

Поверхности, для которых постоянно α , представляют собой конфокальные параболоиды. При $\alpha = -\infty$ параболоид вырождается в прямую, заканчивающуюся в начале координат.

Значения α , β , γ можно выразить через r , θ , φ — сферические Полярные координаты с началом координат в фокусе и осью θ , совпадающей с осью параболоидов:

$$\alpha = \ln [r^{1/2} \cos (\theta/2)], \quad \beta = \varphi, \quad \gamma = \ln [r^{1/2} \sin (\theta/2)]. \quad (54)$$

Случай, когда потенциал равен α , можно сравнить с пространственной зональной гармоникой $r^i Q_i$. Оба потенциала удовлетворяют уравнению Лапласа и являются однородными функциями от x , y , z , но в случае параболоида на оси имеется разрыв, так как α изменяется при замене θ на $\theta + 2\pi$.

Поверхностная плотность заряда на заряженном параболоиде в безграничном поле (в том числе на полубесконечной прямой) обратно пропорциональна квадратному корню из расстояния от фокуса, или, в случае прямой, расстояния от ее конца.

ГЛАВА XI

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ИНВЕРСИЯ

155. Мы уже показали, что для проводящей сферы, находящейся под действием заданного распределения заряда, можно найти распределение заряда на ее поверхности методом сферических гармоник.

Для этого нужно разложить потенциал воздействующей системы в ряд по пространственным гармоникам положительной степени с центром в начале координат, после чего находится соответствующий ряд пространственных гармоник отрицательной степени, описывающий потенциал, обусловленный распределением электричества на сфере.

С помощью этого весьма мощного метода анализа Пуассон нашел распределение электричества на сфере под влиянием заданной электрической системы и решил даже более сложную задачу нахождения распределения электричества на двух проводящих сферах, влияющих друг на друга. Эти исследования были существенно продолжены Плана и другими, подтвердившими точность расчетов Пуассона.

Применяя этот метод к наиболее простому случаю сферы, находящейся под действием единичного точечного заряда, мы должны разложить потенциал точечного заряда в ряд по пространственным гармоникам и найти второй ряд пространственных гармоник, описывающий потенциал вне сферы, создаваемый электризацией сферы.

По-видимому, никто из этих математиков не обнаружил, что этот второй ряд дает выражение для потенциала, создаваемого некоторым воображаемым точечным зарядом, который не существует физически как точечный заряд, но может быть назван электрическим изображением, потому что во внешних точках дейст-

вие поверхности совпадает с действием, которое производил бы воображаемый точечный заряд, если бы эта поверхность была удалена.

Это открытие как бы приберегалось для сэра У. Томсона, развившего его в мощный метод решения электрических задач, допускающих в то же время представление в элементарной геометрической форме.

Его первоначальные исследования, содержащиеся в *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1848, изложены в духе обычной теории действия на расстоянии и

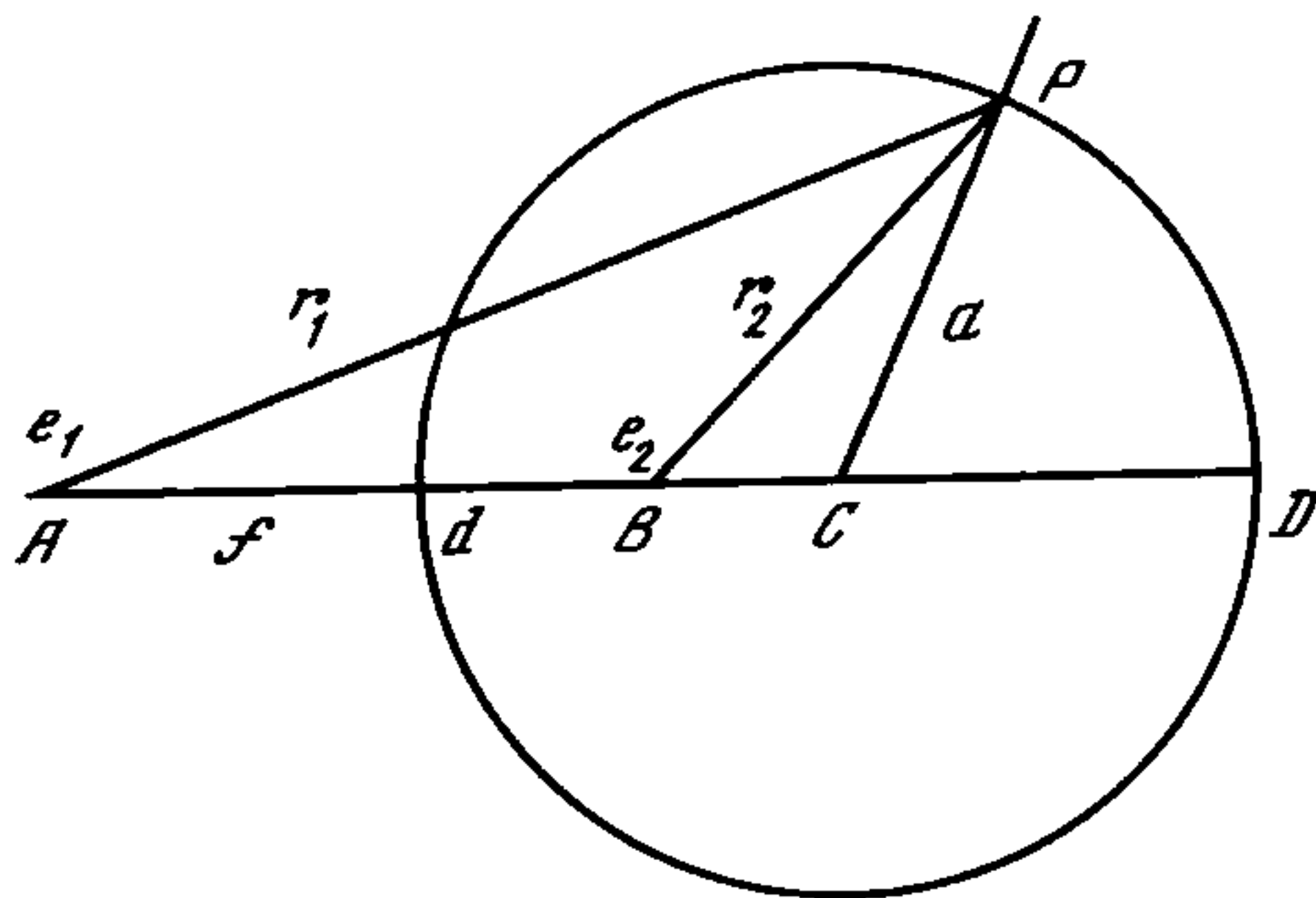


Рис. 7

совершенно не используют метода потенциалов и общих теорем главы IV, хотя сами результаты, вероятно, были открыты этими методами. Но я, вместо того чтобы следовать методу автора, буду свободно пользоваться идеей потенциала и эквипотенциальных поверхностей всюду, где это способствует ясности изложения.

Теория электрических изображений

156. Пусть A и B на рис. 7 изображают две точки в однородной бесконечной диэлектрической среде. Пусть заряды в точках A и B равны соответственно e_1 и e_2 . Пусть далее P — произвольная точка пространства, расстояния которой до A и B равны соответственно r_1 и r_2 . Тогда потенциал в точке P равен

$$V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}. \quad (1)$$

Эквипотенциальные поверхности для такого распределения зарядов показаны на рис. I (в конце этого тома) для e_1 и e_2 одного знака и на рис. II для зарядов противоположного знака. Рассмотрим теперь ту поверхность, на которой $V=0$ и которая является единственной сферической поверхностью в системе. Если e_1 и e_2 одного знака, то эта поверхность находится вся в бесконечности, если же знаки зарядов противоположны, то существует плоскость или сферическая поверхность на конечном расстоянии, на которой потенциал равен нулю.

Уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} = 0. \quad (2)$$

Центр ее находится в точке C на продолжении отрезка AB , для которого $AC : BC = e_1^2 : e_2^2$, а радиус сферы равен $AB \frac{e_1 e_2}{e_1^2 - e_2^2}$.

Точки A и B являются инверсными по отношению к этой сфере, т. е. они лежат на одном и том же радиусе, и радиус сферы является средним геометрическим между их расстояниями от ее центра.

Поскольку сферическая поверхность находится под нулевым потенциалом, то если предположить, что она представляет собой тонкую металлическую оболочку, соединенную с землей, не произойдет никакого изменения потенциала ни в одной

точке ни вне, ни внутри сферы, т. е. всюду электрическое действие останется таким же, как от двух точечных зарядов A и B .

Если теперь, сохраняя заземление металлической оболочки, убрать заряд B , то потенциал внутри сферы станет всюду равным нулю, а вне сферы останется неизменным, так как поверхность сферы остается по-прежнему при том же потенциале и не происходит никакого изменения в распределении электричества вне сферы.

Таким образом, при помещении электрического заряда A вне сферического проводника, находящегося под нулевым потенциалом, электрическое действие во всех точках вне сферы точно такое же, как от совместного действия заряда A и другого заряда B внутри сферы, который можно назвать электрическим изображением заряда A .

Таким же способом можно показать, что если B — точечный заряд внутри сферической оболочки, то его действие внутри сферы точно такое, как действие двух зарядов — заряда B и его изображения A .

157. Определение электрического изображения. Электрическим изображением называется точечный заряд или система зарядов, расположенные по одну сторону поверхности, которые на другой стороне этой поверхности вызвали бы такое же электрическое действие, какое в действительности вызывает истинное распределение заряда по поверхности.

В оптике точка или система точек по одну сторону от зеркала или линзы, которые испускали бы такую систему лучей, какая существует в действительности по другую сторону линзы, называется *мнимым* (virtual) изображением.

Электрические изображения соответствуют мнимым изображениям в оптике в том смысле, что они находятся в пространстве по другую сторону поверхности. Но они не соответствуют им ни по своему действительному положению, ни в том отношении, что оптические фокусы имеют лишь приближенный характер.

Не существует *действительных* электрических изображений, т. е. таких воображаемых точечных зарядов, которые создали бы с той же стороны от заряженной поверхности действие, эквивалентное действию заряженной поверхности.

Действительно, если потенциал в какой-либо области пространства равен потенциалу, вызываемому определенным распределением заряда в той же области, то он и должен в действительности создаваться этим распределением заряда, так как заряд в любой точке может быть найден по потенциалу вблизи этой точки с помощью уравнения Пуассона.

Пусть a — радиус сферы, f — расстояние точечного заряда A от центра сферы C , e — заряд в точке A .

Тогда изображением является точка B , расположенная на том же радиусе сферы на расстоянии a^2/f от центра, и заряд изображения равен $-ea/f$ [см. рис. 7].

Мы показали, что это изображение вызовет по другую сторону поверхности такой же эффект, что и истинная электризация поверхности. Определим теперь поверхностную плотность этой электризации в произвольной точке P сферической поверхности. Для этого мы используем теорему Кулона, п. 80, о том, что если R — результирующая сила у поверхности проводника, а σ — поверхностная плотность, то $R=4\pi\sigma$, где R отсчитывается наружу.

Силу R можно рассматривать как результирующую двух сил: отталкивания e/AP^2 , действующего вдоль AP , и притяжения $e(a/f)(1/PB^2)$, действующего вдоль PB .

Разлагая эти силы по направлениям AC и CP , получим, что отталкивание имеет составляющие (ef/AP^3) по AC и (ea/AP^3) по CP , а притяжение — $(ea/f)(1/BP^3) \cdot BC$ по AC и $-e(a^2/f)(1/BP^3)$ по CP .

Но $BP = (a/f) \cdot AP$, а $BC = (a^2/f)$, так что составляющие притяжения можно записать в виде $-ef(1/AP^3)$ по AC и $-e(f^2/a)(1/AP^3)$ по CP .

Составляющие притяжения и отталкивания по AC равны и противоположны по знаку, так что результирующая сила направлена полностью по радиусу CP . Это лишь подтверждает уже доказанное нами утверждение, что сфера является эквипотенциальной поверхностью, т. е. поверхностью к которой сила всегда перпендикулярна.

Составляющая результирующей силы вдоль CP , т. е. нормали к поверхности в ту сторону, где расположен заряд A , равна

$$R = -e \frac{f^2 - a^2}{a} \cdot \frac{1}{AP^3}. \quad (3)$$

Если считать A расположенным внутри сферы, то f меньше a , и силу R следует отсчитывать внутрь. В этом случае

$$R = -e \frac{a^2 - f^2}{a} \cdot \frac{1}{AP^3}. \quad (4)$$

Во всех случаях можно написать

$$R = -e \frac{AD \cdot Ad}{CP} \cdot \frac{1}{AP^3}, \quad (5)$$

где AD и Ad — отрезки любой прямой, проходящей через точку A и пересекающей сферу, а их произведение считается положительным во всех случаях.

158. Отсюда следует, что, согласно теореме Кулона из п. 80, поверхностная плотность в точке P равна

$$\sigma = -e \frac{AD \cdot Ad}{4\pi \cdot CP} \cdot \frac{1}{AP^3}. \quad (6)$$

Плотность электричества в произвольной точке сферы меняется обратно пропорционально кубу расстояния от точки A .

Это поверхностное распределение электричества вместе с точечным зарядом A создает по ту же сторону поверхности, где находится точка A , потенциал, эквивалентный потенциалу заряда e в точке A и его изображения $-ea/f$ в точке B , а по другую сторону поверхности потенциал всюду равен нулю. Поэтому само поверхностное распределение заряда создает со стороны заряда A потенциал, эквивалентный потенциалу изображения $-ea/f$ в точке B , а с противоположной стороны — потенциал, равный, но противоположный по знаку потенциалу заряда e , находящегося в точке A .

Полный заряд на поверхности сферы равен, очевидно, $-ea/f$, так как он эквивалентен изображению в точке B .

Таким образом, мы получили следующие теоремы о действии распределения электричества по сферической поверхности с поверхностной плотностью, обратно пропорциональной кубу расстояния от точки A , находящейся вне или внутри сферы.

Пусть плотность задается уравнением

$$\sigma = C/AP^3, \quad (7)$$

где C — некоторая постоянная, тогда, согласно (6),

$$C = -e (AD \cdot Ad)/(4\pi a). \quad (8)$$

Такое поверхностное распределение действует на каждую точку, отделенную от A поверхностью, как точечный заряд $-e$, т. е. $4\pi aC/(AD \cdot Ad)$, помещенный в точку A .

На каждую точку, находящуюся по ту же сторону от поверхности, что и точка A , действие эквивалентно действию заряда $(4\pi Ca^2)/(f \cdot AD \cdot Ad)$, помещенного в точку B , являющуюся изображением точки A .

Полное количество электричества на сфере равно первой величине, если точка A находится внутри сферы, и второй, если точка A вне сферы.

Эти утверждения были установлены сэром У. Томсоном в его оригинальных геометрических исследованиях, касающихся распределения электричества на сферических проводниках, к которым мы и отсылаем читателя.

159. Если систему с известным распределением электричества поместить вблизи проводящей сферы радиуса a , потенциал которой с помощью заземления поддерживается равным нулю, то будет иметь место суперпозиция электризаций, обусловленная различными частями системы.

Пусть A_1, A_2 и т. д. — точки системы, несущие заряд f_1, f_2 и т. д. — их расстояния от центра сферы, e_1, e_2 и т. д. — заряды в этих точках, тогда изображения этих точек B_1, B_2 и т. д. будут расположены на тех же радиусах, что и сами точки, на расстояниях $a^2/f_1, a^2/f_2$ и т. д. от центра сферы и заряды их будут равны $-e_1 (a/f_1), -e_2 (a/f_2)$ и т. д.

Потенциал вне сферы, создаваемый поверхностной электризацией, будет совпадать с потенциалом, который создала бы система изображений B_1, B_2 и т. д. Поэтому эта система называется электрическим изображением системы A_1, A_2 и т. д.

Если сфера находится не под нулевым потенциалом, а под потенциалом V , то следует добавить равномерное распределение электричества на ее внешней поверхности с поверхностной плотностью $\sigma = V/(4\pi a)$.

Влияние такого распределения во всех точках вне сферы будет такое же, как у точечного заряда Va , помещенного в центре сферы, а во всех точках внутри сферы потенциал просто увеличится на V .

Полный заряд сферы под действием внешней системы точечных зарядов A_1, A_2 и т. д. равен

$$E = Va - e_1 \frac{a}{f_1} - e_2 \frac{a}{f_2} - \dots, \quad (9)$$

откуда можно найти заряд E по потенциалу V или наоборот.

Если система зарядов находится внутри сферической поверхности, то заряд, наводимый на поверхности, равен и противоположен по знаку наводящему заряду, как было нами раньше доказано для любой замкнутой поверхности.

160. Энергия, обусловленная взаимодействием точечного заряда e , находящегося на расстоянии f от центра сферы, большем радиуса сферы a , с распределением заряда по сферической поверхности, созданным под влиянием точечного за-

ряда, и с зарядом сферы равна

$$M = \frac{Ee}{f} - \frac{1}{2} \frac{e^2 a^3}{f^2 (f^2 - a^2)}, \quad (10)$$

V — потенциал, E — заряд сферы.

Сила отталкивания точечного заряда от сферы равна, согласно п. 92,

$$F = ea \left(\frac{V}{f^2} - \frac{ef}{(f^2 - a^2)^2} \right) = \frac{e}{f^2} \left(E - e \frac{a^3 (2f^2 - a^2)}{f (f^2 - a^2)^2} \right). \quad (11)$$

Следовательно, сила взаимодействия точечного заряда со сферой является всегда притягивающей в следующих случаях: 1) когда сфера не изолирована, 2) когда сфера не заряжена, 3) когда точечный заряд расположен очень близко к поверхности сферы.

Для того чтобы имело место отталкивание, потенциал сферы должен быть положителен и больше $ef^3/(f^2 - a^2)^2$; заряд сферы должен быть того же знака, что и e , и больше, чем

$$e \frac{a^3 (2f^2 - a^2)}{f (f^2 - a^2)^2}.$$

Равновесная точка является неустойчивой: при сближении тел появляется притяжение, при удалении — отталкивание.

Если точечный заряд находится внутри сферы, действующая на него сила всегда направлена от центра сферы и равна $e^2 af / (a^2 - f^2)^2$.

Для точечного заряда, расположенного вне сферы, поверхностная плотность заряда в точке сферы, ближайшей к точечному заряду, равна

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ Va - e \frac{a(f+a)}{(f-a)^2} \right\} = \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ E - e \frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2} \right\}, \quad (12)$$

а в самой удаленной точке

$$\sigma_2 = \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ Va - e \frac{a(f-a)}{(f+a)^2} \right\} = \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ E + e \frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2} \right\}. \quad (13)$$

Если величина заряда E сферы заключена в пределах

$$e \frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2} \text{ и } -e \frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2},$$

то электризация сферы отрицательна вблизи точечного заряда и положительна с противоположной стороны. Существует некоторая окружность, разделяющая области с положительной и отрицательной электризацией. Эта окружность является линией равновесия.

При

$$E = ea \left(\frac{1}{\sqrt{f^2 - a^2}} - \frac{1}{f} \right) \quad (14)$$

эквипотенциальная поверхность, пересекающая сферу по линии равновесия, является сферой с центром в месте нахождения точечного заряда и радиусом $\sqrt{f^2 - a^2}$.

Силовые линии и эквипотенциальные поверхности для этого случая показаны на рис. IV в конце этого тома.

Изображения в бесконечной проводящей плоскости

161. Если два точечных заряда A и B , рассматривавшихся в п. 156, равны по величине и противоположны по знаку, то поверхность нулевого потенциала является плоскостью, каждая точка которой находится на равном расстоянии от точек A и B [рис. 8].

Следовательно, если в точке A находится точечный заряд e , а AD — перпендикуляр к плоскости, то, продолжив AD до точки B так, что $DB=AD$, и поместив в точку B заряд $-e$, мы получим изображение точки A , вызывающее во всех точках, расположенных по ту же сторону от плоскости, что и точка A , точно такое же действие, что и действительная электризация плоскости. В самом деле, потенциал обусловленный точками A и B , удовлетворяет на стороне, где находится точка A , условию $\nabla^2 V=0$ во всех точках, кроме точки A , и равен нулю на плоскости, а существует лишь одна функция V , удовлетворяющая этим условиям.

Чтобы найти результирующую силу в точке P плоскости, заметим, что она складывается из двух слагаемых, равных e/AP^2 , причем одно действует вдоль AP , а второе — вдоль PB .

Таким образом, результирующая сила направлена параллельно AB и равна

$$(e/AP^2) \cdot (AB/AP).$$

Итак, сила, отсчитываемая наружу от поверхности в сторону точки A , равна

$$R = -(2e \cdot AD)/AP^3, \quad (15)$$

а плотность заряда в точке P равна

$$\sigma = -(e \cdot AD)/(2\pi \cdot AP^3). \quad (16)$$

Об электрической инверсии

162. Метод электрических изображений непосредственно приводит к методу преобразования, позволяющему для любой электрической задачи, решение которой мы знаем, построить сколько угодно других задач и их решений.

Мы видели, что изображение точки, находящейся на расстоянии r от центра сферы радиуса R , находится на том же самом радиусе на расстоянии r' , таком, что $rr'=R^2$. Таким образом, изображение системы точек, линий, поверхностей получается из исходной системы чисто геометрическим методом, известным под названием метода инверсии и описанного Шалем, (Chasles), Сальмоном (Salmon) и другими математиками.

Если A и B — две точки, A' и B' — их изображения [рис. 9], O — центр инверсии, а R — радиус сферы инверсии, то

$$OA \cdot OA' = R^2 = OB \cdot OB'.$$

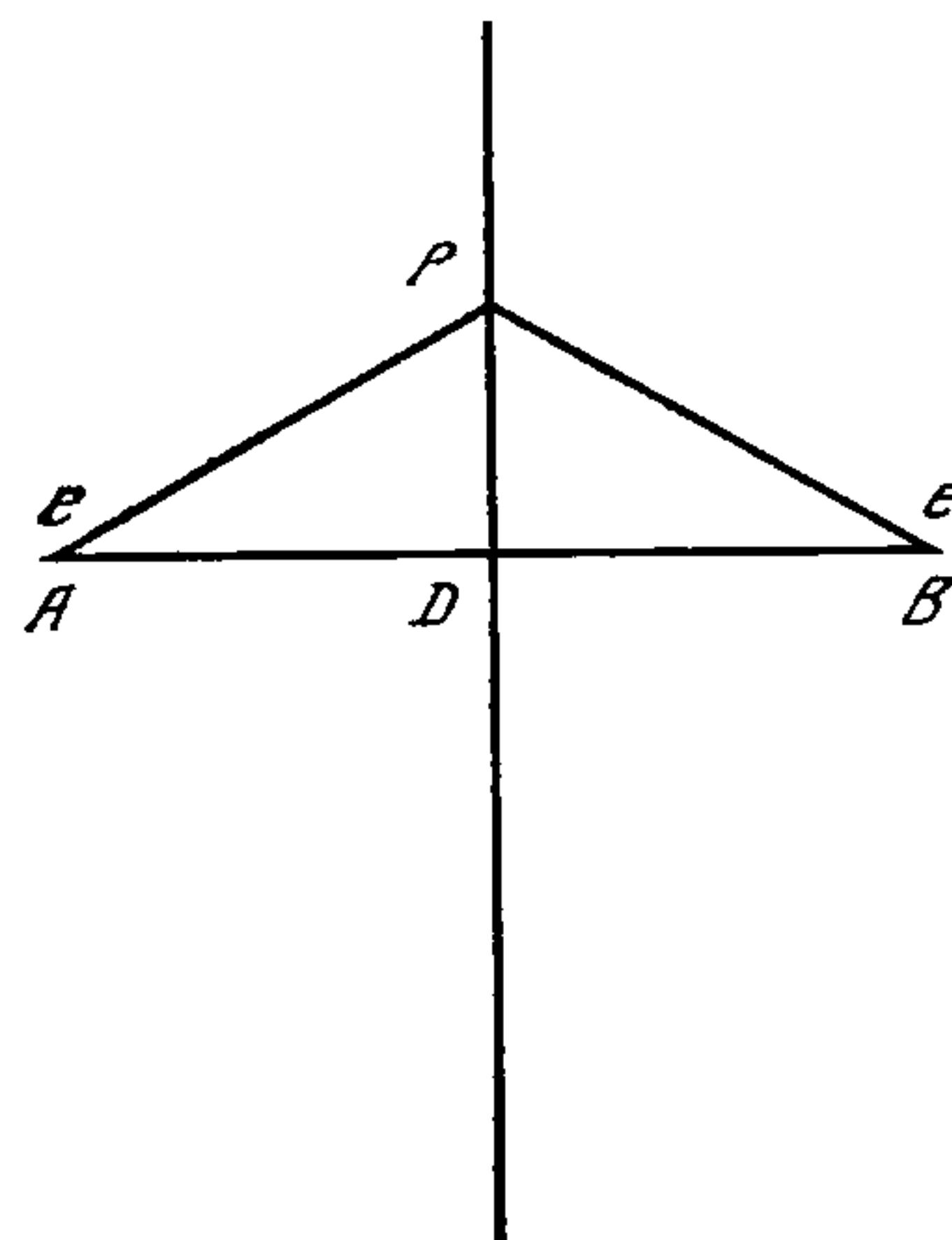


Рис. 8

Следовательно, треугольники OAB и $OB'A'$ подобны и $AB : A'B' = OA : OB' = OB : OA' = OB^2 / OA$.

Если количество электричества e поместить в точку A , то его потенциал в точке B будет $V = e/AB$.

Если в точку A' поместить количество электричества e' , то его потенциал в точке B' будет $V' = e'/A'B'$.

В теории электрических изображений $e : e' = OA : R = R : OA'$, так что

$$V : V' = R : OB, \quad (17)$$

т. е. потенциал в точке B , создаваемый зарядом в точке A , относится к потенциалу в изображении точки B от электрического изображения точки A , как R к OB .

Поскольку это отношение зависит лишь от OB и не зависит от OA , потенциал в точке B от произвольной системы заряженных тел относится к потенциалу в точке B' от изображения этой системы, как R к OB .

Пусть r — расстояние произвольной точки A от центра, r' — расстояние его изображения A' от центра, e — электризация точки A , e' — электризация точки A' ; L, S, K — элементы длины, поверхности и объема у точки A ; L', S', K' — их изображения у точки A' ; $\lambda, \sigma, \rho, \lambda', \sigma', \rho'$ — соответствующие

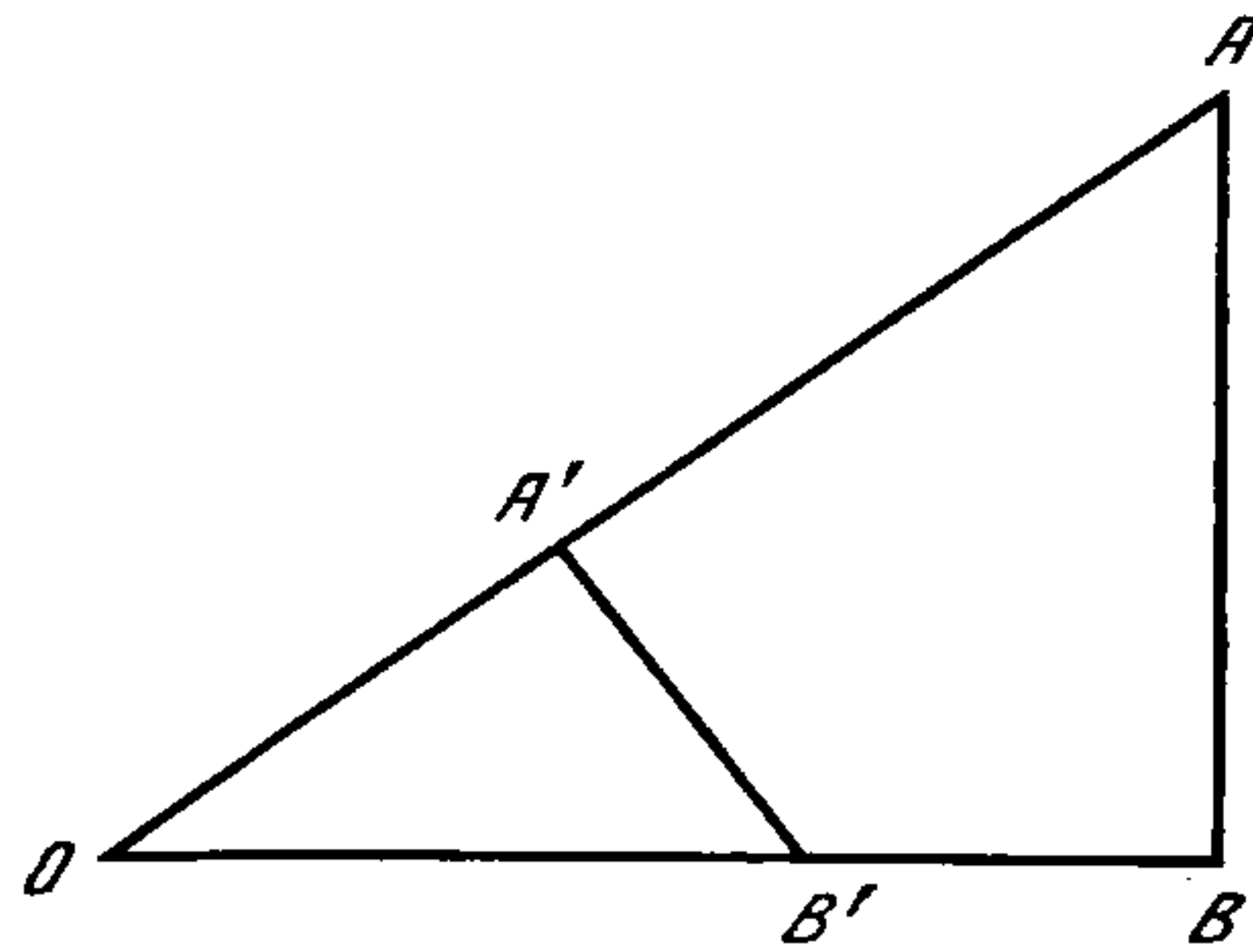


Рис. 9

линейные, поверхностные и объемные плотности электризации в этих двух точках, V — потенциал в точке A , создаваемый исходной системой, а V' — потенциал в точке A' , создаваемый инверсной системой.

Тогда

$$\frac{r'}{r} = \frac{L'}{L} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{r'^2}{R^2}, \quad \frac{S'}{S} = \frac{R^4}{r^4} = \frac{r'^4}{R^4}, \quad \frac{K'}{K} = \frac{R^6}{r^6} = \frac{r'^6}{R^6},$$

$$\frac{e'}{e} = \frac{R}{r} = \frac{r'}{R}, \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{r}{R} = \frac{R}{r'}, \quad \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{R^3}{r'^3}, \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{r^5}{R^5} = \frac{R^5}{r'^5}, \quad (18)^1$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{r}{R} = \frac{R}{r'}.$$

Если в исходной системе некоторая поверхность была поверхностью проводника, так что потенциал на ней был постоянен и равен P , то в преобразованной системе на изображении поверхности будет потенциал PR/r' . Но если поместить в центре инверсии O количество электричества — PR , то потенциал преобразованной поверхности станет равным нулю.

Следовательно, если известно распределение электричества на изолированном проводнике в свободном пространстве, заряженном до потенциала P , то можно с помощью инверсии найти распределение на заземленном проводнике, являющемся изображением исходного проводника, устанавливающееся под влиянием точечного заряда — PR , помещенного в центр инверсии.

¹ См. «Natural Philosophy» Томсона и Тэта, § 515.

163. При исследовании различных случаев инверсии полезны следующие геометрические теоремы.

Каждая сфера переходит при инверсии в сферу, если только она не проходит через центр инверсии. В последнем случае она переходит в плоскость.

Если расстояния центров этих двух сфер от центра инверсии обозначить через a и a' , их радиусы — через α и α' и определить *показатель* (power) сферы по отношению к центру инверсии как произведение отрезков, отсекаемых сферой на линии, проходящей через центр инверсии, то для первой сферы показатель равен $a^2 - \alpha^2$, а для второй — $a'^2 - \alpha'^2$. При этом

$$\frac{a'}{a} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{R^2}{a^2 - \alpha^2} = \frac{a'^2 - \alpha'^2}{R^2}, \quad (19)$$

т. е. отношение расстояний центров первой и второй сферы от центра инверсии равно отношению их радиусов, отношению показателя сферы инверсии к показателю первой сферы и отношению показателя второй сферы к показателю сферы инверсии.

Изображение центра инверсии по отношению к одной из сфер является точкой инверсии центра другой сферы.

В случае, когда инверсеными поверхностями являются плоскость и сфера, перпендикуляр из центра инверсии на плоскость относится к радиусу инверсии как этот радиус относится к диаметру сферы, центр сферы расположен на этом перпендикуляре, а сама сфера проходит через центр инверсии.

Любая окружность инвертируется в окружность, если только она не проходит через центр инверсии. В этом случае она инвертируется в прямую.

Углы между двумя пересекающимися поверхностями или линиями не меняются при инверсии.

Любая окружность, проходящая через некоторую точку и через ее изображение в сфере, пересекает эту сферу под прямыми углами.

Следовательно, любая окружность, проходящая через некоторую точку и пересекающая сферу инверсии под прямыми углами, проходит и через изображение этой точки.

164. Метод инверсии можно применить для определения распределения электричества на заземленной сфере под действием точечного заряда, исходя из однородного распределения на изолированной сфере в отсутствие других тел.

