

будут притягиваться сильнее, чем они притягивались бы в воздухе при тех же потенциалах.

Вторая пропорция показывает, что если количество электричества на каждом теле задано, то силы пропорциональны квадратам зарядов и обратно пропорциональны квадратам расстояний, а также обратно пропорциональны индуктивным способностям сред. Следовательно, два проводника с заданными зарядами, помещенные в жидкость с индуктивной способностью большей, чем у воздуха, будут притягиваться слабее, чем они притягивались бы в воздухе при тех же зарядах.

ГЛАВА IV

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

95 а. Во второй главе мы рассчитали потенциальную функцию и исследовали некоторые ее свойства, исходя из предположения, что существует непосредственное действие на расстоянии между заряженными телами, являющееся равнодействующей непосредственного воздействия различных заряженных элементов этих тел друг на друга.

Если этот метод исследования назвать прямым, то обратный ему метод будет заключаться в принятии предположения, что потенциал — это функция, обладающая теми свойствами, которые мы вывели выше, и в исследовании вида этой функции.

В прямом методе потенциал вычисляется по распределению заряда с помощью интегрирования, причем оказывается, что он удовлетворяет определенным уравнениям в частных производных. В обратном методе эти уравнения в частных производных считаются заданными, а ищется потенциал и распределение электричества.

Прямой метод применим лишь в тех случаях, когда задано распределение электричества. Если распределение заряда по проводнику подлежит определению, то следует применять обратный метод.

Мы должны показать, что обратный метод приводит во всех случаях ко вполне определенному результату, и установить некоторые общие теоремы, вытекающие из уравнения в частных производных Пуассона

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi\rho = 0.$$

Выражаемые этим уравнением математические идеи отличны по своему характеру от идей, выражаемых интегральным соотношением

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{r} dx' dy' dz'.$$

В дифференциальном уравнении мы выражаем тот факт, что сумма вторых производных от V в окрестности любой точки связана определенным образом с плотностью заряда в этой точке, и никак не связываем значение V в данной

точке со значениями ρ в различных точках, находящихся на конечном расстоянии от данной.

Наоборот, в определенном интеграле обозначенное через r расстояние между точкой (x', y', z') , в которой находится заряд, и точкой (x, y, z) , в которой нас интересует потенциал, явно входит в подынтегральное выражение.

Таким образом, интеграл является подходящим математическим выражением для теории взаимодействия частиц на расстоянии, в то время как дифференциальное уравнение подходит для теории взаимодействия смежных элементов среды.

Мы видели, что результат интегрирования удовлетворяет дифференциальному уравнению. Теперь нужно показать, что это единственное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее определенным условиям.

Тем самым мы не только установим математическую эквивалентность обоих выражений, но и подготовимся к переходу от теории прямого действия на расстоянии к теории взаимодействия смежных элементов среды.

95 б. Рассматриваемые в этой главе теоремы относятся к свойствам некоторых объемных интегралов, взятых по конечной области пространства, которую мы будем называть электрическим полем.

Элементами этих интегралов, т. е. входящими в подынтегральное выражение величинами, являются либо квадрат некоторого вектора, величина и направление которого меняются от точки к точке, либо произведение одного вектора на проекцию другого вектора на его направление.

Из различных распределений векторной величины в пространстве два распределения представляют особый интерес.

Первое распределение — это такое, при котором вектор может быть представлен как пространственная вариация (см. п. 17) скалярной функции, называемой Потенциалом.

Такое распределение можно назвать невращательным, Безвихревым. Равнодействующая сила, возникающая из-за притяжения или отталкивания любой совокупности центров сил, при любом законе зависимости силы от расстояния имеет безвихревое распределение.

Второй тип распределения — такое распределение, при котором конвергенция (сходимость) (п. 25) равна нулю в каждой точке. Такое распределение можно назвать Соленоидальным. Скорость несжимаемой жидкости имеет соленоидальное распределение.

Если центральные силы, которые, как мы уже говорили, дают безвихревое распределение равнодействующей силы, меняются обратно пропорционально квадрату расстояния и если центры сил находятся вне поля, то распределение силы в поле будет как соленоидальным, так и безвихревым.

