента Даниэля), будет выделяться водород.

Объем водорода в точности равен удвоенному объему кислорода, выделившегося за то же время, а вес кислорода точно в восемь раз превышает вес водорода.

Вес каждого вещества, растворенного, осажденного или разложенного в любом элементе цепи, равен определенной величине, называемой электрохимическим эквивалентом данного вещества, умноженной на силу тока и на время, в течение которого шел ток.

Эксперименты, в которых был установлен этот принцип, изложены в седьмой и восьмой сериях *«Экспериментальных исследований»* Фарадея. Исследование кажущихся исключений из этого правила см. в книгах Миллера «*Химическая физика*» (Miller's «*Chemical Physics*») и Видеманна «*Гальванизм*» (Wiedemann's «*Galvanismus*»).

237. Вещества, разлагаемые таким путем, называются Электролитами. Самый процесс называется Электролизом. Места, где ток входит в электролит и выходит из него, называются Электродами. Тот из них, через который ток входит, называется Анодом, а тот, через который ток покидает электролит, называется Катодом. Составляющие, на которые разлагается электролит, называются Ионами: ион, приходящий к аноду, называется Анион, а тот, который приходит к катоду, называется Катион.

Из этих названий, которые, как я полагаю, придумал Фарадей с помощью д-ра Уивелла (Whewell), первые три, а именно электрод, электролиз и электролит, являются уже общепринятыми, а тот вид проводимости тока, в котором имеет место описанное разложение и перенос компонент, называется Электролитической Проводимостью.

Если однородный электролит помещен в трубку переменного сечения, а электроды размещены на ее концах, то обнаружено, что при прохождении тока анионы появляются у анода, а катионы — у катода, причем количества этих ионов электрохимически эквивалентны и таковы, что они в сумме эквивалентны определенному количеству электролита. В других частях трубки состав электролита остается неизменным независимо от того, велико или мало сечение трубки, остается оно постоянным или меняется. Таким образом, количество электролиза в любом сечении трубки одинаково. Там, где сечение мало, процесс поэтому должен быть более интенсивным, чем там, где сечение велико; но полное количество ионов каждого сорта, которые проходят через любое поперечное сечение трубки в данный промежуток времени, есть величина неизменная для всех сечений.

Поэтому сила тока может быть измерена по количеству электролиза в данное время. Прибор, с помощью которого определяется количество продуктов электролиза, называется Вольтаметром.

Измеренная таким способом сила тока имеет одно и то же значение для каждой части цепи, а полное количество продуктов электролиза, выделившихся в вольтметре за любой данный промежуток времени, пропорционально количеству электричества, прошедшему за то же самое время через любое сечение цепи.

238. Если ввести вольтаметр в какую-нибудь часть цепи, содержащей вольтову батарею, и разорвать цепь на каком-нибудь другом участке, то мы можем предположить, что процесс измерения тока происходит следующим образом. Концы разорванной цепи обозначим через A и B, и пусть A будет анод, а B — катод. Возьмем теперь изолированный шар и будем попеременно приводить его в соприкосновение то с A, то с B. За каждый переход шар будет переносить от A к B определенное измеримое количество электричества. Это количество электричества может быть измерено электрометром, или оно может быть вычислено как произведение электродвижущей силы в цепи на электростатическую емкость шара. Электричество, таким образом, доставляется от A к B на изолированном шаре с помощью процесса, который можно назвать Переносом. При этом как в вольтаметре, так и в элементах батареи идет электролиз, и количество продуктов электролиза в каждом элементе можно сравнить с количеством электричества, перенесенным с помощью изолированного шара. Количество вещества, выделившегося в электролизе при прохождении единицы количества электричества, называется Электрохимическим эквивалентом этого вещества.

Если измерения проводить описанным способом, взяв шар обычных размеров и управляемую батарею, то эксперимент был бы крайне утомительным и хлопотливым, потому что для разложения заметного количества электролита нужно совершить огромное число переходов. Поэтому такой эксперимент следует рассматривать скорее как иллюстрацию, имея в виду, что в действительности измерения электрохимических эквивалентов проводятся иначе. И все же описанный эксперимент можно рассматривать как пояснение самого процесса электролиза.

Действительно, мы получим представление о процессе электролиза, если будем рассматривать электролитическую проводимость как вид переноса, при котором электрохимический эквивалент вещества аниона движется вместе с отрицательным электричеством в направлении анода, в то время как электрохимический эквивалент катиона движется вместе с положительным электричеством в направлении катода, причем полное количество переносимого электричества равно единице. Мы будем иметь представление о процессе электролиза, которое, насколько я знаю, не противоречит известным фактам, хотя из-за нашего незнания природы электричества и химических соединений оно может оказаться весьма несовершенным описанием того, что имеет место в действительности.

Магнитное действие тока

239. Эрстед открыл, что магнит, помещенный вблизи от прямолинейного электрического тока, стремится стать под прямым углом к плоскости, проходящей через магнит и через ток (см. п. 475).

Если человек расположит свое тело по линии тока так, чтобы ток через провод, идущий от меди к цинку, тек бы от головы к ногам, и если человек повернется лицом к центру магнита, тогда тот конец магнита, который указывает на север, при наличии тока будет указывать в сторону правой руки человека.

Мы обсудим природу и законы этого электромагнитного воздействия, когда дойдем до четвертой части этого трактата. Здесь же отметим лишь тот факт, что электрический ток обладает магнитным действием, которое проявляется вне тока и по которому может быть установлено существование тока и измерена его величина без прерывания цепи или введения чего бы то ни было в сам ток.

Установлено, что величина магнитного действия строго пропорциональна силе тока, измеренной по продуктам электролиза в вольтаметре, и совсем не зависит от природы проводника, по которому идет ток, будь то металл или электролит.

240. Прибор, определяющий силу электрического тока по ее магнитным действиям, называется Гальванометром.

Как правило, гальванометры состоят из одного или нескольких витков, сделанных из проволоки с шелковой изоляцией. Внутри этих витков подвешен магнит, ось которого горизонтальна. Когда по проволоке проходит ток, магнит стремится принять такое положение, при котором его ось перпендикулярна плоскости катушек.

Если мы предположим, что плоскость катушек параллельна плоскости земного экватора, а ток обтекает катушку с востока на запад, в направлении кажущегося движения Солнца, то магнит внутри катушки стремится принять такое же положение, что и Земля, рассматриваемая как большой магнит, причем северный полюс Земли подобен тому концу стрелки компаса, который указывает на Юг.

Гальванометр является наиболее удобным прибором для измерения силы электрических токов. Поэтому мы будем предполагать, изучая законы электрического тока, что создание таких приборов возможно, а обсуждение их действия отложим до четвертой части. Таким образом, когда мы говорим, что электрический ток имеет определенную величину, мы подразумеваем, что измерение выполнено с помощью гальванометра.

ГЛАВА II

ПРОВОДИМОСТЬ И СОПРОТИВЛЕНИЕ

241. Если с помощью электрометра мы определим электрический потенциал в различных точках цепи, в которой поддерживается постоянный ток, то мы найдем, что на любом участке цепи, состоящей из одного-единственного металла с однородным распределением температуры по объему, значение потенциала в любой точке превышает его значение в любой другой точке, расположенной дальше по направлению тока, на величину, зависящую от силы тока, а также от природы и размеров входящего участка цепи. Разность потенциалов в крайних точках этого участка цепи называется Внешней электродвижущей силой, действующей на данный участок. Если рассматриваемая часть цепи не является однородной, но содержит переходы от одного вещества к другому, от металлов к электролитам или от более теплых участков к более холодным, то может оказаться, что, кроме внешней электродвижущей силы, существуют еще внутренние силы, которые необходимо учитывать.

Соотношения между Электродвижущей Силой, Током и Сопротивлением были впервые исследованы д-ром Г. С. Омом в работе, которая была опубликована в 1827 году под заглавием *Die Galvanische Kette Mathematisch Bearbeitet*, а затем переведена в Taylor's *Scientific Memoirs*. Результат этих исследований для случая однородных проводников обычно называют «Закон Ома».

Закон Ома

Электродвижущая сила, действующая между крайними точками любого участка цепи, равна произведению силы тока на сопротивление этого участка цепи.

Здесь вводится новое понятие — Сопротивление проводника, которое определяется как отношение электродвижущей силы к вызываемой ею силе тока. Введение этого понятия было бы лишено научной ценности, если бы Ом не показал экспериментально, что оно отвечает реальной физической величине, т. е. имеет вполне определенное численное значение, которое меняется лишь в том случае, когда меняется природа проводника.

При этом, во-первых, сопротивление проводника не зависит от силы проходящего через него тока.

Во-вторых, сопротивление не зависит от электрического потенциала, под которым находится проводник, а также от плотности распределения электричества на поверхности проводника.

Оно зависит исключительно от природы тех материалов, из которых составлен проводник, от агрегатного состояния различных частей проводника и от его температуры.

Сопротивление проводника может быть измерено с точностью до одной десятитысячной или даже одной стотысячной доли его величины, и к настоящему времени исследовано столь много проводников, что наша уверенность в справедливости закона Ома очень высока. В шестой главе мы рассмотрим приложения этого закона и следствия из него.

Образование тепла током

242. Мы видели, что когда электродвижущая сила вызывает ток через проводник, электричество перемещается от места с более высоким к месту с более низким значением потенциала. Если это перемещение осуществляется путем конвекции, т. е. с помощью повторяющихся переносов заряда на изолированном шаре от одного места к другому, то электрические силы совершают над шаром работу, и это обстоятельство может оказаться существенным. Действительно, это оказывается отчасти существенным в случае тех цепей с сухими батареями, где электроды выполнены в виде колокольчиков, а шар, переносящий заряд, колеблется, подобно маятнику, между этими двумя колокольчиками и соударяется с ними по очереди. При этом электрическое действие поддерживает колебание маятника, а также обеспечивает распространение звука колокольчиков на расстоянии.

В случае проводящей проволоки мы имеем дело с тем же перемещением электричества от места с более высоким к месту с более низким потенциалом без совершения при этом какой-либо внешней работы. Поэтому закон Сохранения Энергии ведет нас к поискам работы, производимой внутри проводника. В электролите эта внутренняя работа состоит частично в разделении его компонентов. В других проводниках она целиком переходит в тепло.

В этом случае энергия, перешедшая в тепло, равна произведению электродвижущей силы на количество проходящего электричества. Но электродвижущая сила равна произведению тока на сопротивление, а количество электричества равно произведению тока на время. Поэтому количество тепла, умноженное на механический эквивалент единицы тепла, равно квадрату силы тока, умноженному на сопротивление и время.

Тепло, выделяемое электрическим током при преодолении сопротивления проводника, было определено д-ром Джоулем (Joule). Он сначала установил, что тепло, производимое в заданное время, пропорционально квадрату тока, а затем, проведя тщательные абсолютные измерения всех рассматриваемых величин, подтвердил справедливость уравнения

$$JH=C^2Rt,$$

где J — найденный Джоулем механический эквивалент теплоты, H — число единиц теплоты, C — сила тока, R — сопротивление проводника, t — время прохождения тока.

Эти соотношения между электродвижущей силой, работой и теплом были впервые полностью объяснены сэром У. Томсоном в статье, посвященной приложению принципа механического действия к измерению электродвижущих сил [1].

243. Аналогия между проводимостью электричества и проводимостью тепла на первый взгляд кажется почти полной. Если взять две геометрически подобных системы, таких, что коэффициент теплопроводности в любой части первой системы пропорционален проводимости электричества в соответствующей части второй системы, а также сделать и температуру в каждой части первой системы, пропорциональной электрическому потенциалу в соответствующей точке второй системы, то поток тепла через любую поверхность в первой системе будет пропорционален потоку электричества через соответствующую поверхность во второй системе.

Таким образом, в приведенном нами примере поток электричества соответствует потоку тепла, а электрический потенциал соответствует температуре. Электричество стремится перетекать от мест с высоким к местам с низким потенциалом, в точности так же, как тепло стремится перетекать от мест с высокой к местам с низкой температурой.

244. Таким образом, теория электрического потенциала и теория теплоты могут быть использованы одна для иллюстрации другой. Однако между электрическими и тепловыми явлениями имеется одно замечательное различие.

Внутри замкнутого проводящего сосуда подвесим на шелковой нитке какое-нибудь проводящее тело, затем зарядим сосуд электричеством. Потенциал сосуда и всего его содержимого сразу же возрастет, но как бы долго и как бы сильно ни электризовался сосуд, внутри него не будет замечено никаких признаков электризации, а тело, извлеченное из сосуда, не проявит никаких электрических воздействий, независимо от того, находилось ли оно в контакте с внутренней поверхностью сосуда или нет.

Однако если сосуд нагреть до высокой температуры, то тело внутри тоже нагреется до той же температуры, хотя и через значительное время. Если затем вынуть тело из сосуда, оно окажется горячим и будет таким в течение некоторого времени, продолжая испускать тепло.

Различие между этими явлениями заключается в том, что тела способны поглощать и испускать тепло, в то время как у них нет соответствующего свойства по отношению к электричеству. Нельзя нагреть тела, не передав ему определенного количества тепла, зависящего от массы и теплоемкости тела. Но электрический потенциал тела может быть сделан сколь угодно большим с помощью описанного выше способа, без передачи другому телу какого-нибудь электричества.

245. Предположим снова, что мы нагрели тело, а затем поместили его в замкнутый сосуд. Внешняя часть сосуда будет сначала иметь температуру окружающих тел, но скоро она нагреется и будет оставаться горячей, пока тепло не покинет внутреннее тело.

Невозможно выполнить соответствующий электрический эксперимент. Невозможно так наэлектризовать тело и так поместить его в закрытый сосуд, чтобы внешняя часть сосуда сначала не проявляла никаких признаков электризации, а затем стала бы наэлектризованной. Именно такого рода явление под именем абсолютного электрического заряда безуспешно искал Фарадей.

---

[1] *Phil. Mag.*, Dec., 1851.

Тепло может быть скрыто в глубине тела и не оказывать внешнего воздействия, но невозможно изолировать какое-либо количество электричества так, чтобы предотвратить его от постоянной индуктивной связи с равным количеством электричества противоположного знака.

Поэтому в электрических явлениях нет ничего такого, что соответствовало бы теплоемкости тела. Это непосредственно следует из принятой в настоящем трактате точки зрения, по которой электричество удовлетворяет тому же условию непрерывности, что и несжимаемая жидкость. Поэтому невозможно сообщить какому-либо веществу объемный электрический заряд, загоняя внутрь этого тела добавочное количество электричества (см. п. 61, 111, 329, 334).

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА МЕЖДУ СОПРИКАСАЮЩИМИСЯ ТЕЛАМИ

Потенциалы различных веществ, находящихся в контакте

246. Если мы определим потенциал пустотелого проводящего сосуда как потенциал воздуха внутри этого сосуда, то мы можем найти этот потенциал с помощью электрометра, как было описано в части I, п. 221.

Если взять теперь два полых сосуда, сделанные из различных металлов, скажем медный и цинковый, и привести их в соприкосновение друг с другом, а затем измерить потенциалы воздуха внутри каждого из сосудов, то окажется, что потенциал воздуха внутри цинкового сосуда будет положительным по сравнению с потенциалом воздуха внутри медного сосуда. Разность потенциалов зависит от природы внутренних поверхностей сосудов и принимает наибольшее значение, если цинк имеет яркую поверхность, а медь покрыта окислом.

Отсюда вытекает, что когда два различных металла находятся в контакте, возникает, вообще говоря, электродвижущая сила, действующая от одного из них к другому так, что в результате потенциал одного из металлов превышает потенциал другого на определенную величину. В этом состоит Вольтова теория Контактного Электричества.

Если мы примем определенный металл, скажем медь, за стандарт и если потенциал железа, приведенного в контакт с медью, имеющей нулевой потенциал, равен I, а потенциал цинка, приведенного в контакт с медью, имеющей нулевой потенциал, равен Z, то потенциал цинка в контакте с железом, находящимся под нулевым потенциалом, будет равен $Z—I$, если среда, окружающая металлы, остается той же самой.

Из этого результата, справедливого для любых трех металлов, следует, что разность потенциалов любых двух металлов, находящихся в контакте при равной температуре, равна разности потенциалов тех же металлов, когда они порознь находятся в контакте с третьим металлом. Поэтому если образовать цепь из любого числа металлов, находящихся при одинаковой температуре, то сразу же после того, как потенциалы металлов примут должные значения, установится электрическое равновесие, и в цепи не будет тока.

247. Если, однако, цепь состоит из двух металлов и электролита, то, по теории Вольта, электролит стремится уравнять потенциалы металлов, с которыми находится в контакте. Поэтому электродвижущая сила при соединении двух металлов уже не уравновешивается, и существует постоянный ток. Энергия этого тока обеспечивается химическим действием, которое имеет место между электролитом и металлами.

248. Однако электрический ток может быть создан без химического воздействия, если мы можем каким-нибудь другим способом произвести выравнивание потенциалов двух металлов, находящихся в контакте. Так, например, в эксперименте сэра У. Томсона[1] медная воронка находится в контакте с вертикальным цинковым цилиндром, и, когда медные опилки пропускаются через воронку, они отделяются друг от друга и от воронки вблизи от середины цинкового цилиндра, а затем падают в помещенный снизу изолированный приемник. В результате приемник оказывается заряженным отрицательно, и, по мере того как опилки продолжают сыпаться в приемник, величина заряда все возрастает. В то же время цинковый цилиндр с расположенной в нем медной воронкой приобретает все более и более возрастающий положительный заряд.

Если бы теперь цинковый цилиндр был соединен проволокой с приемником, по проволоке пошел бы положительный ток от цилиндра к приемнику. Струя медных опилок, в которой все частицы заряжены по индукции отрицательно, образует отрицательный ток, текущий от воронки к приемнику, или, другими словами, положительный ток, текущий от приемника к воронке. Поэтому положительный ток проходит через воздух (носителями этого тока являются опилки) от цинка к меди, а через металлическое соединение — от меди к цинку точно так же, как в обычных вольтовых устройствах. Но в рассматриваемом случае сила, поддерживающая ток,— это не химическое действие, а тяготение, которое заставляет опилки падать, несмотря на электрическое притяжение между положительно заряженной воронкой и отрицательно заряженными опилками.

249. Замечательное подтверждение теории контактного электричества дает открытие, сделанное Пельтье (Peltier). Он установил, что при прохождении электрического тока через соединение двух металлов это соединение нагревается, если ток течет в одном направлении, и охлаждается, если ток течет в другом направлении. Следует помнить, что прохождение тока через металл всегда сопровождается выделением тепла, поскольку ток испытывает сопротивление. Поэтому эффект охлаждения для проводника в целом должен быть всегда меньше, чем эффект нагревания. Поэтому следует различать образование тепла в каждом металле, вызванное обычным сопротивлением, и образование или поглощение тепла в месте соединения двух металлов. Первое из этих двух явлений мы назовем образованием тепла электрическим током из-за трения, и в этом случае, как мы видели, выделяемое тепло пропорционально квадрату силы тока и не зависит от направления тока. Второе явление мы можем назвать эффектом Пельтье, в этом случае тепло меняет свой знак с изменением направления тока.

[1] *North British Review*, p. 353; *Proc. Roy. Soc.*, June 20, 1864.

Полное количество теплоты, выделяемое на некотором участке сложного проводника, составленного из двух металлов, может быть выражено соотношением

$$H=\frac{R}{J}C^2t-\Pi Ct,$$

где H — количество теплоты, J — механический эквивалент единицы количества теплоты, R — сопротивление проводника, C — ток и t — время. Коэффициент Π характеризует эффект Пельтье. Численное значение Π равно количеству тепла, поглощенного в месте соединения при прохождении единичного тока за единицу времени.

Но произведенное тепло эквивалентно механической работе, совершаемой против электрических сил в проводнике, т. е. равно произведению тока на вызывающую его электродвижущую силу. Таким образом, если E — это внешняя электродвижущая сила, заставляющая ток течь по проводнику, то

$$JH=CEt=RC^2t-J\Pi Ct,$$

откуда $E=RC-J\Pi$.