Если точечный заряд находится в точке A , то примем ее за центр инверсии, тогда для сферы радиуса a , центр которой находится на расстоянии f от точки A , инвертированной фигурой будет сфера радиуса a' с центром на расстоянии f' , где

$$\frac{a'}{a} = \frac{f'}{f} = \frac{R^2}{f^2 - a^2}. \quad (20)$$

Центр каждой из этих сфер совпадает с инверсной точкой для A относительно другой сферы, т. е. если C — центр, а B — инверсная точка первой сферы, то C' — инверсная точка, а B' — центр второй сферы.

Пусть теперь e' — количество электричества, сообщенное второй сфере, на которую не действуют внешние силы. Оно распределится равномерно по сфере с поверхностной плотностью

$$\sigma' = e' / (4\pi a'^2). \quad (21)$$

Действие его в любой точке вне сферы точно такое же, как действие заряда e' , помещенного в центре сферы B' .

На самой сферической поверхности и внутри нее потенциал равен постоянной величине

$$P' = e'/a'. \quad (22)$$

Произведем теперь инверсию этой системы. Центр B' переходит в инвертированной системе в инверсную точку B , заряд e' в точке B' переходит в $e'R/f'$ в точке B и во всех точках, отделенных от точки B сферической поверхностью, потенциал равен потенциалу от заряда в точке B .

Потенциал в любой точке P , находящейся на сферической поверхности или по ту же сторону от нее, что и точка B , равен в инвертированной системе $(e'/a') \times (R/AP)$.

Если теперь добавить к этой системе заряд e в точке A , равный

$$e = - (e'/a')R, \quad (23)$$

то потенциал на сферической поверхности и во всех точках, расположенных по ту же сторону от нее, что и точка B , станет равным нулю. Во всех точках, расположенных с той стороны, где находится точка A , потенциал будет равен потенциалу от заряда e в точке A и заряда $e'R/f'$ в точке B .

Но

$$e' (R/f') = -e (a'/f) = -e (a/f), \quad (24)$$

как мы видели раньше для заряда изображения в точке B .

Для нахождения плотности в каждой точке первой поверхности имеем

$$\sigma = \sigma' R^3/AP^3. \quad (25)$$

Подставляя выражение σ' через характеристики первой сферы, получим то же значение, что и в п. 158:

$$\sigma = -e (f^2 - a^2)/(4\pi a \cdot AP^2). \quad (26)$$

О конечных системах последовательных изображений

165. Если две проводящие плоскости пересекаются под углом, являющимся целым делителем двух прямых углов, то получается конечная система изображений, полностью определяющая электризацию.

Действительно, пусть AOB — сечение двух проводящих плоскостей, перпендикулярное линии их пересечения, пусть угол пересечения $AOB = \pi/n$, а P — точечный заряд. Тогда, построив окружность с центром в точке O радиусом OP и найдя точки, являющиеся последовательными изображениями точки P в обеих плоскостях, начиная с изображения в OB , мы найдем изображение Q_1 точки P в OB , изображение P_2 точки Q_1 в OA , изображение Q_3 точки P_2 в OB , изображение P_3 точки Q_3 в OA , изображение Q_2 точки P_3 в OB и так далее. Если бы мы начали с изображения P в AO , то получили бы те же точки в обратной последовательности — Q_2, P_3, Q_3, P_2, Q_1 , если только AOB является целым делителем двух прямых углов [рис. 10].

Заданный точечный заряд и получающиеся через раз изображения P_2, P_3 расположены по окружности на угловом расстоянии $2AOB$ друг от друга, промежуточные изображения Q_1, Q_2, Q_3 находятся на таких же расстояниях друг от друга. Таким образом, если $2AOB$ является целым делителем 2π , то получится конечная система изображений, причем ни одно из них не попадет внутрь угла AOB . Если же AOB не является целым делителем π , то истинное распределение электричества не может быть представлено конечным набором точечных зарядов.

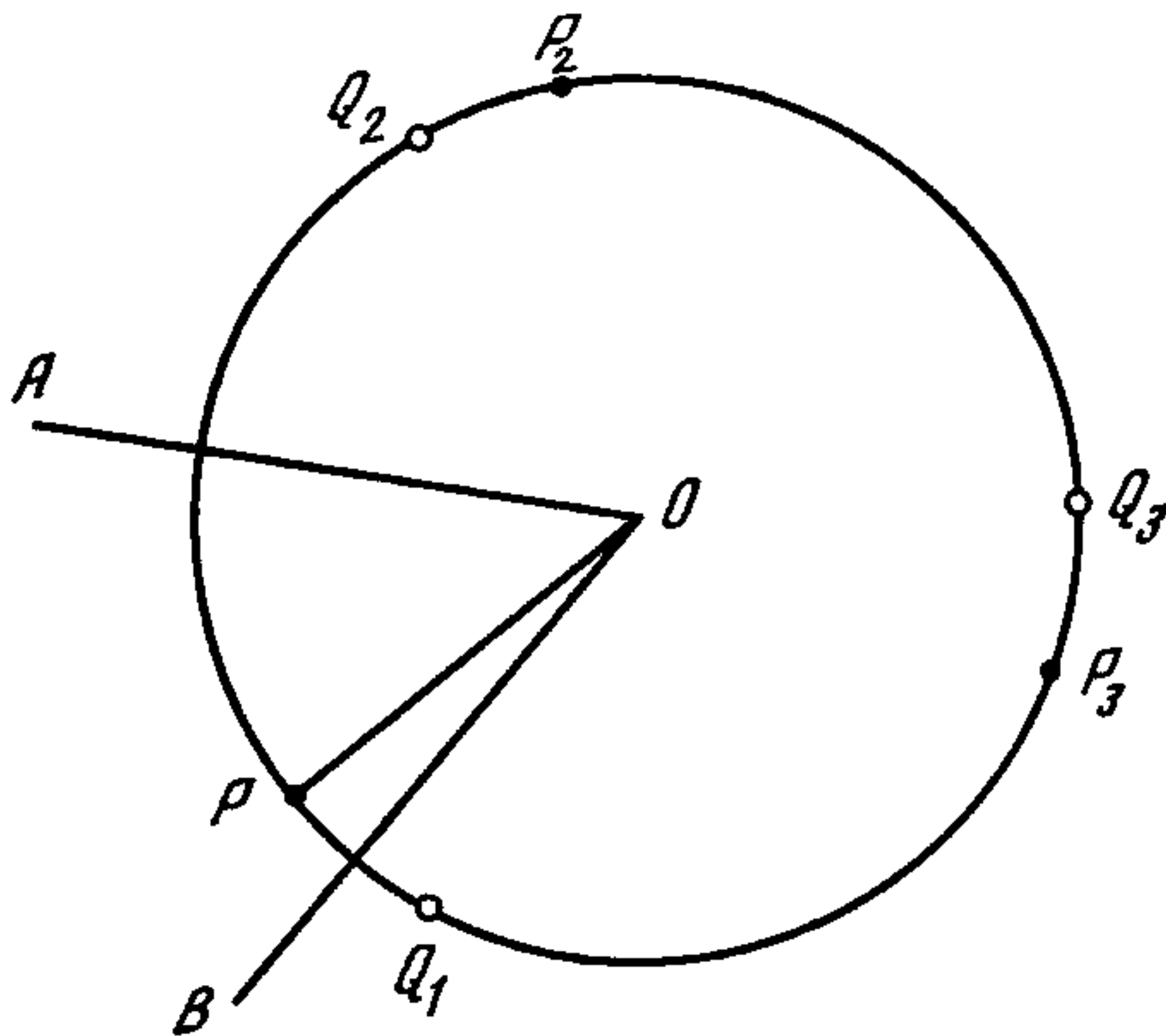


Рис. 10

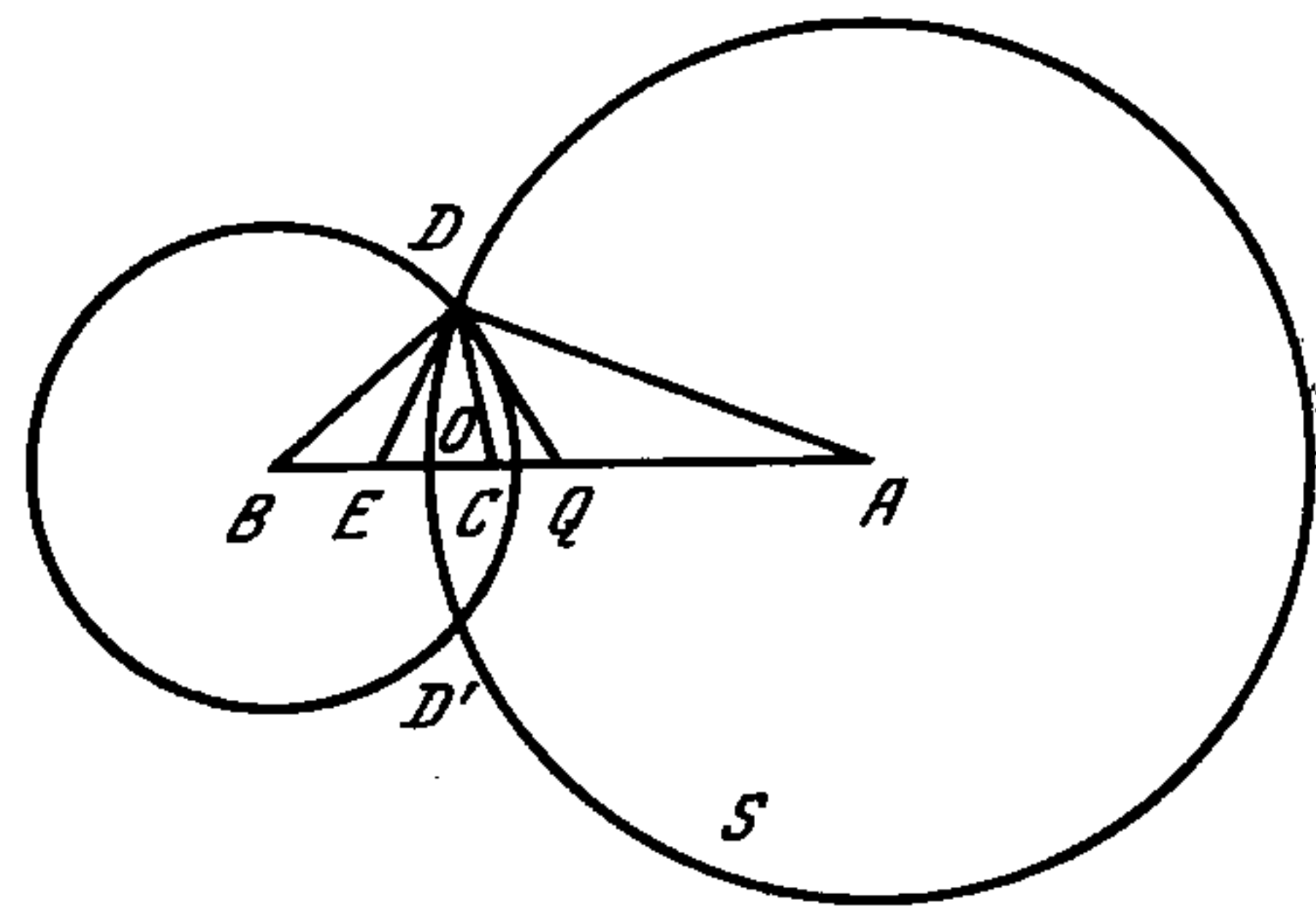


Рис. 11

Если $AOB = \pi/n$, то будет n отрицательных изображений Q_1, Q_2 и т. д., равных по величине и противоположных по знаку заряду P , и $n-1$ положительных изображений P_2, P_3 и т. д., равных P по величине и по знаку.

Угол между последовательными изображениями одинакового знака равен $2\pi/n$. Если каждую из проводящих плоскостей рассмотреть как плоскость симметрии, то видно, что точечный заряд и его положительные и отрицательные изображения расположены симметрично относительно этой плоскости, причем каждому положительному изображению соответствует отрицательное изображение, расположенное на той же нормали и на таком же расстоянии по другую сторону от плоскости.

Если теперь инвертировать систему относительно произвольной точки, то обе плоскости перейдут в две сферы или же в сферу и плоскость, пересекающиеся под углом π/n , причем точка P , инверсная к точке P , расположена внутри этого угла.

Последовательные изображения расположены на окружности, проходящей через точку P и пересекающей обе сферы под прямыми углами.

Чтобы найти положение этих изображений, можно использовать тот факт, что точка и ее изображение в сфере расположены на одном и том же радиусе сферы, и построить последовательно хорды окружности, на которой лежат изображения, начиная с точки P и проводя их попеременно через центры обеих сфер.

Для определения заряда, который следует приписать каждому изображению, выберем произвольную точку на окружности пересечения, тогда заряд каждого изображения будет пропорционален его расстоянию до этой точки, а знак будет

положительным или отрицательным в зависимости от того, принадлежит ли точка изображения к первой последовательности или ко второй.

166. Итак, мы нашли расположение изображений для любого объема, ограниченного проводником, состоящим из двух сферических поверхностей, встречающихся под углом π/n , поддерживаемого под нулевым потенциалом и находящегося под действием точечного заряда.

Методом инверсии мы можем рассмотреть случай расположенного в свободном пространстве проводника, состоящего из двух сферических сегментов, пересекающихся под входящим углом π/n , и находящегося под единичным потенциалом.

Для этого произведем инверсию системы плоскостей по отношению к точке P и изменим знаки зарядов. Окружность, на которой раньше располагались заряды, переходит в прямую, проходящую через центры сфер.

Пусть рис. 11 представляет собой сечение, проходящее через линию центров AB , а D и D' — точки пересечения общей окружности обеих сфер с плоскостью чертежа. Тогда для нахождения последовательных изображений построим радиус DA первой сферы и прямые DC , DE и т. д., образующие углы π/n , $2\pi/n$ и т. д. с DA . В точках A , C , E и т. д., в которых эти прямые пересекают линию центров, расположены положительные изображения, а заряд в каждой точке дается ее расстоянием от точки D . Последнее из этих изображений находится в центре второй окружности.

Для нахождения отрицательных изображений проведем прямые DQ , DR и т. д., образующие углы π/n , $2\pi/n$ и т. д. с линией центров. Пересечения этих прямых с линией центров дают положения отрицательных изображений, а величина заряда в них дается их расстоянием до точки D , так как, если E и Q — инверсные точки для сферы A , то углы ADE , AQD равны между собой.

Поверхностная плотность в произвольной точке любой из сфер равна сумме поверхностных плотностей, обусловленных системой изображений. Так, например, поверхностная плотность в произвольной точке S сферы с центром в A равна

$$\sigma = \frac{1}{4\pi \cdot DA} \left\{ 1 + (AD^2 - AB^2) \frac{DB}{BS^3} + (AD^2 - AC^2) \frac{DC}{CS^3} + \dots \right\},$$

где A , B , C и т. д. — последовательность положительных изображений.

Если точка S расположена на окружности пересечения, то плотность в ней равна нулю.

Для нахождения полного заряда одного из сферических сегментов нужно найти поверхностный интеграл по этому сегменту от величины индукции, создаваемой каждым изображением.

Полный заряд на сегменте с центром в точке A , обусловленный изображением в точке A с зарядом DA , равен

$$DA \frac{DA + OA}{2(DA)} = \frac{1}{2} (DA + OA),$$

где O — центр окружности пересечения.

Аналогично заряд на этом же сегменте, обусловленный изображением B , равен $(DB + OB)/2$ и т. д., причем отрезки OB и т. п., отсчитываемые влево от O , считаются отрицательными.

Таким образом, полный заряд на сегменте с центром в точке A равен $(DA+DB+DC+\dots)/2 + (OA+OB+OC+\dots)/2 - (DP+DQ+\dots)/2 - (OP+OQ+\dots)/2$.

167. Метод электрических изображений может быть применен к любому объему, ограниченному плоскими или сферическими поверхностями, если все эти поверхности пересекаются под углами, являющимися целыми делителями двух прямых углов.

Для того чтобы существовала такая система сферических поверхностей, каждый пространственный угол должен быть трехгранным, причем два образующих его угла должны быть прямыми, а третий — либо прямой, либо целый делитель двух прямых углов.

Таким образом, имеются следующие случаи конечного числа изображений: 1) одиночная сферическая поверхность или плоскость; 2) две плоскости, сфера и плоскость или две сферы, пересекающиеся под углом π/n ; 3) две таких поверхности вместе с третьей поверхностью, плоской или сферической, пересекающей первые две под прямым углом; 4) три таких поверхности вместе с четвертой поверхностью, плоской или сферической, пересекающей первые две поверхности ортогонально, а третью — под углом π/n ; из этих четырех поверхностей по крайней мере одна должна быть сферической.

Первый и второй случай мы уже рассмотрели. В первом случае имеется единственное изображение. Во втором — $(2n-1)$ -изображений расположены двумя последовательностями на окружности, проходящей через действующий заряд и ортогональной обеим поверхностям. В третьем случае мы имеем наряду с этими изображениями и действующим зарядом еще их изображения в третьей поверхности, т. е. всего $(4n-1)$ -изображений, не считая действующего заряда.

В четвертом случае проведем сначала через действующий заряд окружность, ортогональную первым двум поверхностям, и найдем на ней положения и величины n отрицательных изображений и $(n-1)$ положительных изображений. Затем через каждую из этих $2n$ точек, включая и точку нахождения действующего заряда, проведем окружность, ортогональную третьей и четвертой поверхностям, и найдем на ней две последовательности изображений по n' изображений в каждой. Таким образом, мы получим, не считая действующего заряда, $(2nn'-1)$ положительных и $2nn'$ отрицательных изображений. Эти $4nn'$ точек являются точками пересечения окружностей, принадлежащих двум системам линий кривизны циклиды.

Если в каждой из упомянутых точек поместить заряд надлежащей величины, то поверхность нулевого потенциала будет состоять из $n+n'$ сфер, принадлежащих к двум семействам, причем последовательные сферы одного семейства пересекаются под углом π/n , сферы другого семейства пересекаются под углом π/n и любая сфера первого семейства ортогональна любой сфере второго семейства.

Случай двух взаимно ортогональных сфер
(см. рис. IV в конце этого тома)

168. Пусть A и B — центры двух сфер, пересекающихся друг друга под прямым углом по окружности, проходящей через точки D и D' (см. рис. 12), и пусть прямая DD' пересекает линию центров в точке C . Тогда точка C является изображением A в сфере B , а также изображением B в сфере A . Если $AD=\alpha$, а $BD=\beta$,

то $AB = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, и если в точки A, B, C поместить соответственно количества электричества α, β и $-\alpha\beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, то обе сферы будут эквипотенциальными поверхностями с единичным потенциалом.

С помощью такой системы мы можем, следовательно, определить распределение электричества для следующих случаев:

1) На проводнике $PDQD'$, образуемом большими сегментами обеих сфер. Потенциал проводника равен единице, а заряд равен

$$\alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = AD + BD - CD.$$

Это же выражение является, следовательно, и мерой емкости такого проводника, когда он свободен от индуктивного действия других тел.

Плотность в произвольной точке P сферы с центром в A и в произвольной точке O сферы с центром в B равны соответственно

$$\frac{1}{4\pi\alpha} \left(1 - \left(\frac{\beta}{BP} \right)^3 \right) \text{ и } \frac{1}{4\pi\beta} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{AQ} \right)^3 \right).$$

На окружности пересечения плотность равна нулю.

Если одна из сфер намного больше другой, то плотность в вершине меньшей сферы в пределе втрое больше плотности в вершине большей сферы.

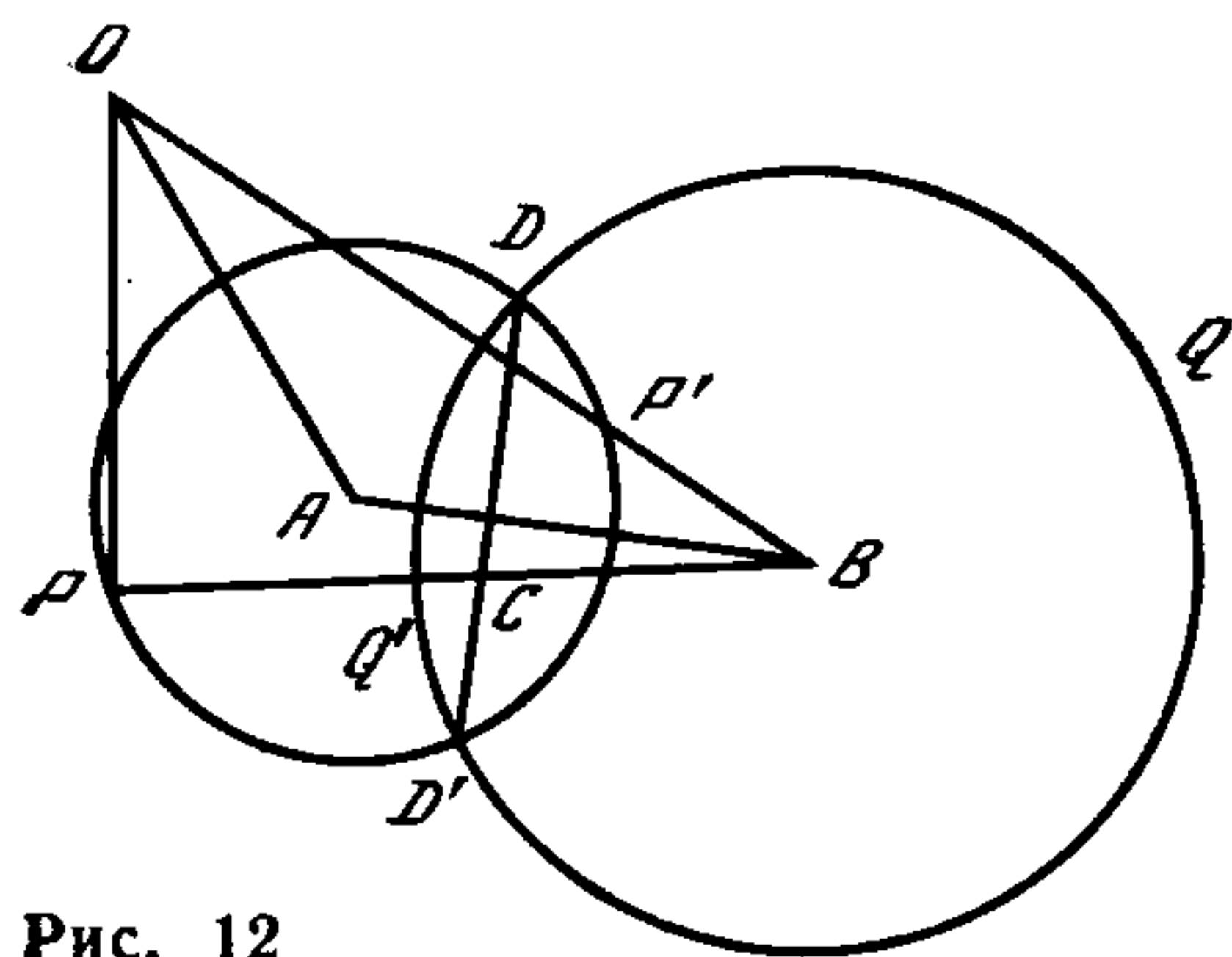


Рис. 12

2) На линзе $P'DQ'D'$, образуемой обоими меньшими сегментами сфер, заряженной количеством электричества $= -\alpha\beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, находящейся под воздействием точек A и B , несущих заряды α и β , и имеющей единичный потенциал. Плотность в произвольной точке выражается той же формулой.

3) На мениске $DPD'Q'$ с зарядом α , подверженном воздействию точек B и C , несущих соответственно заряды β и $-\alpha\beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ и тоже находящемся в равновесии при единичном потенциале.

4) На другом мениске $QDP'D'$ с зарядом β , находящемся под воздействием точечных зарядов в A и C .

Мы можем также найти распределение электричества на следующих внутренних поверхностях:

— полая линза $P'DQ'D'$ под действием расположенного внутри точечного заряда C в центре окружности DD' ;

— полый мениск под действием точечного заряда в центре вогнутой поверхности;

— полость, образуемая двумя большими сегментами обеих сфер под действием трех точечных зарядов A, B, C .

Однако вместо того, чтобы расписывать решения для этих случаев, мы применим принцип электрических изображений для определения плотности электричества, наводимой в точке P внешней поверхности проводника $PDQD'$ под действием единичного точечного заряда, находящегося в точке O .

Пусть $OA=a$, $OB=b$, $OP=r$, $BP=p$, $AD=\alpha$, $BD=\beta$, $AB=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Произведем инверсию системы по отношению к сфере единичного радиуса с центром в точке O .

Обе сферы останутся сферами, пересекающимися под прямым углом, с центрами, расположенными на тех же радиусах, что A и B .

Если обозначить величины, относящиеся к инвертированной системе, штрихом, то

$$a' = \frac{a}{a^2 - \alpha^2}, \quad b' = \frac{b}{b^2 - \beta^2}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{b^2 - \beta^2},$$

$$r' = \frac{1}{r}, \quad p'^2 = \frac{\beta^2 r^2 + (b^2 - \beta^2)(p^2 - \beta^2)}{r^2 (b^2 - \beta^2)^2}.$$

Если в инвертированной системе потенциал поверхности равен единице, то плотность заряда в точке P' равна

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left(1 - \left(\frac{\beta'}{p'} \right)^3 \right).$$

Если в первоначальной системе плотность в точке P равна σ , то $(\sigma/\sigma') = (1/r^3)$, а потенциал равен $1/r$. При помещении в точку O отрицательного единичного электрического заряда потенциал обращается в нуль на первоначальной поверхности, а плотность в точке P становится равной

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{a^2 - \alpha^2}{\alpha r^3} \left(1 - \frac{\beta^3 r^3}{(\beta^2 r^2 + (b^2 - \beta^2)(p^2 - \beta^2))^{3/2}} \right).$$

Это выражение дает распределение электричества на одном из сферических сегментов под воздействием заряда в точке O . Распределение электричества на другом сферическом сегменте может быть найдено перестановкой a и b , α и β и заменой p на q или AQ .

Для нахождения полного заряда, наводимого на проводнике точечным зарядом O , рассмотрим инвертированную систему.

В инвертированной системе мы имеем заряд α' в A' , β' в B' и отрицательный заряд $\alpha'\beta'/\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$ в точке C' , расположенной на прямой $A'B'$ так, что

$$A'C' : C'B' = \alpha'^2 : \beta'^2.$$

Если $OA'=a'$, $OB'=b'$, $OC'=c'$, то

$$c'^2 = \frac{a'^2\beta'^2 + b'^2\alpha'^2 - \alpha'^2\beta'^2}{\alpha'^2 + \beta'^2}.$$

Инвертируя эту систему, получим

$$\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\beta'}{b'} = \frac{\beta}{b} \quad \text{и} \quad -\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2} c'} = -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2}}.$$

Следовательно, полный заряд на проводнике, обусловленный единичным отрицательным зарядом в O , равен

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2}}.$$

Распределение электричества на трех сферических поверхностях, пересекающихся под прямыми углами

169. Пусть радиусы этих сфер равны α , β и γ . Тогда

$$BC = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, \quad CA = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}, \quad AB = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Пусть P , Q , R на рис. 13 — основания перпендикуляров, опущенных из A , B , C на противоположные стороны треугольника, а O — пересечение этих перпендикуляров. Тогда P является изображением B в сфере γ , а также изображением C в сфере β . Точка O также является изображением P в сфере α .

Пусть в точки A , B и C помещены заряды α , β и γ .

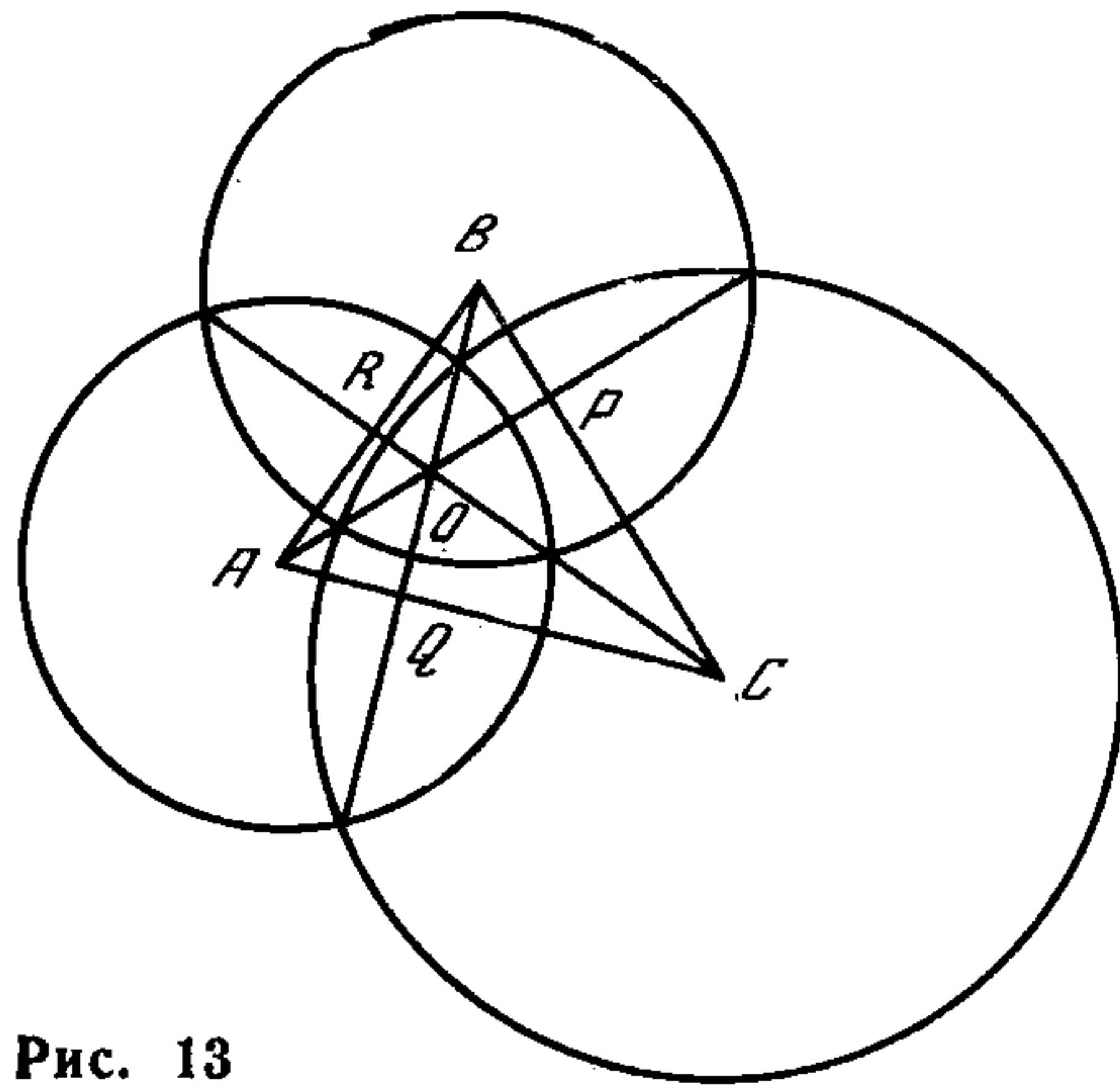
Тогда заряд, который необходимо поместить в точку P , будет равен

$$-\frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Но $AP = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$, так что заряд в точке O , рассматриваемой как изображение точки P , равен

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Рис. 13



Таким же путем можно найти систему изображений, электрически эквивалентных четырем сферическим поверхностям, находящимся под единичным потенциалом и пересекающимся под прямыми углами.

Если радиус четвертой сферы равен δ , то, поместив в центр этой сферы заряд δ , получим заряд на пересечении линии центров любых двух сфер, скажем α и β , с их плоскостью пересечения, равный

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}}.$$

Заряд на пересечении плоскости любых трех центров ABC с перпендикуляром из центра D равен

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}},$$

а заряд на пересечении четырех перпендикуляров равен

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2}}}.$$

*Система четырех пересекающихся под прямыми углами сфер
под нулевым потенциалом, находящихся под воздействием
единичного точечного заряда*

170. Обозначим эти сферы через A, B, C, D , а точку нахождения заряда — через O . Построим четыре сферы A_1, B_1, C_1, D_1 , каждая из которых, скажем сфера A_1 , проходит через точку O и пересекает три заданных сферы, в нашем случае B, C, D , под прямыми углами. Построим далее шесть сфер $(ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd)$, каждая из которых проходит через точку O и через окружность пересечения двух из первоначальных сфер.

Три сферы B_1, C_1, D_1 пересекутся и в другой точке, отличной от O . Обозначим эту точку через A' , и пусть B', C', D' — соответственно пересечения сфер $(C_1, D_1, A_1), (D_1, A_1, B_1), (A_1, B_1, C_1)$. Любые две из этих сфер (скажем, A_1, B_1) пересекаются с одной из шести сфер (cd) в точке $(a'b')$. Всего существует шесть таких точек.

Любая из сфер типа A_1 пересекается с тремя сферами из шестерки $(ab), (ac), (ad)$ в точке a' . Таких точек всего четыре. Наконец, шесть сфер $(ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd)$ пересекаются, помимо точки O , в одной точке S .

Если теперь эту систему инвертировать по отношению к сфере единичного радиуса с центром в O , то четыре сферы A, B, C, D инвертируются в сферы, а остальные десять сфер перейдут в плоскости. Первые четыре точки пересечения A', B', C', D' переходят в центры сфер, а остальные соответствуют остальным описанным выше одиннадцати точкам. Эти пятнадцать точек образуют изображение точки O в системе четырех сфер.

В точке A' , которая является изображением O в сфере A , мы должны поместить заряд, равный изображению O , т. е. $-a/a$, где a — радиус сферы A , а a — расстояние ее центра от O . Аналогично мы должны поместить надлежащие заряды в точки B', C', D' .