Если движение несжимаемой жидкости, которое, как мы уже отмечали, является соленоидальным, происходит под действием центральных сил, зависящих от расстояния, или под действием поверхностного давления на первоначально покоившуюся жидкость без трения, то распределение скоростей будет как безвихревым, так и соленоидальным.

Распределение, являющееся одновременно безвихревым и соленоидальным, мы будем называть Лапласовым распределением, поскольку Лаплас указал на ряд наиболее интересных свойств этого распределения.

Рассматриваемые в этой главе объемные интегралы представляют собой, как

мы увидим, выражения для энергии электрического поля. В первой группе теорем, начинающейся с теоремы Грина, энергия выражается через напряженность электрического поля, являющуюся безвихревым вектором во всех случаях равновесия электричества. Показывается, что при заданных потенциалах поверхностей из всех безвихревых распределений наименьшую энергию имеет распределение, являющееся также и соленоидальным. Отсюда следует, что возможно лишь одно лапласово распределение, согласующееся с потенциалами поверхностей.

Во второй группе теорем, включающей теорему Томсона, энергия выражается через электрическое смещение, являющееся соленоидальным вектором. Показывается, что при заданных зарядах поверхностей из всех соленоидальных распределений распределение, имеющее наименьшую энергию, является также и безвихревым. Отсюда также следует, что возможно лишь одно лапласово распределение, согласующееся с заданными зарядами поверхностей.

Доказательство всех этих теорем проводится однотипно. Во избежание повторений мы каждый раз при проведении поверхностного интегрирования в прямоугольной системе координат будем использовать теорему III из п. 21¹, где дан подробный вывод соотношения между объемным интегралом и соответствующим поверхностным интегралом. Нам нужно будет лишь подставить вместо X , Y и Z в формулировке теоремы составляющие конкретного рассматриваемого вектора.

В первом издании этой книги утверждения каждой теоремы осложнялись множеством взаимно исключающих условий, имевших целью показать степень общности теоремы и многообразие случаев ее применения, однако это лишь приводило к смещению в умах читателей того, что предполагается, и того, что требуется доказать.

В настоящем издании каждая теорема сначала устанавливается в более определенной, подчас в более ограниченной, форме, а затем показывается возможность ее дальнейших обобщений.

До сих пор мы обозначали потенциал буквой V . Мы будем продолжать пользоваться этим обозначением и дальше в пределах электростатики. Однако в этой главе, а также в тех разделах второго тома, где электрический потенциал встречается в электромагнитных расчетах, мы будем использовать специальное обозначение Ψ для электрического потенциала.

Теорема Грина

96 а. Следующая важная теорема дана Джорджем Грином в его «Опыте применения математики к электричеству и магнетизму».

Теорема эта относится к пространству, ограниченному замкнутой поверхностью s . Мы будем называть это конечное пространство Полем. Пусть ν — нормаль, проведенная от поверхности в сторону поля, а l , m , n — направляющие косинусы этой нормали. Тогда выражение

$$l \frac{d\Psi}{dx} + m \frac{d\Psi}{dy} + n \frac{d\Psi}{dz} = \frac{d\Psi}{d\nu} \quad (1)$$

¹ Эта теорема была, по-видимому, впервые дана Остроградским в его работе, доложенной в 1828 г., но опубликованной лишь в 1831 г. в *Mem. de L'Acad. de St. Pétersbourg*. Т. I, р. 39. Ее можно рассматривать, однако, как одну из форм уравнения непрерывности.

дает скорость изменения функции Ψ при движении вдоль нормали ν . В дальнейшем будет считаться, что значение $d\Psi/d\nu$ берется на самой поверхности, где $\nu=0$.