Из этого соотношения вытекает, что внешняя электродвижущая сила, требуемая для того, чтобы провести ток через составной проводник, оказывается меньше на величину $J\Pi$, чем значение электродвижущей силы, полученное при учете только сопротивления. Таким образом, величина $J\Pi$ представляет собой электродвижущую контактную силу в месте соединения, действующую в положительном направлении.

Это приложение механической теории теплоты к определению локальной электродвижущей силы, принадлежащее сэру У. Томсону [2], имеет большое научное значение, потому что обычный способ подключения электродов гальванометра или электроскопа с помощью проволок к двум точкам составного проводника оказался бы бесполезным из-за действия контактных сил в точках соединения проволок с частями составного проводника.

С другой стороны, применяя тепловой метод, мы знаем, что единственным источником энергии является электрический ток, и что в определенном участке цепи током не совершается никакой работы, кроме нагревания этого участка проводника. Поэтому, если мы можем измерить количество тока и количество выделенного или поглощенного им тепла, то мы можем определить и электродвижущую силу, потребную для создания этого тока в данном участке проводника, причем такое измерение совершенно не зависит от действия контактных сил в других участках цепи.

Электродвижущая сила на соединении двух металлов, определенная таким методом, не объясняет Вольтовой электродвижущей силы, описанной в п. 246. Последняя оказывается, вообще говоря, много больше, чем та, о которой идет речь в данном разделе, и иногда имеет противоположный знак. Поэтому предположение, что потенциал металла следует измерять потенциалом воздуха, находящегося в контакте с этим металлом, должно быть ошибочным. Большую часть Вольтовой электродвижущей силы нужно искать не в месте соединения двух ме-

[2] *Proc. R. S. Edin.*, Dec. 15, 1851 and *Trans. R. S. Edin.*, 1854.

таллов, а на одной или обеих поверхностях, отделяющих эти металлы от воздуха или от другой среды, которая образует третий элемент цепи.

250. Открытие Зеебеком (Seebeck) термоэлектрических токов в цепях, составленных из различных металлов с разной температурой мест соединения, показывает, что в замкнутой цепи эти контактные силы не всегда уравновешивают друг друга. Ясно, однако, что в замкнутой цепи, составленной из различных металлов при однородной температуре, контактные силы должны уравновешиваться. Если бы это было не так, то существовал бы ток, образовавшийся в цепи, и этот ток можно было бы использовать для приведения в действие какого-нибудь механизма или для выделения тепла в цепи, т. е. для совершения работы. При этом не происходило бы никакого расходования энергии, поскольку температура во всех участках цепи одна и та же и нет ни химических, ни каких-либо других изменений.

Поэтому, если эффект Пельтье на соединении двух металлов a и b определяется постоянной Π_{ab}, если ток течет от a к b, то для цепи, составленной из двух металлов с одной и той же температурой, мы должны иметь $\Pi_{ab}+\Pi_{ba}=0$, а для цепи из трех металлов a, b и c $\Pi_{bc}+\Pi_{ca}+\Pi_{ab}=0$.

Из этого соотношения следует, что эти три эффекта Пельтье не являются независимыми и один из них может быть определен через два других. Например, если мы примем металл c за стандартный и если напишем $P_a=J\Pi_{ac}$ и $P_b=J\Pi_{bc}$, то $J\Pi_{ab}=P_a-P_b$. Величина P_a зависит от температуры и от природы металла a.

251. Магнус (Magnus) показал, что в цепи, составленной из металла одного сорта, не возникает тока, как бы ни менялись сечение проводника и температура в различных участках цепи.

Поскольку в этом случае имеет место теплопроводность и связанная с ней диссипация энергии, мы не можем, в отличие от предыдущего случая, считать этот результат самоочевидным. Например, электродвижущая сила между двумя участками цепи могла бы зависеть от того, идет ли ток из более толстой части проводника в более тонкую или в обратном направлении. Электродвижущая сила могла бы также зависеть от того, быстро или медленно идет ток от горячего участка проводника к холодному или наоборот. При этом было бы возможно существование тока в цепи, составленной из металла одного сорта при различном нагреве разных ее частей.

Следовательно, рассуждая так же, как в случае явления Пельтье, мы найдем, что если при прохождении тока через проводник из металла одного сорта имеет место тепловой эффект, который меняет знак при обращении тока, то это возможно лишь в том случае, когда ток течет от мест с более высокой к местам с более низкой температурой или наоборот. Пусть тепло, выделяемое в проводнике из металла одного сорта при прохождении тока от места, где температура равна x, до места, где она равна y, имеет величину H. Тогда

$$JH=RC^2t-S_{xy}Ct,$$

и электродвижущая сила, стремящаяся поддерживать ток, равна S_{xy}.

Пусть x, y, z — значения температуры в трех точках однородной цепи. Тогда мы должны иметь

$$S_{yz}+S_{zx}+S_{xy}=0$$

в соответствии с результатом Магнуса. Если мы примем температуру z за нулевую и если обозначим $Q_x=S_{xz}$ и $Q_y=S_{yz}$, мы найдем $S_{xy}=Q_x-Q_y$ где Q_x зависит от температуры x. Характер этой зависимости определяется природой металла.

Если мы рассмотрим теперь цепь, составленную из двух металлов a и b, причем то соединение, где ток идет от a к b, находится при температуре x, а соединение, где ток идет от b к a — при температуре y, то электродвижущая сила будет равна

$$F=P_{ax}-P_{bx}+Q_{bx}-Q_{by}+P_{by}-P_{ay}+Q_{ay}-Q_{ax},$$

где P_{ax} — значение величины P для металла a при температуре x. Это соотношение перепишем в виде

$$F=P_{ax}-Q_{ax}-(P_{ay}-Q_{ay})-(P_{bx}-Q_{bx})+P_{by}-Q_{by}.$$

Поскольку в неоднородно нагретых цепях, составленных из различных металлов, вообще говоря, имеются термоэлектрические токи, из последнего соотношения следует, что величины P и Q, относящиеся к одному и тому же металлу и к одной и той же температуре, вообще говоря, различны.

252. Существование величины Q было впервые показано сэром У. Томсоном в его уже цитированном мемуаре как следствие из открытого Каммингом (Cumming)[3] явления термоэлектрической инверсии. Камминг показал, что порядок следования некоторых металлов в термоэлектрической шкале различен при высоких и при низких температурах, так что при определенной температуре два металла могут стать нейтральными друг относительно друга. Так, например, если в цепи, состоящей из меди и железа, одно соединение поддерживается при обычной температуре, а температура другого повышается, возникает ток, который идет от меди к железу через более горячее соединение. При этом электродвижущая сила растет, пока горячее соединение не достигнет температуры T, которая по Томсону примерно равна 284°C. Если температура горячего соединения растет дальше, электродвижущая сила уменьшается, и, наконец, при достаточно высокой температуре направление тока меняется. Обращение тока легче получить, повышая температуру более холодного соединения. Если температура обоих соединений превышает величину T, ток идет в направлении от железа к меди через более нагретое соединение, т. е. в направлении, противоположном тому, которое имело место при температуре обоих соединений ниже T.

Таким образом, если одно из соединений находится при нейтральной температуре T, а второе либо теплее, либо холоднее первого, то в соединении, находящемся при нейтральной температуре, устанавливается ток, текущий от меди к железу.

253. Исходя из этого факта, Томсон рассуждал следующим образом.

Предположим, что второе соединение находится при температуре меньшей, чем T. Возникающий ток может быть использован для работы какой-нибудь машины или для нагревания проволоки. Эта затрата энергии должна сопровождаться превращением тепла в электрическую энергию, т. е. где-то в цепи тепло должно исчезать. Но при температуре T железо и медь нейтральны друг к другу, поэтому на горячем соединении не происходит обратных тепловых эффектов. На

[3] *Cambridge Transactions*, 1823.

холодном же соединении, в согласии с законом Пельтье, происходит выделение или поглощение тепла током.

Таким образом, тепло может исчезать только в медном или в железном участках цепи, так что или ток в железе, текущий от горячего соединения к холодному, должен охлаждать железо, или ток в меди, текущий от холодного соединения к горячему, должен охлаждать медь, или же оба эти явления должны иметь место одновременно. С помощью кропотливой серии искусных экспериментов Томсону удалось обнаружить обратимое тепловое действие тока, текущего между участками с различной температурой, причем он нашел, что действие тока в железе и в меди противоположно [4].

Когда поток материальной жидкости движется через трубу от горячего ее конца к холодному, поток нагревает трубу, а когда поток движется от холодного конца трубы к горячему, он охлаждает трубу. Эти эффекты зависят от величины удельной теплоемкости жидкости. Если бы мы предположили, что электричество, положительное или отрицательное, представляет собой материальную жидкость, мы могли бы измерить ее удельную теплоемкость по тепловым эффектам в неоднородно нагретом проводнике. Но эксперименты Томсона показали, что положительное электричество в меди и отрицательное электричество в железе переносят тепло от горячего участка цепи к холодному.

Таким образом, приняв, что или положительное, или отрицательное электричество представляет собой жидкость, способную нагреваться и охлаждаться и передавать тепло другим телам, мы придем к выводу, что это предположение не выполняется в железе для положительного электричества, а в меди — для отрицательного. Поэтому следует отказаться от обоих этих гипотез.

Это научное предсказание обратимого воздействия, которое оказывает электрический ток на неравномерно нагретый проводник из металла одного сорта, дает еще один поучительный пример применения Закона Сохранения Энергии для указаний новых направлений научного исследования. Томсон также применил Второй Закон Термодинамики для установления связи между величинами, которые мы обозначили через P и Q, и рассмотрел возможные термоэлектрические свойства тел, строение которых различно в различных направлениях. Он также изучил на опыте условия, при которых эти свойства меняются под действием давления, намагничения и т. д.

254. Профессор Тэт [5] недавно исследовал электродвижущую силу в термоэлектрических цепях, составленных из разных металлов, контакты между которыми имеют разную температуру. Он нашел, что электродвижущая сила в контуре с хорошей точностью выражается формулой

$$E=a(t_1-t_2)\ [t_0-(t_1+t_2)/2],$$

где t_1 — абсолютная температура горячего соединения, t_2 — холодного, а t_0 — температура, при которой оба металла нейтральны друг к другу. Коэффициент a зависит от природы двух металлов, составляющих цепь. Справедливость этого закона в широкой области значений температуры была проверена профессором Тэтом и его учениками, и он надеется создать такую термоэлектрическую цепь,

---

[4] «On the Electrodynamic Qualities of Metals». *Phil. Trans.*, Part III, 1856.

[5] *Proc. Roy. Soc. Edin.* Session 1870—1871, p. 308, также Dec. 18, 1871.

которая будет служить как прибор для измерения температуры в его опытах по исследованию теплопроводности, а также и в других случаях, где ртутный термометр либо неудобен, либо не покрывает достаточного температурного интервала.

По теории Тэта, величина, которую Томсон называет удельной теплоемкостью электричества, пропорциональна абсолютной температуре для каждого чистого металла, хотя ее значение и даже знак различны для разных металлов. Отсюда с помощью законов термодинамики он вывел следующие результаты. Пусть $k_a t$, $k_b t$ и $k_c t$ — удельные теплоемкости электричества в трех металлах a, b и c соответственно. Пусть далее T_{bc}, T_{ca}, T_{ab} — значения температуры, при которой соответствующие пары этих металлов нейтральны друг к другу. Тогда уравнения

$$(k_b-k_c)T_{bc}+(k_c-k_a)T_{ca}+(k_a-k_b)T_{ab}=0,$$

$$J\Pi_{ab}=(k_a-k_b)t(T_{ab}-t), \qquad E_{ab}=(k_a-k_b)(t_1-t_2)[T_{ab}-(t_1+t_2)/2]$$

выражают связь между значениями нейтральных температур, коэффициентом Пельтье и электродвижущими силами в термоэлектрической цепи.

ГЛАВА IV

ЭЛЕКТРОЛИЗ

Электролитическая проводимость

255. Я уже отмечал, что когда электрический ток в любой части цепи проходит через некоторые сложные вещества, называемые Электролитами, прохождение тока сопровождается определенным химическим процессом, который называется Электролизом. В этом процессе вещество разлагается на две компоненты, называемые Ионами, из которых одна, называемая Анионом, или электроотрицательной компонентой, появляется на Аноде, т. е. в том месте, где ток входит в электролит, а другая компонента, называемая Катионом, появляется на Катоде, т. е. в том месте, где ток выходит из электролита.

Полное исследование электролиза есть в равной мере задача Химии и науки об Электричестве. Мы проведем его рассмотрение с точки зрения науки об электричестве, не обсуждая приложений к теории строения химических соединений.

Из всех электрических явлений электролиз, по-видимому, в наибольшей степени позволяет нам проникнуть в истинную природу электрического тока, потому что здесь мы находим потоки обычного вещества и токи электричества, составляющие важные стороны одного и того же явления.

По-видимому, именно по этой самой причине при современной неполноте наших представлений об электричестве теории электролиза являются столь неудовлетворительными.

Основной закон электролиза, установленный Фарадеем и подтвержденный к настоящему времени в опытах Бетца (Beetz), Гитторфа (Hittorf) и других, состоит в следующем.

Число электрохимических эквивалентов электролита, разложенных при прохождении электрического тока в течение заданного времени, равно числу единиц электричества, которые перенесены током за то же время.

Электрохимический эквивалент вещества — это такое количество вещества, которое разлагается в процессе электролиза единичным током, проходящим через вещество за единицу времени, или, другими словами, при прохождении единицы электричества. Если единица электричества определена в абсолютной системе, то абсолютное значение электрохимического эквивалента для каждого вещества может быть выражено в гранах или граммах.

Электрохимические эквиваленты различных веществ пропорциональны их обычным химическим эквивалентам. Однако обычные химические эквиваленты представляют собой всего лишь численные соотношения, в которых вещества соединяются, в то время как электрохимические эквиваленты — это определенные количества вещества, зависящие от выбора единицы электричества. Каждый электролит состоит из двух компонентов, которые в процессе электролиза появляются в тех местах, где ток входит в электролит и выходит из него, и нигде больше. Следовательно, если мы представим себе некоторую воображаемую поверхность внутри электролита, то количество электролиза, идущего через эту поверхность, выраженное числом электрохимических эквивалентов каждого из компонентов, которые переносятся через эту поверхность в противоположных направлениях, будет пропорционально полному электрическому току через поверхность.

Таким образом, реальный перенос ионов через вещество электролита в противоположных направлениях — это часть явления проводимости при прохождении электрического тока через электролит. В каждой точке электролита, через который идет электрический ток, существуют два взаимно противоположных потока вещества, состоящие один из анионов, другой из катионов, имеющие те же линии тока, что и электрический ток, и пропорциональные ему по величине.

Поэтому чрезвычайно естественно предположить, что токи ионов — это токи, переносящие электричество, и, в частности, что каждая молекула катиона заряжена определенным фиксированным количеством положительного электричества, и это количество одинаково для молекул всех катионов, а каждая молекула аниона заряжена равным по величине количеством отрицательного электричества.

Тогда движение ионов в противоположных направлениях через электролит дает полное физическое описание электрического тока. Мы можем сравнить это движение ионов с движением жидкостей и газов друг через друга в процессе диффузии. Между этими двумя процессами имеется та разница, что при диффузии различные вещества только перемешиваются и смесь не является однородной, в то время как при электролизе они находятся в химической связи и электролит однороден. При диффузии причиной, определяющей движение вещества в данном направлении, является уменьшение количества этого вещества на единицу объема в этом направлении. При электролизе же движение каждого иона вызывается электродвижущей силой, действующей на заряженные молекулы.

256. Клаузиус [1], который много занимался теорией молекулярных движений

[1] Pogg. *Ann.*, CI, p. 338 (1857).

в твердых телах, полагает, что молекулы всех тел находятся в состоянии постоянного движения, но что в твердых телах каждая молекула никогда не уходит дальше некоторого расстояния от своего начального положения, в то время как молекула жидкости, пройдя некоторое расстояние от своего начального положения, равно может как двинуться еще дальше, так и двинуться назад. Таким образом, молекулы жидкости, кажущейся неподвижной, непрерывно меняют свое положение, переходя нерегулярным образом от одной части жидкости к другой.

В химически сложной жидкости, как полагает Клаузиус, молекулы не только путешествуют указанным образом, но, кроме того, между сложными молекулами происходят соударения, в результате которых составляющие их более простые молекулы часто отделяются и меняют своих партнеров, так что один и тот же отдельный атом может быть в один момент времени связан с одним атомом другого вида, а в другой момент времени — с другим.

Этот процесс, по мнению Клаузиуса, протекает в жидкости все время, но когда на жидкость действует электродвижущая сила, то движение молекул, в котором до этого не было никакого выделенного направления, начинает испытывать влияние этой электродвижущей силы, так что положительно заряженные молекулы больше стремятся двигаться к катоду, чем к аноду, а отрицательно заряженные молекулы больше стремятся двигаться в противоположном направлении. Поэтому молекулы катиона в течение того времени, когда они свободны, пробиваются к катоду, но при этом все время задерживаются в пути, соединяясь на время с молекулами аниона, которые тоже пробиваются сквозь толпу, но в противоположном направлении.

257. Эта теория Клаузиуса позволяет нам понять, как получается, что хотя для реального разложения электролита нужна электродвижущая сила конечной величины, тем не менее прохождение тока через электролит подчиняется закону Ома, так что любая электродвижущая сила в электролите, даже самая малая, вызывает пропорциональный по величине ток.

По теории Клаузиуса, разложение и восстановление электролита происходит непрерывно, даже в отсутствие тока, поэтому самая малая электродвижущая сила оказывается достаточной для того, чтобы придать этому процессу некоторую степень направленности и тем самым вызвать токи ионов, а следовательно, и электрический ток, который составляет часть того же самого явления. Однако внутри электролита ионы никогда не бывают свободны в конечном количестве, и именно для освобождения ионов и нужна конечная электродвижущая сила.

Ионы накапливаются у электрода, так как последовательные порции ионов по мере появления у электродов, вместо того чтобы найти молекулы противоположных ионов, готовые с ними соединиться, вынуждены пребывать в обществе себе подобных молекул, с которыми они соединиться не могут. Для того чтобы могло происходить это явление, электродвижущая сила должна иметь конечную величину. При этом также возникает электродвижущая сила противоположного знака, которая вызывает обратный ток, если убрать другие электродвижущие силы. Когда наблюдается эта обратная электродвижущая сила, вызванная скоплением ионов у электрода, говорят, что электроды Поляризованы.

258. Один из лучших методов определения того, является некоторое тело электролитом или нет, состоит в том, что тело помещается между двумя платиновыми электродами и через него в течение некоторого времени пропускается электрический ток. Затем электроды отъединяются от гальванической батареи и соединяются с гальванометром, для того чтобы наблюдать, идет ли через гальванометр обратный ток, вызванный поляризацией электродов. Такой ток, вызванный накоплением разных веществ на двух электродах, служит доказательством того, что исследуемое вещество было разложено электролитически при прохождении первичного тока от батареи. Этот метод часто можно применять в тех случаях, когда трудно определить наличие продуктов разложения на электродах прямыми химическими методами (см. п. 271).

259. В отношении тех вопросов, которые мы уже рассмотрели, теория электролиза выглядит вполне удовлетворительно. Она объясняет электрический ток, природа которого нам непонятна, связывая его с потоками составляющих электролит материальных компонентов, движение которых, хотя и невидимое глазу, может быть легко продемонстрировано. Как показал Фарадей, теория четко объясняет, почему электролит, который проводит электричество в жидком состоянии, становится непроводящим при затвердевании. Действительно, пока молекулы не могут перемещаться из одной части в другую, электролитическая проводимость не может иметь места, и для того, чтобы быть проводником, вещество должно быть в жидком состоянии — раствором или расплавом.

Но если пойдем дальше и примем, что молекулы ионов в электролите действительно заряжены некоторыми определенными количествами электричества, положительными или отрицательными, так что ток в электролите есть просто ток переноса, мы увидим, что это заманчивое предположение ставит нас на очень скользкую почву.

Прежде всего мы должны принять, что в любом электролите каждая молекула катиона, когда она освобождается у катода, передает катоду заряд положительного электричества, количество которого одно и то же у всех молекул, не только данного катиона, но у всех других катионов. Точно так же каждая молекула аниона при освобождении передает аноду заряд отрицательного электричества, численное значение которого совпадает с численным значением положительного заряда, переносимого молекулой катиона, при противоположном знаке заряда.