Заряд в любой из остальных одиннадцати точек может быть найден из выражений, приведенных в предыдущем пункте, с заменой $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ на $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ и умножением результата для каждой точки на ее расстояние от точки O . Здесь

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2}, \quad \beta' = -\frac{\beta}{b^2 - \beta^2}, \quad \gamma' = -\frac{\gamma}{c^2 - \gamma^2}, \quad \delta' = -\frac{\delta}{d^2 - \delta^2}.$$

[Приведенные в пп. 169, 170 случаи можно рассмотреть следующим образом: взяв три координатные плоскости, перпендикулярные друг другу, поместим в систему восьми точек $(\pm 1/2\alpha, \pm 1/2\beta, \pm 1/2\gamma)$ заряды $\pm e$, причем отрицательные заряды помещаются в точки, имеющие одну или три отрицательные координаты. Очевидно, что координатные плоскости находятся под нулевым потенциалом. Теперь, произведя инверсию по отношению к любой точке, мы получим случай трех сфер, пересекающихся под прямыми углами и находящихся под воздействием точечного заряда. Если произвести инверсию по отношению к одному из точечных зарядов, мы получим решение для случая свободно заряженного проводника в форме трех сфер радиусов α, β, γ , пересекающихся под прямыми углами.

Если к полученной выше системе электрических точечных зарядов добавить их изображения в сфере с центром в начале координат, то, как легко видеть, помимо трех координатных плоскостей, поверхность сферы также становится частью поверхности нулевого потенциала.]

Две непересекающиеся сферы

171. Если область пространства ограничена двумя непересекающимися сферами, то последовательные изображения точечного заряда, расположенного внутри этой области, образуют две бесконечные последовательности точек, ни одна из которых не расположена между сферическими поверхностями, так что они удовлетворяют условию применимости метода электрических изображений.

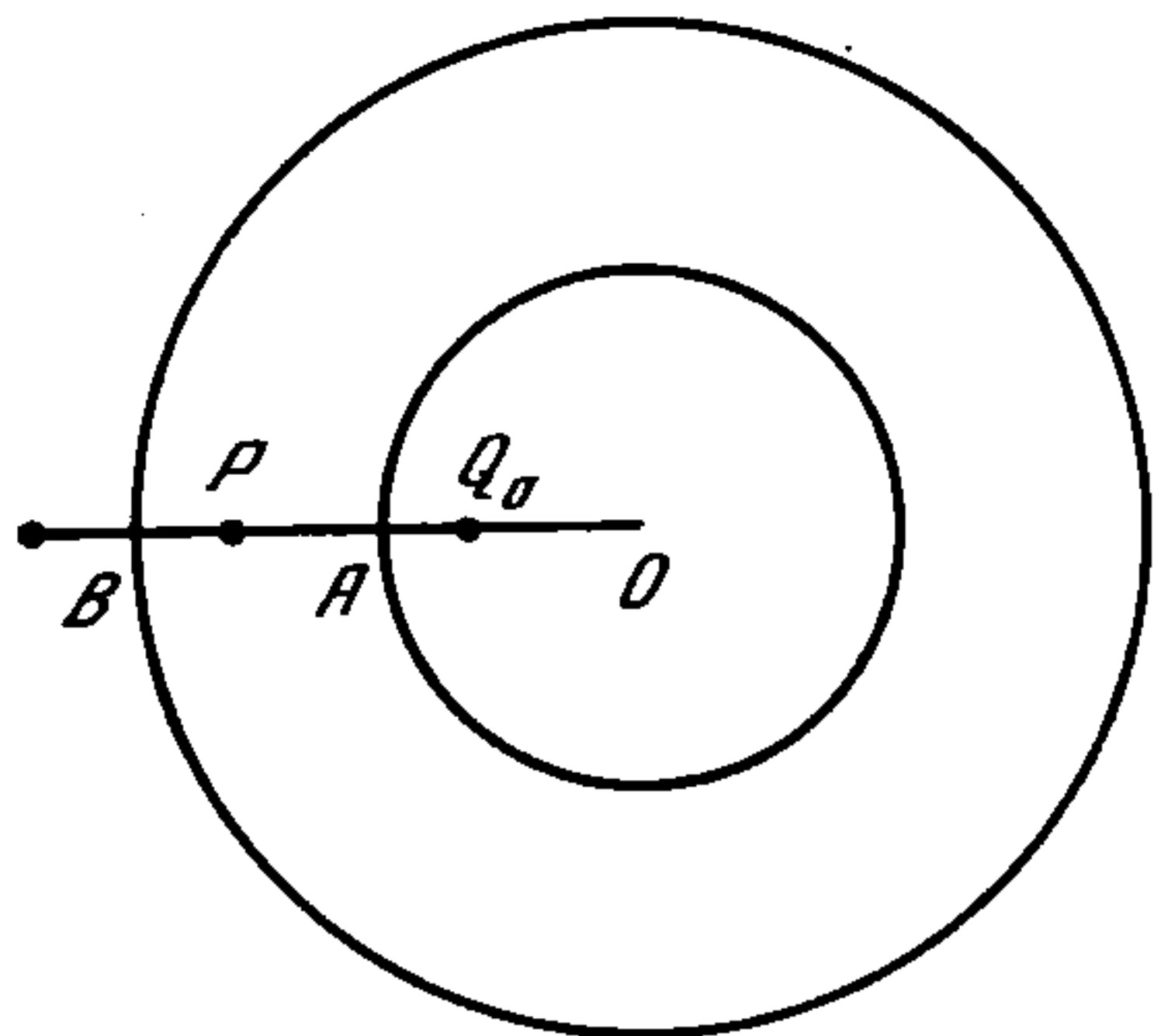


Рис. 14

Любые две непересекающиеся сферы можно инвертировать в две концентрические сферы, взяв за точку инверсии любую из двух общих точек инверсии этой пары сфер.

Поэтому мы начнем со случая двух заземленных концентрических сферических поверхностей, находящихся под воздействием точечного заряда P , помещенного между ними.

Пусть радиус первой сферы равен b , второй сферы — $be^{\tilde{\omega}}$, а расстояние действующего заряда от центра $r = be^u$.

Все последующие изображения будут находиться на том же радиусе, что и действующий заряд.

Пусть Q_0 — изображение точки P в первой сфере (рис. 14), P_1 — изображение Q_0 во второй сфере, Q_1 — изображение P_1 в первой сфере и т. д. Тогда $OP_s \cdot OQ_s = b^2$ и $OP_s \cdot OQ_{s-1} = b^2 e^{2s\tilde{\omega}}$, кроме того, $OQ_0 = be^{-u}$, $OP_1 = be^{u+2\tilde{\omega}}$, $OQ_1 = be^{-(u+2\tilde{\omega})}$ и т. д.

Отсюда $OP_s = be^{(u+2s\tilde{\omega})}$, $OQ_s = be^{-(u+2s\tilde{\omega})}$.

Если заряд в точке P обозначить через P , а заряд в точке P_s — через P_s , то

$$P_s = Pe^{\tilde{\omega}}, \quad Q_s = -Pe^{-(u+s\tilde{\omega})}.$$

Пусть далее Q'_1 — изображение P во второй сфере, P'_1 — изображение Q'_1 в первой сфере и т. д.

Тогда

$$\begin{aligned} OQ'_1 &= be^{2\tilde{\omega}-u}, & OP'_1 &= be^{u-2\tilde{\omega}}, \\ OQ'_2 &= be^{4\tilde{\omega}-u}, & OP'_2 &= be^{u-4\tilde{\omega}}, \\ OQ'_s &= be^{2s\tilde{\omega}-u}, & OP'_s &= be^{u-2s\tilde{\omega}}, \\ Q'_s &= -Pe^{s\tilde{\omega}-u}, & P'_s &= Pe^{-s\tilde{\omega}}. \end{aligned}$$

Из этой серии изображений все P — положительны, все Q — отрицательны, все P' и Q принадлежат первой сфере, а все P и Q' — второй.

Изображения внутри первой сферы образуют два сходящихся ряда, сумма которых равна $-P(e^{\tilde{\omega}-u} - 1)/(e^{\tilde{\omega}} - 1)$.

Таково, следовательно, количество электричества на первой, внутренней сфере. Изображения вне второй сферы образуют два расходящихся ряда, но каждое из этих изображений дает нулевой вклад в поверхностный интеграл по поверхности сферы. Поэтому электрический заряд на внешней сферической поверхности равен

$$P\left(\frac{e^{\tilde{\omega}-u} - 1}{e^{\tilde{\omega}} - 1} - 1\right) = -P \frac{e^{\tilde{\omega}} - e^{\tilde{\omega}-u}}{e^{\tilde{\omega}} - 1}.$$

Если подставить значения входящих сюда величин, выраженные через OA , OB и OP , получим

$$\text{заряд на } A = -P \cdot \frac{OA}{OP} \cdot \frac{PB}{AB}, \quad \text{заряд на } B = -P \cdot \frac{OB}{OP} \cdot \frac{AP}{AB}.$$

Если радиусы сфер устремить в бесконечность, мы придем к случаю точки, расположенной между двумя параллельными плоскостями A и B . В этом случае выражения для зарядов принимают вид

$$\text{заряд на } A = -P \cdot \frac{PB}{AB}, \quad \text{заряд на } B = -P \cdot \frac{AP}{AB}.$$

172. Чтобы перейти от рассмотренного случая к случаю двух произвольных непересекающихся сфер, начнем с нахождения двух общих точек инверсии O и O' , через которые проходят все окружности, ортогональные обеим сферам. Произведя затем инверсию системы по отношению к одной из этих точек, мы переведем наши сферы в две concentric сферические сферы, рассмотренные выше.

Если точку O на рис. 15 принять за центр инверсии, то на рис. 14 она будет расположена где-то между двумя сферическими поверхностями.

Но в п. 171 мы решили задачу о точечном заряде, расположенном между двумя concentric проводниками, находящимися под нулевым потенциа-

лом. Инвертируя эту систему по отношению к точке O , мы найдем, таким образом, распределения зарядов на двух сферических проводниках, находящихся под нулевым потенциалом и расположенных один вне другого, наводимые находящимся вблизи них точечным зарядом. В п. 173 будет показано, как использовать полученный результат для нахождения распределения на двух сферических заряженных проводниках, находящихся лишь под взаимным влиянием.

Радиус $OAPB$ на рис. 14, на котором расположены последовательные изображения, переходит на рис. 15 в дугу окружности, проходящей через O и O' , причем отношение $O'P$ к OP равно Se^u , где S — численный множитель.

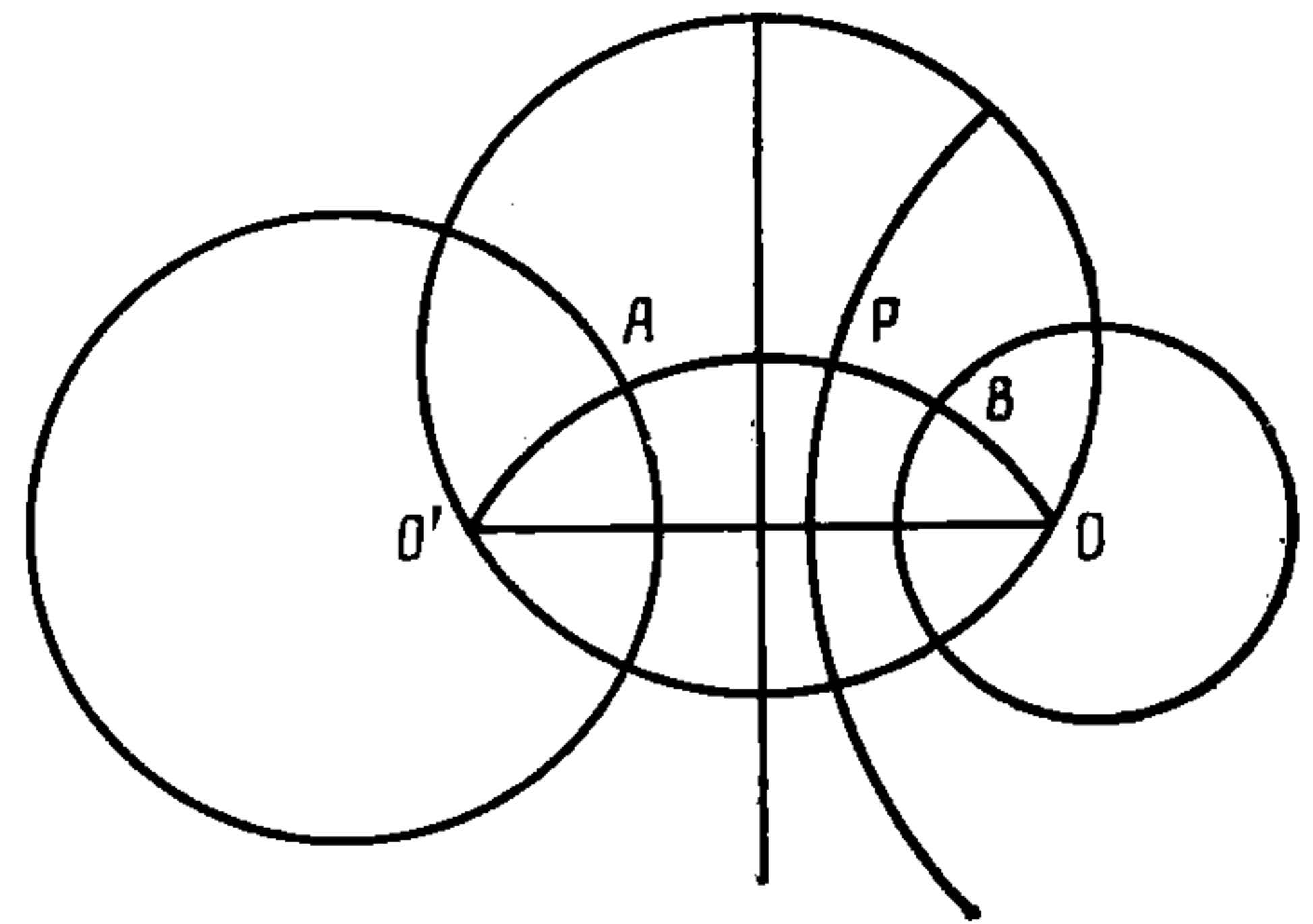


Рис. 15

Если положить

$$\theta = \ln \frac{O'P}{OP}, \quad \alpha = \ln \frac{O'A}{OA}, \quad \beta = \ln \frac{O'B}{OB},$$

то $\beta - \alpha = \tilde{\omega}$, $\alpha + \alpha = \theta$.

Все последующие изображения точки P будут лежать на дуге $O'APBO$.

Для отображения Q_0 точки P в A

$$\theta(Q_0) = \ln \frac{O'Q_0}{OQ_0} = 2\alpha - \theta.$$

Для отображения P_1 точки Q_0 в B

$$\theta(P_1) = \ln \frac{O'P_1}{OP_1} = \theta + 2\tilde{\omega}.$$

Аналогично $\theta(P_s) = \theta + 2s\tilde{\omega}$, $\theta(Q_s) = 2\alpha - \theta - 2s\tilde{\omega}$.

Точно так же, обозначая через Q'_0, P'_1, Q'_1 и т. д. последовательные изображения P в B, A, B и т. д., получим

$$\theta(Q'_0) = 2\beta - \theta, \quad \theta(P'_s) = \theta - 2s\tilde{\omega}, \quad \theta(P'_1) = \theta - 2\tilde{\omega}, \quad \theta(Q'_s) = 2\beta - \theta + 2s\tilde{\omega}.$$

Для нахождения заряда каждого изображения P_s учтем, что в инвертированной системе (рис. 14) его заряд равен $PV \sqrt{(OP_s/OP)}$. В исходной системе (рис. 15) эту величину следует дополнительно умножить на OP_s . Следовательно, заряд в P_s на биполярной фигуре (поскольку $P = P/OP$), равен

$$P \sqrt{\frac{OP_s \cdot O'P_s}{OP \cdot O'P}}.$$

Положим $\xi = \sqrt{OP \cdot O'P}$ и будем называть ξ параметром точки P . Тогда $P_s = (\xi_s/\xi)P$, т. е. заряд каждого изображения пропорционален его параметру.

Если воспользоваться криволинейными координатами θ и φ так, что

$$e^{\theta + \sqrt{-1}\varphi} = \frac{x + \sqrt{-1}y - k}{x + \sqrt{-1}y + k},$$

где $2k$ — расстояние OO' , то²

$$x = -\frac{k \operatorname{sh} \theta}{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi}, \quad y = \frac{k \sin \theta}{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi},$$

$$x^2 + (y - k \operatorname{ctg} \varphi)^2 = k^2 \operatorname{csc}^2 \varphi, \quad (x + k \operatorname{cth} \theta)^2 + y^2 = k^2 \operatorname{csh}^2 \theta,$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{x^2 + y^2 - k^2}{2ky}, \quad \operatorname{cth} \theta = -\frac{x^2 + y^2 + k^2}{2kx}, \quad \xi = \frac{\sqrt{2} k}{\sqrt{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi}}.$$

² В этих выражениях следует помнить, что $2\operatorname{ch} \theta = e^\theta + e^{-\theta}$, $2\operatorname{sh} \theta = e^\theta - e^{-\theta}$, а другие функции от θ определены через эти так же, как и соответственные тригонометрические функции.

Метод использования биполярных координат в этом случае дан Томсоном в *Liouville's Journal*. 1847 г. См. работу Томсона в *Electrical Papers*, § 211, 212. В своем изложении я использовал исследования проф. Бетти (*Nuovo Cimento*, vol. XX) при изложении аналитического метода, однако я сохранил идею электрических изображений, примененную Томсоном в его оригинальных исследованиях (*Phil. Mag.*, 1853).

Поскольку заряд каждого изображения пропорционален его параметру ξ , а знак его зависит от того, относится ли изображение к типу **P** или к типу **Q**, то

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{P \sqrt{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi}}{\sqrt{\operatorname{ch} (\theta + 2s\tilde{\omega}) - \cos \varphi}}, & Q_s &= -\frac{P \sqrt{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi}}{\sqrt{\operatorname{ch} (2\alpha - \theta - 2s\tilde{\omega}) - \cos \varphi}}, \\ P'_s &= \frac{P \sqrt{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi}}{\sqrt{\operatorname{ch} (\theta - 2s\tilde{\omega}) - \cos \varphi}}, & Q'_s &= -\frac{P \sqrt{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi}}{\sqrt{\operatorname{ch} (2\beta - \theta + 2s\tilde{\omega}) - \cos \varphi}}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли положения и величины зарядов для обеих бесконечных последовательностей изображений. Теперь нам остается определить полный заряд на сфере **A**, просуммировав все изображения типа **Q** и **P'**, расположенные внутри сферы. Эти суммы можно записать в виде

$$\begin{aligned} & P \sqrt{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} (\theta - 2s\tilde{\omega}) - \cos \varphi}}, \\ & - P \sqrt{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} (2\alpha - \theta - 2s\tilde{\omega}) - \cos \varphi}}. \end{aligned}$$

Аналогично полный заряд, индуцированный на **B**, равен

$$\begin{aligned} & P \sqrt{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} (\theta + 2s\tilde{\omega}) - \cos \varphi}}, \\ & - P \sqrt{\operatorname{ch} \theta - \cos \varphi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} (2\beta - \theta + 2s\tilde{\omega}) - \cos \varphi}}. \end{aligned}$$

173. Применим эти результаты для нахождения коэффициентов емкости и индукции для двух сфер радиусов a и b с расстоянием между центрами c .

Пусть сфера **A** находится под единичным потенциалом, а сфера **B** — под нулевым потенциалом. Тогда последовательные изображения заряда a , помещенного в центре сферы **A**, дадут истинное распределение электричества. Все изображения будут лежать на оси между полюсами и центрами сфер, причем, как легко видеть, из четырех систем изображений, определенных в п. 172, в этом случае существует только третья и четвертая.

Полагая

$$k = (a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2)^{1/2}/(2c),$$

получим $\operatorname{sh} \alpha = - (k/a)$, $\operatorname{sh} \beta = (k/b)$.

Значения θ и φ для центра сферы **A** равны $\theta = 2\alpha$, $\varphi = 0$.

Таким образом, мы должны в уравнениях заменить **P** на a или $-k/\operatorname{sh} \alpha$, θ — на 2α , φ — на 0 , имея в виду, что само **P** является частью заряда сферы **A**. Таким образом, для коэффициента емкости сферы **A** получаем

$$q_{aa} = k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} (s\tilde{\omega} - \alpha)},$$

а для коэффициента индукции A на B или B на A

$$q_{ab} = -k \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\text{sh } s\bar{\omega}}.$$

Таким же способом можно было бы, считая потенциал B единичным, а потенциал A — нулевым, найти значение q_{bb} . В принятых обозначениях мы получили бы следующее выражение:

$$q_{bb} = k \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\text{sh } (\beta + s\bar{\omega})}.$$

Чтобы выразить эти величины через радиусы сфер a и b и через расстояние между их центрами c , заметим, что если ввести обозначение

$$K = (a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2)^{1/2},$$

то можно написать

$$\begin{aligned} \text{sh } \alpha &= -K/(2ac), & \text{sh } \beta &= K/(2bc), & \text{sh } \bar{\omega} &= K/(2ab), & \text{ch } \alpha &= (c^2 + a^2 - b^2)/2ca, \\ \text{ch } \beta &= (c^2 + b^2 - a^2)/(2cb), & \text{ch } \bar{\omega} &= (c^2 - a^2 - b^2)/(2ab) \end{aligned}$$

и использовать соотношения

$$\begin{aligned} \text{sh } (\alpha + \beta) &= \text{sh } \alpha \text{ ch } \beta + \text{ch } \alpha \text{ sh } \beta, \\ \text{ch } (\alpha + \beta) &= \text{ch } \alpha \text{ ch } \beta + \text{sh } \alpha \text{ sh } \beta. \end{aligned}$$

С помощью этих соотношений или же непосредственно рассчитывая последовательные изображения, как это сделано в работе сэра У. Томсона, получим

$$\begin{aligned} q_{aa} &= a + \frac{a^2b}{c^2 - b^2} + \frac{a^3b^2}{(c^2 - b^2 + ac)(c^2 - b^2 - ac)} + \dots \\ q_{ab} &= -\frac{ab}{c} - \frac{a^2b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)} - \frac{a^3b^3}{c(c^2 - a^2 - b^2 + ab)(c^2 - a^2 - b^2 - ab)} - \dots \\ q_{bb} &= b + \frac{ab^2}{c^2 - a^2} + \frac{a^2b^3}{(c^2 - a^2 + bc)(c^2 - a^2 - bc)} + \dots \end{aligned}$$

174. Для определения зарядов E_a и E_b двух сфер, наэлектризованных соответственно до потенциалов V_a и V_b , мы имеем следующие уравнения:

$$E_a = V_a q_{aa} + V_b q_{ab}, \quad E_b = V_a q_{ab} + V_b q_{bb}.$$

Если положить $q_{aa}q_{bb} - q_{ab}^2 = D = (1/D')$ и $p_{aa} = q_{bb}D'$, $p_{ab} = -q_{ab}D'$, $p_{bb} = q_{aa}D'$, так что $p_{aa}p_{bb} - p_{ab}^2 = D'$, то уравнения для определения потенциалов через заряды будут иметь вид

$$V_a = p_{aa}E_a + p_{ab}E_b, \quad V_b = p_{ab}E_a + p_{bb}E_b,$$

где p_{aa} , p_{ab} и p_{bb} — коэффициенты потенциала.

Полная энергия системы равна, согласно п. 85,

$$Q = (E_a V_a + E_b V_b)/2 = (V_a^2 q_{aa} + 2V_a V_b q_{ab} + V_b^2 q_{bb})/2 = (E_a^2 p_{aa} + 2E_a E_b p_{ab} + E_b^2 p_{bb})/2.$$

Сила расталкивания между сферами равна, таким образом, согласно пп. 92, 93,

$$F = \frac{1}{2} \left\{ V_a^2 \frac{dq_{aa}}{dc} + 2V_a V_b \frac{dq_{ab}}{dc} + V_b^2 \frac{dq_{bb}}{dc} \right\} = \\ = -\frac{1}{2} \left\{ E_a^2 \frac{dp_{aa}}{dc} + 2E_a E_b \frac{dp_{ab}}{dc} + E_b^2 \frac{dp_{bb}}{dc} \right\},$$

где c — расстояние между центрами сфер.

Из приведенных двух выражений силы расталкивания более удобно для расчетов первое выражение, в котором сила выражена через потенциалы сфер и коэффициенты емкости и индукции.

Таким образом, нам нужно дифференцировать коэффициенты q по c . Эти коэффициенты выражены как функции от $k, \alpha, \beta, \tilde{\omega}$, причем при дифференцировании следует считать a и b постоянными. Из уравнений

$$k = -a \operatorname{sh} \alpha = b \operatorname{sh} \beta = -c \frac{\operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} \tilde{\omega}}$$

находим

$$\frac{dk}{dc} = -\frac{\operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \tilde{\omega}}, \quad \frac{d\alpha}{dc} = \frac{\operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta}{k \operatorname{sh} \tilde{\omega}}, \quad \frac{d\beta}{dc} = \frac{\operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta}{k \operatorname{sh} \tilde{\omega}}, \quad \frac{d\tilde{\omega}}{dc} = \frac{1}{k},$$

откуда

$$\frac{dq_{aa}}{dc} = \frac{\operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \tilde{\omega}} \cdot \frac{q_{aa}}{k} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(sc + b \operatorname{ch} \beta) \operatorname{ch} (s\tilde{\omega} - \alpha)}{c (\operatorname{sh} (s\tilde{\omega} - \alpha))^2}, \\ \frac{dq_{ab}}{dc} = \frac{\operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \tilde{\omega}} \cdot \frac{q_{ab}}{k} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s \operatorname{ch} s\tilde{\omega}}{(\operatorname{sh} s\tilde{\omega})^2}, \\ \frac{dq_{bb}}{dc} = \frac{\operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \tilde{\omega}} \cdot \frac{q_{bb}}{k} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(sc + a \operatorname{ch} \alpha) \operatorname{ch} (s\tilde{\omega} + \beta)}{c (\operatorname{sh} (s\tilde{\omega} + \beta))^2}.$$

Сэр Уильям Томсон рассчитал силу между двумя сферами равного радиуса, находящимися на произвольном расстоянии, не превышающем диаметра одной из сфер. Для больших расстояний нет необходимости использовать больше двух-трех последовательных изображений.

Ряды для производных q по c могут быть легко получены прямым дифференцированием

$$\frac{dq_{aa}}{dc} = -\frac{2a^2bc}{(c^2 - b^2)^2} - \frac{2a^3b^2c(2c^2 - 2b^2 - a^2)}{(c^2 - b^2 + ac)^2 (c^2 - b^2 - ac)^2} - \dots \\ \frac{dq_{ab}}{dc} = \frac{ab}{c^2} + \frac{a^2b^2(3c^2 - a^2 - b^2)}{c^2 (c^2 - a^2 - b^2)^2} + \frac{a^3b^3 \{ (5c^2 - a^2 - b^2) (c^2 - a^2 - b^2) - a^2b^2 \}}{c^2 (c^2 - a^2 - b^2 + ab)^2 (c^2 - a^2 - b^2 - ab)^2} + \dots \\ \frac{dq_{bb}}{dc} = -\frac{2ab^2c}{(c^2 - a^2)^2} - \frac{2a^2b^3c(2c^2 - 2a^2 - b^2)}{(c^2 - a^2 + bc)^2 (c^2 - a^2 - bc)^2} - \dots$$

Распределение электричества на двух соприкасающихся сферах

175. Если рассмотреть две такие сферы при единичном потенциале, на которые не воздействуют никакие другие заряды, то при инверсии системы по отношению к точке соприкосновения мы получим две параллельные плоскости, отстоящие на

расстоянии $1/2a$ и $1/2b$ от точки инверсии, электризация которых определяется действием положительного единичного заряда, находящегося в этой точке.

Возникнет последовательность положительных изображений с единичным зарядом на расстояниях $s \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ от начала координат, где s может принимать все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Кроме того, будет и последовательность отрицательных изображений с зарядом -1 , расстояние которых от начала координат, отсчитываемое в направлении a , равно $\frac{1}{a} + s \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

При обратной инверсии этой системы в две соприкасающиеся сферы положительным изображениям соответствует последовательность отрицательных изображений, расстояние которых от точки соприкосновения дается выражением $\left[s \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]^{-1}$, где s — положительно для сферы A и отрицательно для сферы B . При единичном потенциале сфер заряд каждого изображения численно равен его расстоянию от точки соприкосновения и всегда отрицателен.

Кроме того, будет существовать последовательность положительных изображений, соответствующая отрицательным изображениям для двух плоскостей; расстояния этих положительных изображений от точки соприкосновения, отсчитываемые в направлении центра сферы A , равны $\left[\frac{1}{a} + s \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]^{-1}$.

При s равном нулю или целому положительному числу изображение находится внутри сферы A , при s целом отрицательном изображение находится внутри сферы B . Заряд каждого изображения численно равен его расстоянию от начала координат и всегда положителен.

Таким образом, полный заряд сферы A равен

$$E_a = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\frac{1}{a} + s \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} - \frac{ab}{a+b} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s}.$$

Оба эти ряда расходятся, но если их скомбинировать в виде

$$E_a = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a^2 b}{s(a+b) \{s(a+b) - a\}},$$

то ряд становится сходящимся.

Аналогично для заряда на сфере B получим

$$E_b = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{ab}{s(a+b) - b} - \frac{ab}{a+b} \sum_{s=-1}^{s=-\infty} \frac{1}{s} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{ab^2}{s(a+b) \{s(a+b) - b\}}.$$

Очевидно, выражение для E_a равно

$$\frac{ab}{a+b} \int_0^1 \frac{\theta^{\frac{b}{a+b} - 1} - 1}{1 - \theta} d\theta.$$

Последний результат для этого случая был получен Пуассоном.

Можно также показать (Legendre, *Traité des Fonctions Elliptiques*, II, 438), что приведенный выше ряд для E_a равен

$$a - \left\{ \gamma + \Psi \left(\frac{b}{a+b} \right) \right\} \frac{ab}{a+b},$$

где $\gamma = 0,57712\dots$, а $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(1+x)$.

Таблицы значений Ψ приведены Гауссом (*Werke*, Band III, p. 161—162).

Если временно обозначить $b/(a+b)$ через x , то разность зарядов E_a и E_b запишется в виде

$$-\frac{d}{dx} \ln [\Gamma(x) \Gamma(1-x)] \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{ab}{a+b} \frac{d}{dx} \ln \sin \pi x = \frac{\pi ab}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{\pi b}{a+b}.$$

Для одинаковых сфер заряд каждой равен при единичном потенциале

$$E_a = a \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{2s(2s-1)} = a \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = a \ln 2 = 0,69314718a.$$

Если сфера A много меньше сферы B , то заряд на A приблизительно равен

$$E_a = \frac{a^2}{b} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2 a^2}{6b},$$

а заряд на B приблизительно тот же, что и при удалении сферы A , т. е. $E_b = b$.

Средняя плотность на каждой сфере находится делением заряда на величину поверхности. Таким образом,

$$\sigma_a = \frac{E_a}{4\pi a^2} = \frac{\pi}{24b}, \quad \sigma_b = \frac{E_b}{4\pi b^2} = \frac{1}{4\pi b}, \quad \sigma_a = \frac{\pi^2}{6} \sigma_b.$$

Следовательно, при прикосновении малой сферы к очень большой средняя плотность на малой сфере отличается от средней плотности на большой сфере множителем $\pi^2/6$, т. е. 1,644936.

Применение метода электрической инверсии к случаю сферической чаши

176. Одной из наиболее замечательных иллюстраций метода электрических изображений сэра У. Томсона является его исследование распределения электричества на части сферической поверхности, ограниченной малым кругом. Результаты этих исследований были без доказательства сообщены г-ну Лиувиллю и опубликованы в его *Journal* в 1847 г. Полное исследование опубликовано у Томсона в *Electrical Papers*, статья XV.

Насколько мне известно, ни одним другим математиком не было дано какого-либо решения задачи о распределении электричества на конечной части какой-либо искривленной поверхности.

Поскольку моей целью является разъяснение метода, а не проверка вычислений, я не буду подробно излагать ни геометрии задачи, ни вычислений, отсылая читателей к работе Томсона.

Распределение электричества на эллипсоиде

177. Известным методом было доказано³, что притяжение оболочки, ограниченной двумя подобными, подобно расположенными и концентрическими эллипсоидами, таково, что на точку, находящуюся внутри оболочки, не действует никакая результирующая сила притяжения. Если предположить, что толщина оболочки неограниченно уменьшается, а плотность на ней неограниченно возрастает, мы в пределе придем к понятию поверхностной плотности, меняющейся пропорционально величине перпендикуляра, опущенного из центра на касательную плоскость. Поскольку результирующая сила притяжения такого поверхностного распределения, действующая на любую точку внутри эллипсоида, равна нулю, то при таком распределении электричества на поверхности имеет место равновесие.

Таким образом, поверхностная плотность в любой точке эллипсоида, не возмущенного внешним воздействием, меняется как расстояние касательной плоскости от центра.

Распределение электричества на диске

Взяв две оси эллипсоида равными, а третью устремив к нулю, мы придем к случаю кругового диска и к выражению для поверхностной плотности в произвольной точке P такого диска, заряженного до потенциала V и невозмущенного внешним влиянием. Если σ — поверхностная плотность на одной стороне диска, а KPL — хорда проходящая через точку P , то $\sigma = V / (2\pi^2 \sqrt{KP \cdot PL})$.