Будем, как и в п. 26 и 77 пользоваться обозначением

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} = -\nabla^2\Psi, \quad (2)$$

а для двух функций Ψ и Φ будем писать

$$\frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Phi}{dz} = -S.\nabla\Psi\nabla\Phi. \quad (3)$$

Читатель, незнакомый с методом Кватернионов, может, если угодно, считать выражения $\nabla^2\Psi$ и $S.\nabla\Psi\nabla\Phi$ просто удобными сокращенными обозначениями соответствующих величин, к которым они приравнены выше, а поскольку мы будем в дальнейшем использовать лишь обычные декартовы координаты, то Кватернионное истолкование этих выражений нам не понадобится. Мы, однако, пользуемся именно этими обозначениями, а не произвольными другими сокращениями, поскольку на языке Кватернионов они полностью представляют соответствующую величину. Оператор ∇ в применении к скалярной функции Ψ дает пространственную вариацию этой функции, а выражение $-S.\nabla\Psi\nabla\Phi$ дает скалярную часть произведения двух пространственных вариаций, т. е. произведение одной из пространственных вариаций на составляющую другой вариации в направлении первой. Выражение $d\Psi/d\nu$ записывается в терминах Кватернионов как $S.U\nu\nabla\Psi$, где $U\nu$ — единичный вектор в направлении нормали. На данном этапе не видно особой выгоды в применении этого обозначения, однако оно окажется удобным при рассмотрении анизотропных сред.

Доказательство теоремы Грина

Пусть Ψ и Φ — две функции от x, y, z , конечные и непрерывные вместе со своими первыми производными в односвязной области ζ , ограниченной замкнутой поверхностью s . Тогда

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds - \iiint \Psi \nabla^2\Phi d\zeta = \iiint S.\nabla\Psi\nabla\Phi d\zeta = \iint \Phi \frac{d\Psi}{d\nu} ds - \iiint \Phi \nabla^2\Psi d\zeta, \quad (4)$$

где двойное интегрирование производится по всей замкнутой поверхности s , а тройное — по полю ζ , ограниченному этой поверхностью.

Для доказательства положим в Теореме III, п. 21,

$$X = \Psi \frac{d\Phi}{dx}, \quad Y = \Psi \frac{d\Phi}{dy}, \quad Z = \Psi \frac{d\Phi}{dz}. \quad (5)$$

Тогда

$$R \cos \varepsilon = -\Psi \left(l \frac{d\Phi}{dx} + m \frac{d\Phi}{dy} + n \frac{d\Phi}{dz} \right) = -\Psi \frac{d\Phi}{d\nu}, \quad \text{согласно (1),} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} &= \Psi \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} \right) + \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Phi}{dz} = \\ &= -\Psi \nabla^2\Phi - S.\nabla\Psi\nabla\Phi, \quad \text{согласно (2) и (3).} \end{aligned} \quad (7)$$

По Теореме III

$$\iint R \cos \varepsilon ds = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\zeta,$$

так что (6) и (7) дают

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{dv} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi d\zeta = \iiint S \cdot \nabla \Psi \nabla \Phi d\zeta. \quad (8)$$

Поскольку в правой части равенства Ψ и Φ можно поменять местами, это можно сделать и в левой части равенства. Таким образом, мы получили полное доказательство Теоремы Грина, даваемой равенством (4).

96 б. Теперь мы покажем, что Теорема Грина справедлива и в случае, когда одна из функций, скажем Ψ , многозначна, если ее первые производные однозначны и не обращаются в бесконечность в односвязной области ζ .

Поскольку $\nabla \Psi$ и $\nabla \Phi$ однозначны, то средняя часть равенств (4) однозначна. Однако из-за многозначности Ψ оба слагаемых левой части равенств (4) многозначны. Но если выбрать какое-либо одно значение Ψ_0 из многих значений Ψ в точке A внутри области ζ , то тем самым определяется значение функции Ψ в любой другой точке P . Действительно, поскольку выбранное значение Ψ является непрерывным внутри объема, то значение Ψ в точке P должно совпадать с тем решением, которое получается непрерывным изменением вдоль любого пути от A к P , начиная со значения Ψ_0 в точке A . Если бы значение Ψ в точке P получалось различным для различных путей из A в P , то эти два пути должны были бы охватывать замкнутую кривую, на которой первые производные от Ψ бесконечны. Но это противоречит нашим условиям. Поскольку первые производные по условию не обращаются в бесконечность внутри области ζ , эта замкнутая кривая должна быть целиком вне этой области, а поскольку область односвязна, два пути внутри области не могут охватывать чего-либо вне области.

Таким образом, при заданном значении Ψ_0 функции в точке A ее значение в точке P определяется однозначно.