Если вместо единственной молекулы мы рассмотрим большое их число, составляющее электрохимический эквивалент иона, то суммарный заряд всех молекул будет равен, как мы уже видели, одной единице электричества, положительной или отрицательной.

260. Мы до сих пор не знаем, сколько молекул содержит электрохимический эквивалент любого вещества, но молекулярная теория, существующая в химии и подкрепляемая многими физическими соображениями, предполагает, что число молекул в электрохимическом эквиваленте есть одна и та же величина для всех веществ. Мы можем поэтому в духе спекуляций молекулярной теории предположить, что число молекул в одном электрохимическом эквиваленте равно неизвестному в настоящее время числу N, способ определения которого мы, возможно, найдем [2].

Тогда каждая молекула, будучи освобождена из соединения, расстается с зарядом, величина которого равна $1/N$ и который положителен для катиона и отрицателен для аниона. Это определенное количество электричества мы будем

[2] См. примечание к п. 5.

называть молекулярным зарядом. Если бы величина его была известна, это была бы наиболее естественная единица электричества.

До сих пор мы только уточняли наши исходные предпосылки и упражняли наше воображение, следя за электризацией молекул и за разрядом этой электризации.

Освобождение ионов происходит одновременно с переходом положительного электричества от анода на катод. Ионы, когда они освобождены, не заряжены электричеством, следовательно, когда они находятся в соединении, они обладают молекулярными зарядами, о которых говорилось выше.

Однако, хотя легко говорить об электризации молекулы, не так легко представить себе, что это такое.

Мы знаем, что если два металла соприкасаются в любой точке, вся остальная часть их поверхностей оказывается заряженной. Если металлы имеют форму двух пластин, разделенных узким промежутком воздуха, заряд на каждой пластине может достигать значительной величины. Можно предположить что нечто подобное происходит и тогда, когда два компонента электролита находятся в соединении. Можно предположить, что каждая пара молекул соприкасается в одной точке, а остальная их поверхность заряжена из-за действия контактной электродвижущей силы.

Но для того чтобы объяснить это явление, мы должны ответить на вопрос, почему заряд, созданный таким образом на каждой молекуле, имеет фиксированную величину, и почему при соединении молекулы хлора с молекулой цинка молекулярные заряды оказываются такими же, как и при соединении молекулы хлора с молекулой меди, хотя электродвижущая сила между хлором и цинком много больше, чем между хлором и медью. Если заряд молекул объясняется действием контактной электродвижущей силы, почему тогда разные значения электродвижущей силы дают в точности равные заряды?

Предположим, однако, что мы перескочили через эту трудность, просто провозгласив факт постоянства молекулярного заряда. Для удобства описания мы назовем этот постоянный молекулярный заряд *одной молекулой электричества.*

Эта фраза, хотя она сама по себе и груба и не гармонирует с остальным содержанием этого трактата, позволит нам по крайней мере четко установить то, что известно об электролизе, а также указать на серьезные затруднения.

Каждый электролит должен рассматриваться как бинарная смесь его аниона и катиона. Анион или катион или оба они могут быть сложными телами, так что молекула аниона или катиона сама может быть образована из некоторого числа молекул простых тел. Молекула аниона и молекула катиона вместе образуют одну молекулу электролита.

Чтобы действовать в электролите как анион, молекула должна быть заряжена тем, что мы назвали одной молекулой отрицательного электричества, а для того чтобы действовать как катион, молекула должна быть заряжена одной молекулой положительного электричества.

Эти заряды связаны с молекулами только в том случае, если молекулы объединяются, как катион и анион в электролите.

Когда молекулы подвергаются электролизу, они отдают свой заряд электродам и оказываются незаряженными телами после освобождения из соединения.

Если одна и та же молекула может быть катионом в одном электролите, анионом — в другом, а также входить в состав сложных тел, которые не являются электролитами, то мы должны предположить, что эта молекула получает положительный электрический заряд, когда она действует как катион, получает отрицательный заряд, когда она действует как анион, и что она совсем не имеет заряда, когда она не входит в состав электролита.

Например, иод действует как анион в химических соединениях иода с металлами и в иодисто-водородной кислоте, но, по имеющимся сведениям, действует как катион в соединении с бромом.

Эта теория молекулярных зарядов может рассматриваться как некоторый метод, помогающий нам запомнить множество фактов, относящихся к электролизу. Однако кажется крайне невероятным, что мы сохраним в какой-либо форме теорию молекулярных зарядов после того, как придем к пониманию истинной природы электролиза, ибо тогда у нас будут надежные основания, на которых можно построить верную теорию электрических токов и тем самым избавиться от этих предварительных теорий.

261. Одним из самых важных шагов в нашем познании электролиза явилось обнаружение вторичных химических процессов, возникающих при превращении ионов на электродах.

Во многих случаях вещества, которые обнаруживаются на электродах, не являются настоящими ионами электролиза, а представляют собой результат воздействия этих ионов на электролит.

Так, при электролизе раствора сульфата натрия током, который проходит также и через разбавленную серную кислоту, на анодах выделяются равные количества кислорода как в сульфате натрия, так и в разбавленной кислоте, а на катодах — равные количества водорода.

Но если проводить электролиз в подходящих сосудах, таких, как U-образные трубки или же сосуды с пористой перегородкой, так чтобы можно было отдельно исследовать вещество, окружающее каждый электрод, то выясняется, что в растворе сульфата натрия на аноде одновременно с одним эквивалентом кислорода выделяется один эквивалент серной кислоты, а на катоде наряду с одним эквивалентом водорода выделяется один эквивалент щелочи.

На первый взгляд может показаться, что в соответствии со старой теорией строения солей сульфат натрия при электролизе разлагается на свои составные части — серную кислоту и щелочь, и в то же время вода из раствора разлагается на составляющие ее кислород и водород. Но такое объяснение было бы основано на допущении, что тот же самый ток, который, проходя через раствор серной кислоты, электролитически разлагает один эквивалент воды, выделил бы при прохождении через раствор сульфата натрия один эквивалент соли и одновременно один эквивалент воды, что было бы в противоречии с законом электрохимических эквивалентов.

Но если мы предположим, что сульфат натрия состоит не из компонент SO_3 и Na_2O, а из SO_4 и Na_2, т. е. не из серной кислоты и щелочи, а из кислотного остатка и натрия, тогда при электролизе кислотный остаток движется к аноду и там освобождается, но поскольку кислотный остаток не может существовать в свободном состоянии, он разбивается на серную кислоту и кислород в равном числе эквивалентов. В то же время натрий освобождается на катоде и здесь разлагает воду раствора, образуя один эквивалент щелочи и один — водорода.

Газы, которые собираются у электродов в разбавленной серной кислоте, представляют собой составные части воды, а именно один объем кислорода и два объема водорода. У анода также возрастает количество серной кислоты, но оно не равно одному эквиваленту.

Неясно, является чистая вода электролитом или нет. Чем лучше очищена вода, тем больше оказывается ее сопротивление электролитическому прохождению тока. Малейших следов инородного вещества оказывается достаточно, чтобы намного уменьшить электрическое сопротивление воды. Электрическое сопротивление воды, измеренное различными исследователями, имеет настолько различающиеся значения, что мы не можем рассматривать эту величину как определенную. Чем чище вода, тем больше ее сопротивление, и, если бы мы могли получить действительно чистую воду, весьма сомнительно, что она вообще была бы проводником.

Пока вода рассматривалась как электролит, а она действительно считалась построенной по типу электролитов, имелись веские причины предполагать, что вода представляет собой бинарное соединение и что два объема водорода химически эквивалентны одному объему кислорода. Однако, если мы допустим, что вода не является электролитом, мы свободны считать, что равные объемы кислорода и водорода химически эквивалентны.

Динамическая теория газов приводит к предположению, что в идеальных газах равные объемы всегда содержат равное число молекул и что главная часть удельной теплоемкости, а именно та, которая обусловлена движением молекул вследствие теплового возбуждения, одинакова для равного числа молекул любого газа. Поэтому нам приходится предпочесть такую химическую систему, в которой равные объемы кислорода и водорода рассматриваются как эквивалентные, а вода считается смесью двух эквивалентов водорода и одного эквивалента кислорода, и поэтому, вероятно, вода не поддается прямому электролизу.

Электролиз полностью устанавливает тесную связь между электрическими явлениями и явлениями химического соединения. Однако не каждое химическое соединение является электролитом, и это обстоятельство показывает, что химическая связь представляет собой явление более высокого порядка сложности, чем любое чисто электрическое явление. Так, соединения металлов друг с другом, хотя и являются хорошими проводниками, а входящие в эти соединения компоненты занимают разные места на шкале контактной электродвижущей силы, они даже в жидком виде не разлагаются электрическим током. Большая часть соединений, составленных из таких веществ, которые действуют как анионы, не являются проводниками и потому не является электролитами. Кроме того, имеется много составных веществ, содержащих те же компоненты, что и электролиты, но не в тех же пропорциях, и эти вещества также являются непроводниками а следовательно, и неэлектролитами.

О сохранении энергии в электролизе

262. Рассмотрим произвольную вольтову цепь, составленную частично из батареи, частично — из провода и частично — из электролитической ячейки.

При прохождении единицы электричества через любое сечение цепи электролизу подвергается один электрохимический эквивалент каждого из веществ как в батарее, так и в электролитической ячейке.

Количество механической энергии, эквивалентное любому данному химическому процессу, можно определить, обратив в тепло всю энергию, выделившуюся в этом процессе, а затем выразить тепло в динамической мере, умножив количество единиц теплоты на Джоулев механический эквивалент тепла.

Там, где этот прямой метод неприменим, если мы можем оценить количества теплоты, выделенные веществами, взятыми одно в состоянии, предшествующем процессу, а другое — в состоянии после процесса, при переходе этих веществ в окончательное состояние, одинаковое в обоих случаях, то тепловой эквивалент этого процесса будет равен разности этих двух количеств теплоты.

В случае, когда химическое действие поддерживает ток в вольтовой цепи, Джоуль показал, что тепло, выделяемое в вольтовом элементе, меньше, чем то тепло, которое выделяется при химическом процессе, идущем внутри этого элемента. Избыток тепла выделяется в проводах или, если в цепи имеется электромагнитная машина, часть тепла может расходоваться на совершаемую этой машиной механическую работу.

Если, например, электроды вольтова элемента в одном случае соединены толстой и короткой проволокой, а в другом случае — тонкой и длинной, то в первом случае тепло, которое выделяется внутри элемента на каждый гран растворенного цинка оказывается больше, чем во втором случае, но тепло, выделенное в проволоке, оказывается больше во втором случае, чем в первом. Суммарное тепло, выделенное в элементе и в проволоке на каждый гран растворенного цинка, оказывается одним и тем же в обоих случаях. Это было установлено Джоулем в прямом эксперименте.

Отношение теплоты, выделенной в элементе, к теплоте, произведенной в проводе, равно отношению сопротивлений элемента и провода. Если бы у провода было достаточно большое сопротивление, то почти все тепло выделилось бы в проводе, если же провод имеет достаточно большую проводимость, то почти все тепло выделяется в элементе.

Пусть провод сделан так, что его сопротивление велико. Тогда теплота, выделенная в проводе, равна в динамических единицах произведению количества прошедшего электричества на электродвижущую силу, под действием которой электричество шло по проводу.

263. Далее, в течение времени, за которое в химическом процессе, идущем в батарее для поддержания тока, расходуется один электрохимический эквивалент вещества, по проволоке проходит единица электричества. Следовательно, тепло, выделенное при прохождении одной единицы электричества, измеряется в этом случае электродвижущей силой. Но это как раз и есть то количество тепла, которое производит (в элементе или в проводе) один электрохимический эквивалент вещества, израсходованный в данном химическом процессе.

Отсюда вытекает важная теорема, впервые доказанная Томсоном (*Phil. Mag.*, Dec., 1851):

«Электродвижущая сила электрохимического устройства равна в абсолютной мере (численно) механическому эквиваленту химического процесса на один электрохимический эквивалент вещества».

Тепловые эквиваленты многих химических процессов были определены в работах Эндрюса (Andrews), Гесса (Hess), Фавра (Favre) и Зильбермана (Silbermann), Томсена (Thomsen) и других. Умножив полученные значения на механический эквивалент теплоты, можно получить соответствующие значения механических эквивалентов.

Эта теорема не только дает нам возможность вычислить по чисто тепловым измерениям электродвижущую силу различных вольтовых устройств, а также электродвижущую силу, необходимую для осуществления электролиза в различных случаях, она еще дает способ фактического измерения химического сродства.

Давно известно, что химическое сродство, или склонность по отношению к определенным химическим изменениям, в некоторых случаях оказывается сильнее, чем в других, но никакой подходящей меры для этой склонности не могли создать до тех пор, пока не было показано, что эта склонность в ряде случаев в точности эквивалентна некоторой электродвижущей силе и поэтому может быть измерена на основе тех самых принципов, которые используются при измерении электродвижущих сил.

Таким образом, в определенных случаях понятие химического сродства сводится к измеримой величине. Тем самым вся теория химических процессов, скоростей, с которыми они протекают, замещение одного вещества другим и т. д. становится гораздо более доступной пониманию, чем тогда, когда химическое сродство рассматривалось как свойство *особого рода*, *sui generis*, несводимое к численному измерению.

Если объем продуктов электролиза превышает объем электролита, то в процессе электролиза совершается работа против сил давления. Если электролиз идет под давлением p и объем одного электрохимического эквивалента в электролите увеличивается на величину v, то при прохождении единицы электричества совершается работа против сил давления, равная vp, а электродвижущая сила, необходимая для электролиза, должна включать часть, равную vp, которая расходуется на совершение этой механической работы.

Если продуктами электролиза являются газы, которые, подобно кислороду и водороду, намного более разряжены, чем электролит, и с очень хорошей точностью подчиняются закону Бойля, величина vp при одной и той же температуре очень близка к постоянной, и электродвижущая сила, необходимая для электролиза, не будет сколько-нибудь заметным образом зависеть от давления. Поэтому оказалось невозможным контролировать электролитическое разложение разведенной серной кислоты, удерживая выделенные газы в малом объеме.

Если продукты электролиза являются жидкими или твердыми, величина vp растет с ростом давления, и при положительном значении v увеличение давления ведет к увеличению электродвижущей силы, требующейся для электролиза.

Точно так же любой другой вид работы, совершаемой во время электролиза, влияет на величину электродвижущей силы. Например, при прохождении вертикального тока между двумя цинковыми электродами в растворе сернокислого цинка в случае, когда ток в растворе идет вверх, требуемая электродвижущая сила больше, чем тогда, когда ток идет вниз. Объясняется это тем, что в первом случае ток переносит цинк с нижнего электрода на верхний, а во втором — с верхнего на нижний. Электродвижущая сила, необходимая для этой цели, составляет на каждый фут высоты менее одной миллионной части от электродвижущей силы элемента Даниэля.

ГЛАВА V
ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

264. Когда электрический ток проходит через электролит, ограниченный металлическими электродами, накопление ионов у электродов приводит к явлению, называемому Поляризацией. Поляризация заключается в том, что появляется электродвижущая сила, направленная против тока и заметно увеличивающая сопротивление.

Если используется непрерывный ток, это сопротивление оказывается быстро нарастающим после включения тока, а затем оно достигает почти постоянной величины. Если изменить форму сосуда, содержащего электролит, сопротивление меняется таким же образом, как у металлического проводника при подобном изменении формы. Но при этом к истинному сопротивлению электролита всегда следует добавлять некоторое кажущееся сопротивление, зависящее от природы электродов.

265. Эти явления привели кое-кого к предположению о существовании конечной электродвижущей силы, необходимой для того, чтобы ток мог пройти через электролит. Однако, как показали в своих исследованиях Ленц (Lenz), Нейманн (Neumann), Бетц, Видеман [1], Паальцов (Paalzow) [2], а недавно также господа Ф. Кольрауш и В. А. Ниппольд (Nippoldt)[3], Фитцжеральд и Трутон (Trouton) [4], проводимость самого электролита подчиняется закону Ома с той же точностью, что и проводимость металлических проводников, а кажущееся сопротивление на границе между электродом и электролитом целиком обусловлено поляризацией.

266. В случае непрерывного тока явление, называемое поляризацией, проявляется в уменьшении тока, что указывает на силу, противодействующую току. Сопротивление также ведет себя как сила, противодействующая току, но мы можем различать эти два явления с помощью быстрого выключения или изменения знака электродвижущей силы.

Сила сопротивления всегда противоположна направлению тока, и внешняя электродвижущая сила, необходимая для того, чтобы преодолеть это сопротивление, пропорциональна силе тока и меняет свое направление, когда меняется направление тока. Если эта внешняя электродвижущая сила обращается в нуль, ток просто прекращается.

С другой стороны, электродвижущая сила, обусловленная поляризацией, направлена определенным образом, а именно противоположно току, который вызывает поляризацию. Если убрать электродвижущую силу, производящую ток, то поляризация создаст ток в противоположном направлении.

Различие между этими двумя явлениями можно сравнить с разницей между пропусканием воды через длинную капиллярную трубку и подачей воды вверх в цистерну по трубе умеренного сечения. В первом случае, если мы снимем давле-

---

[1] Elektrizität, S. 568, Bd. I.
[2] *Berlin. Monatsbericht*, July, 1868.
[3] Pogg. *Ann.*, Bd. C XXXVIII, S. 286 (October, 1869).
[4] B. A. Report, 1887.

ние, которое обеспечивает течение, вода просто остановится. Во втором случае, если мы снимем давление, вода потечет обратно, вниз из цистерны.

Чтобы сделать эту механическую иллюстрацию более полной, мы должны еще предположить, что глубина цистерны не очень велика и, после того как в нее войдет некоторое количество воды, она начнет переливаться. Это иллюстрирует то обстоятельство, что полная электродвижущая сила, вызванная поляризацией, ограничена сверху.

267. Причиной поляризации, по-видимому, является наличие на электродах продуктов электролитического разложения жидкости, находящейся между электродами. Таким образом, электроды находятся в различном по своим электрическим свойствам окружении и между ними возникает некоторая электродвижущая сила, направление которой противоположно направлению тока, вызывающего поляризацию.

Ионы, присутствие которых на электродах вызывает явления поляризации, находятся не в совершенно свободном состоянии, а в таких условиях, когда они притянуты к поверхности электродов со значительной силой.

Электродвижущая сила, обусловленная поляризацией, зависит от плотности, с которой электрод покрыт ионом, но электродвижущая сила не пропорциональна этой плотности, ибо возрастает не столь быстро, как эта плотность.

Это отложение иона постоянно стремится к тому, чтобы освободиться и либо диффундировать в жидкость, либо выделиться в виде газа, либо выпасть в осадок как твердое тело.

Эта диссипация поляризации идет крайне медленно, если степень поляризации мала, и очень быстро, если поляризация близка к своему предельному значению.

268. Мы видели в п. 262, что электродвижущая сила, действующая в любом электролитическом процессе, численно равна механическому эквиваленту результата этого процесса над одним электрохимическим эквивалентом вещества. Если этот процесс приводит к уменьшению внутренней энергии участвующих в нем веществ, как это имеет место в вольтовой батарее, то электродвижущая сила действует в направлении тока. Если же происходит увеличение внутренней энергии веществ, как в случае электролитической ячейки, то электродвижущая сила направлена противоположно току, и в этом случае она называется электродвижущей силой поляризации.

В случае установившегося тока, когда электролиз идет непрерывно, а ионы в свободном состоянии выделяются на электродах, нам достаточно с помощью подходящего процесса измерить внутреннюю энергию разделенных ионов и сравнить ее с внутренней энергией электролита, для того чтобы определить требуемую для электролиза электродвижущую силу. Это даст максимальную поляризацию.

Но в первые моменты после начала электролиза ионы, осевшие на электродах, не находятся в свободном состоянии, и их внутренняя энергия меньше, чем их энергия в свободном состоянии, хотя и больше их энергии, отвечающей объединению ионов в электролите. Действительно, пока слой осажденного на электроде вещества является еще очень тонким, состояние иона, попавшего на электрод, подобно состоянию химической связи с веществом электрода. Но, по мере того как плотность отложения растет, последующие порции ионов уже не так тесно связаны с электродом, а просто находятся на нем, и в конце концов отложения на электродах выделяются в виде пузырьков — если это газы, диффундируют в электролит — если это жидкость или же выпадают в осадок — если это твердые вещества.