Применение принципа электрической инверсии

178. Примем произвольную точку Q за центр инверсии и пусть R — радиус сферы инверсии. Тогда плоскость диска переходит в сферическую поверхность, проходящую через точку Q , а сам диск становится частью этой сферической поверхности, ограниченной окружностью. Назовем эту часть поверхности *чашей*.

Пусть S' — диск, заряженный до потенциала V' и не находящийся под внешним воздействием. Его электрическое изображение S будет сферическим сегментом под нулевым потенциалом, электризация которого вызвана действием количества электричества $V'R$, помещенного в точку Q .

Таким образом, с помощью процесса инверсии мы получили решение задачи о распределении электричества на чаше или на плоском диске, находящихся под нулевым потенциалом, под воздействием точечного заряда, лежащего на поверхности сферы или плоскости, являющихся продолжением чаши или диска.

Влияние точечного заряда, расположенного на незанятой части сферической поверхности

Применение описанных выше методов и геометрических свойств инверсии приводит к следующей форме решения.

Пусть C — центральная точка, или полюс, сферической чаши S , а a — расстояние от C до произвольной точки на границе сегмента. Пусть далее в точку Q на поверхности сферы, являющейся продолжением чаши, помещено количество

³ См. Thomson and Tait, «Natural Philosophy», § 520 или п. 150 настоящего трактата.

электричества q , а чаша S поддерживается под нулевым потенциалом. Тогда плотность σ в любой точке P чаши будет равна

$$\sigma = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q}{QP^2} \sqrt{\frac{CQ^2 - a^2}{a^2 - CP^2}},$$

где CQ , CP и QP — прямые, соединяющие точки C , Q , P . Замечательно, что это выражение не зависит от радиуса сферической поверхности, частью которой является чаша. Следовательно, оно применимо без изменения и в случае плоского диска.

Влияние произвольного числа точечных зарядов

Рассмотрим теперь сферу, разделенную на две части. Одна из них представляет собой сферический сегмент, на котором мы определили распределение электричества (будем называть ее *чашей*), а на другой (оставшейся, или незанятой) — части сферы располагается точечный заряд Q .

Если на оставшейся части сферы расположено несколько точечных зарядов, то наводимое ими распределение электричества в любой точке чаши может быть получено суммированием плотностей, наводимых в отдельности каждым зарядом.

179. Пусть вся оставшаяся поверхность сферы заряжена равномерно с поверхностной плотностью ρ , тогда плотность в каждой точке чаши может быть получена простым интегрированием по заряженной таким образом поверхности.

Таким образом, мы получим решение для случая чаши, находящейся под нулевым потенциалом и заряженной под воздействием оставшейся части сферической поверхности, на которой фиксирована однородная плотность ρ .

Изолируем теперь всю систему, внесем ее внутрь сферы диаметра f и зададим на этой сфере равномерное жесткое распределение заряда с поверхностной плотностью ρ' .

Внутри этой сферы не будет никакой результирующей силы, так что распределение электричества на чаше останется неизменным, но потенциал во всех точках внутри сферы возрастет на величину V , равную $V = 2\pi\rho'f$.

Таким образом, потенциал во всех точках чаши станет равным V .

Пусть теперь эта сфера концентрична сфере, частью которой является чаша, и пусть ее радиус лишь на бесконечно малую величину больше радиуса этой последней сферы. Мы приходим при этом к случаю чаши, поддерживаемой под потенциалом V и находящейся под воздействием оставшейся части сферы, на которой задано жесткое распределение электричества с поверхностной плотностью $\rho + \rho'$.

180. Остается предположить, что $\rho + \rho' = 0$, и мы получим случай чаши, поддерживаемой под потенциалом V и свободной от внешнего воздействия.

Пусть σ — плотность на любой из поверхностей чаши в заданной точке в случае, когда потенциал чаши равен нулю, а оставшаяся часть сферы заряжена с плотностью ρ . Тогда для чаши, находящейся под потенциалом V , следует увеличить плотность на наружной стороне на ρ' , где ρ' — плотность на охватывающей сфере.

В результате таких расчетов получим, что поверхностная плотность σ на поверхности внутри чаши равна

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2 f} \left\{ \sqrt{\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}} - \arctg \sqrt{\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}} \right\},$$

а поверхностная плотность снаружи в той же точке равна $\sigma + (V/2\pi f)$. Здесь f — диаметр сферы, a — хорда радиуса чаши, r — хорда расстояния P от полюса чаши.

Эти формулы получаются простым интегрированием по части сферической поверхности. Для построения полной теории электризации сферической чаши нам понадобилось лишь знание геометрии инверсии сферических поверхностей.

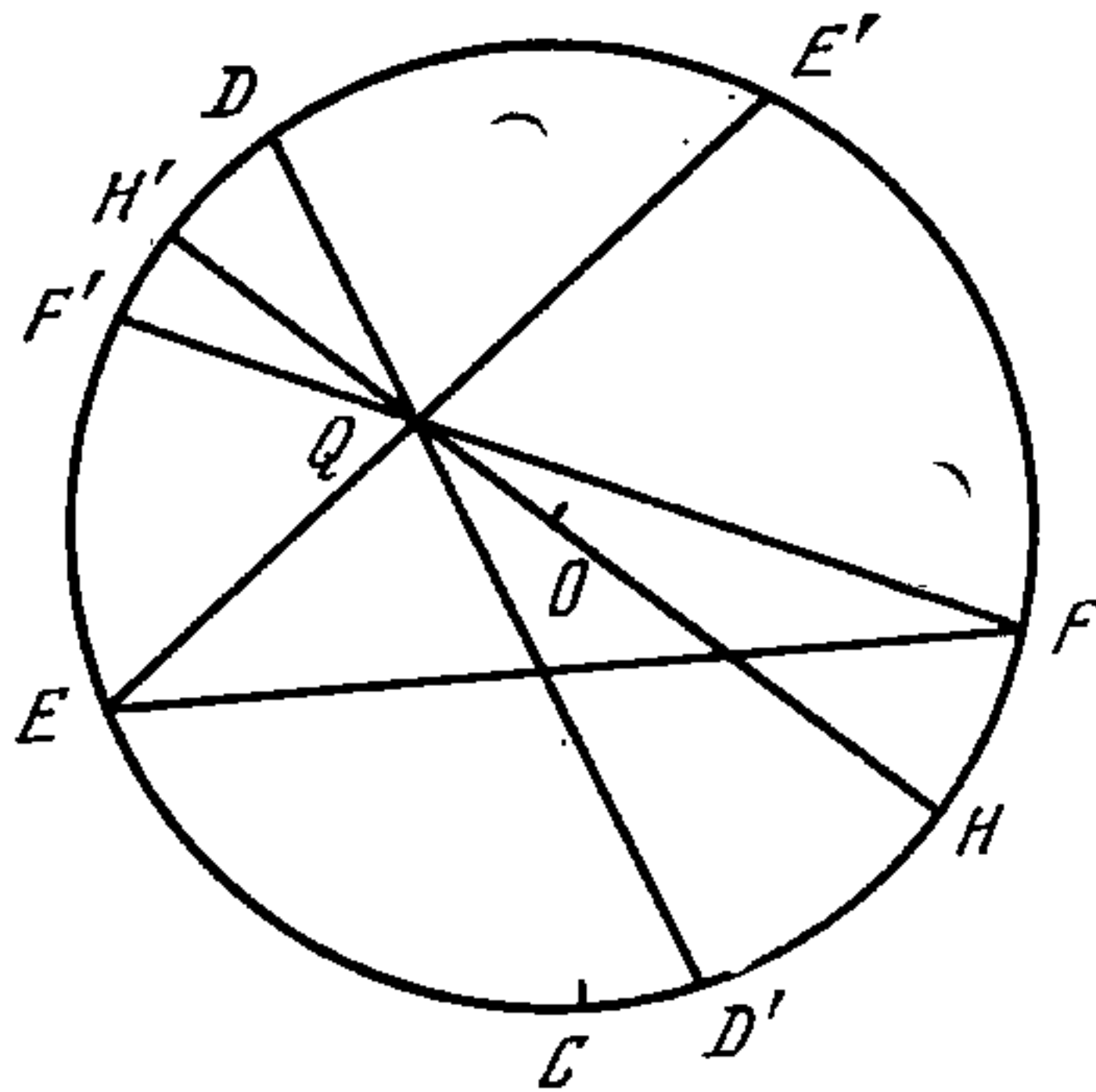


Рис. 16

181. Пусть требуется определить поверхностную плотность, наводимую в произвольной точке заземленной чаши количеством электричества q , помещенным в точку Q , не расположенную теперь на сферической поверхности, являющейся продолжением чаши.

Произведем инверсию чаши по отношению к Q , приняв радиус сферы инверсии равным R . Чаша S перейдет в свое изображение S' , а точка P — в свое изображение P' . Нам нужно определить плотность σ' в P' для чаши S' , поддерживаемой под потенциалом V' , таким, что $q = V'R$, и не подверженной внешним влияниям.

Плотность σ в точке P первоначальной чаши будет равна $\sigma = -(\sigma'R^3/QP^3)$, причем эта чаша будет находиться под нулевым потенциалом и под воздействием количества электричества q , помещенного в точку Q .

Такая процедура приводит к следующему результату.

Пусть рис. 16 представляет собой сечение сферы через центр O , полюс чаши C и индуцирующий точечный заряд Q . Точка D соответствует в инвертируемой фигуре незанятому полюсу ободка чаши и может быть найдена следующим построением.

Проведем через Q хорды EQE' и FQF' . Если принять радиус инверсии сферы равным среднему геометрическому между отрезками, на которые делится хорда в точке Q , то $E'F'$ будет изображением EF . Пусть точка D' делит дугу $F'CE'$ пополам, так что $F'D'$ равно $D'E'$. Проведем прямую $D'QD$ до пересечения со сферой в точке D . Эта точка D и является искомой. Проведем также через центр сферы O и точку Q прямую $HOQH'$, пересекающуюся со сферой в точках H и H' . Тогда для любой точки P на чаше наводимая количеством электричества q в точке Q поверхностная плотность на той стороне, которая отделена от Q дополняющей чашу сферической поверхностью, будет равна

$$\sigma = \frac{q}{2\pi^2} \frac{QH \cdot QH'}{HH' \cdot PQ^3} \left\{ \frac{PQ}{DQ} \left(\frac{CD^2 - a^2}{a^2 - CP^2} \right)^{1/2} - \operatorname{arctg} \left[\frac{PQ}{DQ} \left(\frac{CD^2 - a^2}{a^2 - CP^2} \right)^{1/2} \right] \right\},$$

где a означает хорду, проведенную из полюса чаши C до ободка чаши.

На ближайшей к Q стороне поверхностная плотность равна

$$\sigma + \frac{q}{2\pi} \frac{QH \cdot QH'}{HH' \cdot PQ^3}.$$

ГЛАВА XII

ТЕОРИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

182. Число независимых случаев, в которых решена задача электрического равновесия, весьма невелико. Для сферических проводников развит метод сферических гармоник. Еще более мощными являются методы электрических изображений и инверсии в тех случаях, когда они применимы. Случай поверхностей второго порядка, насколько я знаю, — единственный, для которого известны и эквипотенциальные поверхности, и силовые линии, причем силовые линии не являются плоскими кривыми.

Но существует важный класс задач в теории электрического равновесия и в теории прохождения тока, в которых рассматривается лишь двумерное пространство.

Так, например, если всюду в рассматриваемой части электрического поля и на значительном расстоянии вне ее поверхности всех проводников образованы движением прямых линий, параллельных оси z , а та часть поля, где это не имеет места, настолько удалена от рассматриваемой части, что ее электрическим действием можно пренебречь, то электричество будет равномерно распределено вдоль всех образующих, и если рассмотреть участок поля, ограниченный двумя плоскостями, перпендикулярными оси z и находящимися на единичном расстоянии, то потенциал и распределение электричества будут функцией лишь от x и y .

Пусть $\rho dx dy$ — количество электричества в элементе объема с площадью основания $dx dy$ и единичной высотой, а σds — количество электричества на элементе площади с основанием ds и единичной высотой. Тогда уравнение Пуассона можно написать в виде

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + 4\pi\rho = 0.$$

При отсутствии свободных зарядов оно сводится к уравнению Лапласа

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0.$$

Общая задача электрического равновесия может быть сформулирована следующим образом.

Задана непрерывная двумерная область, ограниченная замкнутыми кривыми C_1, C_2 и т. д. Найти вид такой функции V , которая на этих границах принимает соответственно значения V_1, V_2 и т. д., постоянные на каждой границе, а внутри области всюду конечна, непрерывна, однозначна и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Мне неизвестно, было ли дано какое-либо совершенно общее решение даже для этой задачи, но в этом случае применим приводимый в п. 190 метод преобразования, значительно более мощный, чем любой известный нам метод решения для трех измерений.

Этот метод основан на свойствах сопряженных функций двух переменных.

Определение сопряженных функций

183. Величины α и β называются сопряженными функциями от x и y , если $\alpha + \sqrt{-1}\beta$ является функцией от $x + \sqrt{-1}y$.

Из этого определения следует, что

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\beta}{dy} \text{ и } \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, обе функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Кроме того,

$$\frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dx} = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 = \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 = R^2. \quad (3)$$

Если x и y — прямоугольные координаты, ds_1 — отрезок кривой ($\beta = \text{const}$) между кривыми (α) и ($\alpha + d\alpha$), а ds_2 — отрезок кривой α между кривыми (β) и ($\beta + d\beta$), то

$$-\frac{ds_1}{d\alpha} = \frac{ds_2}{d\beta} = \frac{1}{R}, \quad (4)$$

и кривые пересекаются под прямым углом.

Если положить потенциал равным $V = V_0 + k\alpha$, где k — некоторая постоянная, то V будет удовлетворять уравнению Лапласа, и кривые (α) будут эквипотенциальными кривыми. Кривые (β) будут при этом силовыми линиями, а поверхностный интеграл от R по цилиндрической поверхности единичной высоты, проекцией которой на плоскость xy является кривая AB , равен $k(\beta_B - \beta_A)$, где β_A и β_B — значения β на концах кривой.

Если построить на плоскости одну совокупность кривых, соответствующую значениям α , взятым в арифметической прогрессии, и другую совокупность кривых, соответствующих последовательности значений β с той же разностью прогрессии, то обе эти совокупности кривых будут пересекаться всюду под прямыми углами, и при достаточно малой общей разности обеих прогрессий элементы, на которые разделится плоскость, будут в пределе малыми квадратами, стороны которых в разных участках поля имеют разное направление и величину, будучи обратно пропорциональными R .

Если две или несколько эквипотенциальных линий (α) являются замкнутыми кривыми, ограничивающими непрерывную область, то эти кривые можно принять за поверхности проводников с потенциалами соответственно $V_0 + k\alpha_1$, $V_0 + k\alpha_2$ и т. д. Количество электричества на любом из этих проводников, расположенное между силовыми линиями (β_1) и (β_2), равно $k(\beta_2 - \beta_1)/4\pi$.

Таким образом, число эквипотенциальных кривых между двумя проводниками будет показывать разность потенциалов между ними, а число силовых линий, выходящих из проводника, будет показывать количество электричества на нем.

Ниже мы сформулируем некоторые из наиболее важных теорем, касающихся сопряженных функций, причем при их доказательстве мы будем исходить либо из уравнений (1), содержащих производные, либо из первоначального определения, использующего мнимые обозначения.

184. Теорема I. Если x' и y' — сопряженные функции по отношению к x и y , а x'' и y'' — тоже сопряженные функции по отношению к x и y , то функции $x' + x''$ и $y' + y''$ будут сопряженными функциями по отношению к x и y .

Действительно, $\frac{dx'}{dx} = \frac{dy'}{dy}$ и $\frac{dx''}{dx} = \frac{dy''}{dy}$, так что $\frac{d(x' + x'')}{dx} = \frac{d(y' + y'')}{dy}$.

Далее, $\frac{dx'}{dy} = -\frac{dy'}{dx}$ и $\frac{dx''}{dy} = -\frac{dy''}{dx}$, откуда $\frac{d(x' + x'')}{dy} = -\frac{d(y' + y'')}{dx}$, т. е. $x' + x''$ и $y' + y''$ являются сопряженными по отношению к x и y .

*Графическое представление функции,
являющейся суммой двух заданных функций*

Пусть функция (α) от x и y графически представлена семейством кривых в плоскости xy , каждая из которых соответствует некоторому значению α из последовательности значений, нарастающих с постоянной разностью δ .

Пусть другая функция (β) от x и y аналогично представлена семейством кривых, соответствующих значениям β с той же разностью, что и в последовательности α .

Тогда для аналогичного представления функции ($\alpha + \beta$) нужно провести кривые через точки пересечения предыдущих семейств кривых, соединив точку пересечения кривых (α) и (β) с точкой пересечения кривых ($\alpha + \delta$) и ($\beta - \delta$), далее с точкой пересечения ($\alpha + 2\delta$) и ($\beta - 2\delta$) и т. д. Во всех этих точках функция имеет одно и то же значение ($\alpha + \beta$). Следующая кривая может быть проведена через точки пересечения (α) и ($\beta + \delta$), ($\alpha + \delta$) и (β), ($\alpha + 2\delta$) и ($\beta - \delta$) и т. д. Этой кривой соответствует значение функции ($\alpha + \beta + \delta$).

Таким образом, можно по имеющемуся семейству кривых (α) и семейству (β) построить семейство кривых ($\alpha + \beta$). Эти три семейства кривых могут быть построены на отдельных листах прозрачной бумаги. Совместив соответственно первый и второй листы, можно произвести построение на третьем листе.

Комбинируя таким образом сопряженные функции с помощью сложения, можно легко получить графики для многих интересных случаев, если только мы можем построить их для более простых случаев, входящих в качестве слагаемых. Однако в нашем распоряжении имеется и значительно более мощный метод преобразования решений, даваемый следующей теоремой.

185. Теорема II. Пусть x'' и y'' — сопряженные функции по отношению к переменным x' и y' , а x' и y' — сопряженные функции по отношению к x и y , тогда x'' и y'' будут сопряженными функциями по отношению к x и y .

Действительно, $\frac{dx''}{dx} = \frac{dx''}{dx'} \frac{dx'}{dx} + \frac{dx''}{dy'} \frac{dy'}{dx} = \frac{dy''}{dy'} \frac{dy'}{dy} + \frac{dy''}{dx'} \frac{dx'}{dy} = \frac{dy''}{dy}$

и

$$\frac{dx''}{dy} = \frac{dx''}{dx'} \frac{dx'}{dy} + \frac{dx''}{dy'} \frac{dy'}{dy} = -\frac{dy''}{dy'} \frac{dy'}{dx} - \frac{dy''}{dx'} \frac{dx'}{dx} = -\frac{dy''}{dx},$$

а это как раз условия того, что x'' и y'' — сопряженные функции от x и y .

Это можно показать также, исходя из первоначального определения сопряженных функций. Поскольку $x'' + \sqrt{-1} y''$ является функцией от $x' + \sqrt{-1} y'$, а $x' +$

$+V\sqrt{-1}y'$ является функцией от $x+V\sqrt{-1}y$, то $x''+V\sqrt{-1}y''$ является функцией от $x+V\sqrt{-1}y$.

Точно так же можно показать, что если x' и y' — сопряженные функции от x и y , то x и y — сопряженные функции от x' и y' .

Эту теорему можно графически интерпретировать следующим образом.

Пусть x' и y' приняты за прямоугольные координаты и на чертеже построены кривые, соответствующие значениям x'' и y'' , взятым в арифметической прогрессии. Мы получим, таким образом, два семейства кривых, разбивающих чертеж на квадратики. Построим также на чертеже горизонтальные и вертикальные прямые на равных расстояниях друг от друга, пометив их соответствующими значениями x' и y' .

Пусть теперь на другом чертеже x и y приняты за прямоугольные координаты и построено два семейства кривых x' , y' , помеченных соответствующими значениями x' и y' . Эта система криволинейных координат будет однозначно соответствовать прямоугольной системе координат x' , y' на первом чертеже.

Таким образом, если взять произвольное число точек на кривой x'' первого чертежа, заметить значения x' и y' в этих точках и отметить соответствующие точки на втором чертеже, то мы получим ряд точек преобразованной кривой x'' . Если проделать такое построение для всех кривых x'' и y'' первого чертежа, то на втором чертеже получится два семейства кривых x'' , y'' , отличающихся от прежних, но обладающих тем же свойством разбиения чертежа на квадратики.

186. Теорема III. Если V — произвольная функция от x' и y' , а x' и y' — сопряженные функции от x и y , то

$$\iint \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} \right) dx dy = \iint \left(\frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} \right) dx' dy',$$

где интегрирование справа и слева производится в соответствующих пределах.

Действительно,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dx'} \frac{dx'}{dx} + \frac{dV}{dy'} \frac{dy'}{dx},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{dx'^2} \left(\frac{dx'}{dx} \right)^2 + 2 \frac{d^2V}{dx' dy'} \frac{dx'}{dx} \frac{dy'}{dx} + \frac{d^2V}{dy'^2} \left(\frac{dy'}{dx} \right)^2 + \frac{dV}{dx'} \frac{d^2x'}{dx^2} + \frac{dV}{dy'} \frac{d^2y'}{dx^2},$$

$$\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{d^2V}{dx'^2} \left(\frac{dx'}{dy} \right)^2 + 2 \frac{d^2V}{dx' dy'} \frac{dx'}{dy} \frac{dy'}{dy} + \frac{d^2V}{dy'^2} \left(\frac{dy'}{dy} \right)^2 + \frac{dV}{dx'} \frac{d^2x'}{dy^2} + \frac{dV}{dy'} \frac{d^2y'}{dy^2}.$$

Складывая два последних уравнения и учитывая условие (1) для сопряженных функций, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} &= \frac{d^2V}{dx'^2} \left\{ \left(\frac{dx'}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dx'}{dy} \right)^2 \right\} + \frac{d^2V}{dy'^2} \left\{ \left(\frac{dy'}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dy} \right)^2 \right\} = \\ &= \left(\frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} \right) \left(\frac{dx'}{dx} \frac{dy'}{dy} - \frac{dx'}{dy} \frac{dy'}{dx} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} \right) dx dy &= \iint \left(\frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} \right) \left(\frac{dx'}{dx} \frac{dy'}{dy} - \frac{dx'}{dy} \frac{dy'}{dx} \right) dx dy = \\ &= \iint \left(\frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} \right) dx' dy'. \end{aligned}$$

Если V — потенциал, то, согласно уравнению Пуассона,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + 4\pi\rho = 0,$$

так что $\iint \rho dx dy = \iint \rho' dx' dy'$, т. е. количество электричества в соответствующих участках обеих систем одинаково, если координаты одной системы являются сопряженными функциями координат другой системы.

Дополнительные теоремы о сопряженных функциях

187. Теорема IV. Если x_1 и y_1 , а также x_2 и y_2 являются сопряженными функциями от x и y , а $X = x_1x_2 - y_1y_2$ и $Y = x_1y_2 + x_2y_1$, то X и Y — сопряженные функции от x и y .

Действительно,

$$X + V \overline{1} Y = (x_1 + V \overline{1} y_1)(x_2 + V \overline{1} y_2).$$

Теорема V. Если φ — решение уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0, \quad \text{а} \quad 2R = \ln \left\{ \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 \right\} \quad \text{и} \quad \Theta = -\operatorname{arctg} \frac{d\varphi/dx}{d\varphi/dy},$$

то R и Θ — сопряженные функции от x и y .

Действительно, R и Θ — сопряженные функции от $d\varphi/dy$ и $d\varphi/dx$, а последние являются сопряженными функциями от x и y .

Пример I. Инверсия.

188. В качестве примера общего метода преобразования возьмем случай инверсии в двух измерениях.

Пусть O — фиксированная точка в плоскости, OA — фиксированное направление, $r = OP = ae^\rho$, $\theta = AOP$, x и y — прямоугольные координаты точки P относительно O . Тогда

$$\begin{aligned} \rho &= \ln [(V x^2 + y^2)/a], & \theta &= \operatorname{arctg} (y/x), \\ x &= ae^\rho \cos \theta, & y &= ae^\rho \sin \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

так что ρ и θ являются сопряженными функциями от x и y .

Если $\rho' = n\rho$ и $\theta' = n\theta$, то ρ' и θ' будут сопряженными функциями от ρ и θ . При $n = -1$

$$r' = a^2/r \quad \text{и} \quad \theta' = -\theta, \quad (6)$$

т. е. мы имеем дело с обычной инверсией в сочетании с поворотом на 180° от направления OA .

Инверсия в двух измерениях

Пусть в этом случае r и r' представляют собой расстояния соответствующих точек от O , e и e' — полную электризацию тела, S и S' — элементы поверхности, V и V' — элементы объема, σ и σ' — поверхностные плотности, ρ и ρ' — объемные плотности, φ и φ' — соответствующие потенциалы. Тогда

$$\frac{r'}{r} = \frac{S'}{S} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{r'^2}{a^2}, \quad \frac{V'}{V} = \frac{a^4}{r^4} = \frac{r'^4}{a^4}, \quad \frac{e'}{e} = 1, \quad \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{r^2}{a^2} = \frac{a^2}{r'^2}, \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{r^4}{a^4} = \frac{a^4}{r'^4}, \quad (7)$$

и, поскольку, по предположению, φ' получается из φ выражением старых переменных через новые,

$$\varphi'/\varphi=1. \quad (7')$$

Пример II. Электрические изображения в двух измерениях

189. Пусть A — центр окружности радиуса $AQ=b$ [рис. 17], находящейся при нулевом потенциале, а E — заряд в точке A . Тогда потенциал в точке P равен

$$\varphi=2E \ln (b/AP), \quad (8)$$

и если окружность представляет собой сечение полого проводящего цилиндра, то поверхностная плотность в произвольной точке Q равна $-E/(2\pi b)$.

Произведем инверсию этой системы относительно точки O , приняв $AO=mb$, $a^2=(m^2-1)b^2$. Тогда окружность инвертируется сама в себя и мы получаем заряд в A' , равный заряду A , причем $AA'=(b/m)$.

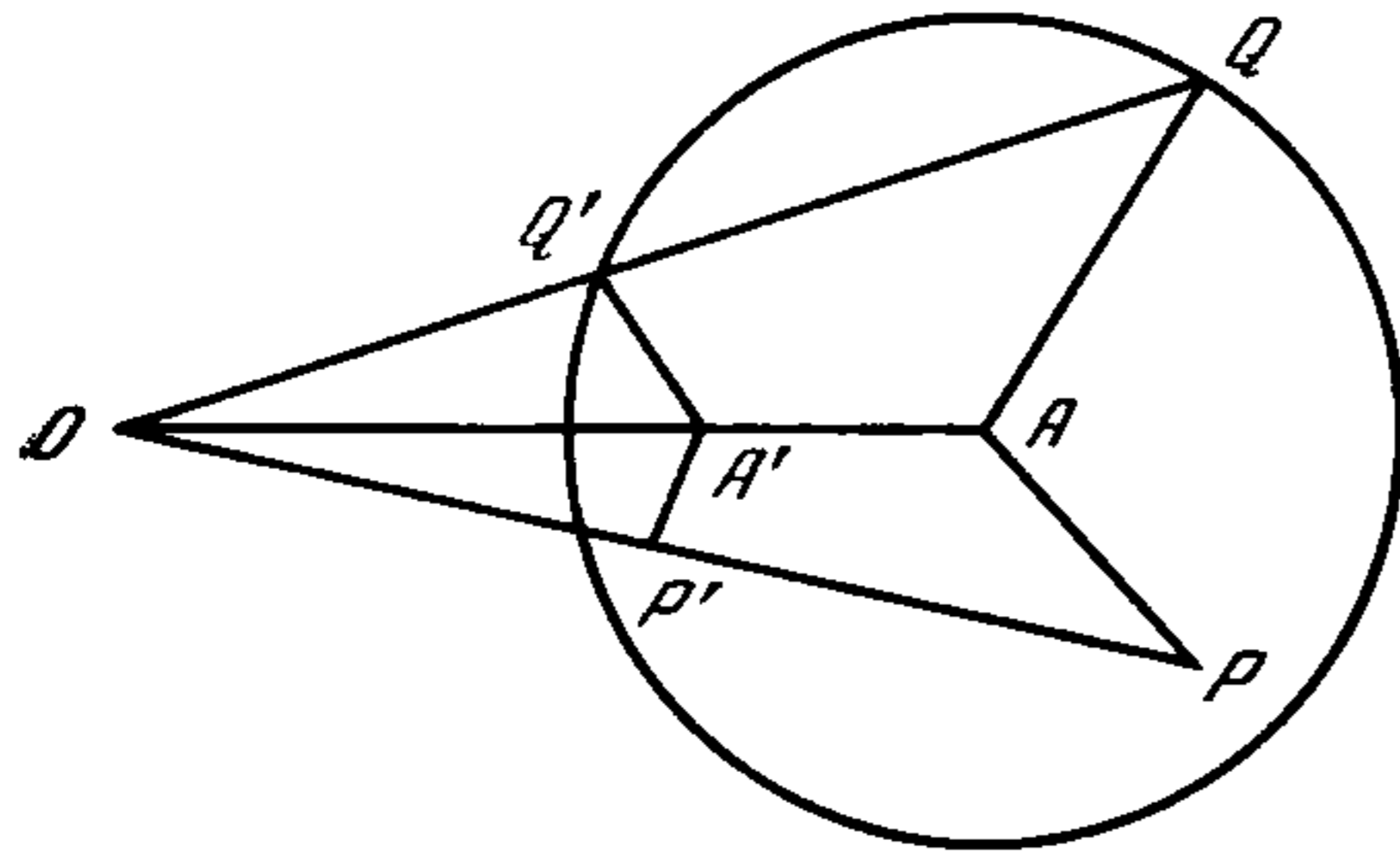


Рис. 17

Плотность в точке Q' равна $-\frac{E}{2\pi b} \frac{b^2-AA'^2}{A'Q'^2}$, а потенциал в произвольной точке P' внутри окружности равен

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi = 2E (\ln b - \ln AP) = \\ &= 2E (\ln OP' - \ln A'P' - \ln m). \end{aligned} \quad (9)$$

Этот потенциал эквивалентен потенциалу, возникающему от комбинации заряда E в точке A' и заряда $-E$ в точке O , являющейся изображением точки A'

по отношению к окружности. Таким образом, заряд изображения в точке O равен и противоположен заряду в точке A' .

Если точка P' определена своими полярными координатами, отнесенными к центру окружности, то, положив $\rho = \ln r - \ln b$, $\rho_0 = \ln AA' - \ln b$, получим

$$AP' = be^\rho, \quad AA' = be^{\rho_0}, \quad AO = be^{-\rho_0}, \quad (10)$$

и потенциал в точке (ρ, θ) равен

$$\varphi = E \ln (e^{-2\rho_0} - 2e^{-\rho_0}e^\rho \cos \theta + e^{2\rho}) - E \ln (e^{2\rho_0} - 2e^{\rho_0}e^\rho \cos \theta + e^{2\rho}) + 2E\rho_0. \quad (11)$$

Это потенциал в точке (ρ, θ) , обусловленный зарядом E , помещенному в точку $(\rho_0, 0)$, причем $\varphi=0$, когда $\rho=0$.

В этом случае ρ и θ — сопряженные функции в уравнении (5): ρ — логарифм отношения радиус-вектора точки к радиусу окружности, а θ — угол.

Центр является единственной особой точкой в этой системе координат, так что линейный интеграл $\int (d\theta/ds)ds$ по замкнутой кривой равен 2π или 0 в зависимости от того, охватывает кривая центр или не охватывает.

Пример III. Преобразование Нейманна для этого случая ¹

190. Пусть теперь α и β — любые сопряженные функции от x и y , такие, что кривые (α) являются эквипотенциальными кривыми, а кривые (β) — силовыми линиями, обусловленными зарядом с линейной плотностью в половину единицы заряда, расположенным в начале координат, и заряженной системой, расположенной произвольным образом на некотором расстоянии от начала координат.

Предположим, что кривая, для которой потенциал равен α_0 , является замкнутой, причем ни одна часть заряженной системы не расположена внутри нее, за исключением половины единичного заряда в начале координат.

Тогда все кривые (α), расположенные между этой кривой и началом координат, будут замкнутыми кривыми, охватывающими начало координат, а все кривые (β) встречаются в начале координат и перпендикулярны кривым (α).

Координаты произвольной точки внутри кривой (α_0) определяются значениями α и β в этой точке, причем при перемещении точки вдоль одной из кривых (α) в положительном направлении значение β увеличивается на 2π при полном обходе кривой.

Предположим теперь, что кривая (α_0) является сечением внутренней поверхности полого цилиндра произвольной формы, поддерживаемого при нулевом потенциале и находящегося под влиянием заряда с линейной плотностью E , расположенного на прямой, представляемой началом координат. При этом внешнюю заряженную систему можно не учитывать, потенциал в произвольной точке (α) внутри кривой равен

$$\varphi = 2E (\alpha - \alpha_0), \quad (12)$$

а количество электричества на любом отрезке кривой α_0 , ограниченной точками соответствующими β_1 и β_2 , равно

$$Q = E (\beta_1 - \beta_2) / 2\pi. \quad (13)$$

Если мы таким образом или как-нибудь иначе определили распределение потенциала для кривой данной формы с зарядом, расположенным в данной точке, принятой за начало координат, то мы можем перейти к случаю, когда заряд расположен в любой другой точке внутри кривой, применив общий метод преобразования.