Поэтому при рассмотрении поляризации нам следует учитывать:

(1). Поверхностную плотность отложения, которую мы назовем σ. Эта величина σ представляет число электрохимических эквивалентов иона, осевших на единицу площади. Поскольку каждый осажденный электрохимический эквивалент соответствует одной единице электричества, перенесенной током, мы можем рассматривать σ либо как поверхностную плотность вещества, либо как поверхностную плотность электричества.

(2). Электродвижущую силу поляризации, которую мы можем назвать p. Эта величина p равна разности электрических потенциалов двух электродов, если ток через электролит настолько мал, что собственное сопротивление электролита не дает заметного вклада в эту разность потенциалов.

Электродвижущая сила p в любой момент времени численно равна механическому эквиваленту электролитического процесса, идущего в данный момент времени, который соответствует одному электрохимическому эквиваленту электролита. Следует помнить, что этот электролитический процесс заключается в отложении ионов на электродах, а состояние, в котором ионы отлагаются, зависит от действительного состояния электродных поверхностей, которое может меняться предыдущими отложениями.

Таким образом, электродвижущая сила в любой момент времени зависит от предыдущей истории электродов. Очень грубо говоря, она является функцией от плотности осажденных ионов σ, причем $p=0$ при $\sigma=0$, но p приближается к своему предельному значению гораздо быстрее, чем σ. Однако утверждение, что p зависит от σ, нельзя считать точным. Было бы правильнее сказать, что p определяется химическим состоянием осажденного поверхностного слоя, а это химическое состояние зависит от плотности слоя по некоторому закону, содержащему время.

269. (3). Третье, что мы должны принять во внимание, это диссипация поляризации. Поляризация, предоставленная самой себе, уменьшается. Скорость этого уменьшения частично зависит от величины поляризации или от плотности осажденного слоя, и частично от природы окружающей среды, а также от химического, механического или теплового воздействия, которому подвергается поверхность электрода.

Если определить T как такой промежуток времени, что при скорости, с которой происходит диссипация отложения, оно будет удалено целиком за это время T, то величину T мы можем назвать мерой (modulus) времени диссипации. Если плотность отложений очень мала, T имеет очень большие значения и исчисляется днями или месяцами. По мере того как плотность отложений приближается к предельному значению, величина T очень быстро спадает и составляет, вероятно, малые доли секунды. Действительно, скорость диссипации настолько возрастает, что если поддерживать постоянную силу тока, выделенный газ уже не дает вклад в увеличение плотности отложения на электроде, а по мере образования тут же выделяется в виде пузырьков.

270. Поэтому случай, когда поляризация электродов в электролитической ячейке мала, сильно отличается от случая, когда поляризация близка к своему максимальному значению. Например, если последовательно соединить некоторое число электролитических ячеек, имеющих платиновые электроды и наполненных разведенной серной кислотой, и подключить к ним источник малой электродвижущей силы, например один элемент Даниэля, эта электродвижущая сила вызовет крайне непродолжительный ток, потому что через очень короткое время электродвижущая сила, происходящая от поляризации, уравняет ту, которую дает элемент Даниэля.

В случае столь слабого состояния поляризации диссипация будет очень мала. Она происходит путем очень медленного поглощения газов и диффузии сквозь жидкость. Ход этой диссипации определяется по необычайно слабому току, который продолжает течь без какого-либо видимого разделения газов.

Если мы пренебрежем этой диссипацией в течение того короткого времени, за которое устанавливается состояние поляризации, и если Q — полное количество электричества, перенесенное током в течение этого времени, тогда, если A — площадь одного из электродов и σ — поверхностная плотность отложенного вещества, которая, по нашему предположению, однородна, $Q=A\sigma$.

Если мы теперь отъединим электроды электролитического устройства от элемента Даниэля и присоединим их к гальванометру, способному измерять проходящий через него полный заряд, то за время исчезновения поляризации через электрометр пройдет заряд, примерно равный Q.

271. Мы, таким образом, можем сравнить действие этого устройства, представляющего собой вариант Вторичной Батареи Риттера (Ritter), с действием Лейденской банки.

И вторичная батарея, и лейденская банка могут быть заряжены некоторым количеством электричества, а после этого могут быть разряжены. Количество электричества при разрядке почти равно заряду, прошедшему в противоположном направлении. Разница между этими двумя величинами частично объясняется диссипацией. Этот процесс при малых значениях заряда идет очень медленно, но если заряд превышает некоторую предельную величину, диссипация становится очень быстрой. Еще одно различие между процессами заряда и разряда возникает из-за того, что после замыкания электродов на время, достаточное для получения кажущегося полного разряда (до полного исчезновения тока), если мы разомкнем электроды на некоторое время, а потом снова замкнем, мы получим второй разряд, идущий в том же самом направлении, что и первоначальный. Это явление называется остаточным разрядом, и оно характерно в равной степени и для лейденской банки, и для вторичной батареи.

Поэтому вторичная батарея в ряде отношений может быть уподоблена лейденской банке. Однако имеются и важные различия. Заряд лейденской банки очень точно пропорционален электродвижущей силе, т. е. разности потенциалов двух поверхностей. Отношение заряда к электродвижущей силе, называемое емкостью банки, есть величина постоянная. Соответствующее отношение, которое может быть названо емкостью вторичной батареи, растет с ростом электродвижущей силы.

Емкость лейденской банки зависит от площади противоположных обкладок, от расстояния между ними и от природы вещества, разделяющего обкладки, но не зависит от природы самих металлических поверхностей. Емкость вторичной батареи зависит от площади поверхности электродов, но не от расстояния между ними, а также зависит от природы поверхностей электродов и от природы находящейся между ними жидкости. Максимальная разность потенциалов между электродами в каждом элементе вторичной батареи очень мала по сравнению с максимальной разностью потенциалов между электродами лейденской банки, и, для того чтобы получить большую электродвижущую силу, нужно использовать батарею, составленную из многих таких элементов.

С другой стороны, поверхностная плотность заряда во вторичной батарее в огромное число раз превышает максимально достижимую поверхностную плотность заряда, которая может быть накоплена на обкладках лейденской банки, настолько, что мистер Варлей [5], описывая устройство конденсатора большой емкости, рекомендует ряд золотых или платиновых пластин, помещенных в разведенную кислоту, предпочитая это с точки зрения стоимости конденсатору из оловянных фольг, разделенных изолирующим материалом.

Форма, в которой запасается энергия в лейденской банке, представляет собой энергию натяжения диэлектрика, заключенного между проводящими поверхностями. Это состояние натяжения я описал выше под названием электрической поляризации, указав на известные в настоящее время явления, связанные с этим состоянием, и отметив неполноту наших знаний о том, что в действительности происходит (см. п. 62, 111).

Форма, в которой запасается энергия во вторичной батарее, есть химическое состояние слоя вещества у поверхности электродов, образованного ионами электролита и веществом электродов; характер связи между этими компонентами меняется от химического соединения до поверхностной конденсации, механического соединения или простого соседства.

Эта энергия сосредоточена вблизи от поверхности электродов, а не во всем объеме электролита. Форма, в которой существует эта энергия, может быть названа электролитической поляризацией.

После сравнительного изучения вторичной батареи и лейденской банки изучающему полезно было бы вернуться к сравнению вольтовой батареи с какимнибудь видом электрической машины, наподобие той, которая описана в п. 211.

Мистер Варлей недавно [6] нашел, что для платиновой пластинки, помещенной в разведенной серной кислоте, емкость одного квадратного дюйма заключена в пределах от 175 до 542 микрофарад и выше и что с ростом электродвижущей силы емкость возрастает, имея значение 175 при 0,02 от электродвижущей силы элемента Даниэля и 542 при 1,6 от электродвижущей силы элемента Даниэля.

Но сравнение лейденской банки со вторичной батареей можно провести еще дальше, как это было сделано в следующем эксперименте, который провел Буфф (Buff) [7]. Стекло лейденской банки может удерживать заряд только тогда, когда оно холодное. При некоторой температуре ниже 100°C стекло становится проводником. Если поместить в сосуд со ртутью пробирку, содержащую ртуть, и соединить один электрод со ртутью внутри, а другой — со ртутью вне пробирки, то полученное устройство представляет собой лейденскую банку, которая будет дер-

[5] Руководство C. F. Varley, «Electric Telegraphs &c.», Jan. 1860.

[6] *Proc. R. S.*, Jan. 12, 1871. Описание других исследований на эту тему см. в Wiedemanns Elektrizität, Bd. II, p. 744—771.

[7] *Annalen der Chemie und Pharmacie*, Bd. XC, S. 257 (1854).

жать заряд при комнатных температурах. Если подсоединить электроды к выводам вольтовой батареи, то, пока стекло холодное, тока не появится. Но если это устройство медленно нагревать, то появится ток, который будет быстро возрастать по мере роста температуры, хотя стекло остается на вид столь же твердым, как всегда.

Этот ток явно имеет электролитическую природу, ибо если электроды отъединить от батареи и подключить к гальванометру, то идет заметный обратный ток, вызванный поляризацией на поверхности стекла.

Если это устройство при подключенной батарее охладить, ток при холодном стекле прекращается, как и раньше, но поляризация поверхности остается. Можно удалить ртуть, промыть поверхности азотной кислотой и водой, после чего налить свежую ртуть. Если затем нагреть это устройство, то появится ток поляризации, как только стекло станет достаточно теплым для того, чтобы проводить этот ток.

Поэтому, хотя стекло при 100°C является, по-видимому, твердым телом, мы можем рассматривать его как электролит. Имеются значительные основания полагать, что в большинстве случаев, в которых диэлектрик имеет незначительную проводимость, прохождение тока является электролитическим. Наличие поляризации можно рассматривать как решающее доказательство электролиза, и, если проводимость вещества растет с ростом температуры, у нас есть веские основания подозревать, что проводимость является электролитической.

О постоянных вольтовых элементах

272. В опытах с использованием вольтовой батареи, в которой имеет место поляризация, эта поляризация уменьшается в то время, когда ток не протекает, так что ток, который начинает течь снова, оказывается больше, чем ток, уже текущий некоторое время. Если, с другой стороны, уменьшить сопротивление цепи, допустив протекание тока по закорачивающему шунту, то после того как ток снова начинает течь по обычной цепи, его сила сначала будет меньше нормальной за счет большой поляризации, возникающей из-за использования закороченной цепи.

Чтобы избавиться от этих нерегулярностей тока, которые доставляют очень много забот в экспериментах, связанных с точными измерениями, необходимо избавиться от поляризации или, по крайней мере, уменьшить ее настолько, насколько это возможно.

У поверхности цинковой пластинки, помещенной в раствор сульфата цинка или в разведенную серную кислоту, не наблюдается большой поляризации. Основным местом нахождения поляризации является поверхность отрицательного металла. Если жидкость, в которую помещен отрицательный металл, является разбавленной серной кислотой, можно видеть, как металл начинает покрываться пузырьками водорода, возникающими при электролитическом разложении жидкости. Ясно, что эти пузырьки не дают жидкости соприкасаться с металлом и тем уменьшают площадь контакта и увеличивают сопротивление цепи. Но, кроме видимых пузырьков, определенно существует также тонкий слой водорода, по-видимому, не в свободном состоянии, прилегающий к металлу. Мы видели, что это покрытие может создавать электродвижущую силу, действующую в противоположном направлении. Поэтому такое покрытие обязательно должно уменьшать электродвижущую силу батареи.

Для того чтобы избавиться от этого водородного покрытия, прибегают к различным способам. Покрытие может быть до некоторой степени уменьшено при помощи механических средств, таких, как перемешивание жидкости или протирание поверхности отрицательной пластины. В батарее Сми (Smee) отрицательные пластины расположены вертикально и покрыты тонкими волокнами платины, с которых пузырьки водорода легко срываются и, всплывая вверх, создают ток жидкости, который помогает счищать другие пузырьки по мере их образования.

Однако гораздо более эффективным является применение химических средств. Существует два вида таких средств. В батареях Гроува (Grove) и Бунзена (Bunsen) отрицательная пластина помещается в жидкость, богатую кислородом, и водород, вместо того чтобы создавать покрытие на поверхности пластины, вступает в соединение с этим веществом. В батарее Гроува платиновая пластина помещается в неразведенную азотную кислоту. В первой батарее Бунзена используется угольная пластина, помещенная в ту же кислоту. Для тех же самых целей используется также хромовая кислота. Она имеет то преимущество перед азотной кислотой, что не выделяет паров при протекающих в ней реакциях.

Другой способ избавления от водорода — это использование в качестве отрицательного металла меди, поверхность которой покрыта слоем окисла. Этот слой, однако, быстро исчезает при использовании в качестве отрицательного электрода. Джоуль предложил для восстановления слоя изготовлять медные пластины в форме дисков, наполовину погруженных в жидкость, и медленно их вращать, так, чтобы воздух мог воздействовать на поочередно открытые части диска.

При другом способе в качества электролита используется жидкость, катионом в которой является металл, в высокой степени отрицательный по отношению к цинку.

В батарее Даниэля медная пластина помещается в насыщенный раствор медного купороса. Когда ток идет через раствор от цинка к меди, на медной пластине осаждается медь, но водород не выделяется. Пока раствор является насыщенным, а ток не слишком большим, медь ведет себя как настоящий катион, в то время как анион SO_4 движется по направлению к цинку.

Если эти условия не выполняются, на катоде появляется водород, который тут же действует на раствор, замещая медь, и соединяется с ионом SO_4, образуя серную кислоту. Когда это происходит, сульфат меди вблизи от медной пластины заменяется на серную кислоту, раствор становится бесцветным и снова возникает поляризация, связанная с выделением водорода. Медь, осажденная при этих условиях, оказывается по структуре более рыхлой и более хрупкой, чем медь, осажденная при истинном электролизе.

Для того чтобы жидкость вблизи от медного электрода постоянно была насыщена медным купоросом, нужно поместить кристаллы этого вещества в жидкость по соседству с электродом, так, чтобы при ослаблении раствора из-за осаждения меди могло растворяться больше кристаллов.

Мы уже убедились в необходимости того, чтобы жидкость вблизи от меди была насыщена сульфатом меди. Еще более необходимо, чтобы та жидкость, в которую погружен цинк, была свободна от сульфата меди. Если сколько-нибудь этой соли

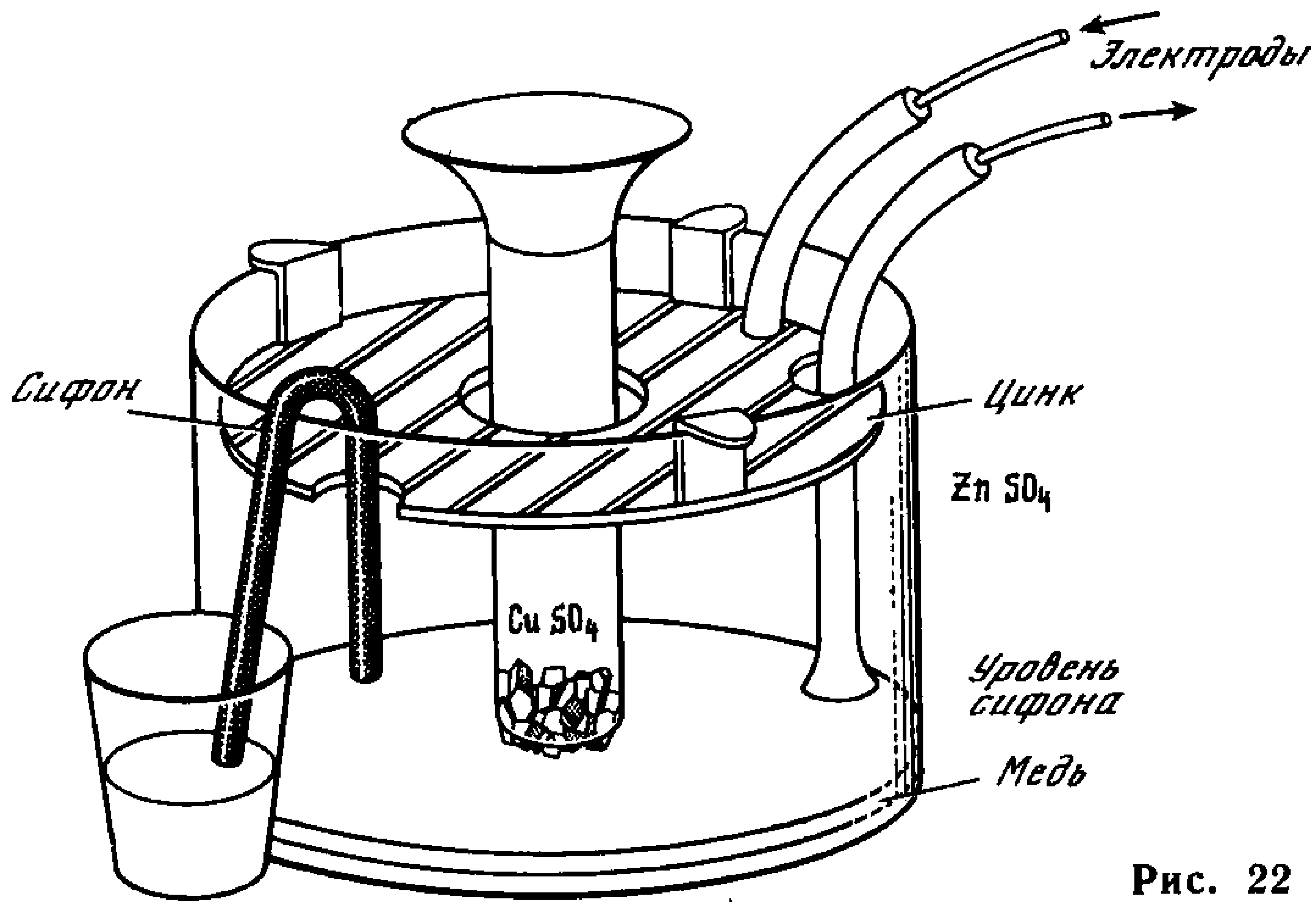

Рис. 22

доберется до поверхности цинка, то соль восстановится и медь осядет на цинк. В этом случае цинк, медь и жидкость составляют небольшую цепь, и в этой цепи идет быстрый электролитический процесс: цинк выедается за счет процесса, который не вносит никакого вклада в полезное действие батареи.

Чтобы этого не случилось, цинк погружают либо в разведенную серную кислоту, либо в раствор сульфата цинка, а для того чтобы раствор сульфата меди не мог смешаться с этой жидкостью, обе жидкости отделяются друг от друга перегородкой либо из пузыря (пленки), либо из пористой глины. Эти перегородки не препятствуют электролизу, но в то же время эффективно предотвращают видимые течения, ведущие к смешиванию жидкости.

В некоторых батареях для предотвращения течений используются опилки. Однако эксперименты Грэхэма (Graham) показали, что если две жидкости разделены перегородкой такого типа, то процесс диффузии идет столь же быстро, как и в случае непосредственного соприкосновения жидкостей, при условии, что видимые течения отсутствуют. По-видимому, если использовать пленку животного происхождения, которая уменьшает диффузию, то она точно в том же отношении увеличит сопротивление элемента, потому что электролитическая проводимость представляет собой процесс, математические законы которого имеют ту же форму, что и законы диффузии, и то, что мешает одному процессу, должно в равной мере мешать другому. Единственное различие заключается в том, что диффузия имеет место всегда, в то время как ток идет только тогда, когда батарея находится в действии.

Во всех вариантах батареи Даниэля сульфат меди в конце концов находит дорогу к цинку и портит батарею. Для того чтобы отсрочить этот исход на неопределенное время, сэр У. Томсон [8] осуществил следующую конструкцию батареи Даниэля [рис. 22].

Proc. R. S., Jan. 19, 1871.

В каждом элементе медная пластина положена горизонтально на дно. Сверху наливается насыщенный раствор сульфата цинка. Цинковый электрод имеет форму решетки и расположен горизонтально вблизи от поверхности раствора. Стеклянная трубка погружена в раствор вертикально, так что ее нижний конец находится чуть выше медной пластины. В эту трубку насыпаются кристаллы медного купороса. Растворяясь в жидкости, они образуют раствор большей плотности, чем раствор только сульфата цинка, так что этот раствор большей плотности может дойти до цинкового электрода лишь путем диффузии. Эта диффузия замедляется с помощью сифона, состоящего из стеклянной трубки, заполненной хлопчатобумажным фитилем. Один конец трубки находится на полпути между цинком и медью, а другой конец опущен в сосуд, находящийся вне элемента, так что жидкость очень медленно вытягивается из элемента примерно с середины его глубины. Для поддержания уровня сверху при необходимости доливается вода или слабый раствор сульфата цинка.

Таким образом, большая часть медного купороса, который в процессе диффузии движется вверх через жидкость до цинка, вытягивается сифоном, не успев дойти до цинка, и цинковый электрод окружен жидкостью, почти свободной от медного купороса и, вдобавок, очень медленно движущейся вниз, что еще больше замедляет подъем медного купороса. Во время работы батареи медь оседает на медной пластине, а ионы медленно движутся через жидкость к цинку, с которым и вступают в соединение, образуя сульфат цинка. При этом плотность жидкости у дна падает из-за отложения меди, а плотность жидкости сверху растет за счет добавления цинка.

Чтобы эти процессы не изменили соотношение плотности в слоях и не вызвали тем самым появление видимых течений в сосуде, нужно следить за тем, чтобы в трубку подавалось достаточное количество кристаллов сульфата меди и пополнять элемент сверху достаточно слабым раствором сульфата цинка, чтобы этот раствор был легче любого другого слоя жидкости, заполняющей элемент.

Батарея Даниэля далеко не является самой мощной из ныне используемых. Электродвижущая сила элемента Гроува равна[9] 192.000.000, Даниэля — 107.900.000 и элемента Бунзена — 188.000.000.

Сопротивление элемента Даниэля, вообще говоря, превышает сопротивление элементов Гроува или Бунзена, имеющих те же размеры.

Эти недостатки, однако, более чем перекрываются во всех случаях, когда нужны точные измерения, потому что элемент Даниэля превосходит любое другое известное устройство в стабильности электродвижущей силы. Еще одним преимуществом является способность работать в течение долгого времени, а также то обстоятельство, что элемент Даниэля при работе не выделяет никаких газов.

[9] Все ЭДС в ед. CGSM, см. п. 358.— *Примеч. ред.*

ГЛАВА VI
ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ

О системах линейных проводников

273. Любой проводник может рассматриваться как линейный, если он устроен так, что ток всегда должен проходить одинаковым образом между двумя участками поверхности этого проводника, которые называются электродами. Например, массивный кусок металла любой формы, поверхность которого целиком покрыта изолирующим материалом, за исключением двух мест, где обнаженная поверхность находится в металлическом контакте с электродами, сделанными из хорошо проводящего вещества, можно считать линейным проводником. Действительно, если сделать так, что ток входит через один из электродов и выходит через другой, то линии тока определены и соотношение между электродвижущей силой, током и сопротивлением будет выражаться законом Ома, поскольку ток в любой части проводника будет линейной функцией E. Но если число электродов больше, чем два, то через проводник может проходить больше одного независимого тока и эти токи могут быть и не сопряжены друг с другом (см. п. 282а и 282б).

Закон Ома

274. Пусть E — электродвижущая сила в линейном проводнике, действующая от электрода A_1 к электроду A_2 (см. п. 69). Пусть далее C — сила электрического тока в проводнике, иначе говоря, пусть за единицу времени через любое поперечное сечение проводника проходит C единиц электричества в направлении A_1A_2, и пусть сопротивление проводника равно R, тогда Закон Ома выражается следующим образом:

$$E=CR. \qquad (1)$$

Линейные проводники, соединенные последовательно

275. Пусть A_1 и A_2 — электроды первого проводника, и пусть один из электродов второго проводника находится в контакте с A_2, так что второй проводник имеет в качестве электродов A_2, A_3. Электроды третьего проводника можно обозначить через A_3 и A_4.

Обозначим электродвижущие силы, действующие вдоль этих проводников, через E_{12}, E_{23}, E_{34} и т. д. для следующих проводников.

Пусть сопротивления соответствующих проводников равны R_{12}, R_{23}, R_{34} и т. д. Тогда, поскольку проводники соединены последовательно, так что через каждый из них протекает один и тот же ток C, мы имеем по закону Ома

$$E_{12}=CR_{12},\ E_{23}=CR_{23},\ E_{34}=CR_{34} \ \text{ и т. д.} \qquad (2)$$

Если E — полная электродвижущая сила, а R — полное сопротивление всей системы, мы должны иметь по закону Ома

$$E=CR. \qquad (3)$$

Но

$$E=E_{12}+E_{23}+E_{34}+ \text{ и т. д.} \qquad (4)$$

— сумма отдельных электродвижущих сил, равная $C(R_{12}+R_{23}+R_{34}+$ и т. д.), согласно уравнениям (2). Сравнивая этот результат с (3), находим

$$R=R_{12}+R_{23}+R_{34}+ \text{ и т. д.} \tag{5}$$

Или: *сопротивление последовательно соединенных проводников равно сумме сопротивлений этих проводников, взятых в отдельности.*

Потенциал в любой точке последовательного соединения

Пусть A и C — электроды последовательного соединения, B — точка между ними, a, c и b — потенциалы этих точек соответственно. Обозначим, далее, через R_1 сопротивление той части цепи, которая заключена между точками A и B, через R_2 — сопротивление цепи между точками B и C, через R — сопротивление всей цепи от A до C. Тогда, поскольку $a-b=R_1C$, $b-c=R_2C$ и $a-c=RC$, потенциал в точке B равен

$$b=(R_2a+R_1c)/R, \tag{6}$$

что и определяет потенциал в точке B, если потенциалы в точках A и C заданы.

Сопротивление многократного проводника

276. Пусть некоторое число проводников ABZ, ACZ, ADZ и т. д. расположены рядом друг с другом и их концы находятся в контакте в одних и тех же двух точках A и Z. Тогда говорят, что они образуют многократное (параллельное) соединение (multiple arc).

Пусть сопротивления этих проводников равны соответственно R_1, R_2, R_3, а токи — C_1, C_2, C_3, и пусть сопротивление многократного проводника равно R, а полный ток через него равен C. Поскольку потенциалы в точках A и Z имеют одно и то же значение для всех проводников, они имеют одинаковую разность потенциалов, которую мы обозначим через E. Тогда

$E=C_1R_1=C_2R_2=C_3R_3=CR$; но $C=C_1+C_2+C_3$, откуда

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}. \tag{7}$$

Или: *обратное сопротивление многократного проводника есть сумма обратных сопротивлений составляющих его проводников.*

Если величину, обратную сопротивлению проводника, назвать проводимостью проводника, то можно сказать, что *проводимость многократного проводника есть сумма проводимостей составляющих его проводников.*

Ток в любой ветви многократного проводника

Из уравнений предыдущего параграфа следует, что если ток в какой-нибудь ветви многократного проводника равен C_1, а сопротивление этой ветви равно R_1, то

$$C_1=CR/R_1, \tag{8}$$

где C — полный ток, а R — определенное выше сопротивление многократного проводника

Продольное сопротивление проводников постоянного сечения

277. Пусть ρ — сопротивление куба единичной длины, сделанного из данного материала, по отношению к току, текущему параллельно одному из ребер. Тогда ρ называется удельным сопротивлением данного материала на единицу объема.

Рассмотрим теперь проводник, сделанный из того же материала и имеющий форму призмы, длина которой равна l, а площадь поперечного сечения равна единице. Такой проводник эквивалентен l кубам, расположенным последовательно. Его сопротивление поэтому равно $l\rho$.

Наконец, рассмотрим проводник длины l, имеющий постоянное поперечное сечение s. Он эквивалентен s проводникам, подобным рассмотренному ранее и образующих многократное (параллельное) соединение. Поэтому сопротивление такого проводника равно $R=l\rho/s$. Если мы знаем сопротивление однородного провода, мы можем определить удельное сопротивление материала, из которого он изготовлен, если мы можем измерить его длину и сечение.

Площадь поперечного сечения тонких проволочек точнее всего определяется путем вычисления по длине, весу и удельному весу образца. Определение удельного веса иногда оказывается неудобным, и в таких случаях используется сопротивление проволоки единичной длины и единичной массы, называемое удельным сопротивлением на единицу веса.

Если r — удельное сопротивление на единицу веса, l — длина и m — масса проволоки, то $R=l^2r/m$.

О размерностях величин, входящих в эти уравнения

278. Сопротивление проводника равно отношению действующей на проводник электродвижущей силы к производимому ею току. Проводимость проводника есть величина, обратная сопротивлению, или, другими словами, отношение тока к создающей этот ток электродвижущей силе.

Мы знаем, что в электростатической системе единиц отношение количества электричества, распределенного на некотором проводнике, к потенциалу этого проводника есть емкость проводника, измеряемая длиной. Если проводник представляет собой сферу, помещенную в безграничное поле, эта длина равна радиусу сферы. Поэтому отношение количества электричества к электродвижущей силе является длиной. Отношение же количества электричества к току есть время, в течение которого течет ток, переносящий это количество электричества. Поэтому отношение тока к электродвижущей силе есть отношение длины к времени, иными словами, скорость.

В том, что проводимость в электростатической системе единиц имеет размерность скорости, можно убедиться, предположив, что сфера радиуса r заряжена до потенциала V, а затем соединена с Землей при помощи данного проводника. Пусть сфера сжимается, так что электричество уходит по проводнику, а потенциал сферы остается постоянным и равным V. Тогда заряд на сфере в любой момент времени равен rV, а ток равен $-\frac{d}{dt}(rV)$. Поскольку значение V поддерживается постоянным, ток равен $-\frac{dr}{dt}V$, причем электродвижущая сила, вызывающая ток, равна V.

Проводимость проводника равна отношению тока к электродвижущей силе, или $-dr/dt$, т. е. скорости, с которой должен уменьшаться радиус сферы для того, чтобы потенциал ее сохранял постоянное значение, по мере того как заряд уходит в Землю по проводнику.

Таким образом, в электростатической системе проводимость проводника есть скорость, и, следовательно, имеет размерность $[L^{-1}T]$.

Стало быть, сопротивление проводника имеет размерность $[L^{-1}T]$. Удельное сопротивление на единицу объема имеет размерность $[T]$, а удельная проводимость на единицу объема имеет размерность $[T^{-1}]$.

Численное значение этих коэффициентов зависит только от выбора единицы времени, которая в разных странах одна и та же.

Удельное сопротивление на единицу веса имеет размерность $[L^{-3}MT]$.

279. В дальнейшем мы увидим, что в электромагнитной системе единиц сопротивление проводника выражается скоростью, так что в этой системе сопротивление проводника имеет размерность $[LT^{-1}]$.

Проводимость проводника, разумеется, равна обратной величине.

Удельное сопротивление на единицу объема имеет в этой системе единиц размерность $[L^2T^{-1}]$, а удельное сопротивление на единицу веса имеет размерность $[L^{-1}T^{-1}M]$.

Линейная система проводников в общем случае

280. Наиболее общий случай линейной системы представляет собой n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, соединенных между собой попарно с помощью $n(n-1)/2$ линейных проводников. Пусть проводимость (или величина, обратная сопротивлению) проводника, который соединяет любую пару точек, скажем точки A_p и A_q, обозначена через K_{pq}. Ток от точки A_p к точке A_q обозначим через C_{pq}. Пусть электрические потенциалы в точках A_p и A_q равны P_p и P_q соответственно, а внутренняя электродвижущая сила (если она есть), которая действует вдоль проводника от точки A_p к точке A_q, равна E_{pq}.

Ток от A_p к A_q по закону Ома равен

$$C_{pq}=K_{pq}(P_p-P_q+E_{pq}). \tag{1}$$

Для этих величин мы имеем следующий набор соотношений.

Проводимость какого-либо проводника та же самая в любом направлении, или

$$K_{pq}=K_{qp}. \tag{2}$$

Электродвижущая сила и ток является направленными величинами, т. е.

$$E_{pq}=-E_{qp} \text{ и } C_{pq}=-C_{qp}. \tag{3}$$

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — значения потенциалов в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно, а $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — соответственные количества электричества, которые поступают в систему за единицу времени через эти точки. Эти величины с необходимостью подчиняются условию «непрерывности»

$$Q_1+Q_2+ \ldots +Q_n=0, \tag{4}$$

поскольку электричество не может неограниченно нарастать, а равно и производиться внутри системы.

Условие «непрерывности» в любой точке A_p есть

$$Q_p = C_{p1} + C_{p2} + \ldots + \text{ и т. д. } + C_{pn}. \tag{5}$$

Подставляя значение токов из соотношения (1), получим

$$Q_p = (K_{p1} + K_{p2} + \text{и т. д.} + K_{pn}) P_p - (K_{p1}P_1 + K_{p2}P_2 + \text{и т. д.} + K_{pn}P_n) + \\ + (K_{p1}E_{p1} + \text{и т. д.} + K_{pn}E_{pn}). \tag{6}$$

Символ K_{pp} в это уравнение не входит. Поэтому мы можем принять

$$K_{pp} = -(K_{p1} + K_{p2} + \text{ и т. д.} + K_{pn}), \tag{7}$$

т. е. считать, что величина K_{pp} равна, а знак противоположен сумме проводимостей всех проводников, сходящихся к точке A_p. Тогда можем написать соотношение непрерывности для точки A_p в виде

$$K_{p1}P_1 + K_{p2}P_2 + \text{и т. д.} + K_{pp}P_p + \text{и т. д.} + K_{pn}P_n = \\ = K_{p1}E_1 + \text{и т. д.} + K_{pn}E_n - Q_p. \tag{8}$$

Полагая в этом уравнении индекс p равным поочередно 1, 2 и т. д. n, мы получим n уравнений одного и того же вида для определения n потенциалов P_1, $P_2, \ldots, P_n$.

Однако если мы сложим все уравнения системы (8), мы получим тождественный нуль в соответствии с соотношениями (3), (4) и (7). Поэтому число независимых уравнений в системе (8) равно $n-1$. Этого будет достаточно для того, чтобы определить разности потенциалов между любой парой точек, но не абсолютные значения потенциалов в каждой точке. Однако этого и не требуется для определения токов в системе.

Если мы обозначим через D определитель

$$\begin{vmatrix} K_{11}, & K_{12}, & \ldots & K_{1(n-1)}, \\ K_{21}, & K_{22}, & \ldots & K_{2(n-1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{(n-1)1}, & K_{(n-1)2}, & \ldots & K_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

а через D_{pq} — минор элемента K_{pq}, мы получим для величины $P_p - P_n$ выражение

$$(P_p - P_n) D = (K_{12}E_{12} + \text{и т. д.} - Q_1) D_{p1} + (K_{21}E_{21} + \text{и т. д.} - Q_2) D_{p2} + \\ + \text{и т. д.} + (K_{q1}E_{q1} + \text{и т. д.} + K_{qn}E_{ln} - Q_q) D_{pq} + \text{и т. д.} \tag{10}$$

Тем же путем можно определить превышение потенциала любой другой точки, скажем A_q, над потенциалом точки A_n. После этого мы можем определить ток между точками A_p и A_q из уравнения (1) и тем самым полностью решить задачу.

281. Теперь мы продемонстрируем свойство взаимности любых двух проводников, входящих в систему, что соответствует уже рассмотренному в п. 86 свойству взаимности для статического электричества.

В выражении для потенциала P_p коэффициент при Q_q равен $-D_{pq}/D$. В выражении для P_q коэффициент при Q_p равен $-D_{qp}/D$.

Но величина D_{pq} отличается от D_{qp} только заменой символов, при которой все K_{qp} переходят в K_{pq}. Как следует из соотношения (2), эти две последние величины равны друг другу, поскольку проводимость проводника одна и та же для обоих направлений. Поэтому $D_{pq}=D_{qp}$. (11)

Отсюда следует, что та часть потенциала в точке A_p, которая обусловлена введением единичного тока в точку A_q, равна той части потенциала в точке A_q, которая обусловлена введением одиночного тока в точку A_p.

Отсюда можно вывести некоторое предложение более практического вида.

Пусть A, B, C, D — любые четыре точки системы, и пусть ток Q входит в систему через точку A и выходит через точку B, создавая превышение потенциала в точке C над потенциалом в точке D на величину P. Тогда, если сделать так, что такой же по величине ток Q будет входить в систему через точку C и выходить через точку D, то потенциал в точке A будет превышать потенциал в точке B на ту же самую величину P.

Если ввести электродвижущую силу E, действующую на проводник от A к B, и если эта электродвижущая сила вызывает ток C от X к Y, то та же самая электродвижущая сила E, введенная в проводник в направлении от X к Y, вызовет точно такой же ток C от A к B.

Источником электродвижущей силы E может быть вольтова батарея, введенная между названными точками, следует только позаботиться о том, чтобы после подключения батареи сопротивление проводника не изменилось.

282 а. Если электродвижущая сила E_{pq} действует вдоль проводника A_pA_q, легко найти ток, возникающий при этом в другом проводнике системы A_rA_s:

$$K_{rs}K_{pq}E_{pq}(D_{rp}+D_{sq}-D_{rq}-D_{sp})/D.$$

Ток равен нулю, если

$$D_{rp}+D_{sq}-D_{rq}-D_{sp}=0. \qquad (12)$$

Но в силу (11) то же самое уравнение справедливо и в том случае, когда при наличии электродвижущей силы вдоль A_rA_s ток в проводнике A_pA_q равен нулю. Вследствие такого свойства взаимности два проводника, к которым оно относится, называются *сопряженными.*

Теория сопряженных проводников была исследована Кирхгофом. Он сформулировал законы для линейной системы следующим образом, обходя рассмотрение потенциала.

1. (Условие «непрерывности»). В любой точке системы сумма всех токов, текущих к этой точке, равна нулю.

2. В любом замкнутом контуре, образованном проводниками, сумма электродвижущих сил, действующих в контуре, равна сумме произведений тока в каждом проводнике на его сопротивление.

Мы получаем этот результат, складывая уравнения вида (1) для замкнутого контура, когда потенциалы с необходимостью исчезают.

282 б[1]. Если проводники образуют простую сеть и мы предполагаем, что в каждой ее ячейке циркулирует некоторый ток, тогда в том проводнике, который является общим для двух соседних ячеек, ток будет равен разности токов, цир-

[1] Извлечено из записей лекций профессора Максвелла мистером Дж. А. Флемингом, бакалавром искусств (Сент Джонс Колледж). См. также статью м-ра Флеминга, *Phil. Mag.*, XX, p. 221, 1885 (примечание Нивена).

кулирующих в этих двух ячейках, причем токи считаются положительными, если они циркулируют в направлении против часовой стрелки. Для этого случая легко доказать следующее утверждение. Пусть x — величина тока, E — электродвижущая сила и R — полное сопротивление в любой ячейке. Пусть, далее, $y, z, \ldots$ — токи, циркулирующие в соседних ячейках, имеющих общие проводники с той, в которой течет ток x. Сопротивление этих общих проводников обозначим соответственно через $s, t, \ldots$. Тогда

$$Rx - sy - tz - \text{и т. д.} = E.$$

Для того чтобы проиллюстрировать, как используется это правило, мы возьмем устройство, известное под названием мостика Уитстона, и будем исходить из чертежа и обозначений, принятых в п. 347. Применяя это правило к случаю трех контуров OBC, OCA и OAB, в которых циркулируют токи x, y, z соответственно, мы получим три уравнения, а именно

$$\begin{aligned}
(a+\beta+\gamma)x \quad & -\gamma y & -\beta z &= E,\\
-\gamma x + (b+\gamma+\alpha)y & & -\alpha z &= 0,\\
-\beta x \quad & -\alpha y + (c+\alpha+\beta)z & &= 0.
\end{aligned}$$

Из этих уравнений мы можем определить величину $z-y$, ток, текущий через гальванометр в ответвлении OA. Мы, однако, отсылаем читателя к п. 347 и последующим, где обсуждается этот и другие вопросы, связанные с мостиком Уитстона.