Пусть значения α и β для точки, в которой помещен заряд, равны α_1 и β_1 . Подставляя в уравнение (11) $\alpha - \alpha_0$ вместо ρ , $\alpha_1 - \alpha_0$ вместо ρ_0 (поскольку оба выражения обращаются в нуль на поверхности $\alpha = \alpha_0$) и $\beta - \beta_1$ вместо θ , получим для потенциала в произвольной точке с координатами α и β

$$\begin{aligned} \varphi = & E \ln (1 - 2e^{\alpha + \alpha_1 - 2\alpha_0} \cos (\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha + \alpha_1 - 2\alpha_0)}) - \\ & - E \ln (1 - 2e^{\alpha - \alpha_1} \cos (\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha - \alpha_1)}) - 2E (\alpha_1 - \alpha_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Это выражение для потенциала обращается в нуль при $\alpha = \alpha_0$, конечно и непрерывно внутри кривой α_0 , за исключением точки (α_1, β_1) , в которой второе слагаемое обращается в бесконечность, причем в окрестности этой точки это слагаемое в пределе равно $-2E \ln r'$, где r' — расстояние от этой точки.

¹ См. Crelle's Journal, LIX, p. 335, 1861, а также Schwarz Crelle, LXXIV, p. 218, 1872.

Таким образом, мы нашли способ нахождения решения задачи Грина для заряда, находящегося в любой точке внутри замкнутой кривой, если известно решение для какой-либо другой точки.

Заряд на элементе кривой α_0 между точками β и $\beta + d\beta$, наводимый зарядом E , помещенным в точку (α_1, β_1) , равен в обозначениях п. 183 $-\frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi}{ds_1} ds_2$, где ds_1 отсчитывается внутрь, а α после дифференцирования полагается равным α_0 .

Согласно (4) из п. 183, это равно $\frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi}{d\alpha} d\beta$, ($\alpha = \alpha_0$); т. е.

$$-\frac{E}{2\pi} \frac{1 - e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}{1 - 2e^{(\alpha_1 - \alpha_0)} \cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}} d\beta. \quad (15)$$

Это выражение позволяет найти потенциал в произвольной точке (α_1, β_1) внутри замкнутой кривой, если в каждой точке этой кривой потенциал задан как функция β при условии, что внутри замкнутой кривой нет зарядов.

Действительно, согласно п. 86, часть потенциала в точке (α_1, β_1) , обусловленная наличием потенциала V на участке $d\beta$ замкнутой кривой, равна nV , где n — заряд, наводимый на $d\beta$ единичным зарядом в (α_1, β_1) . Таким образом, если V — потенциал в точке замкнутой кривой, заданный как функция β , а φ — потенциал в точке (α_1, β_1) внутри замкнутой кривой, не содержащей внутри зарядов, то

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}) V d\beta}{1 - 2e^{(\alpha_1 - \alpha_0)} \cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}. \quad (16)$$

Пример IV. Распределение электричества у ребра проводника, образуемого двумя плоскими гранями

191. В случае, когда границей проводника является бесконечная плоскость $y=0$, проводник расположен со стороны отрицательных y и поверхностная плотность заряда равна σ_0 , потенциал на расстоянии y от плоскости равен $V=C-4\pi\sigma_0 y$, где C — значение потенциала на самом проводнике.

Примем некоторую прямую, лежащую в плоскости, за полярную ось и преобразуем это выражение к полярным координатам. Тогда потенциал представится в виде $V=C-4\pi\sigma_0 e^{\rho} \sin \theta$, а количество электричества на параллелограмме единичной ширины и длины ae^{ρ} , измеряемой вдоль оси, будет равно $E=\sigma_0 ae^{\rho}$.

Положим теперь $\rho = n\rho'$ и $\theta = n\theta'$. Поскольку ρ' и θ' сопряжены ρ и θ , уравнения

$$V = C - 4\pi\sigma_0 a e^{n\rho'} \sin n\theta' \quad \text{и} \quad E = \sigma_0 a e^{n\rho'}$$

дают возможное распределение потенциала и заряда.

Заменим $ae^{\rho'}$ на r , где r — расстояние от оси, и переобозначим угол θ' через θ . Тогда получим

$$V = C - 4\pi\sigma_0 \frac{r^n}{a^{n-1}} \sin n\theta, \quad E = \sigma_0 \frac{r^n}{a^{n-1}}.$$

V равно C при $n\theta$ равном π или кратном π .

Пусть ребро представляет собой выступающий угол проводника с раствором α между гранями, тогда угол области диэлектрика равен $2\pi - \alpha$, так что при $\theta = 2\pi - \alpha$ точка находится на второй грани проводника.

Поэтому мы должны положить $n(2\pi - \alpha) = \pi$ или $n = \pi / (2\pi - \alpha)$. Тогда

$$V = C - 4\pi\sigma_0 a (r/a)^{\pi/(2\pi-\alpha)} \sin \frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha}, \quad E = \sigma_0 a (r/a)^{\pi/(2\pi-\alpha)}.$$

Поверхностная плотность σ на произвольном расстоянии r от ребра равна

$$\sigma = \frac{dE}{dr} = \frac{\pi}{2\pi-\alpha} \sigma_0 (r/a)^{(\alpha-\pi)/(2\pi-\alpha)}.$$

Если угол выступающий, то α меньше π и плотность заряда меняется обратно пропорционально некоторой степени расстояния от ребра, так что на самом ребре плотность становится бесконечной, хотя полный заряд на любом конечном расстоянии от ребра всегда конечен.

Так, при $\alpha = 0$ ребро бесконечно острое, как край математической плоскости. В этом случае плотность меняется обратно пропорционально квадратному корню из расстояния от края.

При $\alpha = \pi/3$ ребро такое, как у равносторонней призмы, а плотность меняется обратно расстоянию в степени $2/5$.

При $\alpha = \pi/2$ угол у ребра прямой, а плотность обратно пропорциональна корню кубическому из расстояния.

При $\alpha = 2\pi/3$ ребро подобно ребру правильной шестигранной призмы, а плотность обратно пропорциональна корню четвертой степени из расстояния.

При $\alpha = \pi$ ребро исчезает и плотность постоянна.

При $\alpha = 4\pi/3$ угол у ребра равен внешнему углу шестигранной призмы, а плотность *прямо* пропорциональна корню четвертой степени из расстояния от ребра.

При $\alpha = 3\pi/2$ ребро представляет собой входящий прямой угол, а плотность *прямо* пропорциональна расстоянию от ребра.

При $\alpha = 5\pi/3$ у ребра входящий угол 60° , а плотность пропорциональна квадрату, расстояния от ребра.

В действительности, во всех случаях, когда плотность становится бесконечной в какой-либо точке, имеет место электрический разряд в диэлектрик в этой точке, как было пояснено в п. 55.

Пример V. Эллипсы и гиперболы. Рис. X

192. Мы знаем, что, если положить

$$x_1 = e^\varphi \cos \psi, \quad y_1 = e^\varphi \sin \psi, \quad (1)$$

то x_1 и y_1 будут сопряженными функциями от φ и ψ . Точно так же, если

$$x_2 = e^{-\varphi} \cos \psi, \quad y_2 = e^{-\varphi} \sin \psi, \quad (2)$$

то x_2 и y_2 будут также сопряженными функциями от φ и ψ . Следовательно, если положить

$$2x = x_1 + x_2 = (e^\varphi + e^{-\varphi}) \cos \psi, \quad 2y = y_1 + y_2 = (e^\varphi + e^{-\varphi}) \sin \psi, \quad (3)$$

то x и y также будут сопряженными функциями от φ и ψ . В этом случае точки с постоянным φ лежат на эллипсе с осями $e^\varphi + e^{-\varphi}$ и $e^\varphi - e^{-\varphi}$. Точки, для которых постоянно ψ , лежат на гиперболе с осями $2 \cos \psi$ и $2 \sin \psi$. На оси x между $x = -1$ и $x = +1$ имеем

$$\varphi = 0, \quad \psi = \arccos x. \quad (4)$$

Вне этих пределов с обеих сторон на оси

$$\begin{aligned} x > 1, & \quad \psi = 2n\pi, & \quad \varphi = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \\ x < -1, & \quad \psi = (2n + 1)\pi, & \quad \varphi = \ln(\sqrt{x^2 - 1} - x). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, считая φ потенциальной функцией, а ψ — функцией потока, мы приходим к случаю потока электричества с положительной стороны оси x на отрицательную через промежуток между точками -1 и $+1$, причем участки оси вне этих пределов непроницаемы для электричества.

Поскольку ось y в этом случае является линией потока, мы можем ее также считать непроницаемой для электричества.

Мы можем рассматривать также эллипсы как сечения эквипотенциальных поверхностей для бесконечно длинного плоского проводника ширины 2, заряженного половиной единицы электричества на единицу длины. (Учитывается заряд с обеих сторон плоского проводника.)

Если считать ψ потенциальной функцией, а φ — функцией потока, то мы приходим к случаю бесконечной плоскости, в которой вырезана полоса шириной 2 и y которой одна сторона заряжена до потенциала π , а вторая остается под нулевым потенциалом.

Эти задачи можно считать частными случаями поверхностей второго порядка, рассмотренных в главе X. Форма кривых показана на рис. X [в конце книги].

Пример VI. Рис. XI

193. Пусть теперь x' и y' — функции от x и y , причем

$$x' = b \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y' = b \operatorname{arctg}(y/x). \quad (6)$$

Тогда x' и y' будут также сопряженными функциями от φ и ψ , определенных в п. 192. Кривые, получающиеся при преобразовании рис. X к новым координатам, приведены на рис. XI.

Если x' и y' — прямоугольные координаты, то свойства оси x на первой фигуре переносятся на последовательность кривых, параллельных x' , на второй фигуре, для которых $y' = bn'\pi$, где n' — произвольное целое число. Положительные значения x' на этих кривых будут соответствовать значениям x , большим единицы, для которых, как мы уже видели,

$$\psi = n\pi, \quad \varphi = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(e^{x'/b} + \sqrt{e^{(2x'/b)} - 1}). \quad (7)$$

Отрицательные значения x' на тех же кривых будут соответствовать значениям x , меньшим единицы, для которых, как мы видели,

$$\varphi = 0, \quad \psi = \arccos x = \arccos e^{(x'/b)}. \quad (8)$$

Свойства оси y на первой фигуре переносятся на последовательность кривых на второй фигуре, параллельных x' , для которых

$$y' = b\pi[n' + (1/2)]. \quad (9)$$

На этих кривых $\psi = \pi[n + (1/2)]$ для всех точек, как положительных, так и отрицательных, а

$$\varphi = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \ln(e^{(x'/b)} + \sqrt{e^{(2x'/b)} + 1}). \quad (10)$$

Кривые, для которых φ и ψ — постоянны, можно усмотреть непосредственно из уравнений

$$x' = \frac{1}{2} b \ln \frac{1}{4} (e^{2\varphi} + e^{-2\varphi} + 2 \cos 2\psi), \quad y' = b \operatorname{arctg} \left(\frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}} \operatorname{tg} \psi \right).$$

Поскольку фигура повторяется через интервалы πb по y' , достаточно рассмотреть кривые для одного такого интервала.

Следует различать два случая, в зависимости от того, какая из двух функций, φ или ψ , меняет знак вместе с y' . Предположим, что знак меняет функция φ . Тогда любая кривая, для которой ψ постоянно, будет симметрична относительно оси x' и ортогонально пересекать эту ось в некоторой точке отрицательной полуоси x' . Если начать с этой точки, для которой $\varphi = 0$, и постепенно увеличивать φ , то кривая будет постепенно изгибаться от первоначально ортогонального к оси до почти параллельного (при больших φ) направления. Положительная полуось x' принадлежит к системе $\psi = \text{const}$, а именно ψ на ней равно нулю, а при $y' = \pm \pi b/2$ $\psi = \pi/2$. Таким образом, кривые, для которых ψ имеет постоянное значение между 0 и $\pi/2$, образуют систему кривых, охватывающих положительную полуось x' .

Кривые, для которых φ постоянно, пересекают ортогонально систему кривых ψ , причем значения φ лежат в пределах от $+\infty$ до $-\infty$. Для любой кривой φ , построенной выше оси x' , значение φ положительно, вдоль отрицательной полуоси x' значение φ равно нулю, а для любой кривой ниже оси x' значение φ отрицательно.

Мы видели, что система ψ симметрична относительно оси x' . Пусть PQR — любая кривая, ортогонально пересекающая эту систему и оканчивающаяся в точках P и R на линиях $y' = \pm \pi b/2$, причем точка Q лежит на оси x' . Тогда кривая PQR симметрична относительно оси x' , но если c — значение φ вдоль PQ , то значение φ вдоль QR равно $-c$. В случае, рассматриваемом в п. 195, эта разрывность в значениях φ объясняется распределением электрического заряда.

Если же считать, что не φ , а ψ меняет свой знак вместе с y' , то значение φ будет меняться от 0 до ∞ . При $\varphi = 0$ мы имеем отрицательную полуось x' , при $\varphi = \infty$ — бесконечно удаленную прямую, перпендикулярную к оси x' . Вдоль любой кривой PQR , расположенной между этими двумя кривыми, пересекающей ортогонально ψ -систему, значение φ постоянно по всей длине и положительно.

Значения ψ испытывают теперь скачок в точке, где кривая постоянного значения ψ пересекает отрицательную полуось x' , знак ψ при этом меняется. Значение этой разрывности ψ станет ясно в п. 197.

Кривые, построение которых здесь описано, приведены на рис. XI. При этом следует ограничиться двумя третями графика, отбросив верхнюю треть.

194. Если считать φ потенциальной функцией, а ψ — функцией потока, то мы приходим к случаю бесконечно длинной металлической полосы шириной πb

с непроводящей прокладкой, неограниченно простирающейся от начала координат в положительном направлении и, таким образом, разделяющей положительную часть полосы на две отдельных части. Мы можем представлять себе эту прокладку как узкую щель в металлическом листе.

Если электрический ток течет вдоль одной стороны этой прокладки и обратно вдоль другой, причем вход и выход тока находятся на бесконечном расстоянии на положительной полуоси, то распределение потенциала и тока дается соответственно функциями φ и ψ .

Если, наоборот, считать ψ потенциалом, а φ — функцией потока, то мы придем к случаю тока, протекающего в общем направлении вдоль y' по листу, в котором помещен ряд непроводящих прокладок, параллельных x' и простирающихся от оси y' до бесконечности в отрицательном направлении.

195. Полученные результаты можно также применить к двум важным случаям статического электричества.

(1) Пусть проводник в виде плоского листа, ограниченного прямолинейным краем с одной стороны и неограниченного с другой стороны, помещен в плоскости xz с положительной стороны от начала координат и пусть параллельно ему по обе стороны на расстоянии $\pi b/2$ помещены две бесконечные проводящие плоскости. Тогда потенциальная функция ψ равна 0 на среднем проводнике и равна $\pi/2$ на обеих плоскостях.

Рассмотрим количество электричества на части среднего проводника, простирающейся вдоль z на расстояние 1, а вдоль x' — от начала координат до $x' = a$.

Количество электричества на части этой полосы, простирающейся от x'_1 до x'_2 , равно $(\varphi_2 - \varphi_1)/4\pi$, следовательно, количество электричества от начала координат до $x' = a$ на одной стороне средней пластины равно

$$E = \frac{1}{4\pi} \ln (e^{a/b} + \sqrt{e^{(2a/b)} - 1}). \quad (11)$$

Если a много больше b , то

$$E = \frac{1}{4\pi} \ln (2e^{(a/b)}) = \frac{a + b \ln 2}{4\pi b}. \quad (12)$$

Таким образом, количество электричества на пластине, ограниченной прямолинейным краем, больше, чем оно было бы при равномерном распределении с плотностью, равной плотности вдали от границы, и равно количеству электричества, равномерно распределенному с той же плотностью по пластине, ширина которой увеличена на $b \ln 2$ за пределы ее фактической границы.

Это воображаемое однородное распределение указано пунктирными прямыми на рис. XI. Вертикальные прямые изображают силовые линии, а горизонтальные — эквипотенциальные поверхности в предположении однородной плотности в обеих плоскостях, продолженных до бесконечности во всех направлениях.

196. Иногда конденсаторы представляют собой пластину, помещенную посередине между двумя параллельными пластинами, простирающимися значительно дальше, чем промежуточная пластина. Если радиус кривизны границы промежуточной пластины много больше расстояния между пластинами, эту границу можно считать прямолинейной и при расчете емкости конденсатора принять, что площадь промежуточной пластины увеличена на полосу постоянной ширины вдоль

всей границы, а поверхностная плотность на этой увеличенной пластине та же, что на участках первоначальной пластины, удаленных от границы.

Таким образом, если S — истинная площадь пластины, L — ее периметр, а B — расстояние между большими пластинами, то

$$b = B/\pi \quad (13)$$

и ширина дополнительной полоски равна

$$\alpha = (B \cdot \ln 2)/\pi, \quad (14)$$

так что площадь увеличенной пластины равна

$$S' = S + (BL \cdot \ln 2)/\pi, \quad (15)$$

а емкость одной стороны средней пластины равна

$$\frac{1}{2\pi} \frac{S'}{B} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{S}{B} + L \frac{1}{\pi} \ln 2 \right\}. \quad (16)$$

Поправки на толщину пластины

Поскольку толщиной средней пластины в общем случае нельзя пренебречь по сравнению с расстоянием между пластинами, можно получить лучшее описание этого случая, приняв сечение промежуточной пластины соответствующим кривой $\psi = \psi'$.

При этом пластина будет иметь почти постоянную толщину $\beta = 2b\psi'$ вдали от границы и закругление у края.

Истинное положение края пластины можно найти, положив $y' = 0$, откуда

$$x' = b \ln \cos \psi'. \quad (17)$$

Значение ψ на этом краю равно 0, а в точке, для которой $x' = a$ (a/b велико), оно приблизительно равно $(a + b \ln 2)/b$.

Таким образом, общее количество электричества на пластине таково, как если бы к ней добавлялась полоса шириной

$$\frac{B}{\pi} \left(\ln 2 + \ln \cos \frac{\pi\beta}{2B} \right), \text{ т. е. } \frac{B}{\pi} \ln \left(2 \cos \frac{\pi\beta}{2B} \right), \quad (18)$$

а плотность была бы всюду постоянной и равной плотности вдали от границы.

Плотность у края

Поверхностная плотность в любой точке пластины равна

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi}{dx'} = \frac{1}{4\pi b} \frac{e^{x'/b}}{\sqrt{e^{2x'/b} - 1}} = \frac{1}{4\pi b} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-2x'/b} + \frac{3}{8} e^{-4x'/b} + \dots \right). \quad (19)$$

Величина в скобках быстро приближается к единице с ростом x' , так что на расстоянии от границы, превышающем в n раз ширину полоски α , истинная плотность превышает нормальную примерно на $1/2^{2n+1}$ от нормальной плотности.

Аналогично можно найти плотность на бесконечных пластинах

$$= \frac{1}{4\pi b} \frac{e^{x'/b}}{\sqrt{e^{2x'/b} + 1}}. \quad (20)$$

При $x'=0$ плотность составляет $2^{-1/2}$ от нормальной плотности.

В сторону положительных x' на расстоянии от границы, превышающем в n раз ширину граничной полосы, плотность меньше нормальной примерно на $1/2^{2n+1}$ от нормальной плотности. На таком же расстоянии в сторону отрицательных x' плотность составляет примерно $1/2^n$ от нормальной плотности.

Эти результаты позволяют судить о степени точности, на которую можно рассчитывать при применении этих методов к пластинам ограниченных размеров или при наличии нерегулярностей недалеко от границы. Такое же распределение имело бы место и в случае бесконечной последовательности одинаковых пластин на равных расстояниях друг от друга, потенциалы которых попеременно равны $+V$ и $-V$. В этом случае расстояние между пластинами следует принять равным B .

197. (2) Вторым случаем, который мы рассмотрим, — это случай бесконечной совокупности плоскостей параллельных $x'z$, отстоящих друг от друга на расстояние $B=\pi b$ и ограничиваемых плоскостью $y'z$, так что они расположены лишь с отрицательной стороны от этой плоскости. Если считать φ потенциальной функцией, то эти плоскости можно рассматривать как проводники под нулевым потенциалом.

Рассмотрим кривые постоянного φ .

При $y'=\pi b$, т. е. на продолжении каждой плоскости,

$$x' = b \ln [(e^\varphi + e^{-\varphi})/2]. \quad (21)$$

При $y' = [n + (1/2)]\pi b$, т. е. в промежуточных положениях,

$$x' = b \ln [(e^\varphi - e^{-\varphi})/2]. \quad (22)$$

Таким образом, при больших φ кривая постоянного φ имеет волнообразный характер.

Среднее ее расстояние от оси y' приблизительно равно

$$a = b (\varphi - \ln 2), \quad (23)$$

а амплитуда колебаний по обе стороны от этой прямой равна

$$\frac{1}{2} b \ln \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{e^\varphi - e^{-\varphi}}. \quad (24)$$

При больших φ эта величина стремится к $be^{-2\varphi}$, так что кривая приближается к прямой линии, параллельной оси y' и находящейся на расстоянии a от этой оси с положительной стороны.

Если принять, что плоскость $x'=a$ поддерживается под постоянным потенциалом, а система параллельных плоскостей — под другим потенциалом, то, поскольку $b\varphi = a + b \ln 2$, поверхностная плотность электричества, наведенного на плоскости, такая же, как при помещении плоскости, параллельной данной, при потенциале, равном потенциалу последовательности плоскостей, на расстоянии, превышающем расстояние до краев плоскостей на $b \ln 2$.

Если B — расстояние между двумя плоскостями бесконечной последовательности, $B = \pi b$, то дополнительное расстояние равно

$$\alpha = (B \ln 2)/\pi. \quad (25)$$

198. Рассмотрим теперь объем, заключенный между двумя эквипотенциальными поверхностями, одна из которых состоит из последовательности параллельных волн, а вторая соответствует большим значениям φ и может приближенно считаться плоской.

Если D — глубина этих колебаний, измеряемая от вершины до впадины каждой волны, то для соответствующего значения φ получим

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{D/b} + 1}{e^{D/b} - 1}. \quad (26)$$

Значение x' в вершине волны равно

$$b \ln [(e^\varphi + e^{-\varphi})/2]. \quad (27)$$

Таким образом ², если A — расстояние от вершин волн до противоположащей плоскости, то емкость системы, состоящей из плоской поверхности, и волнообразной поверхности такая же, как для двух плоскостей, находящихся на расстоянии $A + \alpha'$, где

$$\alpha' = \frac{B}{\pi} \ln \frac{2}{1 + e^{-\pi D/B}}. \quad (28)$$

199. Если в проводнике с плоской поверхностью проделана отдельная канавка такой формы, а другой проводник представляет собой плоскую поверхность на расстоянии A , то емкость одного проводника по отношению к другому при этом уменьшается. Уменьшение емкости не превышает $(1/n)$ -й части уменьшения, вызываемого n такими рядом расположенными канавками, потому что в последнем случае средняя электрическая сила между проводниками будет меньше, чем в первом, так что индукция на поверхности каждой канавки будет уменьшена за счет соседних канавок.

Пусть L — длина, B — ширина, D — глубина канавки. Емкость участка противостоящей плоскости площади S будет равна

$$\frac{S - LB}{4\pi A} + \frac{LB}{4\pi(A + \alpha')} = \frac{S}{4\pi A} - \frac{LB}{4\pi A} \frac{\alpha'}{A + \alpha'}. \quad (29)$$

При A много больше B или α' поправка, согласно (28), принимает вид

$$\frac{L}{4\pi^2} \frac{B^2}{A^2} \ln \frac{2}{1 + e^{-\pi D/B}}, \quad (30)$$

² Пусть Φ — потенциал плоскости, а φ — потенциал волнообразной поверхности. Количество электричества на плоскости, приходящееся на единицу площади, равно $1/4 \pi b$. Следовательно, емкость

$$= 1/4 \pi b (\Phi - \varphi), \quad = 1/4 \pi (A + \alpha') \quad (\text{по предположению}).$$

Таким образом, $A + \alpha' = b (\Phi - \varphi)$. Но $A + b \ln [(e^\varphi + e^{-\varphi})/2] = b (\Phi - \ln 2)$. Следовательно, $\alpha' = -b\varphi + b (\ln 2 + \ln^{1/2}(e^\varphi + e^{-\varphi})) = b \ln (1 + e^{-2\varphi}) = b \ln [2/(1 + e^{-D/b})]$, согласно (26).

а для щели бесконечной глубины, полагая $D = \infty$, получим

$$\frac{L}{4\pi^2} \frac{B^2}{A^2} \ln 2. \quad (31)$$

Чтобы найти поверхностную плотность на семействе параллельных пластин, нужно определить $\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{d\psi}{dx'}$ при $\varphi = 0$. Расчет дает

$$\sigma = \frac{1}{4\pi b} \frac{1}{\sqrt{e^{-2x'/b} - 1}}. \quad (32)$$

Средняя плотность на плоской пластине, находящейся на расстоянии A от краев семейства пластин, равна $\bar{\sigma} = 1/4\pi b$. Следовательно, на расстоянии nx от края каждой пластины поверхностная плотность равна $(2^{2n} - 1)^{-1/2}$ от этой средней плотности.

200. Попробуем теперь вывести из наших результатов распределение электричества в конфигурации в виде семейства коаксиальных цилиндров перед плоскостью, образуемой вращением двумерной системы из п. 197 вокруг оси $y' = -R$. В этом случае уравнение Пуассона примет вид

$$\frac{d^1V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} + \frac{1}{R+y'} \frac{dV}{dy'} + 4\pi\rho = 0. \quad (33)$$

Примем, что V равно функции φ из п. 193, и определим значение ρ из этого уравнения. Мы знаем, что первые два члена сократятся, так что

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R+y'} \frac{d\varphi}{dy'}. \quad (34)$$

Если предположить, что, кроме уже рассмотренной ранее поверхностной плотности, имеет место объемное распределение электричества по установленному выше закону, то распределение потенциала будет даваться кривыми на рис. XI.

Но из рис. XI видно, что $d\varphi/dy'$ очень мало, за исключением областей вблизи границ пластин, так что это новое распределение можно приблизительно представить некоторым поверхностным распределением электричества у краев пластин.

Если, следовательно, вычислить интеграл $\int \rho dx' dy'$ от $y' = 0$ до $y' = \pi b/2$ и от $x' = -\infty$ до $x' = +\infty$, то можно найти полный дополнительный заряд на одной стороне пластин, обусловленный кривизной.

Поскольку $\frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{d\psi}{dx'}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R+y'} \frac{d\psi}{dx'} dx' = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R+y'} (\psi_{\infty} - \psi_{-\infty}) = \frac{1}{8} \frac{1}{R+y'} \left(2 \frac{y'}{B} - 1 \right). \quad (35)$$

Интегрируя по y' , получим

$$\int_0^{B/2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx' dy' = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \frac{2R+B}{B} \ln \frac{2R+B}{2R}, \quad (36)$$

$$= -\frac{1}{32} \frac{B}{R} + \frac{1}{192} \frac{B^2}{R^2} + \dots \quad (37)$$

Это выражение дает половину полного количества электричества, приходящегося на единицу длины, которое мы должны считать распределенным в пространстве вблизи края одного из цилиндров. Поскольку эта объемная плотность заметна лишь вблизи края пластины, мы можем считать все электричество сосредоточенным на поверхности пластины, не изменив при этом заметным образом его воздействие на противоположащую плоскую поверхность. При расчете притяжения этой поверхности к цилиндрической поверхности мы можем считать это электричество расположенным на цилиндрической поверхности.

Если бы никакой кривизны не было, то избыточный заряд на положительной стороне пластины, приходящийся на единицу длины, был бы равен

$$-\int_{-\infty}^0 \frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi}{dy'} dx' = \frac{1}{4\pi} (\psi_0 - \psi_{-\infty}) = -\frac{1}{8}.$$

Следовательно, при добавлении сюда полного найденного выше распределения этот заряд следует умножить на множитель $1 + (B/2R)$, чтобы получить полный заряд на положительной стороне.

Для диска радиуса R , помещенного между двумя параллельными плоскостями на расстоянии B , мы получим следующее выражение для емкости диска:

$$\frac{R^2}{B} + 2 \frac{\ln 2}{\pi} R + \frac{1}{2} B. \quad (38)$$

Теория томсоновского защитного кольца

201. В некоторых электрометрах Сэра У. Томсона большая плоская поверхность (большой диск) поддерживается под некоторым потенциалом, а на расстоянии A от этой поверхности помещен плоский диск радиуса R , окруженный большой плоской пластиной, называемой Защитным кольцом, в которой имеется круглое отверстие радиуса R' , concentрическое диску. Этот диск и пластина поддерживаются под нулевым потенциалом.

Промежуток между диском и защитной пластиной можно рассматривать как круглую канавку бесконечной глубины и ширины $R' - R$, которую мы обозначим через B .

Заряд на диске, обусловленный единичным потенциалом большого диска, будет в предположении однородной плотности равен $R^2/4A$.

Заряд с одной стороны прямолинейной канавки ширины B , длины $L = 2\pi R$ и бесконечной глубины может быть оценен по числу силовых линий, исходящих из большого диска и попадающих на эту сторону канавки. Таким образом, соглас-

но п. 198 и примечанию, заряд равен

$$\frac{1}{2}LB \times \frac{1}{4\pi b}, \text{ т. е. } \frac{1}{4} \frac{RB}{A+\alpha'},$$

поскольку в этом случае $\Phi=1$, $\varphi=0$ и, следовательно, $b=A+\alpha'$.

Но так как канавка не прямолинейна, а имеет радиус кривизны R , то полученный результат следует умножить на $1+(B/2R)$.

Следовательно, полный заряд на диске равен

$$\frac{R^2}{4A} + \frac{1}{4} \frac{RB}{A+\alpha'} \left(1 + \frac{B}{2R}\right) \quad (39)$$

$$= \frac{R^2+R'^2}{8A} - \frac{R'^2-R^2}{8A} \frac{\alpha'}{A+\alpha'}. \quad (40)$$

Величина α' не может быть больше, чем $(B \ln 2)/\pi \approx 0,22B$.

Если B мало по сравнению с A или R , то это выражение дает достаточно хорошее приближение для заряда на диске, обусловленного единичной разницей потенциалов. Отношение A к R может быть при этом произвольным, но разность между радиусом большого диска или защитного кольца и радиусом R должна быть в несколько раз больше A .

Пример VII. Рис. XII

202. Гельмгольц в своем мемуаре о разрывном течении жидкости³ указал на применение некоторых формул, в которых координаты выражены как функции потенциала и сопряженной ему функции.

Одна из его формул может быть применена к случаю заряженной пластины конечных размеров, расположенной параллельно заземленной бесконечной плоской поверхности.

Поскольку $x_1=A\varphi$ и $y_1=A\psi$, а также $x_2=Ae^\varphi \cos \psi$ и $y_2=Ae^\varphi \sin \psi$ являются сопряженными функциями от φ и ψ , то функции, получающиеся сложением x_1 и x_2 , y_1 и y_2 , тоже будут сопряженными. Поэтому, если $x=A\varphi+Ae^\varphi \cos \psi$, $y=A\psi+Ae^\varphi \sin \psi$, то x и y сопряжены по отношению к φ и ψ , а φ и ψ сопряжены по отношению к x и y .

Пусть теперь x и y — прямолинейные координаты, а $k\psi$ — потенциал. Тогда $k\varphi$ сопряжено $k\psi$ (k — постоянная).

Положим $\psi=\pi$, тогда $y=A\pi$, $x=A(\varphi-e^\varphi)$. При изменении φ от $-\infty$ до 0 и затем от 0 до $+\infty$ x меняется от $-\infty$ до $-A$ и от $-A$ до $-\infty$. Таким образом, эквипотенциальная поверхность, для которой $\psi=\pi$, представляет собой плоскость, параллельную xz , находящуюся на расстоянии $b=\pi A$ от начала координат и простирающуюся от $x=-\infty$ до $x=-A$.

Рассмотрим часть этой плоскости, простирающуюся от $x=-(A+a)$ до $x=-A$ и от $z=0$ до $z=c$, расположенную на расстоянии $y=b=A\pi$ от плоскости xz и находящуюся под потенциалом $V=k\psi=k\pi$.

Электрический заряд на рассмотренной части плоскости может быть найден по значениям φ в крайних ее точках.

³ *Monatsberichte der Konigl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin*, April 23, 1868, p. 215.

Таким образом, нам нужно определить φ из уравнения $x = -(A+a) = A(\varphi - e^\varphi)$. Для φ получается отрицательное значение φ_1 и положительное значение φ_2 . На краю плоскости при $x = -A$, $\varphi = 0$. Таким образом, заряд на одной стороне плоскости равен $-ck\varphi_1/4\pi$, а на другой, $ck\varphi_2/4\pi$. Оба эти заряда положительны, и их сумма равна $ck(\varphi_2 - \varphi_1)/4\pi$.

Если считать, что a много больше A , то

$$\varphi_1 = -\frac{a}{A} - 1 + e^{-\frac{a}{A} - 1} + e^{-(a/A) - 1} + \dots,$$

$$\varphi_2 = \ln \left\{ \frac{a}{A} + 1 + \ln \left(\frac{a}{A} + 1 + \dots \right) \right\}.$$

Если пренебречь экспоненциальным членом в φ_1 , то легко видеть, что заряд на отрицательной поверхности превышает заряд, который был бы при однородной поверхностной плотности, равной ее значению вдали от границы, на величину заряда полосы шириной $A = b/\pi$ с той же однородной поверхностной плотностью.

Полная емкость рассмотренной части плоскости равна

$$C = c(\varphi_2 - \varphi_1)/4\pi^2.$$

Полный заряд равен CV , а притяжение к бесконечной плоскости $y=0$ под потенциалом $\psi=0$ равно

$$-\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{db} = V^2 \frac{ac}{8\pi^3 A^2} \left[1 + \frac{A/a}{1 + \frac{A}{a} \ln \frac{a}{A}} + e^{-\frac{a}{A}} + \dots \right] =$$

$$= \frac{V^2 c}{8\pi b^2} \left\{ a + \frac{b}{\pi} - \frac{b^2}{\pi^2 a} \ln \frac{a\pi}{b} + \dots \right\}.$$

Эквипотенциальные и силовые линии приведены на рис. XII.