Тепло, производимое в системе

283. Механический эквивалент количества тепла, производимого в единицу времени в проводнике с сопротивлением R при протекании тока C определяется в согласии с п. 242 формулой

$$JH = RC^2. \tag{13}$$

Нам, следовательно, нужно определить сумму величин RC^2 для всех проводников системы.

Проводник, соединяющий точки A_p и A_q, имеет проводимость K_{pq} и сопротивление R_{pq}, причем

$$K_{pq}R_{pq} = 1. \tag{14}$$

Ток в этом проводнике по закону Ома равен

$$C_{pq} = K_{pq}(P_p - P_q). \tag{15}$$

Мы, однако, предположим, что значение тока не определяется законом Ома, а равно X_{pq}, где

$$X_{pq} = C_{pq} + Y_{pq}. \tag{16}$$

Чтобы определить тепло, производимое в системе, нам следует найти сумму всех величин вида $R_{pq}X_{pq}^2$ или

$$JH = \sum \{R_{pq}C_{pq}^2 + 2R_{pq}C_{pq}Y_{pq} + R_{pq}Y_{pq}^2\}. \tag{17}$$

Внося значения C_{pq} и помня соотношение между K_{pq} и R_{pq}, получаем

$$\sum [(P_p - P_q)(C_{pq} + 2Y_{pq}) + R_{pq}Y_{pq}^2]. \tag{18}$$

Теперь, поскольку и величины C и величины Y должны удовлетворять условию непрерывности в точке A_p, мы имеем

$$Q_p = C_{p1} + C_{p2} + \text{ и т. д.} + C_{pn}, \tag{19}$$

$$Q_p = X_{p1} + X_{p2} + \text{ и т. д.} + X_{pn}, \tag{20}$$

и, следовательно,

$$0 = Y_{p1} + Y_{p2} + \text{ и т. д.} + Y_{pn}. \tag{21}$$

Поэтому, складывая все члены в (18), мы находим

$$\sum (R_{pq}X_{pq}^2) = \sum P_pQ_p + \sum R_{pq}Y_{pq}^2. \tag{22}$$

Поскольку величины R всегда положительны и величины Y^2 существенно положительны, последний член этого равенства должен быть существенно положителен. Следовательно, первый член правой части дает минимальное значение всего выражения, соответствующее тому случаю, когда величина Y в каждом проводнике обращается в нуль и ток в каждом проводнике определяется законом Ома.

Отсюда вытекает следующая теорема:

284. В любой системе проводников, не содержащей внутренних электродвижущих сил, тепло, производимое токами, распределенными по закону Ома, оказывается, меньше, чем если бы токи были распределены любым другим способом, совместным с реальными условиями втекания и вытекания тока.

Тепло, которое действительно производится в цепи при выполнении закона Ома, эквивалентно в механическом отношении величине $\sum P_pQ_p$, т. е. сумме произведений количеств электричества, подводимых к разным внешним электродам, на потенциалы соответствующих электродов.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ VI

Изучаемые в п. 280 законы распределения токов могут быть выражены с помощью следующих легко запоминаемых правил.

Пусть потенциал одной из точек, скажем точки A_n, принят за нуль. Тогда, как показано в тексте, если в точку A_s притекает количество электричества Q_s, потенциал в точке A_p равен $-(D_{ps}/D)Q_s$.

Величины D и D_{ps} могут быть определены с помощью следующих правил. Величина $-D$ равна сумме произведений проводимостей, причем каждое произведение содержит $(n-1)$ сомножитель и не принимаются во внимание такие произведения, которые содержат проводимости ветвей, образующих замкнутые контуры. Величина D_{ps} равна сумме произведений, составленных каждое из $(n-2)$ сомножителей, причем не учитываются такие произведения, которые содержат проводимости ветвей A_pA_n или A_sA_n, а также такие, в которые входят проводимости ветвей, образующих либо сами по себе, либо с помощью ветвей A_pA_n или A_sA_n замкнутые контуры.

Из уравнения (10) видно, что электродвижущая сила E_{qr}, действующая в разветвлении A_qA_r действует так же, как и источник тока величины $K_{qr}E_{qr}$, расположенный в точке R, и сток той же величины, расположенный в точке Q, так что предыдущее правило применимо и к этому случаю. Однако результат приложения этого правила можно сформулировать проще следующим образом. Если электродвижущая сила E_{pq} действует вдоль проводника A_pA_q, то величина тока, возникающего при этом в другом проводнике A_rA_s, равна

$$K_{rs}K_{pq}(\Delta/D)E_{pq},$$

где D вычисляется по указанному выше правилу, а $\Delta=\Delta_1-\Delta_2$.

Тогда Δ_1 вычисляется следующим образом: составим из проводимостей всевозможные произведения, содержащие (n—2) сомножителей. Выберем из этих произведений такие, которые содержат как проводимость ветви A_pA_r (или произведение проводимостей тех ветвей, которые вместе с A_pA_r образуют замкнутый контур), так и проводимость ветви A_qA_s (или произведение проводимостей тех ветвей, которые вместе с A_sA_q образуют замкнутый контур). Из выбранных таким образом произведений отбросим те, которые содержат проводимости ветвей A_rA_s или A_pA_q, или же произведения проводимостей тех ветвей, которые образуют замкнутые контуры либо сами по себе, либо с помощью A_rA_s или A_pA_q. Сумма оставшихся членов даст выражение для Δ_1. Величина Δ_2 получается по тому же способу, только вместо ветвей A_pA_r и A_sA_q следует брать ветви A_pA_s и A_qA_r соответственно.

Если ток входит через точку P и выходит через точку Q, отношение этого тока к разности потенциалов между A_p и A_q равно D/Δ'.

Здесь Δ' представляет собой сумму произведений проводимостей, причем в каждое произведение входит (n—2) сомножителей, и отбрасываются все те произведения, которые содержат проводимость ветви A_pA_q, или содержат произведения проводимостей тех ветвей, которые вместе с ветвью A_pA_q образуют замкнутый контур.

В этих выражениях опускаются все члены, которые содержат произведение проводимостей, если соответствующие ветви образуют замкнутый контур.

Мы можем пояснить эти правила, применив их к очень важному случаю 4 точек, соединенных 6 проводниками. Обозначим точки номерами 1, 2, 3, 4.

Тогда D равно сумме произведений проводимостей, причем каждое произведение состоит из трех сомножителей, однако в сумму не включаются следующие 4 произведения: $K_{12}K_{23}K_{31}$, $K_{12}K_{24}K_{41}$, $K_{13}K_{34}K_{41}$ и $K_{23}K_{34}K_{42}$, поскольку они соответствуют четырем замкнутым контурам (123), (124), (134) и (234).

Таким образом,

$$D=(K_{14}+K_{24}+K_{34})(K_{12}K_{13}+K_{12}K_{23}+K_{13}K_{23})+K_{14}K_{24}(K_{13}+K_{23})+$$
$$+K_{14}K_{34}(K_{12}+K_{23})+K_{34}K_{24}(K_{12}+K_{13})+K_{14}K_{24}K_{34}.$$

Предположим, что электродвижущая сила E действует вдоль проводника (23), тогда ток в ветви (14) определяется соотношением

$$(\Delta_1-\Delta_2)\,EK_{14}K_{23}/D,$$

где $\Delta_1=K_{13}K_{24}$ (по определению), $\Delta_2=K_{12}K_{43}$.

Таким образом, если по проводнику (14) не идет ток, $K_{13}K_{24}-K_{12}K_{43}=0$; это равенство есть условие того, что проводники (23) и (14) являются сопряженными.

Ток через проводник (13) равен

$$[(K_{12}(K_{14}+K_{24}+K_{34})+K_{14}K_{24})/D]EK_{14}K_{23}.$$

Проводимость всего соединения для случая, когда ток входит через точку (2) и выходит через точку (3), равна

$$=\frac{D}{(K_{14}+K_{24}+K_{34})(K_{12}+K_{13})+K_{14}(K_{24}+K_{34})}.$$

Если соединение содержит 5 точек, то условие сопряженности проводников (23) и (14) имеет вид

$$K_{12}K_{34}(K_{15}+K_{25}+K_{35}+K_{45})+K_{12}K_{35}K_{45}+K_{34}K_{51}K_{52}=$$
$$=K_{13}K_{24}(K_{15}+K_{25}+K_{35}+K_{45})+K_{13}K_{52}K_{54}+K_{24}K_{51}K_{53}.$$

ГЛАВА VII

ПРОХОЖДЕНИЕ ТОКА В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Запись электрических токов

285. Выберем в некоторой точке элемент площади dS, ориентированный перпендикулярно к оси x. Пусть через эту площадку от отрицательной ее стороны к положительной проходит Q единиц электричества за единицу времени. Тогда, если отношение Q/dS при безграничном уменьшении dQ принимает предельное значение u, то эту величину u называют Составляющей электрического тока в направлении оси x в данной точке.

Точно так же мы можем определить v и w — составляющие электрического тока в направлениях соответственно y и z.

286. Для того чтобы определить составляющую тока, проходящего через точку O, в любом другом направлении OR, введем направляющие косинусы l, m, n отрезка OR. Тогда, если мы отсечем по осям x, y, z от начала координат, помещенного в точку O, отрезки, равные r/l, r/m и r/n, а концы отрезков обозначим соответственно A, B и C, то треугольник ABC будет перпендикулярен направлению OR [рис. 23].

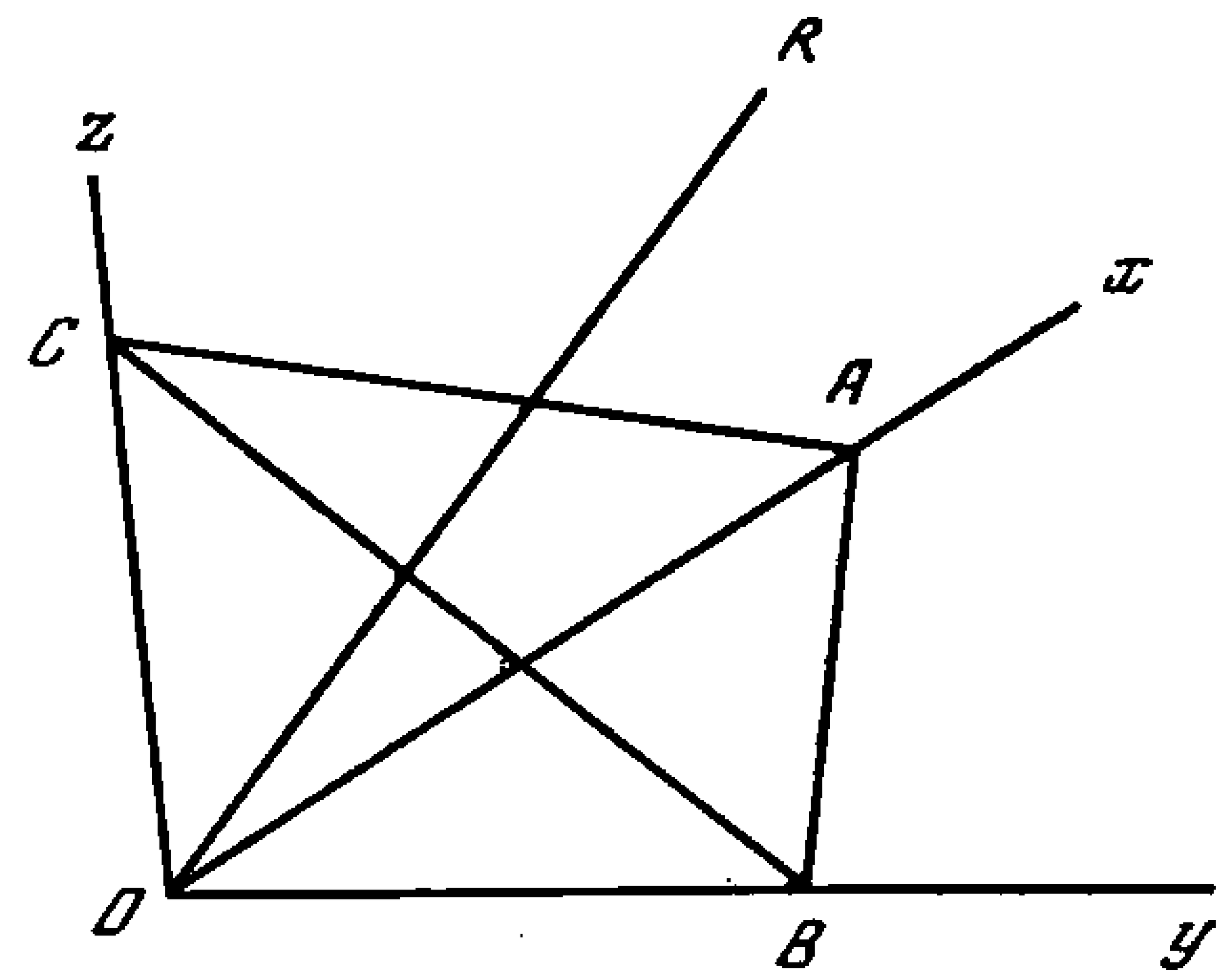

Рис. 23

Площадь этого треугольника ABC равна

$$dS=\frac{1}{2}\frac{r^2}{lmn},$$

и при уменьшении r эта площадь безгранично уменьшается.

Количество электричества, которое выходит из тетраэдра $ABCO$ через треугольную грань ABC, должно быть равно тому количеству электричества, которое втекает через остальные грани OBC, OCA и OAB.

Площадь треугольника OBC равна $r^2/(2\,mn)$, а составляющая тока, нормальная к плоскости этого треугольника, равна u, следовательно, количество электричества, входящее через этот треугольник в единицу времени, равно $(r^2u)/(2mn)$.

Количества электричества, которые входят через грани OCA и OAB за единицу времени, равны соответственно $(r^2v)/(2nl)$ и $(r^2w/(2lm)$.

Если составляющую тока в направлении OR обозначить через γ, то количество электричества, выходящее за единицу времени из тетраэдра через грань ABC, равно $(r^2\gamma)/(2lmn)$. Поскольку эта величина равна тому количеству электричества, которое входит через три остальные грани, мы получаем выражение

$$\frac{1}{2}\frac{r^2\gamma}{lmn}=\frac{1}{2}r^2\left\{\frac{u}{mn}+\frac{v}{nl}+\frac{w}{lm}\right\}.$$

Умножив его $(2lmn)/r^2$, получаем

$$\gamma=lu+mv+nw. \tag{1}$$

Если мы положим

$$u^2+v^2+w^2=\Gamma^2$$

и введем три величины l', m' и n', такие, что

$$u=l'\Gamma,\quad v=m'\Gamma \text{ и } w=n'\Gamma, \text{ то}$$

$$\gamma=\Gamma\,(ll'+mm'+nn'). \tag{2}$$

Таким образом, если мы определим результирующий ток как вектор, величина которого равна Γ, а направляющие косинусы равны l', m', n', и если γ обозначает проекцию тока на направление, составляющее с направлением результирующего тока угол θ, то

$$\gamma=\Gamma\cos\theta. \tag{3}$$

Это показывает, что законы разложения тока являются такими же, как и законы разложения скоростей, сил и всех других векторов.

287. Выведем условие того, что некоторая данная поверхность является поверхностью тока. Пусть уравнение

$$F(x,\ y,\ z)=\lambda \tag{4}$$

определяет семейство поверхностей, любая из которых может быть получена заданием определенного значения постоянной λ. Тогда, если положить

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2=\frac{1}{N^2}, \tag{5}$$

то направляющие косинусы нормали, отсчитываемой в направлении роста λ, равны

$$l=N\frac{d\lambda}{dx},\qquad m=N\frac{d\lambda}{dy},\qquad n=N\frac{d\lambda}{dz}. \tag{6}$$

Следовательно, если γ есть компонента тока, нормальная к поверхности, то

$$\gamma=N\left\{u\frac{d\lambda}{dx}+v\frac{d\lambda}{dy}+w\frac{d\lambda}{dz}\right\}. \tag{7}$$

При $\gamma=0$ ток через поверхность отсутствует. В этом случае поверхность можно назвать Поверхностью Потока, потому что линии потока лежат на этой поверхности.

288. Поэтому уравнение поверхности потока имеет вид

$$u\frac{d\lambda}{dx}+v\frac{d\lambda}{dy}+w\frac{d\lambda}{dz}=0. \tag{8}$$

Если это уравнение соблюдается для всех значений λ, то все поверхности семейства являются поверхностями потока.

289. Предположим, что имеется другое семейство поверхностей с параметром λ'. Тогда, если поверхности этого семейства также являются поверхностями потока, мы получим

$$u\frac{d\lambda'}{dx}+v\frac{d\lambda'}{dy}+w\frac{d\lambda'}{dz}=0. \tag{9}$$

Если имеется еще и третье семейство поверхностей потока, отвечающее параметру λ'', то

$$u\frac{d\lambda''}{dx}+v\frac{d\lambda''}{dy}+w\frac{d\lambda''}{dz}=0. \tag{10}$$

Исключая из этих трех уравнений u, v и w, мы получим

$$\begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{dx}, & \frac{d\lambda}{dy}, & \frac{d\lambda}{dz} \\ \frac{d\lambda'}{dx}, & \frac{d\lambda'}{dy}, & \frac{d\lambda'}{dz} \\ \frac{d\lambda''}{dx}, & \frac{d\lambda''}{dy}, & \frac{d\lambda''}{dz} \end{vmatrix}=0, \tag{11}$$

или

$$\lambda''=\varphi(\lambda, \lambda'), \tag{12}$$

т. е. λ'' есть некоторая функция от λ и λ'.

290. Рассмотрим теперь четыре поверхности, параметры которых равны λ, $\lambda+\delta\lambda$, λ' и $\lambda'+\delta\lambda'$. Эти четыре поверхности ограничивают некоторую четырехстороннюю трубку, которую мы можем назвать трубкой $\delta\lambda\cdot\delta\lambda'$. Поскольку эта трубка ограничена поверхностями, через которые нет потока, мы можем назвать ее Трубкой Тока. Если мы возьмем любые два поперечных сечения этой трубки, то количество потока, входящее в трубку через одно сечение, должно равняться количеству потока, которое выходит из трубки через другое сечение, и, поскольку это количество будет, таким образом, одно и то же для любого сечения трубки, обозначим его через $L\delta\lambda\cdot\delta\lambda'$, где L является функцией параметров λ и λ', определяющих рассматриваемую трубку.

291. Если δS обозначает площадь сечения трубки потока плоскостью, нормальной к оси x, то теория замены независимых переменных дает

$$\delta\lambda\cdot\delta\lambda'=\delta S\left(\frac{d\lambda}{dy}\cdot\frac{d\lambda'}{dz}-\frac{d\lambda}{dz}\cdot\frac{d\lambda'}{dy}\right), \tag{13}$$

и, по определению составляющих тока, имеем

$$u\,dS=L\delta\lambda\delta\lambda'. \tag{14}$$

Отсюда

$$u = L\left(\frac{d\lambda}{dy}\cdot\frac{d\lambda'}{dz} - \frac{d\lambda}{dz}\cdot\frac{d\lambda'}{dy}\right).$$

Аналогично

$$\left.\begin{aligned} v &= L\left(\frac{d\lambda}{dz}\frac{d\lambda'}{dx} - \frac{d\lambda}{dx}\frac{d\lambda'}{dz}\right),\\ w &= L\left(\frac{d\lambda}{dx}\frac{d\lambda'}{dy} - \frac{d\lambda}{dy}\frac{d\lambda'}{dx}\right).\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

292. Если известна одна из функций λ или λ', то всегда возможно определить другую таким образом, чтобы величина L равнялась единице. Например, возьмем плоскость yz и проведем на ней ряд равноотстоящих линий, параллельных оси y. Пусть эти линии представляют собой линии пересечения плоскости yz с семейством поверхностей λ'. Другими словами, пусть функция λ' определяется условием, что $\lambda'=z$ при $x=0$. Если положить теперь $L=1$ и, следовательно (при $x=0$), $\lambda=\int u dy$, то количество электричества, проходящее через любую часть плоскости $x=0$, будет равно

$$\iint u dy dz = \iint d\lambda d\lambda'. \quad (16)$$

Коль скоро задан характер пересечения поверхностей тока с плоскостью yz, форма этих поверхностей в пространстве всюду определяется условиями (8) и (9). Определенные так две функции λ и λ' достаточны для определения тока в любой точке с помощью соотношений (15), где величину L следует положить равной единице.

О линиях потока

293. Выберем последовательности значений λ и λ' так, что в обеих этих последовательностях соседние значения отстоят друг от друга на единицу. Две системы поверхностей, отвечающие этим наборам значений λ и λ', разделят пространство на систему трубок с четырехсторонним сечением, по каждой из которых будет протекать единичный ток. Считая эту единицу достаточно малой, можно определить все детали распределения тока с любой желаемой степенью точности. Тогда, если провести любую поверхность, пересекающую систему трубок, величина тока, проходящего через эту поверхность, будет выражаться *числом* трубок, пересекающих поверхность, поскольку по каждой трубке идет единичный ток.

Пересечения поверхностей тока могут быть названы линиями потока. Если единица выбрана достаточно малой, число линий потока, пересекающих некоторую поверхность, примерно равно числу пересекающих ее потоковых трубок, и мы, таким образом, можем рассматривать линии потока как определяющие не только *направление* тока, но также и его *силу*, поскольку каждая линия потока, пересекающая данную поверхность, соответствует единичному току.

О токовых листах и токовых функциях

294. Слой проводника, заключенного между двумя соседними поверхностями тока некоторой системы, скажем системы λ', называется токовым листом. Трубки тока внутри этого слоя определяются функцией λ. Если значения λ в точках A и P

обозначить соответственно через λ_A и λ_P, тогда ток, текущий справа налево через любую линию, проведенную на листе от A к P, равен $\lambda_P - \lambda_A$. Если AP есть некоторый элемент ds кривой, проведенной на листе, ток, пересекающий этот элемент справа налево, равен $(d\lambda/ds)ds$. Эта функция λ, которая позволяет полностью определить распределение тока в слое, называется Токовой функцией.

Любой тонкий лист металла или проводящего вещества, ограниченный с двух сторон воздухом или некоторой другой непроводящей средой, может рассматриваться как токовый лист, в котором распределение тока может быть выражено с помощью токовой функции (см. п. 647).

Уравнение непрерывности

295. Если продифференцировать каждое из трех уравнений (15) соответственно по x, y, z, имея при этом в виду, что L является функцией от λ и λ', найдем

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0. \tag{17}$$

Соответствующее уравнение в гидродинамике называется Уравнением «Непрерывности». Та непрерывность, которую оно выражает, есть непрерывность существования, т. е. это означает, что материальное вещество не может покинуть одну часть пространства и появиться в другой, не проходя через пространство между ними. Оно не может просто исчезнуть в одном месте и появиться в другом, а должно пройти по некоторому непрерывному пути, так что, если провести замкнутую поверхность, включающую одно местоположение и исключающую другое, материальное вещество, переходя из этого одного положения в другое, должно пройти через эту замкнутую поверхность. Наиболее общей формой этого уравнения в гидродинамике является уравнение

$$\frac{d(\rho u)}{dx}+\frac{d(\rho v)}{dy}+\frac{d(\rho w)}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0, \tag{18}$$

где ρ обозначает отношение количества вещества к занимаемому объему (в данном случае рассматривается дифференциальный элемент объема), а величины (ρu), (ρv), (ρw) — отношения количества вещества, пересекающего в единицу времени элемент поверхности, к площади этого элемента, при этом элемент площади выбирается перпендикулярно к осям x, y и z соответственно. Имея это в виду, уравнение можно применять к любой материальной среде, твердой или жидкой, для непрерывного или разрывного движения при условии, что существование отдельных частей этой среды является непрерывным. Если что бы то ни было, пускай и не вещество, подчиняется условию непрерывного существования во времени и пространстве, указанное уравнение будет выражать это условие.

Уравнения подобного вида возникают в других разделах Физического Учения, например в теории электрических и магнитных величин. Мы будем называть такие уравнения «уравнениями непрерывности», указывая на их форму, хотя мы можем и не придавать входящим в эти уравнения величинам свойства вещества, или даже непрерывное существование во времени и пространстве.

Уравнение (17), к которому мы пришли в случае электрических токов, тождественно с (18), если мы положим $\rho=1$, т. е. если мы предположим, что соответствующее вещество является однородным и несжимаемым. Для случая жидкости это уравнение также может быть установлено любым из способов, приводимых в трактатах по гидродинамике. В одном случае мы следим за движением и деформацией некоторого выбранного элемента жидкости по мере его перемещения. В другом случае мы фиксируем наше внимание на некотором элементе пространства и учитываем все, что втекает в этот элемент и вытекает из него.

Первый из этих двух методов не может быть применен к электрическим токам, потому что мы не знаем, с какой скоростью электричество проходит через тело, и даже не знаем, движется оно в положительном или отрицательном направлении тока. Все, что мы знаем — это алгебраическое значение величины количества электричества, которое пересекает единицу площади за единицу времени,— величины, соответствующей (ρu) в уравнении (18). Мы не можем приписать определенного значения какому-либо из множителей ρ или u, и поэтому мы не можем следовать за какой-либо отдельной порцией электричества на ее пути через тело. Другой метод исследования, где мы рассматриваем то, что проходит через стенки некоторого элемента объема, применим к электрическим токам и, по-видимому, является формально предпочтительным по сравнению с тем, который приведен нами, но нам нет нужды его здесь повторять, поскольку он излагается в любом трактате по гидродинамике.

Количество электричества, которое проходит через данную поверхность

296. Пусть результирующий ток в любой точке данной поверхности равен Γ. Элемент поверхности обозначим через dS, а угол между током Γ и внешней нормалью к поверхности обозначим через ε. Тогда полный ток через поверхность будет равен

$$\iint \Gamma \cos\varepsilon \, dS,$$

где интегрирование проводится по поверхности.

В случае произвольной замкнутой поверхности мы можем, как и в п. 21, преобразовать этот интеграл к виду

$$\iint \Gamma \cos\varepsilon \, dS = \iiint \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) dx\, dy\, dz, \tag{19}$$

причем тройное интегрирование проводится по объему, ограниченному этой поверхностью. Эта формула дает выражение для полного потока, вытекающего из замкнутой поверхности. Поскольку во всех случаях стационарных токов эта величина должна быть равна нулю при любых пределах интегрирования, величина под знаком интеграла должна обратиться в нуль, и мы получаем таким путем уравнение непрерывности (17).

ГЛАВА VIII
СОПРОТИВЛЕНИЕ И ПРОВОДИМОСТЬ В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

О наиболее общих соотношениях между током и электродвижущей силой

297. Обозначим составляющие тока в любой точке через u, v, w. Составляющие электродвижущей напряженности обозначим через X, Y, Z.

Электродвижущая напряженность в любой точке есть результирующая сила, действующая на единицу положительного электричества, помещенную в этой точке. Электродвижущая напряженность может возникать: (1) от действия электростатических сил. В этом случае, если V — потенциал, то

$$X=-\frac{dV}{dx}, \qquad Y=-\frac{dV}{dy}, \qquad Z=-\frac{dV}{dz}; \tag{1}$$

или (2) из-за электромагнитной индукции, законы которой мы рассмотрим позднее; или (3) из-за термоэлектрического или электрохимического действия в рассматриваемой точке, вызывающих ток в данном направлении.

Мы будем, как правило, предполагать, что величины X, Y, Z являются составляющими электродвижущей напряженности, действующей в данной точке, каково бы ни было происхождение этой силы, однако иногда мы будем рассматривать следствия из предположения, по которому электродвижущая напряженность целиком обусловлена изменением потенциала.

По Закону Ома ток пропорционален электродвижущей напряженности. Следовательно, X, Y, Z должны быть линейными функциями от u, v, w. Мы, таким образом, можем принять в качестве Уравнений Сопротивления

$$\begin{aligned} X&=R_1u+Q_3v+P_2w,\\ Y&=P_3u+R_2v+Q_1w,\\ Z&=Q_2u+P_1v+R_3w. \end{aligned} \tag{2}$$

Мы можем назвать коэффициенты R коэффициентами продольного сопротивления в направлениях координатных осей.

Коэффициенты P и Q могут быть названы коэффициентами поперечного сопротивления. Они определяют электродвижущую напряженность, действующую в одном каком-нибудь направлении, необходимую для того, чтобы создать ток, текущий в другом направлении.

Если бы мы были свободны предположить, что твердое тело может рассматриваться как совокупность линейных проводников, то, используя свойство взаимности двух любых проводников в линейной системе (п. 281), мы могли бы показать, что электродвижущая сила, направленная вдоль оси z и создающая единичный ток, направленный вдоль оси y, должна равняться электродвижущей силе, действующей вдоль оси y и создающей единичный ток вдоль оси z. Это означало бы, что $P_1=Q_1$. Подобным же образом мы получили бы $P_2=Q_2$ и $P_3=Q_3$. Если эти условия выполняются, то говорят, что система коэффициентов является Симметричной. Если они не выполняются, система называется Косой (Skew).

Имеется серьезная причина полагать, что в любом реальном случае система коэффициентов является симметричной, но мы в дальнейшем рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из предположения о возможной несимметричности коэффициентов.

298. Величины u, v, w могут быть выражены как линейные функции составляющих X, Y, Z с помощью системы уравнений, которую мы можем назвать Уравнениями Проводимости:

$$\begin{aligned} u &= r_1X + p_3Y + q_2Z, \\ v &= q_3X + r_2Y + p_1Z, \\ w &= p_2X + q_1Y + r_3Z. \end{aligned} \tag{3}$$

Коэффициенты r можно назвать коэффициентами Продольной проводимости, а коэффициенты p и q — коэффициентами Поперечной проводимости.

Коэффициенты сопротивления обратны коэффициентам проводимости. Эту связь можно определить следующим образом.

Обозначим определитель, составленный из коэффициентов сопротивления, через $[PQR]$, а определитель, составленный из коэффициентов проводимости,— через $[pqr]$. Тогда

$$[PQR]=P_1P_2P_3+Q_1Q_2Q_3+R_1R_2R_3-R_1Q_1R_1-P_2Q_2R_2-P_3Q_3R_3, \tag{4}$$

$$[pqr]=p_1p_2p_3+q_1q_2q_3+r_1r_2r_3-p_1q_1r_1-p_2q_2r_2-p_3q_3r_3, \tag{5}$$

$$[PQR]\,[pqr]=1, \tag{6}$$

$$[PQR]p_1=(P_2P_3-Q_1R_1), \qquad [pqr]P_1=(p_2p_3-q_1r_1), \tag{7}$$

и т. д. и т. д.

Другие уравнения могут быть получены циклической перестановкой символов P, Q, R, p, q, r и индексов 1, 2, 3.

Скорость образования тепла

299. Для того чтобы найти работу, совершаемую током в единицу времени на преодоление сопротивления и тем самым на образование тепла, умножим составляющие тока на соответствующие составляющие электродвижущей напряженности. Мы получим следующее выражение для работы W, совершаемой за единицу времени:

$$W=Xu+Yv+Zw; \tag{8}$$

$$=R_1u^2+R_2v^2+R_3w^2+(P_1+Q_1)vw+(P_2+Q_2)wu+(P_3+Q_3)uv; \tag{9}$$

$$=r_1X^2+r_2Y^2+r_3Z^2+(p_1+q_1)YZ+(p_2+q_2)ZX+(p_3+q_3)XY. \tag{10}$$

С помощью подходящего выбора осей из выражения (9) можно убрать произведения составляющих u, v, w или же произведения компонент X, Y, Z. Однако система осей, в которой выражение для W приводится к виду $R_1u^2+R_2v^2+R_3w^2$, вообще говоря, не совпадает с системой осей, в которой оно приводится к виду $r_1X^2+r_2Y^2+r_3Z^2$.

Эти две системы осей совпадают только в том случае, когда коэффициенты P_1, P_2, P_3 равны соответственно коэффициентам Q_1, Q_2, Q_3.

Если, следуя Томсону [1], мы положим

$$P=S+T,\ Q=S-T \text{ и } p=s+t,\ q=s-t, \tag{11}$$

тогда мы получим

$$\begin{aligned}[PQR]=R_1R_2R_3+2S_1S_2S_3-S_1^2R_1-S_2^2R_2-S_3^2R_3+\\ +2(S_1T_2T_3+S_2T_3T_1+S_3T_1T_2)+R_1T_1^2+R_2T_2^2+R_3T_3^2\end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\left.\begin{aligned}[PQR]\,r_1&=R_2R_3-S_1^2+T_1^2,\\ [PQR]\,s_1&=T_2T_3+S_2S_3-R_1S_1,\\ [PQR]\,t_1&=R_1T_1+S_2T_3+S_3T_2.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Поэтому, если мы обратим S_1, S_2, S_3 в нуль, коэффициенты s не исчезают, если коэффициенты T не равны нулю.

Условие устойчивости

300. Поскольку равновесие электричества является устойчивым, работа, затраченная на поддержание тока, должна всегда быть положительной. Условия, при выполнении которых величина W всегда является положительной, заключаются в том, что три коэффициента R_1, R_2, R_3, а также три выражения

$$\left.\begin{aligned}&4R_2R_3-(P_1+Q_1)^2,\\ &4R_3R_1-(P_2+Q_2)^2,\\ &4R_1R_2-(P_3+Q_3)^2\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

должны все быть положительны.

Сходные соотношения имеют место и для коэффициентов проводимости.

Уравнения непрерывности в однородной среде

301. Если мы запишем составляющие электродвижущей силы в виде производных от потенциала V, уравнение непрерывности

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0 \tag{15}$$

в однородной среде примет форму

$$r_1\frac{d^2V}{dx^2}+r_2\frac{d^2V}{dy^2}+r_3\frac{d^2V}{dz^2}+2s_1\frac{d^2V}{dy\,dz}+2s_2\frac{d^2V}{dz\,dx}+2s_3\frac{d^2V}{dx\,dy}=0. \tag{16}$$

Если среда не является однородной, в уравнение войдут члены, обусловленные изменением коэффициентов проводимости при переходе от одной точки к другой.

Это уравнение соответствует уравнению Лапласа в анизотропной среде.

302. Если положить

$$[rs]=r_1r_2r_3+2s_1s_2s_3-r_1s_1^2-r_2s_2^2-r_3s_3^2 \tag{17}$$

[1] *Trans. R. S. Edin.*, 1853—4, p. 165.

и

$$[AB]=A_1A_2A_3+2B_1B_2B_3-A_1B_1^2-A_2B_2^2-A_3B_3^2, \tag{18}$$

где

$$[rs]\,A_1=r_2r_3-s_1^2, \qquad [rs]\,B_1=s_2s_3-r_1s_1, \quad \dots\dots\dots \tag{19}$$

и т. д., то система A, B будет обратна системе r, s, и, если обозначим

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2B_1yz+2B_2zx+2B_3xy=[AB]\rho^2, \tag{20}$$

мы найдем, что выражение

$$V=\frac{C}{4\pi}\cdot\frac{1}{\rho} \tag{21}$$

является решением этого уравнения.

В случае, когда коэффициенты T равны нулю, коэффициенты A и B совпадают с коэффициентами R и S из п. 299. При наличии T этого не происходит.

Таким образом, в случае, когда электричество вытекает из некоторого центра, помещенного в бесконечной, однородной, но не изотропной среде, эквипотенциальные поверхности являются эллипсоидами, для каждого из которых ρ имеет постоянное значение. Оси этих эллипсоидов направлены по главным осям проводимости, и если система не является симметричной, то они не совпадают с главными осями сопротивления.

Преобразовав уравнение (16), мы можем принять за оси x, y, z главные оси проводимости. Тогда коэффициенты форм s и B обратятся в нуль, а каждый коэффициент формы A будет обратен соответствующему коэффициенту формы r. Выражение для ρ будет

$$\frac{x^2}{r_1}+\frac{y^2}{r_2}+\frac{z^2}{r_3}=\frac{\rho^2}{r_1r_2r_3}. \tag{22}$$

303. Теория полной системы уравнений сопротивления и проводимости есть теория линейных функций от трех переменных, которая применяется, например, в теории Упругости и в других областях физики [2]. Наиболее подходящим методом рассмотрения является тот, с помощью которого Гамильтон и Тэт рассматривают линейную и векторную функцию вектора. Мы, однако, не будем вводить явно Кватернионные обозначения.

Коэффициенты T_1, T_2, T_3 могут рассматриваться как прямоугольные составляющие вектора T, абсолютная величина и направление которого фиксированы в теле и не зависят от направления осей отсчета. То же самое верно и для величин t_1, t_2, t_3, которые являются составляющими другого вектора t.

Векторы T и t, вообще говоря, не совпадают по направлению.

Выберем теперь ось z так, чтобы она совпадала с вектором T, и в соответствии с этим преобразуем уравнения сопротивления. Они тогда примут форму

$$\left.\begin{aligned} X&=R_1u+S_3v+S_2w-Tv,\\ Y&=S_3u+R_2v+S_1w+Tu,\\ Z&=S_2u+S_1v+R_3w. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

[2] См. Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, § 154.

Из этих уравнений следует, что мы можем рассматривать электродвижущую напряженность как равнодействующую двух сил, из которых одна зависит только от коэффициентов R и S, а вторая — только от T. Часть, зависящая от R и S, связана с током таким же образом, как перпендикуляр к плоскости, касающейся эллипсоида, связан с радиус-вектором, проведенным в точку касания. Другая часть, зависящая от T, равна по величине произведению T на слагающую тока, перпендикулярную к оси T, и направлена перпендикулярно к T и к направлению этого тока, совпадая по направлению с тем, в котором лежала бы перпендикулярная слагающая тока, если ее повернуть на 90° в положительном направлении вокруг оси T.

Если мы рассматриваем ток и T как векторы, то часть электродвижущей напряженности, обусловленная T, есть векторная часть произведения $T\times$ток.

Коэффициент T может быть назван Вращательным коэффициентом. У нас есть основания полагать, что этот коэффициент не существует ни в одном из известных веществ. Если где-либо этот коэффициент и мог бы быть обнаружен, то в магнитах, имеющих поляризацию в одном направлении, вероятно, вызванную явлением вращения в этом веществе.

304. Предполагая теперь, что вращательный коэффициент отсутствует, мы покажем, как можно распространить теорему Томсона, изложенную в п. 100 а—100 д, чтобы доказать, что тепло, производимое токами в рассматриваемой системе за данное время, есть единственный минимум.

Для упрощения алгебраических расчетов выберем оси координат так, чтобы свести выражение (9), а следовательно, и выражение (10) к трем слагаемым. Рассмотрим теперь общее характеристическое уравнение (16), которое тогда сводится к виду

$$r_1\frac{d^2V}{dx^2}+r_2\frac{d^2V}{dy^2}+r_3\frac{d^2V}{dz^2}=0. \tag{24}$$

Обозначим также через a, b, c три функции от x, y, z, удовлетворяющих условию

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0, \tag{25}$$

и положим

$$a=-r_1\frac{dV}{dx}+u,\qquad b=-r_2\frac{dV}{dy}+v,\qquad c=-r_3\frac{dV}{dz}+w. \tag{26}$$

Наконец, пусть тройной интеграл

$$W=\iiint(R_1a^2+R_2b^2+R_3c^2)\,dx\,dy\,dz \tag{27}$$

распространен по объему, ограниченному, как это было сделано в п. 100 а, а именно на некоторых участках границы величина V является постоянной или же задана нормальная составляющая вектора a, b, c, причем предыдущее условие сопровождается дополнительным ограничением, что интеграл от этой составляющей по граничной поверхности должен обращаться в нуль. Тогда интеграл W принимает минимальное значение, если $u=0$, $v=0$, $w=0$.

Действительно, в этом случае $r_1R_1=1$, $r_2R_2=1$, $r_3R_3=1$, и поэтому с учетом (26)

$$W=\iiint\left[r_1\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+r_2\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+r_3\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz+$$

$$+\iiint(R_1u^2+R_2v^2+R_3w^2)\,dx\,dy\,dz-2\iiint\left(u\frac{dV}{dx}+v\frac{dV}{dy}+w\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy\,dz. \quad (28)$$

Но, поскольку

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0, \quad (29)$$

третье слагаемое исчезает в силу условий на границах.