Пример VIII. Теория решетки из параллельных проволок. Рис. XIII

203. Во многих электрических приборах применяется проволочная решетка для предохранения некоторых частей прибора от электризации через индукцию. Мы знаем, что если проводник полностью окружен металлическим сосудом, находящимся под тем же потенциалом, что и проводник, то никакое заряженное тело вне сосуда не может навести на поверхности проводника никакого заряда. Однако проводник, полностью окруженный металлом, становится невидимым, и поэтому в некоторых случаях оставляют отверстие, закрываемое решеткой из тонких проволок. Рассмотрим, как сказывается такая решетка на уменьшении эффекта электрической индукции. Мы примем, что такая решетка состоит из ряда параллельных проволок, расположенных в одной плоскости через равные интервалы. Диаметр проволок будем считать много меньше расстояния между ними, а расстояние от плоскости экрана до ближайших заряженных тел с одной стороны решетки и до защищаемого проводника с другой стороны будем считать существенно больше расстояния между соседними проволочками.

204. Потенциал на расстоянии r' от оси прямой проволоки бесконечной длины с зарядом λ на единицу длины равен

$$V = -2\lambda \ln r' + C. \quad (1)$$

Мы можем записать это выражение в полярных координатах относительно оси, находящейся на единичном расстоянии от проволоки. При этом мы должны положить

$$r'^2 = 1 - 2r \cos \theta + r^2. \quad (2)$$

Если принять, что ось отсчета также заряжена с линейной плотностью λ' , то

$$V = -\lambda \ln (1 - 2r \cos \theta + r^2) - 2\lambda' \ln r + C. \quad (3)$$

Если положить, что

$$r = e^{(2\pi y)/a}, \quad \theta = (2\pi x)/a, \quad (4)$$

то, согласно теории сопряженных функций, величина

$$V = -\lambda \ln (1 - 2e^{(2\pi y)/a} \cos (2\pi x/a) + e^{(4\pi y)/a}) - 2\lambda' \ln e^{(2\pi y)/a} + C \quad (5)$$

(x, y — прямоугольные координаты) будет значением потенциала, обусловленного бесконечным рядом тонких проволочек, параллельных z , расположенных в плоскости xz и проходящих через точки оси x , для которых x кратно a , и плоскостями, перпендикулярными оси y .

Каждая из этих проволочек заряжена с линейной плотностью λ .

Член с λ' указывает на электризацию, вызывающую постоянную силу $4\pi\lambda'/a$ в направлении y .

Форма эквипотенциальных поверхностей и силовых линий при $\lambda' = 0$ дана на рис. XIII. Вблизи проволочек эквипотенциальные поверхности имеют почти цилиндрическую форму, так что мы можем считать решение приблизительно верным и в том случае, когда проволочки представляют собой цилиндры, диаметр которых конечен, но мал по сравнению, с расстоянием между ними.

Вдали от проволочек эквипотенциальные поверхности становятся все ближе и ближе к плоскостям, параллельным плоскости решетки.

Если положить в уравнении $y = b_1$, где b_1 много больше a , то приближенно

$$V_1 = -(4\pi b_1/a) (\lambda + \lambda') + C. \quad (6)$$

Если далее положить $y = -b_2$, где b_2 положительно и много больше a , то приближенно

$$V_2 = (4\pi b_2/a) \lambda' + C. \quad (7)$$

Если c — радиус проволочек решетки, причем c много меньше a , то потенциал самой решетки можно найти, приняв, что поверхность проволочки совпадает с эквипотенциальной поверхностью, пересекающей плоскость xz на расстоянии c от оси z . Поэтому для нахождения потенциала решетки положим $x = c$ и $y = 0$, откуда

$$V = -2\lambda \ln [2 \sin (\pi c/a)] + C. \quad (8)$$

205. Мы получили теперь выражения, описывающие электрическое состояние системы, состоящей из проволочной решетки с диаметром проволок, много мень-

шим расстояния между ними, и двух проводящих поверхностей по обе стороны от решетки, находящихся на расстояниях, много больших расстояния между проволочками.

Поверхностная плотность σ_1 на первой плоскости находится из уравнения (6):

$$4\pi\sigma_1 = \frac{dV_1}{db_1} = -\frac{4\pi}{a}(\lambda + \lambda'), \quad (9)$$

а на второй плоскости — из уравнения (7):

$$4\pi\sigma_2 = \frac{dV_2}{db_2} = \frac{4\pi}{a}\lambda'. \quad (10)$$

Если положить

$$\alpha = -\frac{a}{2\pi} \ln \left(2 \sin \frac{\pi c}{a} \right) \quad (11)$$

и исключить c , λ и λ' из уравнений (6), (7), (8), (9), (10), то получим

$$4\pi\sigma_1 \left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha} \right) = V_1 \left(1 + \frac{b_2}{\alpha} \right) - V_2 - V \frac{b_2}{\alpha}, \quad (12)$$

$$4\pi\sigma_2 \left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha} \right) = -V_1 + V_2 \left(1 + \frac{b_1}{\alpha} \right) - V \frac{b_1}{\alpha}. \quad (13)$$

Для бесконечно тонких проволочек α становится бесконечным, члены, где α входит в знаменатель, исчезают, так что мы приходим к случаю двух параллельных пластин без всякой решетки.

Если решетка находится в металлическом контакте с одной из плоскостей, скажем с первой, то $V = V_1$ и правая часть уравнения для σ_1 становится равной $V_1 - V_2$. Следовательно, плотность σ_1 , наводимая на первой плоскости при наличии решетки, относится к значению плотности, которая наводилась бы при отсутствии решетки, и при второй плоскости, поддерживаемой при том же потенциале, как 1 к $1 + [b_1 b_2 / \alpha (b_1 + b_2)]$.

Мы пришли бы к той же величине уменьшения электрического влияния первой поверхности на вторую при наличии решетки, если бы считали, что решетка связана со второй поверхностью. Это ясно из того, что b_1 и b_2 входят в это выражение одинаково. Это непосредственно следует также из теоремы п. 88.

Индукция одной заряженной плоскости на другую через решетку получается такая же, что и при удаленной решетке, но на расстоянии между плоскостями, увеличенном с $b_1 + b_2$ до $b_1 + b_2 + (b_1 b_2 / \alpha)$.

Если обе плоскости находятся под нулевым потенциалом, а решетка заряжена до заданного потенциала, то количество электричества на ней относится к количеству электричества, которое индуцировалось бы на плоскости равной площади, помещенной в то же положение, как $b_1 b_2 / [b_1 b_2 + \alpha (b_1 + b_2)]$.

Эти результаты справедливы в предположении, что b_1 и b_2 много больше α , а α много больше c . Величина α имеет размерность длины и может принимать любое значение. Она становится бесконечно большой при неограниченном уменьшении c .

Если положить $c = a/2$, то между проволочками решетки не будет никакого зазора, так что не будет никакой индукции через решетку. Поэтому α должно

было бы быть равным 0. Но формула (11) дает в этом случае $a = - (a/2\pi) \ln 2 = -0,11a$, что, очевидно, неверно, так как решетка никогда не может привести к изменению знака индукции. Нетрудно, однако, в случае решетки и цилиндрических проволок перейти к более высокому приближению. Я здесь только намечу основные этапы такого перехода.

Метод приближения

206. Поскольку проволоки имеют цилиндрическую форму и распределение электричества на каждой проволоке симметрично относительно диаметра параллельного оси y , то подходящее разложение для потенциала имеет вид

$$V = C_0 \ln r + \sum C_i r^i \cos i\theta, \quad (14)$$

где r — расстояние от оси проволок, а θ — угол между r и y . Поскольку проволока является проводником, то при r равном радиусу проволоки V должно быть постоянно, и, следовательно, коэффициенты при всех косинусах дуг, кратных θ , должны обращаться в 0.

Перейдем для краткости к новым координатам ξ , η и т. д., так что

$$a\xi = 2\pi x, \quad a\eta = 2\pi y, \quad a\rho = 2\pi r, \quad a\beta = 2\pi b \text{ и т. д.}, \quad (15)$$

и пусть

$$F_\beta = \ln (e^{\eta+\beta} + e^{-(\eta+\beta)} - 2 \cos \xi). \quad (16)$$

Тогда, положив

$$V = A_0 F_\beta + A_1 \frac{dF_\beta}{d\eta} + A_2 \frac{d^2 F_\beta}{d\eta^2} + \dots, \quad (17)$$

мы можем, выбрав соответствующие значения коэффициентов A , представить любой потенциал, являющийся функцией от η и $\cos \xi$ и не обращающийся в бесконечность нигде, кроме $\eta + \beta = 0$ и $\cos \xi = 1$.

При $\beta = 0$ разложение F по ρ и θ имеет вид

$$F_0 = 2 \ln \rho + \frac{1}{12} \rho^2 \cos 2\theta - \frac{1}{1440} \rho^4 \cos 4\theta + \dots \quad (18)$$

Для конечных значений β разложение F имеет вид

$$F_\beta = \beta + 2 \ln (1 - e^{-\beta}) + \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \rho \cos \theta - \frac{e^{-\beta}}{(1 - e^{-\beta})^2} \rho^2 \cos 2\theta + \dots \quad (19)$$

В случае решетки с двумя проводящими плоскостями, уравнения которых $\eta = \beta_1$ и $\eta = -\beta_2$, а уравнение плоскости решетки $\eta = 0$, получатся два бесконечных ряда изображений решетки. Первый ряд будет состоять из самой решетки и бесконечной последовательности изображений с обеих сторон с зарядом той же величины и знака. Оси этих воображаемых цилиндров лежат в плоскостях, уравнения которых имеют вид

$$\eta = \pm 2n (\beta_1 + \beta_2). \quad (20)$$

Второй ряд будет состоять из бесконечной последовательности изображений, для которых коэффициенты A_0 , A_2 , A_4 и т. д. равны и противоположны по знаку соответствующим величинам для самой решетки, а коэффициенты A_1 , A_3 и т. д.

совпадают по величине и по знаку с соответствующими коэффициентами для решетки. Оси этих изображений расположены в плоскостях, уравнения которых имеют вид

$$\eta = 2\beta_2 \pm 2m (\beta_1 + \beta_2), \quad (21)$$

где m — целое.

Потенциал, создаваемый любой бесконечной последовательностью таких изображений, будет зависеть от того, четно или нечетно число изображений. Таким образом, потенциал бесконечной последовательности остается неопределенным, но если добавить к нему функцию $V\eta + C$, то условия задачи достаточны, чтобы найти распределение электричества.

Сначала нужно выразить потенциалы двух проводящих плоскостей V_1 и V_2 через B , C и коэффициенты A_0, A_1, \dots . Затем нужно определить поверхностные плотности σ_1, σ_2 в произвольной точке этих плоскостей. Средние значения σ_1 и σ_2 даются уравнениями

$$4\pi\sigma_1 = (2\pi/a) (A_0 - B), \quad 4\pi\sigma_2 = (2\pi/a) (A_0 + B). \quad (22)$$

Затем потенциалы самой решетки и всех изображений следует разложить по ρ и по косинусам дуг, кратных θ , и добавить к ним $B\rho \cos \theta + C$.

Члены, не зависящие от θ , дают при этом потенциал решетки V , а приравнение к нулю коэффициентов при косинусах дает уравнения для неопределенных коэффициентов.

Полученных таким образом уравнений достаточно для того, чтобы исключить все эти коэффициенты и свести к двум уравнениям, выражающим σ_1 и σ_2 через V_1, V_2 и V .

Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} V_1 - V &= 4\pi\sigma_1 (b_1 + \alpha - \gamma) + 4\pi\sigma_2 (\alpha + \gamma), \\ V_2 - V &= 4\pi\sigma_1 (\alpha + \gamma) + 4\pi\sigma_2 (b_2 + \alpha - \gamma). \end{aligned} \quad (23)$$

Количество электричества, наводимое на одной из плоскостей, защищенной решеткой, другой плоскостью при заданной разности потенциалов, будет таким, как если бы плоскости находились не на расстоянии $b_1 + b_2$, а на расстоянии

$$(\alpha - \gamma) (b_1 + b_2 + b_1 b_2 - 4\alpha\gamma) / (\alpha + \gamma).$$

Значения α и γ приближенно равны

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{2\pi} \left\{ \ln \frac{a}{2\pi c} - \frac{5}{3} \cdot \frac{\pi^4 c^4}{15a^4 + \pi^4 c^4} + \right. \\ &+ \left. 2e^{-4\pi(b_1+b_2)/a} (1 + e^{-4\pi(b_1/a)} + e^{-4\pi(b_2/a)} + \dots) + \dots \right\}, \\ \gamma &= \frac{3\pi a c^2}{3a^2 + \pi^2 c^2} \left(\frac{e^{-4\pi(b_1/a)}}{1 - e^{-4\pi(b_1/a)}} - \frac{e^{-4\pi(b_2/a)}}{1 - e^{-4\pi(b_2/a)}} \right) + \dots \end{aligned}$$

ГЛАВА XIII

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Об электростатических приборах

Приборы, которые нам теперь нужно рассмотреть, можно разделить на следующие классы:

- 1) Приборы для получения и увеличения электризации.
- 2) Умножители — для увеличения электризации в известное число раз.
- 3) Электрометры — для измерения электрических потенциалов и зарядов.
- 4) Накопители — для удержания больших электрических зарядов.

Электрические машины

207. В обычной электрической машине стеклянная пластинка или стеклянный цилиндр приводятся во вращение так, чтобы при этом происходило трение о кожу, на поверхность которой наносится амальгама цинка и ртути. Поверхность стекла электризуется положительно, а натирающая поверхность (щетка) — отрицательно. Когда электризованная поверхность стекла отходит от отрицательно электризованной щетки, стекло приобретает высокий положительный потенциал. Затем поверхность проходит мимо набора заостренных металлических стержней, соединенных кондуктором машины. Положительная электризация стекла вызывает отрицательную электризацию иголок, которая тем больше, чем острее иголки и чем они ближе к стеклу.

Когда машина работает должным образом, между стеклом и остриями происходит разряд через воздух, стекло теряет часть своего положительного заряда, заряд переходит на острия и, таким образом, попадает на изолированный главный кондуктор машины, т. е. на любое другое тело, которое находится с ним в электрическом соединении.

Те участки стекла, которые приближаются к щетке, имеют меньший положительный заряд, чем те, которые в то же самое время удаляются от щетки, так что щетка и связанные с ней проводники становятся отрицательно электризованными.

Поверхность стекла с высоким положительным потенциалом, удаляющаяся от щетки, сильнее притягивается отрицательным зарядом щетки, чем частично разряженная поверхность, которая приближается к щетке. Поэтому электрические силы действуют как сопротивление той силе, которая приводит машину во вращение. Таким образом, работа, затраченная на вращение машины, оказывается больше, чем работа, затраченная на преодоление обычного трения и других сил сопротивления, а избыток идет на создание состояния электризации, энергия которого эквивалентна этому избытку.

Работа, затраченная на преодоление трения, сразу переходит в тепло в трущихся друг о друга телах. Электрическая энергия также может быть обращена либо в механическую энергию, либо в тепло.

Если машина не запасает механической энергии, то вся энергия будет обращена в тепло, и единственная разница между теплом от трения и теплом от электрического действия заключается в том, что первое порождается на трущихся по

верхностях, в то время как второе может порождаться в проводниках на расстоянии¹.

Мы видели, что электрический заряд на поверхности стекла притягивается щеткой. Если бы это притяжение было достаточно велико, то вместо разряда между стеклом и собирающими остриями мог бы возникнуть разряд между стеклом и щеткой. Чтобы этого не произошло, к щетке прикрепляются кусочки шелка. Они отрицательно электризуются и прижимаются к стеклу и, таким образом, уменьшают потенциал вблизи от щетки.

Поэтому по мере того как стекло отходит от щетки, потенциал возрастает не так быстро и, таким образом, в каждой точке притяжение заряда на стекле к щетке оказывается меньше, а следовательно, уменьшается и опасность прямого разряда на щетку.

В некоторых электрических машинах движущаяся часть сделана из эбонита, а не из стекла, а щетка — из шерсти или меха. В этом случае щетка заряжается положительно, а главный кондуктор — отрицательно.

Электрофор Вольта

208. Электрофор состоит из смоляной или эбонитовой пластины, которая имеет сзади металлическое покрытие, и из металлической пластины того же размера. К задней стороне каждой из этих пластин может быть привернута изолированная рукоятка. Эбонитовая пластина имеет металлическую иглу, и, когда металлическая и эбонитовая пластины соприкасаются, эта игла соединяет металлическую пластину с металлическим покрытием на задней стороне эбонитовой пластины.

Эбонитовая пластина электризуется отрицательно трением о шерсть или кошачью шкурку. Затем при помощи изолирующей ручки к эбониту подносится металлическая пластина. Между эбонитом и металлической пластиной не происходит прямого разряда, но вследствие индукции потенциал металлической пластины становится отрицательным, так что, когда она подходит на определенное расстояние к металлической игле, проскакивает искра. Если теперь металлическую пластину отвести на некоторое расстояние, то окажется, что она заряжена положительно, и ее заряд может быть передан проводнику. При этом металлическое покрытие на обратной стороне эбонитовой пластины получает отрицательный заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду на металлической пластине.

При использовании этого прибора для зарядки конденсатора или накопителя одна из пластин помещается на проводнике, соединенном с землей, а другая сначала кладется на первую, затем снимается и приводится в соприкосновение с электродом конденсатора, затем кладется на закрепленную пластину, и процесс повторяется. Если закреплена эбонитовая пластина, конденсатор будет заряжен положительно. Если закреплена металлическая пластина, конденсатор будет заряжен отрицательно.

¹ Представляется вероятным, что во многих случаях, когда динамическая энергия превращается в тепло из-за трения, часть энергии может сначала перейти в электрическую энергию, а затем преобразовываться в тепло по мере того, как электрическая энергия затрачивается на поддержание замкнутых токов вблизи от трущихся поверхностей. См. сэр Уильям Томсон «Об электродинамических свойствах металлов». *Phil. Trans.*, 1856. p. 649.

Работа, совершаемая рукой при разделении пластин, всегда превышает работу сил электрического притяжения, совершаемую при сближении пластин, так что процесс зарядки конденсатора связан с затратой работы. За счет части этой работы создается энергия заряженного конденсатора, часть работы идет на шум и тепло при возникновении искр, а остальная часть — на преодоление других сил, препятствующих движению.

*О машинах, создающих электризацию
посредством механической работы*

209. В обыкновенной фрикционной электрической машине работа, затрачиваемая на преодоление трения, оказывается намного больше, чем та, которая идет на увеличение электризации. Поэтому любая установка, с помощью которой электризация может производиться целиком за счет механической работы против электрических сил, представляется важной с научной точки зрения, даже если она и не имеет практического значения. Первой машиной такого рода, по-видимому, был вращающийся удвоитель Никольсона, описанный в *Philosophical Transactions* за 1788 г. как «прибор, который при вращении рукоятки создает два состояния электричества без трения или соединения с Землей».

210. Именно с помощью вращающегося удвоителя Вольта смог увеличить электризацию, получаемую от столба, до величины, способной воздействовать на его электромметр. Приборы, действующие на том же самом принципе, были независимо изобретены г-ном Варлеем² (Varley) и сэром У. Томсоном.

Эти приборы в своей основе состоят из изолированных проводников различной формы, из которых одни закреплены, а другие подвижны. Движущиеся проводники называются носителями, а неподвижные могут быть названы индукторами, приемниками и регенераторами. Индукторы и приемники имеют такую форму, что, когда носители при своем обращении достигают определенных точек, они оказываются почти полностью внутри некоторого проводящего тела. Однако индукторы и приемники не могут полностью окружать носитель и в то же время позволять ему свободно входить и выходить наружу. Этого нельзя добиться без сложного устройства подвижных частей. Поэтому прибор с теоретической точки зрения не является совершенным без пары регенераторов, накапливающих небольшие количества электричества, которые носители удерживают на себе при выходе из приемников.

Однако мы пока можем предположить, что индукторы и приемники полностью окружают носитель, когда он находится внутри них, поскольку в этом случае теория очень упрощается.

Мы предположим, что машина состоит из двух индукторов A и C , из двух приемников B и D и из двух носителей F и G .

Предположим, что индуктор A наэлектризован положительно, так что его потенциал равен A , и пусть носитель F находится внутри индуктора A и имеет потенциал F . Тогда, если коэффициент индукции между A и F равен Q (величину Q считаем положительной), количество электричества на носителе будет равно $Q(F - A)$.

² Specification of Patent, Jan. 27, 1860, N 206.

Если носитель, находясь внутри индуктора, соединен с землей, то $F=0$, и заряд на носителе будет равен $-QA$, отрицательной величине. Пусть теперь носитель движется по кругу, пока он не попадет в приемник B . Находясь внутри B , носитель касается пружины и, таким образом, приходит в электрическое соединение с B . Тогда, как показано в п. 32, носитель полностью разряжается и передает весь свой отрицательный заряд приемнику B .

Затем носитель войдет в индуктор C , о котором мы будем предполагать, что он заряжен отрицательно. Находясь внутри C , носитель приходит в соединение с землей и, таким образом, приобретает положительный заряд, который он уносит и передает приемнику D и т. д.

Таким путем, если потенциалы индукторов остаются все время постоянными, то приемники B и D получают последовательно заряды одной и той же величины для каждого оборота носителя, и, таким образом, каждый оборот дает одно и то же приращение электричества в приемниках.

Но если индуктор A соединить с приемником D , а индуктор C с приемником B , потенциалы индукторов будут непрерывно возрастать, и количество электричества, доставляемое в приемники при каждом обороте, также будет непрерывно возрастать.

Пусть, например, потенциалы A и D равны U , а потенциалы B и C равны V , тогда, поскольку потенциал носителя внутри A равен нулю (носитель, находясь в A , соединен с землей), его заряд равен $-QU$. Носитель входит в B с этим зарядом и передает его B . Если емкость B и C равна B , их потенциал изменится от V до $V - (Q/B)U$.

Если другой носитель в то же самое время перенес заряд $-QV$ от C к D , это изменит потенциалы A и D от U до $U - (Q'/A)V$, где Q' — коэффициент индукции между носителем и C , а через A обозначена емкость A и D . Таким образом, если обозначить через U_n и V_n потенциалы двух индукторов после n полуоборотов, а U_{n+1} и V_{n+1} — потенциалы после $n+1$ полуоборотов, то

$$U_{n+1} = U_n - (Q'/A)V_n, \quad V_{n+1} = V_n - (Q/B)U_n.$$

Если мы обозначим $p^2 = Q/B$ и $q^2 = Q'/A$, то найдем

$$\begin{aligned} pU_{n+1} + qV_{n+1} &= (pU_n + qV_n)(1 - pq) = (pU_0 + qV_0)(1 - pq)^{n+1}, \\ pU_{n+1} - qV_{n+1} &= (pU_n - qV_n)(1 + pq) = (pU_0 - qV_0)(1 + pq)^{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 2U_n &= U_0 [(1 - pq)^n + (1 + pq)^n] + (q/p)V_0 [(1 - pq)^n - (1 + pq)^n], \\ 2V_n &= (p/q)U_0 [(1 - pq)^n - (1 + pq)^n] + V_0 [(1 - pq)^n + (1 + pq)^n]. \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что величина $pU + qV$ непрерывно уменьшается, так что, каковы бы ни были начальные значения электризации, приемники в конце концов приобретают электризацию противоположного знака, причем отношение потенциалов A и B равно отношению q к $-p$.

С другой стороны, величина $pU - qV$ непрерывно увеличивается, так что, сколь бы мало величина pU ни отличалась вначале от qV в ту или иную сторону, эта разность будет расти по закону геометрической прогрессии с каждым оборотом, пока электродвижущие силы не станут столь большими, что изоляция прибора не выдержит.

Приборы такого типа могут быть использованы для различных целей:

Для достаточной подачи электричества при высоком потенциале, как это делается с помощью большой машины г-на Варлея.

Для регулирования заряда в конденсаторе, как, например, в случае Томсоновского электрометра, заряд которого может быть увеличен или уменьшен с помощью нескольких оборотов очень маленькой машины такого рода, называемой Пополнителем (Replenisher).

Для умножения малых разностей потенциала. Сначала индукторы могут быть заряжены до крайне малого потенциала, например, от термоэлектрической пары. Затем путем вращения машины эта разность потенциалов может непрерывно умножаться, пока она не станет достаточной для измерения обычным электрометром. Определяя на опыте коэффициент увеличения разности потенциалов при каждом обороте машины и зная число оборотов и конечную электризацию, можно определить первоначальную электродвижущую силу, с помощью которой были заряжены индукторы.

Большинство этих приборов сделано так, что носители обращаются вокруг оси и при вращении приходят в должное положение относительно индукторов. Соединения осуществляются с помощью пружин, расположенных таким образом, что носители приходят с ними в контакт в нужные моменты времени.

211. Сэр У. Томсон³ построил, однако, машину для умножения электрических зарядов, в которой носителями служат капли воды, падающие в изолированный приемник из неизолированного сосуда, помещенного внутри индуктора, но не соприкасающегося с ним. Таким образом, приемник непрерывно получает электричество противоположного знака по отношению к индуктору. Если индуктор электризован положительно, приемник будет получать непрерывно возрастающее количество отрицательного электричества.

Вода выходит из приемника через воронку, носик которой почти окружен металлом приемника. Поэтому капли, падающие из этого носика, почти свободны от электризации. Другой индуктор и приемник той же самой конструкции расположены так, что индуктор одной системы находится в соединении с приемником другой системы. Поэтому возрастание заряда на приемнике уже не является постоянным, а растет со временем по закону геометрической прогрессии, причем заряды двух приемников имеют противоположные знаки. Это возрастание происходит до тех пор, пока падающие капли не начинают под действием электрических сил отклоняться от своего пути настолько, что они падают мимо приемника или даже ударяются об индуктор.

В этом приборе энергия электризации образуется за счет энергии падающих капель.

212. Построено несколько других электрических машин, в которых используется принцип электрической индукции. Наиболее замечательной из них является машина Гольца (Holtz), в которой носитель представляет собой стеклянную пластину, покрытую шеллачным лаком, а индукторами являются куски картона. Для того чтобы между частями прибора не проскакивали искры, имеются две стеклянные пластины, по одной с каждой стороны от вращающейся пластины носителя. Эта машина оказалась очень эффективной и мало подверженной влия-

³ Proc. R. S., June, 20, 1867.

нию атмосферных условий. Принцип действия является тем же самым, что и у вращающегося удвоителя и других приборов, основанных на той же самой идее, но, поскольку носитель представляет собой пластину изолятора, а индукторами служат несовершенные проводники, полное объяснение ее действия оказывается более трудным делом, чем в том случае, когда носители являются хорошими проводниками известной формы и они заряжаются или разряжаются в определенных точках.

213. В уже описанных электрических машинах возникают искры каждый раз, как носитель и индуктор приходят в контакт, находясь при различных потенциалах.

Но мы показали, что каждый раз при этом происходит потеря энергии, и поэтому полная работа, затраченная на вращение машины, не переходит в полезную электризацию, но часть теряется на тепло и на шум от электрической искры.

Поэтому я считал желательным показать, как можно построить такую электрическую машину, которая не имела бы таких потерь производительности. Я не предлагаю пригодную форму машины, а рассматриваю пример такого метода, с помощью которого можно применить устройство, которое в тепловых машинах называют регенератором, и тем предотвратить потерю работы.

Пусть на рис. 18 буквы A , B , C и A' , B' , C' обозначают пустотелые закрепленные проводники, расположенные таким образом, что носитель движется последовательно внутри каждого из них. Из этих проводников пусть A , A' и B , B' почти полностью окружают носитель, когда тот находится в середине своего прохождения, а проводники C и C' окружают носитель не столь полно.

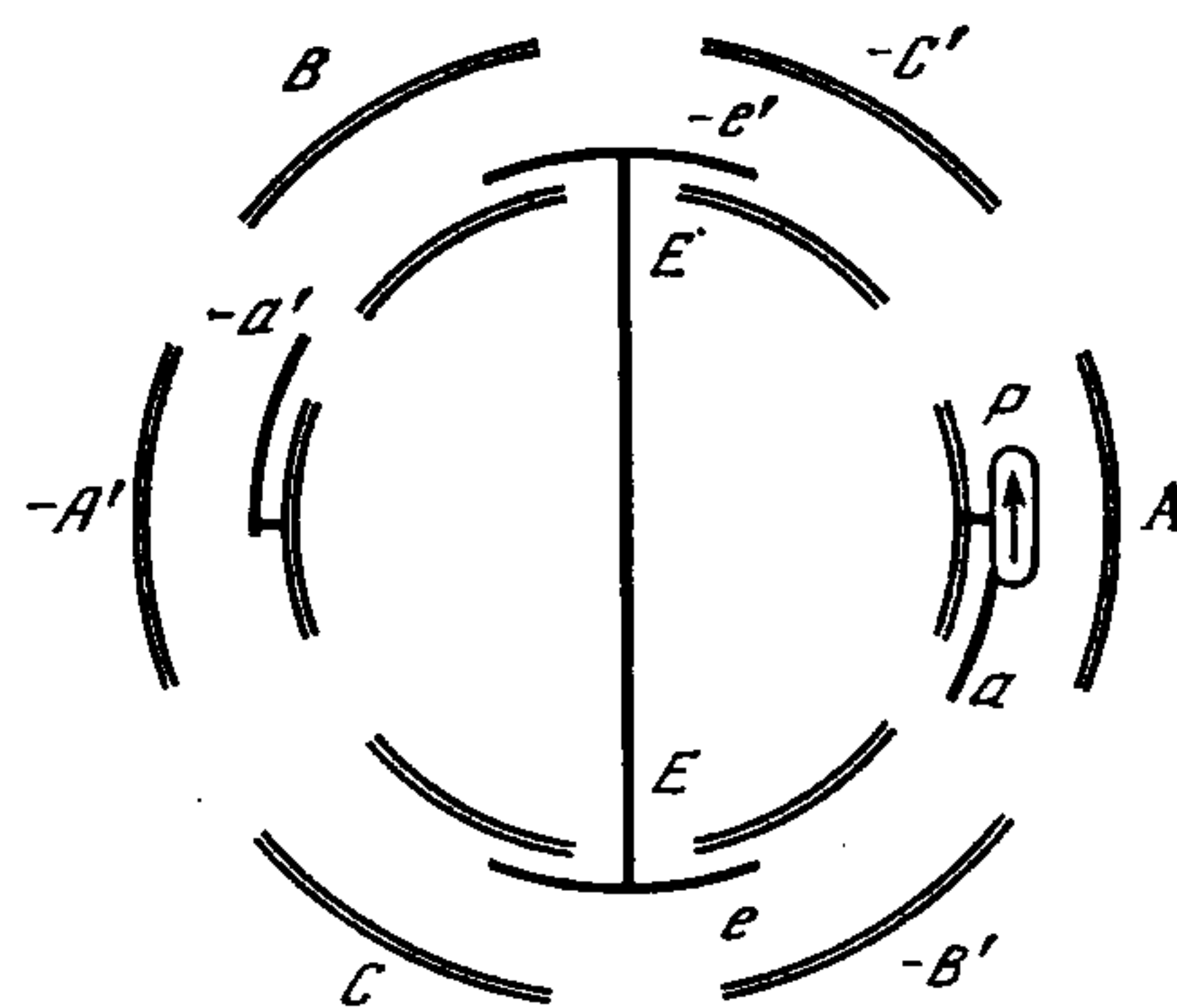


Рис. 18

Предположим, что A , B , C соединены с лейденской банкой большой емкости, имеющей потенциал V , а A' , B' , C' , соединены с другой банкой, имеющей потенциал $-V$.

Пусть P — один из носителей, движущийся по кругу от A к C' и т. д. и приходящий на своем пути в соприкосновение с определенными пружинами, из которых a и a' соединены соответственно с A и A' , а e и e' соединены с Землей.

Предположим, что, когда носитель P находится в середине A , коэффициент индукции между P и A равен $-A$. Емкость носителя P в этом положении оказывается больше, чем A , потому что он не полностью окружен приемником A . Пусть емкость P равна $A+a$.

Тогда, если потенциал P равен U , а потенциал A равен V , заряд на P будет равен $(A+a)U - AV$.

Пусть теперь P , находясь в середине приемника A , касается пружины a . Тогда потенциал P равен V , такой же, как и потенциал A , поэтому заряд P равен aV .

Если теперь носитель P покидает пружину a , он уносит с собой заряд aV . Когда носитель P покидает A , его потенциал уменьшается, и потенциал еще больше уменьшается, когда P попадает под воздействие проводника C' , который электризован отрицательно.

Если в то время, когда носитель P входит в C' , его коэффициент индукции по отношению к C' равен $-C'$, а его емкость равна $C'+c'$, тогда, если потенциал P равен U , заряд на P равен $(C'+c')U+C'V'=aV$.

Если $C'V'=aV$, то в этой точке потенциал P обращается в нуль.

Пусть P в этой точке приходит в контакт с пружиной e' , которая соединена с Землей. Поскольку потенциал P равен потенциалу пружины, при замыкании контакта искра не возникает.

Этот проводник C' , с помощью которого носитель P имеет возможность соединяться с Землей без искры, соответствует устройству, которое в тепловых машинах называется регенератором. Поэтому мы будем называть его Регенератором.

Пусть теперь P движется дальше, находясь еще в контакте с заземляющей пружиной e' , пока он не входит в середину индуктора B , потенциал которого равен V . Если $-B$ есть коэффициент индукции между P и B для этой точки, то, поскольку $U=0$, заряд на P будет равен $-BV$.

Когда носитель P отходит от заземленной пружины, он уносит с собой этот заряд. По мере того как он движется из положительного индуктора B по направлению к отрицательному приемнику A' , его потенциал становится отрицательным и возрастает по величине. В середине A' , если бы он сохранил свой заряд, его потенциал был бы равен $-(A'V'+BV)/(A'+a')$, и если BV больше, чем $a'V'$, численное значение потенциала будет больше, чем значение V' . Таким образом, перед тем, как P дойдет до середины A' , существует некоторая точка, в которой его потенциал равен $-V'$. Пусть в этой точке носитель вступает в контакт с отрицательной приемной пружиной a' . Искры не возникает, поскольку оба тела находятся при одном и том же потенциале. Пусть P движется дальше до середины A' , все еще находясь в контакте с пружиной и поэтому имея тот же самый потенциал, что и A' . Во время этого движения P передает A' отрицательный заряд. В середине A' носитель P отходит от пружины и уносит заряд $-a'V'$ по направлению к положительному регенератору C , где его потенциал уменьшается до нуля, и он вступает в контакт с заземленной пружиной e . Затем он скользит вдоль заземленной пружины и переходит в отрицательный индуктор B' , причем за время этого движения он приобретает положительный заряд $B'V'$, который, наконец, передает в положительный приемник A , и после этого цикл операций повторяется.

За время этого цикла положительный приемник потерял заряд aV и получил заряд $B'V'$. Таким образом, полный прирост положительного электричества равен $B'V'-aV$.

Таким же путем находим, что полный прирост отрицательного электричества равен $BV-a'V'$.

Если сделать индукторы так, что они будут настолько близки к поверхности носителя, насколько это совместимо с изоляцией, значения B и B' можно сделать большими. В то же время можно так сделать приемники, что они будут почти полностью окружать находящийся внутри них носитель. Тем самым значения a и a' могут быть сделаны очень малыми, и тогда заряды обоих лейденских банок будут возрастать при каждом обороте.

Условия, которым должны удовлетворять регенераторы, записываются в виде $C'V' = aV$ и $CV = a'V'$.

Так как значения a и a' малы, регенераторы не должны быть ни велики, ни очень близки к носителям.

Об электрометрах и электроскопах

214. Электрометр — это прибор, с помощью которого могут быть измерены электрические заряды или электрические потенциалы. Приборы, с помощью которых можно обнаружить наличие электрических зарядов или разностей потенциалов, но которые не могут дать численную меру этих величин, называются Электроскопами.

Электроскоп, если он достаточно чувствителен, может быть использован в электрических измерениях при условии, что мы можем привести измерения к случаю нулевой электризации. Например, если у нас есть два заряженных тела A и B , мы можем использовать метод, описанный в главе I, для того чтобы определить, которое из тел имеет больший заряд. Внесем тело A на изолирующей опоре внутрь изолированного замкнутого сосуда C . Соединим C с землей и снова изолируем. Тогда на C не будет никакой внешней электризации. Теперь удалим A , внутрь C введем B и затем проверим электризацию C с помощью электроскопа. Если заряд B равен заряду A , электризации не будет, но если он больше или меньше, то электризация будет соответственно того же знака, что у B , или противоположного.

Методы такого рода, в которых предметом наблюдения является отсутствие некоторого явления, называются *нулевыми* методами. Для этих методов нужен прибор, способный определить наличие данного явления.

В другом классе приборов для регистрации явлений приборы работают так, что дают всегда одно и то же показание для одного и того же значения измеряемой величины, но отсчеты на шкале прибора не пропорциональны значениям измеряемой величины, и связь между этими отсчетами и соответствующими значениями не известна, известно только, что одно является непрерывной функцией другого. К этому классу принадлежат некоторые электрометры, действие которых основано на взаимном отталкивании частей прибора, обладающих сходной электризацией. Такие приборы используются для регистрации явлений, а не для их измерения. Вместо истинных значений измеряемой величины получается ряд чисел, которые впоследствии могут быть использованы для определения этих величин, после того как шкала прибора должным образом исследована и протабулирована.

В приборах еще более высокого класса отсчеты по шкале пропорциональны измеряемой величине, и, таким образом, для полного измерения этой величины требуется знать только коэффициент, на который следует умножить отсчеты по шкале, чтобы получить истинное значение величины.

Приборы, построенные так, что они содержат внутри себя средства для независимого измерения истинных значений величин, называются абсолютными приборами.

Крутильные весы Кулона

215. Многочисленные опыты, в которых Кулон установил основные законы электричества, сводились к измерению сил, действующих между двумя малыми сферами, заряженными электричеством. Одна из этих сфер закреплялась, в то время как другая поддерживалась в равновесии действием двух сил: электрическим действием между сферами и крутильной упругостью стеклянной нити или металлической проволоки. См. п. 38.

Крутильные весы представляют собой горизонтальное коромысло, сделанное из шеллака, подвешенное на тонкой проволоке или на стеклянной нити и несущее на одном конце небольшой шарик, вырезанный из сердцевины бузины и равномерно позолоченный. Проволока подвеса закреплена сверху на вращающейся вокруг вертикальной оси головке, ручка которой может перемещаться по горизонтальному градуированному кругу, так что при этом верхний конец проволоки закручивается вокруг собственной оси на любое число градусов.

Весь этот прибор заключен в камеру. Другой небольшой шарик закреплен на изолирующем стержне. Он может быть заряжен, введен через отверстие в камеру и установлен так, что его центр совпадает с определенной точкой на горизонтальной окружности, которую описывает подвешенный шарик. Положение подвешенного шарика определяется с помощью градуированной окружности, выгравированной на цилиндрической стеклянной камере прибора.

Предположим теперь, что обе сферы заряжены и что подвешенный шарик находится в равновесии в известном положении, при котором коромысло составляет угол θ с радиусом, проходящим через центр закрепленного шарика. Тогда расстояние между центрами равно $2a \sin (\theta/2)$, где a — радиус коромысла. Если F есть сила между шариками, момент этой силы относительно оси кручения равен $Fa \cos (\theta/2)$.

Пусть теперь обе сферы полностью разряжены и коромысло находится в равновесии в положении, составляющем угол ϕ с радиусом, проходящим через закрепленный шарик.

Тогда угол, на который коромысло было закручено электрической силой, должен быть равен $\theta - \phi$, и, если M есть момент упругости кручения нити, мы получаем уравнение

$$F a \cos (\theta/2) = M (\theta - \phi).$$

Таким образом, если известна величина M , мы можем определить F — силу, действующую между двумя шариками, находящимися на расстоянии $2a \sin (\theta/2)$ один от другого.

Чтобы найти момент кручения M , обозначим через I момент инерции коромысла, а через T — время его двойного колебания⁴ под действием упругости кручения нити. Тогда $M = 4\pi^2 I / T^2$.

Во всех электрометрах знание того, какую силу мы измеряем, является вопросом величайшей важности. Сила, действующая на подвешенный шарик, вызывается отчасти прямым действием закрепленного шарика, но отчасти также и электризацией (если она есть) стенок камеры.

⁴ Под временем двойного колебания Максвелл понимает период. — *Примеч. ред.*

Если камера сделана из стекла, то определить электризацию его поверхности невозможно иначе, чем посредством очень трудных измерений в каждой точке. Однако в тех случаях, когда камера либо сделана из металла, либо металлическая камера, почти полностью охватывающая прибор, помещена как экран между шариками и стеклянной камерой, электризация на внутренней поверхности металлического экрана будет полностью зависеть от электризации шариков, а электризация стеклянной камеры не будет влиять на шарики. Таким путем мы можем избежать любой неопределенности, вызванной действием камеры.

Чтобы пояснить это на таком примере, в котором мы можем вычислить все эффекты, предположим, что камера представляет собой сферу радиуса b ; что радиус коромысла равен a и центр вращения коромысла совпадает с центром сферы; что заряды на двух шариках равны E_1 и E , а угол между их положениями равен θ ; что закрепленный шарик находится на расстоянии a_1 от центра и расстояние между двумя этими небольшими шариками равно r .

Если пренебречь пока влиянием индукции на распределение заряда на небольших шариках, то сила между ними будет отталкивающей: $E_1 E / r^2$, а момент этой силы относительно вертикальной оси, проходящей через центр, равен $(E E_1 a a_1 \sin \theta) / r^3$.

Изображение заряда E_1 , возникающее из-за наличия сферической поверхности камеры, представляет собой точку, расположенную на том же радиусе на расстоянии от центра b^2/a_1 с зарядом $-E_1 b/a_1$. Момент силы притяжения между зарядом E и этим изображением относительно оси подвеса равен

$$E E_1 \frac{b}{a_1} \frac{a \frac{b^2}{a_1} \sin \theta}{\left\{ a^2 - 2 \frac{a b^2}{a_1} \cos \theta + \frac{b^4}{a_1^2} \right\}^{3/2}} = E E_1 \frac{a a_1 \sin \theta}{b^3 \left\{ 1 - 2 \frac{a a_1}{b^2} \cos \theta + \frac{a^2 a_1^2}{b^4} \right\}^{3/2}}.$$

Если радиус сферической камеры b велик по сравнению с расстояниями шариков от центра a и a_1 , мы можем пренебречь вторым и третьим слагаемыми множителя в знаменателе. Приравнявая моменты, стремящиеся повернуть коромысло, получаем

$$E E_1 a a_1 \sin \theta \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right\} = M (\theta - \varphi).$$

Электрометры для измерения потенциалов

216. Во всех электрометрах подвижная часть представляет собой заряженное электричеством тело, потенциал которого отличается от потенциала некоторых закрепленных частей, расположенных вокруг него. Если, как в методе Кулона, используется изолированное тело, обладающее некоторым зарядом, то именно этот заряд и является прямым объектом измерения. Мы можем, однако, с помощью тонких проволочек соединить шарики Кулонова электрометра с другими проводниками. Тогда заряды на шариках будут зависеть от величины потенциала этих проводников и от потенциала камеры прибора. Заряд на каждом шарике будет приблизительно равен произведению его радиуса на превышение потенциала шарика над потенциалом камеры прибора при условии, что радиусы шариков малы в сравнении с их расстоянием друг от друга и в сравнении с их расстояниями до стенок и отверстий камеры.

Однако кулоновский вариант прибора не очень хорошо приспособлен для такого рода измерений из-за малости силы между шариками, отстоящими друг от друга на подходящее расстояние, когда разность потенциалов мала. Более удобный вариант представляет собой Электрометр с Притягивающимся Диск. Первые электрометры на этом принципе были созданы сэром У. Сноу Харрисом (W. Snow Harris)⁵. Они были затем доведены до высокого совершенства и в теории и в конструкции сэром У. Томсоном⁶.

Если два диска при различных потенциалах приблизить друг к другу поверхность к поверхности до малого расстояния между ними, то на противостоящих поверхностях будет почти однородная электризация, а на задних сторонах дисков электризация будет очень малой, при условии, что поблизости нет других проводников или электризованных тел. Заряд на положительном диске будет приблизительно пропорционален его площади и разности потенциалов дисков и обратно пропорционален расстоянию между ними. Таким образом, если площади дисков сделать большими, а расстояние между ними малым, то малая разность потенциалов может дать измеримую силу притяжения.

Математическая теория распределения электричества на двух дисках, расположенных таким образом, дана в п. 202. Однако невозможно сделать камеру прибора настолько большой, чтобы мы могли считать диски изолированными в бесконечном пространстве. Поэтому показания прибора в такой форме нелегко численно интерпретировать.

217. Одним из главных усовершенствований, которое сэр У. Томсон внес в конструкцию этого прибора, является защитное кольцо.

Вместо подвешивания целиком одного из дисков и определения действующей на него силы центральная часть диска отделяется от остальной части и образует притягивающийся диск, а внешнее кольцо, составляющее остальную часть диска, закрепляется. Таким образом, измеряется сила, действующая на ту часть диска, на которой сила является наиболее регулярной, а недостаточная однородность электризации вблизи от края становится несущественной, поскольку край находится на защитном кольце, а не на подвешенной части диска [рис. 19].

Кроме того, соединяя защитное кольцо с металлической камерой, окружающей заднюю сторону притягивающегося диска и все детали, с помощью которых осуществляется подвешивание, мы тем самым делаем невозможной электризацию задней стороны диска, поскольку это есть часть внутренней поверхности замкнутого пустотелого проводника, все части которого имеют одно и то же значение потенциала.

Таким образом, абсолютный электрометр Томсона состоит по существу из двух параллельных пластин с разными потенциалами, причем одна из них сделана так, что определенная площадь, ни одна из частей которой не находится вблизи края пластины, может быть приведена в движение под действием электрических сил. Для определенности мы можем предположить, что притягивающийся диск и защитное кольцо находятся сверху. Неподвижный диск расположен горизонтально и укреплен на изолирующем стержне, который с помощью микрометри-

⁵ *Phil. Trans.*, 1834.

⁶ Смотри прекрасную работу об электрометрах сэра У. Томсона, *Report of the British Association*, Dundee, 1867.

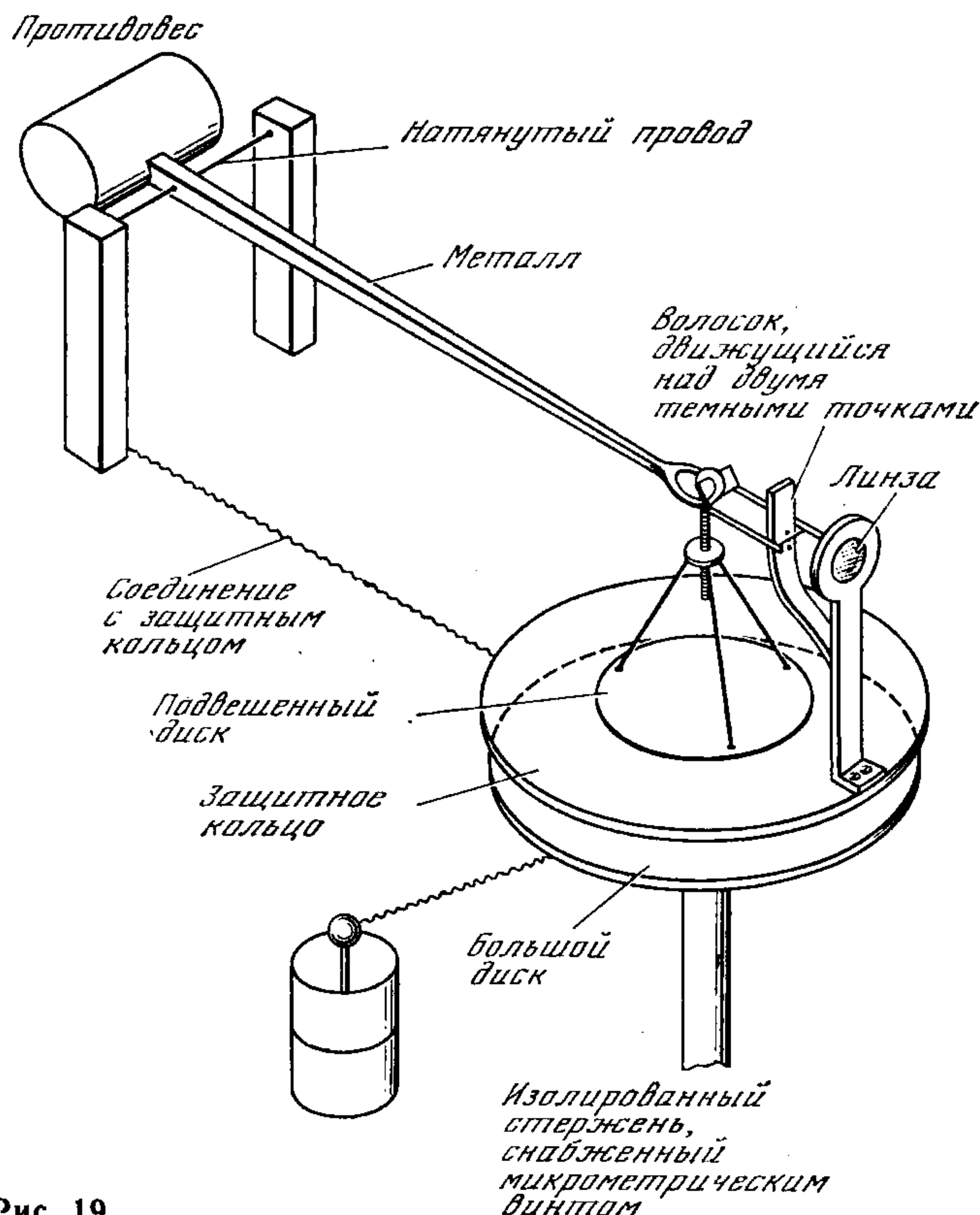


Рис. 19

ческого винта может получать измеримые перемещения по вертикали. Защитное кольцо по меньшей мере столь же велико, как и закрепленный диск; его нижняя поверхность является действительно плоской и параллельной закрепленному диску. Над защитным кольцом помещаются чувствительные весы, к которым подвешен легкий подвижный диск, который почти заполняет круговую апертуру защитного кольца, но не трется о края апертуры. Нижняя поверхность подвижного диска должна быть строго плоской, и мы должны иметь возможность знать, когда эта плоскость совпадает с плоскостью нижней поверхности защитного кольца, так что при этом образуется одна плоскость, прерываемая только узким промежутком между диском и его защитным кольцом.

Для этой цели нижний диск поднимается с помощью винта вверх до тех пор, пока он не коснется защитного кольца, и подвешенному диску дают опуститься на нижний диск, так что его нижняя поверхность оказывается в той же самой плоскости, что и нижняя поверхность защитного кольца. Затем положение подвешенного диска по отношению к защитному кольцу устанавливается с помощью системы контрольных отметок. Сэр У. Томсон обычно использует для этой цели прикрепленный к подвижной части черный волосок. Этот волосок перемещается

вверх или вниз прямо перед двумя черными отметками, сделанными на белом эмалированном фоне, и наблюдается вместе с этими двумя отметками через плоско-выпуклую линзу, обращенную плоской стороной к глазу. Если волосок при наблюдении через линзу выглядит прямым и делит пополам расстояние между черными отметками, то говорят, что он находится в *установленном положении*. Это означает, что подвешенный диск, вместе с которым движется волосок, находится в должном положении по высоте. Горизонтальность подвешенного диска можно проверить, сравнивая отраженное изображение части любого объекта от верхней поверхности диска с отражением остальной части того же самого объекта от верхней поверхности защитного кольца.

Затем весы регулируются так, чтобы они находились в равновесии в установленном положении, если на центр подвешенного диска помещен известный вес. При этом весь прибор освобождается от электризации тем, что все его части приводятся в металлическое соединение. Защитное кольцо **накрывается** металлической камерой так, чтобы закрыть также весы и подвижный диск, для наблюдения контрольных отметок оставляются достаточные отверстия.

Защитное кольцо, камера и подвешенный диск — все находятся в металлическом соединении друг с другом, но изолированы от остальных частей прибора.

Пусть теперь требуется измерить разность потенциалов двух проводников. С помощью проводов проводники соединяются соответственно с верхним и нижним дисками, с подвешенного диска убирается вес, и нижний диск перемещается вверх с помощью микрометрического винта до тех пор, пока электрическое притяжение не сместит подвешенный диск вниз в установленное положение. Тогда мы знаем, что притяжение между дисками равно весу, который приводил диск в его установленное положение.

Если W есть численное значение веса, а g — сила тяжести, то сила равна Wg , и если A — площадь подвешенного диска, D — расстояние между дисками и V — разность потенциалов дисков, то

$$Wg = \frac{V^2 A}{8\pi D^2}, \text{ или } V = D \sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

Если подвешенный диск имеет круговую форму и радиус его равен R , а радиус апертуры защитного кольца равен R' , то ⁷

$$A = \frac{1}{2} \pi (R^2 + R'^2) \text{ и } V = 4D \sqrt{\frac{gW}{R^2 + R'^2}}.$$

⁷ Обозначим радиус подвешенного диска через R , а радиус апертуры защитного кольца через R' , тогда ширина кольцевого промежутка между диском и кольцом будет равна $B = R - R'$.

Если расстояние между подвешенным диском и большим закрепленным диском равно D , а разность потенциалов между этими дисками равна V , то, в согласии с рассмотрением п. 201, количество электричества на подвешенном диске будет

$$Q = \left\{ \frac{R^2 + R'^2}{8D} - \frac{R'^2 - R^2}{8D} \cdot \frac{\alpha}{D + \alpha} \right\},$$

где $\alpha = (1/\pi) B \ln 2$, или $\alpha = 0,220635 (R' - R)$.

Если по поверхность защитного кольца не совпадает точно с плоскостью поверхности подвешенного диска, предположим, что расстояние между закрепленным диском и защитным

218. Поскольку всегда имеется некоторая неточность в определении микрометрического отсчета, отвечающего $D=0$, и поскольку любая ошибка в положении подвешенного диска наиболее существенна при малых значениях D , сэр У. Томсон предпочитает такие измерения, которые зависят от разностей электродвижущей силы V . Таким образом, если V и V' — два потенциала, а D и D' — соответствующие расстояния, то

$$V - V_1 = (D - D') \sqrt{8\pi g W / A}.$$

Например, для того чтобы измерить электродвижущую силу гальванической батареи, используются два электрометра.

С помощью конденсатора, который при необходимости заряжается пополнителем, нижний диск главного электрометра поддерживается при постоянном потенциале. Для контроля нижний диск главного электрометра соединяется с нижним диском вторичного электрометра, у которого подвешенный диск соединен с Землей. Расстояние между дисками вторичного электрометра и сила, требующаяся для приведения подвешенного диска в установленное положение, не меняются. Поэтому, если мы повышаем потенциал конденсатора до тех пор, пока вторичный электрометр не окажется в установленном положении, мы знаем, что потенциал нижнего диска главного электрометра превышает потенциал Земли на постоянную величину, которую мы можем обозначить через V .

Если мы теперь соединим положительный электрод батареи с Землей, а ее отрицательный электрод — с подвешенным диском главного электрометра, разность потенциалов между дисками станет равна $V + v$, если v — электродвижущая сила батареи. Пусть в этом случае отсчет микрометра равен D и пусть D' — отсчет для случая, когда подвешенный диск связан с Землей, тогда

$$v = (D - D') \sqrt{8\pi g W / A}.$$

Таким путем с помощью электрометра, диски которого находятся на удобно измеряемом расстоянии, может быть измерена малая электродвижущая сила v . Если расстояние слишком мало, малое изменение абсолютного расстояния приводит к большим изменениям в величине силы, потому что сила изменяется обрат-

кольцом равно не D , а $D + z = D'$. Тогда из рассмотрения в п. 225 следует, что вблизи от края диска появится добавочный электрический заряд, вызванный тем, что диск возвышается на величину z над общей плоскостью защитного кольца. Таким образом, полный заряд в этом случае приблизительно равен

$$Q = V \left\{ \frac{R^2 + R'^2}{8D} - \frac{R'^2 - R^2}{8D} \cdot \frac{\alpha}{D + \alpha} + \frac{R + R'}{D} (D - D') \ln \frac{4\pi (R + R')}{D' - D} \right\},$$

и в выражение для притяжения мы должны вместо площади A диска подставить исправленную величину

$$A = \frac{\pi}{2} \left\{ R^2 + R'^2 - (R'^2 - R^2) \frac{\alpha}{D + \alpha} + \frac{R + R'}{D} (D' - D) \ln \frac{4\pi (R + R')}{D' - D} \right\},$$

где R = радиусу подвешенного диска, R' = радиусу апертуры в защитном кольце, D = расстоянию между закрепленным и подвешенным дисками, D' = расстоянию между закрепленным диском и защитным кольцом, $\alpha = 0,220635 (R' - R)$.

Если величина α мала по сравнению с D , мы можем пренебречь вторым слагаемым, а если величина $D' - D$ мала, мы можем пренебречь последним слагаемым.

но пропорционально квадрату расстояния, так что любая ошибка в абсолютном расстоянии ведет к большой ошибке в результате, если расстояние не является большим в сравнении с пределами ошибки микрометрического винта.

Влияние малых нерегулярностей в форме поверхностей дисков и в расстоянии между ними уменьшается обратно пропорционально кубу или более высоким степеням расстояния. Какова бы ни была форма волнистой поверхности, возвышения которой поднимаются до некоторой плоской поверхности, электрическое действие на расстоянии, значительно превышающем ширину складок, оказывается таким же, как и у плоскости, находящейся на некотором малом расстоянии позади плоскости, на которой расположены вершины возвышений (см. п. 197, 198).

С помощью добавочной электризации, контролируемой вспомогательным электрометром, обеспечивается подходящий интервал между дисками.

Конструкция вспомогательного электрометра может быть более простой, не предусматривающей возможность определить абсолютную величину силы притяжения, поскольку все, что нужно, — это обеспечить постоянную электризацию. Такой электрометр может быть назван *калибровочным*.

Этот метод использования дополнительной электризации, кроме той, которая подлежит измерению, называется Гетеростатическим методом электризации, в противоположность Идиостатическому методу, в котором все действие производится только подлежащей измерению электризацией.

В некоторых конструкциях электрометра с притягивающимся диском этот диск помещается на конце коромысла, которое укрепляется на платиновой проволоке, проходящей через центр тяжести коромысла и натянутой с помощью пружины. На другом конце коромысла имеется волосок, который изменением расстояния между дисками приводится в установленное положение и таким образом обеспечивает поддержание силы электрического притяжения на постоянном уровне. В этих электрометрах эта сила в общем случае не измеряется по абсолютной величине, но с уверенностью считается постоянной, если у платиновой проволоки не меняется упругость кручения.

Весь прибор помещается в лейденскую банку, внутренняя поверхность которой заряжена и соединена с притягивающимся диском и защитным кольцом. Другой диск управляется микрометрическим винтом и соединяется сначала с Землей, а затем с проводником, потенциал которого подлежит измерению. Искомый потенциал равен разности отсчетов, умноженной на константу, которая должна быть определена для каждого электрометра.

219. Описанные выше приборы не являются самодействующими, они требуют при каждом наблюдении либо регулировки с помощью микрометрического винта, либо некоторых других действий, производимых наблюдателем. Поэтому они не рассчитаны на то, чтобы действовать как саморегистрирующие приборы, которые должны сами по себе двигаться в должное положение. Этим свойством обладает *томсоновский квадрантный электрометр*.

Электрический принцип, на котором основан этот инструмент, может быть объяснен следующим образом:

A и B представляют собой два закрепленных проводника, которые могут иметь одно и то же или разные значения потенциала. C — подвижный проводник с высоким потенциалом, расположенный так, что часть его расположена напротив

поверхности проводника A , а часть — напротив поверхности B . При движении проводника C соотношение между этими частями меняется.

Для этой цели удобнее всего сделать проводник C подвижным относительно некоторой оси, а противолежащие участки поверхностей у проводников A , B и C выполнить как участки поверхностей вращения, имеющих одну и ту же ось.

При этом расстояние между поверхностью C и противолежащими поверхностями A или B остается всегда одним и тем же, и движение проводника C в положительном направлении просто увеличивает площадь, противолежащую проводнику B , и уменьшает площадь, противолежащую проводнику A .

Если потенциалы проводников A и B равны, то не возникает силы, действующей на C в направлении от A к B , но если Потенциал C отличается от потенциала B больше, чем от потенциала A , то проводник C будет стремиться повернуться так, чтобы площадь его поверхности, противолежащая проводнику B , увеличилась.

Можно так устроить прибор, что эта сила будет приблизительно постоянной для различных положений C в некоторых определенных пределах, так что, если тело C подвешено на упруго закручивающейся нити, его отклонения будут приблизительно пропорциональны разности потенциалов A и B , умноженной на разность между потенциалом C и средним значением потенциала тел A и B .

Проводник C поддерживается при высоком потенциале с помощью конденсатора, питаемого пополнителем и контролируемого калибровочным электрометром. A и B присоединяются к двум проводникам, разность потенциалов которых нужно измерить. Чем выше потенциал C , тем прибор более чувствителен. Поскольку электризация C не зависит от измеряемой электризации, этот электрометр относится к классу гетеростатических.

Мы можем применить к этому электрометру общую теорию систем проводников, данную в п. 93, 127.

Пусть A , B , C обозначают соответственно потенциалы этих трех проводников. Обозначим через a , b , c их соответственные емкости, через p — коэффициент индукции между B и C , через q — коэффициент индукции между C и A , а через r — коэффициент индукции между A и B . Все эти коэффициенты, вообще говоря, меняются с изменением положения C . Если проводник C расположен так, что при его движении в определенных пределах края проводников A и B не близки к краям C , мы можем установить вид этих коэффициентов. Если θ есть угол отклонения C от A к B , то часть поверхности A , противолежащая C , будет уменьшаться с ростом θ . Поэтому, если A поддерживается при потенциале 1, а B и C — при потенциале 0, заряд на A будет равен $a = a_0 - \alpha\theta$, где a_0 и α — некоторые постоянные, и a есть емкость A .

Если A и B симметричны, то емкость B равна $b = b_0 + \alpha\theta$.

Емкость C при движении не меняется, потому что движение приводит только к тому, что различные части C оказываются противолежащими промежутку между A и B . Поэтому $c = c_0$.

Количество электричества, индуцированное на C , когда потенциал B повышен до единицы, равно $p = p_0 - \alpha\theta$.

Коэффициент индукции между A и C равен $q = q_0 + \alpha\theta$.

Коэффициент индукции между A и B не меняется при движении C и остается постоянным, $r = r_0$.

Таким образом, электрическая энергия системы равна

$$W = \frac{1}{2} A^2 a + \frac{1}{2} B^2 b + \frac{1}{2} C^2 c + BCp + CAq + ABr,$$

и если Θ — момент силы, действующей в сторону увеличения угла θ , то $\Theta = dW/d\theta$, причем величины A, B, C предполагаются постоянными,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} A^2 \frac{da}{d\theta} + \frac{1}{2} B^2 \frac{db}{d\theta} + \frac{1}{2} C^2 \frac{dc}{d\theta} + BC \frac{dp}{d\theta} + CA \frac{dq}{d\theta} + AB \frac{dr}{d\theta} = \\ &= -\frac{1}{2} A^2 \alpha + \frac{1}{2} B^2 \alpha - BC \alpha + CA \alpha, \end{aligned}$$

или

$$\Theta = \alpha (A - B) \{C - (A + B)/2\}.$$

В современной конструкции Томсоновского Квадрантного Электрометра проводники A и B имеют вид цилиндрической коробки, полностью разделенной на четыре квадранта, каждый из которых изолирован. Квадранты соединены проводами так, что два противоположных квадранта A и A' соединены между собой, как и остальные два квадранта B и B' [рис. 20].

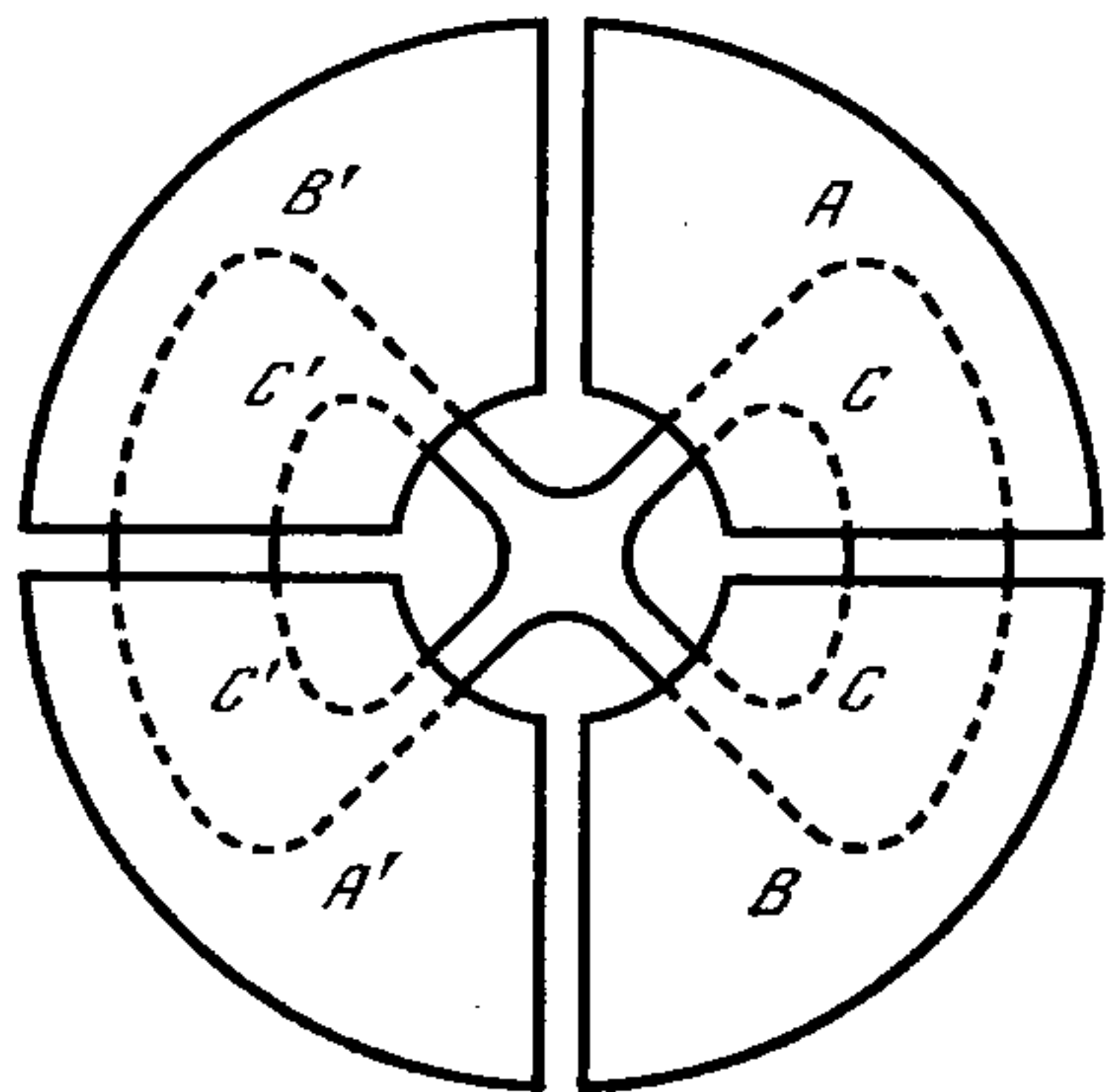


Рис. 20

Проводник C подвешен так, чтобы он мог поворачиваться вокруг вертикальной оси, и может состоять из двух расположенных напротив друг друга плоских дуг в четверть окружности, поддерживаемых по краям радиусами. В положении равновесия эти квадранты должны находиться частично в пределах A , частично в пределах B , а поддерживающие радиусы должны находиться вблизи от середины квадрантов, составляющих пустотелое основание, так что перегородки коробки и края дуг с радиусами

на электроде C могут быть настолько далеко друг от друга, насколько это возможно.