Таким образом, первое слагаемое в сумме (28) представляет собой единственное минимальное значение величины W.

305. Поскольку это предположение очень важно для теории электричества, может оказаться полезным следующее доказательство самого общего случая в форме, свободной от аналитических операций.

Рассмотрим распространение электричества через проводник любой формы, однородный или неоднородный.

Тогда мы знаем, что:

(1) Если мы проведем линию вдоль пути и в направлении электрического тока, эта линия должна проходить от мест с высоким потенциалом к местам с низким потенциалом.

(2) Если потенциал в каждой точке системы изменится в заданном постоянном отношении, ток изменится в том же самом отношении в соответствии с Законом Ома.

(3) Если определенное распределение потенциала вызывает определенное распределение токов, а другое распределение потенциала вызывает другое распределение токов, то третье распределение, в котором потенциал есть сумма или разность потенциалов, отвечающих первому и второму распределениям, вызовет третье распределение токов, такое, что полный ток, проходящий через данную конечную поверхность, в третьем случае равен сумме или разности токов, проходящих через нее в первом и втором случаях. Ибо по Закону Ома добавочный ток, вызванный изменением потенциалов, не зависит от начального тока, вызванного начальным распределением потенциалов.

(4) Если потенциал имеет одно и то же значение на всей замкнутой поверхности и если внутри нее нет электродов или внутренних электродвижущих сил, то внутри замкнутой поверхности не будет токов и потенциал в любой точке внутри нее будет равен потенциалу на поверхности.

Если внутри замкнутой поверхности имеются токи, они либо должны образовывать замкнутые кривые, либо должны начинаться и оканчиваться внутри замкнутой поверхности или на самой поверхности.

Но поскольку ток должен проходить от мест с высоким к местам с низким потенциалом, он не может течь по замкнутой кривой.

Поскольку внутри поверхности нет электродов, ток не может начинаться или заканчиваться внутри замкнутой поверхности, а поскольку потенциал во всех точках поверхности один и тот же, не может существовать ток вдоль линий, проходящих от одной точки поверхности к другой.

Таким образом, внутри поверхности нет токов и поэтому не может быть разности потенциалов, потому что такая разность вызвала бы ток, и, следовательно, потенциал внутри замкнутой поверхности всюду такой же, как на поверхности.

(5) Если через любую часть замкнутой поверхности не проходит электрического тока и если внутри поверхности нет электродов или внутренних электродвижущих сил, то внутри поверхности не будет токов и потенциал будет однороден.

Мы убедились в том, что токи не могут образовывать замкнутых кривых, а также начинаться или заканчиваться внутри поверхности, и поскольку, по предположению, токи не проходят через поверхность, они не могут существовать и потенциал есть постоянная величина.

(6) Если потенциал не меняется на некоторой части замкнутой поверхности, а через остальную часть этой поверхности не текут токи, то потенциал внутри поверхности будет постоянным по тем же причинам.

(7) Если на одной части поверхности тела известен потенциал в каждой точке, а на остальной части поверхности известен ток, протекающий через поверхность в каждой точке, то для точек внутри тела может существовать только одно распределение потенциала.

Действительно, если бы в каждой точке внутри тела существовали два различных значения потенциала, пускай они равнялись бы V_1 в первом случае и V_2 во втором случае, и представим себе третий случай, в котором потенциал каждой точки тела равен превышению потенциала в первом случае над потенциалом во втором случае.

Тогда на той части поверхности, для которой потенциал известен, в третьем случае он будет равен нулю, и для той части поверхности, где известны токи, в третьем случае они также будут равны нулю, так что, по (6), потенциал всюду внутри поверхности будет равен нулю, т. е. нет превышения ни V_1 над V_2, ни наоборот. Таким образом, имеется только одно возможное распределение потенциалов. Это предложение верно в случаях, когда тело ограничено как одной, так и несколькими замкнутыми поверхностями.

О приближенном вычислении сопротивления проводника заданной формы

306. У рассматриваемого здесь проводника поверхность разделена на три части На одной из этих частей потенциал имеет некоторое постоянное значение. На второй части потенциал имеет постоянное значение, отличное от первого. Вся остальная поверхность непроницаема для электричества. Мы можем предположить, что условия, налагаемые на первую и вторую части поверхности, будут выполнены, если приложить к проводнику два электрода из совершенно проводящего материала, а условие, налагаемое на остальную часть поверхности, можно выполнить, покрыв ее совершенно непроводящим материалом.

При этих условиях ток в каждой части проводника просто пропорционален разности между потенциалами электродов. Если назвать эту разность электродвижущей силой, то полный ток от одного электрода к другому равен произведению электродвижущей силы на проводимость проводника как целого, а сопротивление проводника есть величина, обратная проводимости.

Только когда проводник находится примерно в таких условиях, которые определены выше, можно говорить, что он, как целое, обладает сопротивлением или проводимостью. Катушка сопротивления, состоящая из тонкой проволоки, концы которой выведены на большие медные массы, приблизительно удовлетворяет этим условиям, потому что потенциал внутри массивного электрода является почти постоянным, и любые разности потенциалов в разных точках одного и того же электрода могут считаться пренебрежимо малыми в сравнении с разностью потенциалов двух электродов.

Очень полезный метод для вычисления сопротивления таких проводников был предложен, насколько я знаю, впервые лордом Рэлеем в работе «О теории резонанса» [3].

Он основан на следующих соображениях.

Если изменить удельное сопротивление любой части проводника, не меняя удельное сопротивление остальных частей, то сопротивление всего проводника увеличится, если сопротивление этой части возросло, и уменьшится, если сопротивление этой части уменьшилось.

Этот принцип может рассматриваться как само собой разумеющийся, но легко можно показать, что величина выражения для сопротивления системы проводников между двумя точками, выбранными за электроды, возрастает, по мере того как возрастает сопротивление каждого члена системы.

Отсюда следует, что если в веществе проводника проведена поверхность любой формы и если мы затем предположим, что эта поверхность представляет собой бесконечно тонкий слой идеально проводящего вещества, то сопротивление проводника как целого уменьшится, если только эта поверхность не является одной из эквипотенциальных поверхностей в естественном состоянии проводника, а в этом случае ничего не изменится от превращения этой поверхности в идеальный проводник, потому что эта поверхность и так уже находится в электрическом равновесии.

Следовательно, если мы проведем внутри проводника ряд поверхностей, из которых первая совпадает с первым электродом, а последняя — со вторым, а промежуточные поверхности ограничены непроводящей поверхностью и не пересекают одна другую, и если мы предположим, что каждая из этих поверхностей представляет собой бесконечно тонкий слой идеально проводящего вещества, мы получим систему, сопротивление которой во всяком случае не превышает сопротивление первоначального проводника, причем равенство имеет место только тогда, когда выбранные нами поверхности являются естественными эквипотенциальными поверхностями.

Вычисление сопротивления такой искусственной системы представляет собой дело гораздо менее сложное, чем первоначальная задача. Действительно, сопротивление целого есть сумма сопротивлений всех слоев, заключенных между последовательными поверхностями, и сопротивление каждого слоя может быть найдено так:

Пусть dS — элемент поверхности слоя, ν — толщина слоя в направлении, перпендикулярном к этому элементу, ρ — удельное сопротивление, E — разность потенциалов между двумя идеально проводящими поверхностями, dC — ток через dS, тогда

$$dC = E\frac{1}{\rho\nu}dS, \tag{1}$$

[3] *Phil. Trans.*, 1871, p. 77. См. п. 102а.

а полный ток через слой равен

$$C=E\iint \frac{1}{\rho\nu}\,dS; \tag{2}$$

интегрирование распространяется на весь слой, ограниченный непроводящей поверхностью проводника.

Отсюда проводимость слоя равна

$$\frac{C}{E}=\iint \frac{1}{\rho\nu}\,dS, \tag{3}$$

а сопротивление слоя есть величина, обратная этой.

Если слой ограничен двумя поверхностями, на которых значения функции F равны соответственно F и $F+dF$, то

$$\frac{dF}{\nu}=\nabla F=\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{4}$$

и сопротивление слоя равно

$$\frac{dF}{\iint \frac{1}{\rho}\nabla F\,dS}. \tag{5}$$

Для того чтобы найти сопротивление всего искусственного проводника, нам нужно только проинтегрировать по F, и мы найдем

$$R_1=\int \frac{dF}{\iint \frac{1}{\rho}\nabla F\,dS}. \tag{6}$$

Сопротивление R проводника в его естественном состоянии будет больше, чем полученное таким способом значение, если только все поверхности, которые мы выбрали, не являются естественными эквипотенциальными поверхностями. Кроме того, поскольку истинное значение R есть абсолютный максимум значений R_1, который может быть таким способом получен, небольшие отклонения выбранных поверхностей от истинных эквипотенциальных поверхностей приведут к ошибке в значении R, которая является относительно малой.

Очевидно, что этот метод, определяющий нижнюю границу величины сопротивления, является совершенно общим и может быть применен к проводникам любой формы даже в том случае, если удельное сопротивление ρ произвольным образом меняется внутри проводника.

Наиболее знакомый пример — обычный метод определения сопротивления прямого провода переменного сечения. В этом случае выбранные поверхности являются плоскостями, перпендикулярными к оси проволоки, торцы слоев параллельны и сопротивление слоя, имеющего сечение S и толщину ds, равно

$$dR_1=\frac{\rho\,ds}{S}, \tag{7}$$

а сопротивление всего провода длиной s равно

$$R_1=\int \frac{\rho\,ds}{S}, \tag{8}$$

где S есть поперечное сечение, зависящее от s.

Этот метод дает результаты, очень близкие к истине, для проводов с медленно меняющимся по длине сечением. Но в действительности он дает только нижнюю границу, потому что истинное сопротивление всегда больше, за исключением случаев, когда сечение совершенно однородно.

307. Чтобы найти верхнюю границу сопротивления, предположим, что в проводнике проведена некоторая поверхность, которая сделана непроницаемой для электричества. Это должно увеличить сопротивление проводника, если только эта поверхность не является одной из естественных поверхностей тока. С помощью двух систем поверхностей мы можем создать набор трубок, которые будут полностью регулировать ток, и это приведет к тому (если это вообще к чему-нибудь приведет), что эта система непроницаемых поверхностей должна будет сделать сопротивление больше его естественного значения.

Сопротивление каждой из трубок может быть вычислено с помощью метода, уже приведенного для тонких проводов, и сопротивление всего проводника равно обратной величине от суммы обратных сопротивлений всех трубок. Найденное таким образом сопротивление больше, чем естественное сопротивление, за исключением того случая, когда трубки следуют естественным линиям тока.

В уже рассмотренном случае, когда проводник представляет собой вытянутое тело вращения, будем измерять x вдоль оси и обозначим через b радиус сечения в каждой точке. Пусть один набор непроницаемых поверхностей состоит из плоскостей, проходящих через ось, для каждой из которых значение φ опостоянно, и пусть другой набор состоит из поверхностей вращения, для которых

$$y^2=\psi b^2, \tag{9}$$

где ψ есть число в промежутке между 0 и 1.

Рассмотрим часть одной из трубок, ограниченную поверхностями φ и $\varphi+d\varphi$, ψ и $\psi+d\psi$, x и $x+dx$.

Сечение трубки, выбранное перпендикулярно оси, равно

$$y\,dy\,d\varphi=(b^2/2)d\psi\,d\varphi. \tag{10}$$

Если обозначить через θ угол, который трубка составляет с осью, то

$$\operatorname{tg}\theta=\psi^{1/2}(db/dx). \tag{11}$$

Истинная длина элемента трубки равна $dx\sec\theta$, а истинное сечение равно $(b^2/2)d\psi\,d\varphi\cos\theta$, так что сопротивление этого элемента равно

$$2\rho\frac{dx}{b^2\,d\psi\,d\varphi}\sec^2\theta=2\rho\frac{dx}{b^2\,d\psi\,d\varphi}\left[1+\psi\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Пусть

$$A=\int\frac{\rho}{b^2}\,dx, \qquad B=\int\frac{\rho}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2dx, \tag{13}$$

где интегрирование распространяется на всю длину x проводника. Тогда сопротивление трубки $d\psi\;d\varphi$ равно $\frac{2}{d\psi d\varphi}(A+\psi B)$, а ее проводимость есть $\frac{d\psi\,d\varphi}{2(A+\psi B)}$.

Чтобы найти проводимость всего проводника, которая равна сумме проводимостей отдельных трубок, мы должны проинтегрировать это выражение в пределах от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$ и от $\psi=0$ до $\psi=1$. В результате

$$\frac{1}{R'}=\frac{\pi}{B}\ln\left(1+\frac{B}{A}\right). \tag{14}$$

Эта величина может быть меньше, но не может быть больше, чем истинная проводимость проводника.

В случае, когда db/dx всегда является малой величиной, отношение B/A также будет малым, и мы можем разложить выражение для проводимости таким образом:

$$\frac{1}{R'}=\frac{\pi}{A}\left(1-\frac{1}{2}\frac{B}{A}+\frac{1}{3}\frac{B^2}{A^2}-\frac{1}{4}\frac{B^3}{A^3}+\ \text{и т. д.}\right). \tag{15}$$

Первый член этого разложения π/A есть та величина, которую мы получили бы предыдущим методом как верхнюю границу проводимости. Таким образом, истинная проводимость оказывается меньше первого члена, но больше всего ряда. Верхнее значение сопротивления есть величина, обратная этой, т. е.

$$R'=\frac{A}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\frac{B}{A}-\frac{1}{12}\frac{B^2}{A^2}+\frac{1}{24}\frac{B^3}{A^3}-\ \text{и т. д.}\right). \tag{16}$$

Если, кроме предположения о том, что ток направляется поверхностями φ и ψ, мы бы предположили, что ток через каждую трубку пропорционален $d\psi\, d\varphi$, мы бы получили следующее выражение для величины сопротивления при этом добавочном ограничении:

$$R''=\frac{1}{\pi}\left(A+\frac{1}{2}B\right), \tag{17}$$

что очевидно превышает предыдущее значение, как это и должно быть ввиду наложенного добавочного предположения. В работе лорда Рэлея [4] сделано именно такое предположение, и приведенная там верхняя граница для сопротивления имеет значение (17), что несколько превышает величину, полученную нами в (16).

308. Мы теперь применим тот же метод, для того чтобы найти поправку, которую следует внести на длину цилиндрического проводника радиуса a, когда его конец находится в металлическом контакте с массивным электродом, который можно предполагать сделанным из другого металла.

Для нижней границы сопротивления мы предположим, что между концом цилиндра и массивным электродом помещен бесконечно тонкий диск из идеально проводящего вещества, так что конец цилиндра всюду имеет один и тот же потенциал. Тогда потенциал внутри цилиндра будет зависеть только от его длины, и если мы предполагаем, что поверхность электрода там, где она встречается с цилиндром, является приблизительно плоской и что все размеры электрода велики в сравнении с диаметром цилиндра, то распределение потенциала будет таким, как у проводника, имеющего форму диска и помещенного в бесконечную среду (см. п. 151, 177).

Если E — разность между потенциалом диска и потенциалом удаленных частей электрода, C — ток, выходящий с поверхности диска в электрод, и ρ' — удельное сопротивление электрода и если Q — количество электричества на диске, которое мы предполагаем распределенным как в п. 151, то легко видеть, что интег-

[4] Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, vol. II, p. 171.

рал от электродвижущей напряженности по диску равен

$$\rho' C = \frac{1}{2} 4\pi Q = 2\pi \frac{aE}{(\pi/2)}, \text{ в силу п. 151},$$
$$= 4aE. \tag{18}$$

Таким образом, если длина провода от заданной точки до электрода равна L и его удельное сопротивление равно ρ, то сопротивление от этой точки до любой точки электрода, не близкой к месту соединения, выражается формулой $R = \rho \frac{L}{\pi a^2} + \frac{\rho'}{4a}$, и это можно записать так:

$$R = \frac{\rho}{\pi a^2}\left(L + \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{\pi a}{4}\right), \tag{19}$$

где второй член в скобках дает величину, которую нужно добавить к длине цилиндра при вычислении его сопротивления, и это, конечно, слишком малая поправка.

Чтобы понять природу допускаемой, возможно, ошибки, мы можем заметить, что в то время как мы считали ток в проводе по направлению к диску однородным по сечению, ток от диска к электроду не является однородным, но в любой точке обратно пропорционален (п. 151) минимальной хорде, проведенной через эту точку. В действительности ток через диск не будет однородным, но он и не будет так сильно меняться от точки к точке, как в этом предполагаемом случае. Потенциал диска в действительности не будет однородным, но будет падать от середины к краям.

309. Мы теперь определим величину, превышающую истинное сопротивление, наложив требование, чтобы ток через диск был однороден в каждой точке. Мы можем предполагать, что электродвижущие силы, вводимые для этого, действуют перпендикулярно поверхности диска.

Сопротивление самой проволоки будет таким же, как и раньше, но в электроде скорость выделения тепла будет равна поверхностному интегралу от произведения тока на потенциал. Значение тока в любой точке равно $C/(\pi a^2)$, а потенциал будет такой же, как у наэлектризованной поверхности с плотностью заряда σ, где

$$2\pi\sigma = C\rho'/(\pi a^2), \tag{20}$$

а ρ' — удельное сопротивление.

Следовательно, нам нужно определить потенциальную энергию электризации диска с однородной поверхностной плотностью σ.

Потенциал [5] на краю диска с однородной плотностью σ легко определяется и равен $4a\sigma$. Работа, совершаемая при добавлении полоски шириной da вдоль окружности диска, равна $2\pi a\sigma da \cdot 4a\sigma$, а полная потенциальная энергия диска есть интеграл от этой величины,

$$\text{или } P = (8\pi/3)a^3\sigma^2. \tag{21}$$

При прохождении электрического тока скорость, с которой совершается работа в электроде с сопротивлением R', равна C^2R'. Но, согласно общему уравне-

[5] См. работу профессора Кэйли (Cayley), *London, Math. Soc. Proc.*, VI, p. 38.

нию, определяющему процесс прохождения тока, величина тока через диск на единицу площади записывается в виде $-(1/\rho')(dV/d\nu)$ или $(2\pi/\rho')\sigma$.

Если V — потенциал на диске, а ds — элемент его поверхности, то скорость совершения работы равна $[C/(\pi a^2)]\int V ds$,

$$=\frac{2C}{\pi a^2}\frac{P}{\sigma}, \text{ поскольку } P=\frac{1}{2}\int V\sigma\, ds,$$

$$=\frac{4\pi}{\rho'}P \quad \text{(по формуле (20)).}$$

Таким образом, мы получаем

$$C^2R'=(4\pi/\rho')P, \tag{22}$$

откуда с учетом (20) и (21)

$$R'=8\rho'/(3\pi^2 a),$$

и поправка, которую нужно добавить к длине цилиндра, равна

$$(\rho'/\rho)(8/3\pi)a,$$

причем это значение поправки превышает истинное значение. Таким образом, истинная поправка, которую нужно добавить к длине, равна $(\rho'/\rho)an$, где n — число, лежащее между $\pi/4$ и $8/3\pi$, или между 0,785 и 0,849.

Лорд Рэлей[6] во втором приближении уменьшил верхний предел для n до 0,8282.

ГЛАВА IX

ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

Об условиях, которые должны выполняться на поверхности раздела между двумя проводящими средами

310. Имеются два условия, которым всегда должно удовлетворять распределение токов: условие, что потенциал должен быть непрерывен, и условие «непрерывности» электрических токов.

На поверхности раздела между двумя средами первое из этих условий требует, чтобы потенциалы в двух точках, расположенных по разные стороны поверхности, но бесконечно близко друг от друга, были равны. Подразумевается, что потенциалы должны измеряться электрометром, приведенным в соединение с данной точкой посредством электрода, который изготовлен из данного металла. Если

---

[6] *Phil. Mag., Nov.*, 1872, p. 344. В дальнейшем лорд Рэлей получил для верхнего предела значение 0,8242. См. *London Math. Soc. Proc.*, VII, p. 74; также *Theory of Sound*, vol. II, Appendix A, p. 291 (имеется перевод на русский язык: Рэлей «Теория звука». М.: ГИТТЛ, 1955. Т. II. С. 468.— *Примеч. пер.*).