Проводник C постоянно поддерживается при высоком значении потенциала будучи соединен с внутренней обкладкой лейденской банки, которая образует камеру прибора. Электроды B и A соединяются первый с Землей, а второй с телом, потенциал которого нужно измерить.

Если потенциал этого тела равен нулю, и если прибор налажен, то не должно быть никакой силы, приводящей C в движение, но если потенциал A имеет тот же знак, что и потенциал C , тогда C будет стремиться повернуться от A к B с примерно постоянной силой, и подвеска будет закручиваться до тех пор, пока в игру не вступит равная сила и не приведет к равновесию. В определенных пределах отклонение электрода C будет пропорционально произведению

$$(A - B) \{C - (A + B)/2\}.$$

Увеличивая потенциал C , можно увеличить чувствительность прибора, и для малых значений $(A+B)/2$ отклонение будет приблизительно пропорционально $(A-B)C$.

Об измерениях электрического потенциала

220. Для того чтобы определить большие разности потенциалов в абсолютной мере, мы можем использовать электромметр с притягивающимся диском и сравнить притяжение с действием веса. Если мы в то же самое время измеряем разность потенциалов тех же самых проводников с помощью квадрантного электромметра, мы можем установить абсолютное значение определенных отсчетов по шкале квадрантного электромметра, и таким путем мы можем выразить цену делений квадрантного электромметра через потенциал подвешенной части и через момент кручения подвеса.

Чтобы определить потенциал заряженного проводника, имеющего конечные размеры, мы можем присоединить этот проводник к одному из электродов электромметра, в то время как другой электрод соединен с Землей или с телом, имеющим известный потенциал. Отсчет электромметра даст значение потенциала, которое будет иметь проводник, после того как заряд проводника разделится между проводником и той частью электромметра, с которой проводник находится в контакте. Если K обозначает емкость проводника, а K' — емкость этой части электромметра и если V и V' обозначают потенциалы этих тел перед соединением, то их общий потенциал после соединения будет равен

$$\bar{V} = (KV + K'V') / (K + K').$$

Таким образом, первоначальный потенциал проводника был равен

$$V = \bar{V} + (K'/K) (\bar{V} - V').$$

Если размеры проводника невелики в сравнении с размерами электромметра, величина K' будет сравнима с K , и до тех пор, пока мы не сможем определить значения K и K' , величина второго члена этой формулы будет внушать подозрения. Но если мы можем сделать так, что потенциал электрода в электромметре будет почти точно равен потенциалу тела перед присоединением, неопределенность значений K и K' будет мало существенна.

Если мы приблизительно знаем величину потенциала тела, мы можем зарядить электрод с помощью «пополнителя» или иным путем до этого приблизительного значения потенциала, и последующий эксперимент даст более верное приближение. Таким путем мы можем измерить потенциал проводника, емкость которого мала в сравнении с емкостью электромметра.

Измерение потенциала в данной точке в воздухе

221. *Первый метод.* Возьмем сферу, радиус которой мал по сравнению с расстоянием от электризованных проводников, и поместим ее центр в данной точке. Соединим ее тонкой проволокой с Землей, затем изолируем ее, поднесем к электромметру и определим полный заряд на сфере.

Тогда, если потенциал в данной точке равен V , а радиус сферы равен a , заряд на сфере будет $-Va = Q$, и если потенциал сферы при измерении электромметром, помещенным в комнату с заземленными стенками, равен V' , то $Q = V'a$,

причем $V + V' = 0$, или потенциал воздуха в точке, где был расположен центр сферы, равен по величине, но противоположен по знаку потенциала сферы, после того как она была заземлена, затем изолирована и внесена в комнату.

Этот метод применялся г-ном Дельманом из Кройцнаха при измерении потенциала на определенной высоте над поверхностью Земли.

Второй метод. Мы предположили, что сфера помещается в данной точке и вначале заземляется, а затем изолируется и переносится в пространство, окруженное проводящим веществом при нулевом потенциале.

Теперь рассмотрим тонкий изолированный провод, идущий от электрода электрометра к тому месту, где нужно измерить потенциал. Пусть сфера вначале будет полностью разряжена. Этого можно достигнуть, поместив ее внутрь сосуда, сделанного из того же металла и почти полностью охватывающего сферу, и приведя ее в соприкосновение с сосудом. Пусть теперь разряженная таким образом сфера переносится к концу провода и прикасается к нему. Поскольку сфера не электризована, она будет иметь потенциал воздуха в данной точке. Если провод, ведущий к электроду, имеет тот же самый потенциал, последний не изменится при контакте, но если потенциал электрода имеет другое значение, то после контакта со сферой он будет ближе к потенциалу воздуха, чем был до этого. Путем повторения таких операций, в которых сфера поочередно разряжается и приводится в контакт с электродом, потенциал этого электрода электрометра будет постепенно приближаться к потенциалу воздуха в данной точке.

222. Чтобы измерить потенциал проводника, не прикасаясь к нему, мы можем измерить потенциал воздуха в любой точке по соседству с проводником и по результатам измерений вычислить потенциал проводника. Если бы существовала полость, почти полностью окруженная проводником, то потенциал воздуха в каждой точке этой полости был бы очень близок к потенциалу проводника.

Таким способом сэр У. Томсон установил, что если два полые проводника, один медный, а другой цинковый, находятся в металлическом контакте, то потенциал воздуха в полости, окруженной цинком, положителен по отношению к потенциалу воздуха в полости, окруженной медью.

Третий метод. Если мы каким-нибудь способом можем сделать так, что последовательность малых тел будет отделяться от конца электрода, потенциал электрода будет приближаться к потенциалу окружающего воздуха. Этого можно добиться, высыпая дробь, металлические опилки, песок или выпуская воду через воронку или трубку, соединенную с электродом. Точка, в которой измеряется потенциал, — это та точка, в которой поток перестает быть непрерывным и разбивается на отдельные частицы или капли.

Другой удобный метод состоит в том, что к электроду прикрепляется медленно горящая спичка. Вблизи от горящего конца потенциал электрода быстро становится равным потенциалу воздуха. Если разность потенциалов велика, то даже тонкое металлическое острие может вызвать разряд посредством частиц воздуха, но если мы хотим уменьшить разность потенциалов до нуля, мы должны использовать один из указанных выше методов.

Если мы хотим установить только знак разности потенциалов в двух точках, а не ее численное значение, мы можем сделать так, что капли или металлические опилки будут выпускаться в одном из этих мест через носик, соединенный с другим местом, и улавливать эти капли или опилки в изолированный сосуд. Каждая

капля, когда она падает, заряжена определенным количеством электричества, а попав в сосуд, полностью разряжается. Поэтому заряд сосуда непрерывно накапливается, и после того как упадет достаточное количество капель, заряд сосуда может быть определен с помощью самых грубых методов. Знак заряда будет положительным, если потенциал того места, которое соединено с носиком, является положительным по отношению к потенциалу другого места.

ИЗМЕРЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ

Теория пробной плоскости

223. Для проверки результатов математической теории, дающей распределение электричества по поверхности проводника, необходимо уметь измерять поверхностную плотность в разных точках проводника. Для этой цели Кулон использовал небольшой диск из позолоченной бумаги, прикрепленный к изолирующему стержню из шеллака. Он прикладывал этот диск к различным точкам проводника, располагая диск таким образом, чтобы он прилегал к поверхности проводника настолько, насколько это возможно. Затем он удалял диск с помощью изолирующего стержня и измерял своим электрометром заряд на диске.

Так как поверхность диска, приложенная к проводнику, почти совпадает с поверхностью проводника, он заключил, что поверхностная плотность на внешней поверхности диска почти равняется поверхностной плотности заряда на поверхности проводника в том же месте и что заряд на диске после удаления был приблизительно равен заряду на такой площади поверхности проводника, которая равна площади одной стороны диска. Диск, применяемый таким путем, называется Кулоновой Пробной Плоскостью.

Поскольку против использования Кулоном пробной плоскости выдвигались возражения, я сделаю несколько замечаний о теории этого опыта.

Этот опыт состоит в том, что мы приводим малое проводящее тело в контакт с поверхностью проводника в той точке, где нужно измерить плотность, а затем удаляем тело и определяем его заряд.

Нам нужно сначала показать, что заряд малого тела, находящегося в контакте с проводником, пропорционален поверхностной плотности, которая была в точке контакта до того, как туда было помещено малое тело.

Мы будем предполагать, что все размеры малого тела, и особенно его размер в направлении нормали к точке контакта, малы в сравнении с любым из радиусов кривизны проводника в точке контакта. Таким образом, можно пренебречь изменением результирующей силы из-за того, что проводник предполагается жестко наэлектризованным внутри области, занятой малым телом, и мы можем рассматривать поверхность проводника вблизи от малого тела как плоскую поверхность.

Далее, заряд, который получит малое тело при контакте с плоской поверхностью, будет пропорционален результирующей силе, нормальной к поверхности, т. е. поверхностной плотности. Мы в дальнейшем определим величину заряда для различных форм тела.

Затем нам следует показать, что, когда малое тело удаляется, между ним и проводником не проскакивает искры, так что оно уносит свой заряд с собой. Это, очевидно, потому, что, когда тела находятся в контакте, их потенциалы одни и

те же, и поэтому плотность на участках, ближайших к точке контакта, крайне мала. Когда малое тело отведено на очень короткое расстояние от проводника, о котором мы будем предполагать, что он наэлектризован положительно, тогда электризация в точке, ближайшей к малому телу, уже не равна нулю, а положительна, но, поскольку заряд малого тела положителен, положительная электризация вблизи от малого тела меньше, чем в других соседних точках поверхности.

Далее, прохождение искры зависит, вообще говоря, от величины результирующей силы, а та — от поверхностной плотности. Таким образом, если мы предполагаем, что проводник не настолько сильно электризован, чтобы разрядиться, теряя электричество с других частей поверхности, то не будет и искрового разряда между малым телом и частью поверхности проводника, так как мы показали, что эта часть имеет меньшую поверхностную плотность.

224. Мы теперь рассмотрим различные формы малого тела.

Предположим, что это — малая полусфера, приложенная к проводнику так, что она соприкасается с проводником в центре своей плоской стороны.

Пусть проводник представляет собой большую сферу. Изменим форму полусферы так, что ее поверхность будет несколько больше, чем полусфера, и будет встречать поверхность сферы под прямыми углами. Тогда мы имеем случай, для которого мы уже получили точное решение (см. п. 168).

Если A и B — центры двух сфер, пересекающихся друг друга под прямыми углами, DD' — диаметр круга, по которому они пересекаются, а C — центр этого круга, тогда, если V есть потенциал проводника, внешняя поверхность которого совпадает с поверхностью этих двух сфер, количество электричества на внешней поверхности, принадлежащей сфере A , равно

$$(1/2)V (AD + BD + AC - CD - BC),$$

а количество электричества на внешней поверхности, принадлежащей сфере B , равно

$$(1/2)V (AD + BD + BC - CD - AC),$$

причем полный заряд равен сумме этих величин, или

$$V (AD + BD - CD).$$

Если радиусы сфер равны α и β , тогда, если радиус α велик в сравнении с β , заряд на сфере B относится к заряду на сфере A как

$$\frac{3\beta^2}{4\alpha^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \text{и т. д.} \right) \text{ относится к единице.}$$

Пусть теперь σ обозначает однородную поверхностную плотность на A после удаления B . Тогда заряд на A равен $4\pi\alpha^2\sigma$, и поэтому заряд на B равен

$$3\pi\beta^2\sigma \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \text{и т. д.} \right),$$

т. е., если радиус β очень мал в сравнении с α , заряд на полусфере B в три раза превышает такой заряд, который при поверхностной плотности заряда σ содержался бы на площади, равной площади кругового основания полусферы.

Из п. 175 следует, что если малая сфера приводится в соприкосновение с электризованным телом, а затем удаляется от него на некоторое расстояние, средняя плотность заряда на сфере относится к плотности заряда на теле в точке соприкосновения как π^2 относится к 6 или как 1,641 к 1.

225. Наиболее удобная форма для пробной плоскости — это форма круглого диска. Поэтому мы покажем, как измерять заряд на таком диске, положенном на электризованную поверхность. Для этой цели мы построим такую потенциальную функцию, у которой одна из эквипотенциальных поверхностей напоминала бы круговую выпуклость с плоской вершиной, схожую по своей общей форме с диском, лежащим на плоскости.

Пусть σ — поверхностная плотность на плоскости; эту плоскость мы примем за плоскость xy .

Потенциал, отвечающий этой электризации, будет $V = -4\pi\sigma z$.

Пусть теперь два диска радиуса a жестко наэлектризованы с плотностями заряда — σ' и $+\sigma'$. Пусть первый из них помещен на плоскость центром в начало координат, а второй — параллельно ему на очень малом расстоянии c .

Тогда можно показать, как мы в этом убедимся в теории магнетизма, что потенциал этих двух дисков в любой точке равен $\omega\sigma'c$, где ω есть телесный угол с вершиной в этой точке, опирающийся на края любого из дисков. Таким образом, потенциал всей системы будет $V = -4\pi\sigma z + \sigma'c\omega$.

Формы эквипотенциальных поверхностей и линий индукции даны на левой стороне рис. XX в конце второго тома.

Обратим внимание на форму поверхности, для которой $V=0$. Эта поверхность проведена пунктиром.

Обозначим через r расстояние любой точки от оси z . Тогда для значений r , много меньших, чем a , и для малых z находим $\omega = 2\pi - 2\pi(z/a) +$ и т. д.

Таким образом, для значений r , много меньших, чем a , уравнение нулевой эквипотенциальной поверхности имеет вид

$$0 = -4\pi\sigma z_0 + 2\pi\sigma'c - 2\pi\sigma' \frac{z_0 c}{a} + \text{и т. д.},$$

или

$$z_0 = \frac{\sigma'c}{2\sigma + \sigma' \frac{c}{a}}.$$

Следовательно, эта эквипотенциальная поверхность вблизи оси является почти плоской.

Вне диска, где величина r много больше, чем a , телесный угол ω равен нулю при $z=0$, так что плоскость xy представляет собой часть эквипотенциальной поверхности.

Чтобы выяснить, где встречаются эти две части поверхности, найдем, в какой точке этой плоскости $dV/dz=0$.

Если величина r очень близка к a , телесный угол ω становится приблизительно сферическим двуугольником на сфере единичного радиуса. Угол этого двуугольника равен $\arctg[z/(r-a)]$, и, следовательно, $\omega = 2 \arctg[z/(r-a)]$. Поэтому при $z=0$ выполняется приблизительное равенство $\frac{dV}{dz} = -4\pi\sigma + \frac{2\sigma'c}{r-a}$.

Таким образом, при $dV/dz=0$

$$r_0 = a + \frac{\sigma'c}{2\pi\sigma} = a + \frac{z_0}{\pi} \quad (\text{приблизительно}).$$

Поэтому эквипотенциальная поверхность $V=0$ состоит из напоминающей диск фигуры радиуса r_0 и примерно одинаковой толщины z_0 и из той части бесконечной плоскости xy , которая лежит за пределами этой фигуры.

Поверхностный интеграл по всему диску дает находящийся на нем электрический заряд. Можно показать, как это сделано в теории круговых токов, часть IV, п. 704, что заряд на диске равен

$$Q = 4\pi a \sigma' c \left\{ \ln \frac{8a}{r_0 - a} - 2 \right\} + \pi \sigma r_0^2.$$

Заряд на такой же площади плоской поверхности равен $\pi \sigma r_0^2$, таким образом, заряд на диске превышает заряд на такой же площади плоской поверхности в отношении

$$1 + 8 \frac{z_0}{r_0} \ln \frac{8\pi r_0}{z_0} \text{ к единице,}$$

где z_0 — толщина, r_0 — радиус диска, и предполагается, что величина z_0 мала в сравнении с r_0 .

Об электрических накопителях и об измерении емкости

226. Накопителем или Конденсатором называется прибор, состоящий из двух проводящих поверхностей, разделенных изолирующей диэлектрической средой.

Лейденская банка представляет собой накопитель, в котором внутренняя обкладка из оловянной фольги отделена от внешней обкладки стеклом, из которого сделана банка. Первоначальная лейденская склянка (phial) представляла собой стеклянный сосуд, содержащий воду, которая отделялась стеклом от руки, державшей сосуд.

Внешняя поверхность любого изолированного проводника может рассматриваться как одна из поверхностей накопителя, в то время как другую поверхность образует Земля или стены комнаты, в которой помещается проводник, а находящийся между этими поверхностями воздух образует диэлектрическую среду.

Емкость накопителя измеряется тем количеством электричества, которым нужно зарядить внутреннюю поверхность, для того чтобы разность между потенциалами поверхностей сделать равной единице.

Поскольку каждый электрический потенциал есть сумма некоторого числа частей, отыскиваемых как результат деления каждого элемента заряда на его расстояние до точки наблюдения, отношение количества электричества к потенциалу должно иметь размерность длины. Таким образом, электростатическая емкость есть величина размерности длины, т. е. мы можем измерять ее в футах или метрах, не внося никакой неоднозначности.

В электрических исследованиях накопители используются для двух основных целей: для получения и удержания больших количеств электричества в настолько малых объемах, насколько это возможно, и для измерения определен-

ных количеств электричества по величине потенциала, который они создают в накопителе.

Для удержания электрических зарядов не было создано ничего более совершенного, чем лейденская банка. Основная часть потерь вызывается перетеканием электричества по влажной непокрытой поверхности стекла от одной обкладки к другой. Это может быть в значительной степени предотвращено с помощью искусственного осушения воздуха внутри банки, а также лакировкой поверхности стекла там, где оно соприкасается с атмосферой. В электроскопах сэра У. Томсона потери ото дня ко дню составляют очень малый процент, и я полагаю, что никакая часть этих потерь не вызывается прямым прохождением электричества через воздух или через стекло, если стекло хорошего качества, но что потери происходят главным образом из-за прохождения электричества вне банки вдоль различных изолирующих стержней и стеклянных поверхностей прибора.

Действительно, этот же самый исследователь электричества сообщил заряд серной кислоте, помещенной в большую колбу с длинным горлом, затем герметически закрыл горло, расплавив его, так что заряд был полностью окружен стеклом; по истечении нескольких лет было обнаружено, что заряд еще сохранялся.

Однако стекло обладает этими изолирующими свойствами только тогда, когда оно холодное; заряд утекает сразу, если стекло нагреть до температуры чуть ниже 100°C .

Если желательно получить большую емкость в малом объеме, удобно использовать накопители, в которых изолятором служит листовой каучук, слюда или бумага, пропитанная парафином.

227. Для накопителей второго класса, предназначенных для измерения количеств электричества, все твердые диэлектрики должны применяться с большой осторожностью из-за свойства, которым они обладают, называемого Электрической Абсорбцией.

Единственным надежным диэлектриком для таких накопителей является воздух, который имеет то неудобство, что если пыль или грязь попадает в узкое пространство между двумя поверхностями, где должен быть воздух, то при этом не только изменяется толщина воздушной прослойки, но и может произойти соединение между противоположными поверхностями, и тогда накопитель не будет держать заряд.

Чтобы определить емкость накопителя в абсолютной мере, т. е. в футах или метрах, мы должны либо сначала определить его форму и размер, а затем решить задачу о распределении электричества на его противоположных поверхностях, либо должны сравнить его емкость с емкостью другого накопителя, для которого эта задача уже решена.

Поскольку эта задача очень трудна, лучше всего начать с накопителя такой формы, для которой решение известно. Так, известно, что емкость изолированного шара в неограниченном пространстве измеряется радиусом шара.

Действительно, шар, подвешенный в комнате, использовался гг. Кольраушем и Вебером как абсолютный стандарт, с которым они сравнивали емкость других накопителей.

Однако, емкость шара умеренных размеров настолько мала по сравнению с емкостью обычно используемых накопителей, что шар не является подходящей стандартной мерой.

Его емкость может быть значительно повышена, если окружить шар пустотелой концентрической сферической поверхностью несколько большего радиуса. Тогда емкость внутренней поверхности есть четвертый член пропорции, в которую входят толщина воздушного слоя и радиусы обеих поверхностей.

Сэр У. Томсон использовал такое устройство, как стандарт емкости, однако имеются значительные трудности, связанные с изготовлением правильных сферических поверхностей, с приведением их в концентрическое расположение и с достаточно точным измерением их радиусов и расстояния между ними.

Поэтому мы склоняемся к тому, чтобы предпочесть для абсолютного измерения емкости форму, в которой противоположные поверхности представляют собой параллельные плоскости.

Точность изготовления плоской поверхности может быть легко проконтролирована, расстояние между ними может быть измерено микрометрическим винтом и может меняться, принимая непрерывный ряд значений, что является особенно важным качеством измерительного прибора.

Единственная остающаяся трудность вызывается тем обстоятельством, что плоскости с необходимостью должны быть ограничены и что распределение электричества вблизи от границ этих плоскостей не вычислено надежно. Верно, что если мы возьмем плоскости в виде одинаковых круглых дисков, радиус которых велик в сравнении с расстоянием между ними, то мы можем рассматривать края дисков такими, как если бы они были прямолинейными, и вычислить распределение электричества по методу, развитому Гельмгольцем и описанному в п. 202. Однако следует заметить, что в этом случае часть электричества распределена на задней стороне каждого диска и при вычислении предполагалось, что поблизости нет других проводников, а это предположение не выполняется и не может выполняться в случае малого прибора.

228. Мы поэтому предпочитаем следующую установку, созданную сэром У. Томсоном, которую мы можем назвать установкой с защитным кольцом, с помощью которой количество электричества на изолированном диске может быть точно определено по его потенциалу.

Накопитель с защитным кольцом

Vb представляет собой цилиндрической сосуд, сделанный из проводящего материала, внешняя поверхность его верхнего торца есть точная плоскость. Эта верхняя поверхность состоит из двух частей: из диска A и широкого кольца BB , окружающего диск и отделенного от него по всей окружности очень малым интервалом, как раз достаточным для того, чтобы не проскакивала искра. Верхняя поверхность диска находится точно в той же плоскости, что и поверхность защитного кольца. Диск поддерживается стойками GG из изолирующего материала. C представляет собой металлический диск, нижняя поверхность которого является точной плоскостью и параллельна BB . Диск C значительно больше, чем A . Его расстояние от диска A устанавливается и измеряется микрометрическим винтом, который не показан на чертеже [рис. 21].

Этот накопитель используется как измерительный прибор следующим образом.

Предположим, что C имеет нулевой потенциал, а диск A и сосуд Vb оба имеют потенциал V . Тогда на обратной стороне диска не будет никакой электри-

зации, потому что сосуд почти замкнут и весь находится под одним и тем же потенциалом. Электризация на кромке диска будет очень мала, так как BB имеет тот же самый потенциал, что и диск. Электризация на лицевой стороне диска будет почти однородной, и поэтому полный заряд на диске почти точно будет представлен произведением площади диска на поверхностную плотность на плоскости, как дано в п. 124.

Действительно, из исследования, проведенного в п. 201, мы нашли, что заряд на диске равен

$$V \left\{ \frac{R^2 + R'^2}{8A} + \frac{R'^2 - R^2}{8A} \frac{\alpha}{A + \alpha} \right\},$$

где R — радиус диска, R' — радиус отверстия в защитном кольце, A — расстояние между A и C , α — величина, которая не может превышать $(R - R') (\ln 2) / \pi$.

Если промежуток между диском и защитным кольцом мал в сравнении с расстоянием между A и C , второй член будет очень малым, и заряд на диске будет приблизительно равен $V(R^2 + R'^2) / 8A$.

Приведем теперь сосуд Bb в соединение с Землей. Заряд на диске A уже не будет распределен однородно, но останется таким же по величине, и, если мы теперь разрядим A , мы получим количество электричества, которое мы знаем как функцию первоначальной разности потенциалов V и измеримых величин R , R' и A .

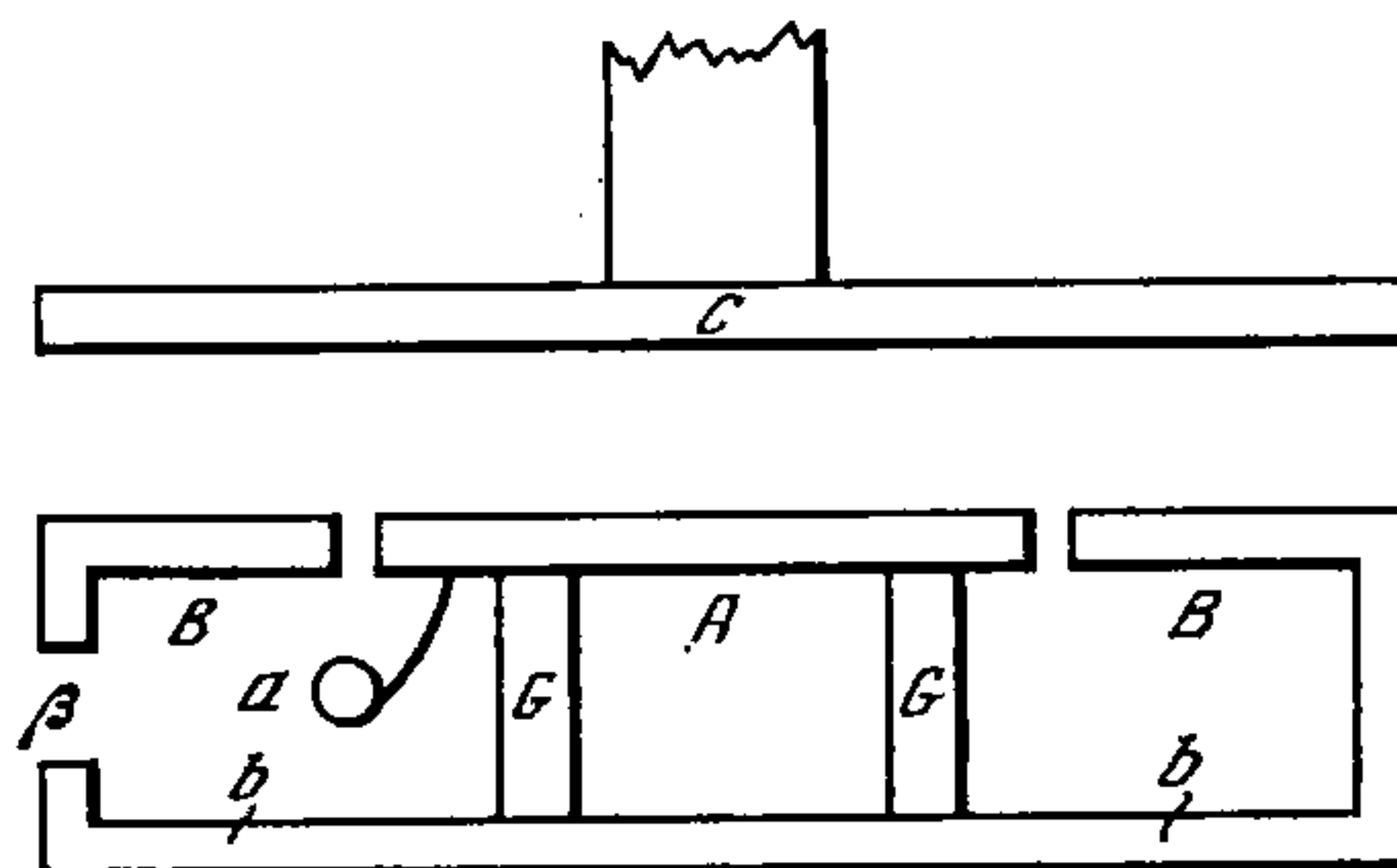


Рис. 21

О сравнении емкости накопителей

229. Та форма накопителя, которая наиболее подходит для определения его емкости в абсолютной мере, исходя из формы и величины его частей, оказывается обычно не самой удобной для электрических экспериментов. Желательно, чтобы повседневно применяемыми мерами емкости служили накопители, имеющие только две проводящих поверхности, одна из которых настолько полно окружена второй, насколько это возможно. С другой стороны, накопитель с защитным кольцом имеет три независимые проводящие части, которые должны заряжаться и разряжаться в определенном порядке. Поэтому желательно иметь возможность сравнить емкости двух накопителей с помощью некоторого электрического процесса и тем самым испытывать накопители, которые затем могут служить вторичными стандартами.

Сначала я покажу, как определить равенство емкостей у двух накопителей с защитными кольцами.

Пусть A — диск, B — защитное кольцо с остальными частями присоединенного к нему проводящего сосуда и C — большой диск одного из этих накопителей. Соответствующие части второго обозначим через A' , B' и C' .

Если один из этих накопителей имеет более простое устройство и состоит только из двух проводников, нам следует только опустить B или B' и предполагать, что A обозначает внутреннюю, а C — внешнюю проводящую поверхности, причем подразумевается, что C окружает A .

Предположим, что производятся следующие соединения.

Пусть B всегда находится в соединении с C' , а B' — с C , другими словами, пусть каждое защитное кольцо соединено с большим диском другого конденсатора.

(1) A соединяется с B и C' и с положительно заряженным электродом J лейденской банки, и пусть A' соединяется с B' и C и с Землей. (2) A , B и C' изолируются от J . (3) A изолируется от B и C' и A' — от B' и C . (4) B и C' соединяются с B' и C и с Землей. (5) A соединяется с A' . (6) A и A' соединяются с электроскопом E .

Мы можем изобразить эти соединения следующим образом:

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad 0 = C = B' = A' \quad | \quad A = B = C' = J \\
 (2) \quad 0 = C = B' = A' \quad | \quad A = B = C' \quad | \quad J \\
 (3) \quad 0 = C = B' \quad | \quad A' \quad | \quad A \quad | \quad B = C' \\
 (4) \quad 0 = C = B' \quad | \quad A' \quad | \quad A \quad | \quad B = C' = 0 \\
 (5) \quad 0 = C = B' \quad | \quad A' \quad = \quad A \quad | \quad B = C' = 0 \\
 (6) \quad 0 = C = B' \quad | \quad A' = E = A \quad | \quad B = C' = 0
 \end{array}$$

Здесь знак равенства означает электрическое соединение, а вертикальная черта означает изоляцию.

В положении (1) два накопителя заряжены противоположно в том смысле, что A имеет положительный заряд, а A' — отрицательный, причем заряды на A и A' равномерно распределены по внешней поверхности, лежащей напротив большого диска в каждом накопителе.

В положении (2) банка отключена, а в положении (3) заряды на A и A' изолированы.

В положении (4) защитные кольца соединяются с большими дисками, и заряды на A и A' , хотя и не меняются по величине, распределяются теперь по всей поверхности электродов.

В положении (5) A соединяется с A' . Если соответствующие заряды равны по величине и противоположны по знаку, электризация будет полностью уничтожена, и это обстоятельство проверяется в положении (6) с помощью электроскопа E .

Электроскоп E будет показывать положительную или отрицательную электризацию в соответствии с тем, чья емкость больше — A или A' .

С помощью специального переключательного устройства все эти операции могут быть выполнены в нужной последовательности за очень малую долю секунды, и емкости регулируются так, чтобы электроскоп не отмечал никакой электризации. Этим путем емкость накопителя может быть отрегулирована так, что она будет равна емкости любого другого или сумме емкостей нескольких накопителей, и, таким образом, можно получить систему накопителей, емкость каждого из которых определена в абсолютном выражении, т. е. в футах или метрах, а конструкция этих накопителей в то же время является наиболее подходящей для электрических экспериментов.

Этот метод сравнения, по-видимому, окажется полезен при определении удельной индуктивной способности различных диэлектриков, имеющих форму пластин или дисков. Если диск из диэлектрика расположен между A и C и размеры диска значительно больше, чем A , то емкость накопителя изменяется и

становится равной емкости того же самого накопителя с более близкими друг к другу пластинами A и C . Если накопитель с диэлектрической пластиной и с расстоянием x между A и C имеет такую же емкость, как тот же самый накопитель без диэлектрика с расстоянием x' между A и C , тогда, если a — толщина пластины и K — ее удельная индуктивная диэлектрическая способность, отнесенная к этой величине для воздуха, то $K = a/(a + x' - x)$.

Система из трех цилиндров, описанная в п. 127, была использована сэром У. Томсоном в качестве накопителя, емкость которого может быть увеличена или уменьшена на измеримые количества.

Опыты гг. Гибсона и Баркляя (Gibson and Barclay) с этим прибором описаны в *Proceedings of the Royal Society*, Feb. 2, 1871 и в *Phil. Trans.*, 1871, p. 573. Они нашли для удельной индуктивной способности парафина значение 1,975, если для воздуха эта величина равна единице.