Если в точке A выбрано какое-либо другое значение Ψ , скажем $\Psi_0 + n\kappa$, то значение функции в точке P будет $\Psi + n\kappa$. Однако значение левой части равенства (4) останется тем же, что и раньше, потому что это изменение приводит к добавлению в левой части (4) члена

$$n\kappa \left[\iint \frac{d\Phi}{dv} ds - \iiint \nabla^2 \Phi d\zeta \right],$$

который, согласно Теореме III из п. 21, равен нулю.

96 в. Если область ζ двухсвязная или многосвязная, то ее можно свести к односвязной области, замкнув каждый ее контур диафрагмой (что позволит применить рассматриваемую теорему к области, ограниченной поверхностью области ζ , а также положительной и отрицательной сторонами диафрагмы).

Пусть s_1 — одна из этих диафрагм, а κ_1 — соответствующая циклическая постоянная, т. е. приращение при однократном обходе по контуру в положительном направлении. Поскольку область ζ расположена по обе стороны от диафрагмы s_1 , то каждый элемент s_1 войдет дважды в поверхностный интеграл.

Пусть нормаль ν_1 проведена в положительную сторону ds_1 , а ν'_1 — в отрицательную. Тогда $(d\Phi/d\nu'_1) = -(d\Phi/d\nu_1)$ и $\Psi'_1 = \Psi_1 + \kappa_1$, и так что элемент поверхностного интеграла, обусловленный ds_1 , будет равен

$$\Psi_1 \frac{d\Phi}{d\nu_1} ds_1 - \Psi'_1 \frac{d\Phi}{d\nu'_1} ds_1 = -\kappa_1 \frac{d\Phi}{d\nu_1} ds_1,$$

поскольку $d\nu_1$ — элемент внутренней нормали к положительной поверхности.

Таким образом, если область ζ многосвязная, то первая часть уравнения (4) запишется в виде

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds - \kappa_1 \iint \frac{d\Phi}{d\nu_1} ds_1 - \dots - \kappa_n \iint \frac{d\Phi}{d\nu_n} ds_n - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi d\zeta, \quad (4a)$$

где $d\nu$ — элемент внутренней нормали к граничной поверхности, первый поверхностный интеграл берется по граничной поверхности, а остальные — по различным диафрагмам, каждый элемент поверхности которых входит в интеграл один раз с нормалью, направленной в соответствии с положительным направлением контура.

Необходимость такой модификации теоремы для многосвязных областей была впервые показана Гельмгольцем², а первое ее применение к рассматриваемой теореме принадлежит Томсону³.

96 г. Предположим теперь вместе с Грином, что одна из функций, скажем Φ , не удовлетворяет тому условию, что сама функция и ее первые производные не обращаются в бесконечность внутри заданной области. Пусть она обращается в бесконечность в точке P этой области, и только в ней, причем вблизи точки P функция Φ равна $\Phi_0 + e/r$, где Φ_0 — конечная и непрерывная величина, а r — расстояние от P . Такой случай имеет место, если Φ — потенциал количества электричества e , сосредоточенного в точке P , и любого распределения электричества с объемной плотностью, нигде не обращающейся в бесконечность в рассматриваемой области.

Предположим теперь, что вокруг точки P как центра описана сфера очень малого радиуса a . Поскольку в области вне сферы, но внутри поверхности ζ , функция Φ никаких особенностей не имеет, то мы можем применить к ней Теорему Грина, не забыв учесть при поверхностном интегрировании и поверхность малой сферы.

При вычислении объемных интегралов следует из интеграла, взятого по всей области, вычесть интеграл по объему малой сферы.

Но интеграл

$$\iiint \Phi \nabla^2 \Psi dx dy dz$$

по объему сферы не может по абсолютной величине превосходить

$$(\nabla^2 \Psi)_g \iiint \Phi dx dy dz,$$

т. е.

$$(\nabla^2 \Psi)_g \left(2\pi ea^2 + \frac{4}{3} \pi a^3 \Phi_0 \right),$$

² «Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen», *Crelle*, 1858. Англ. перевод проф. Тэта; *Phil. Mag.*, 1867 (I).

³ «On Vortex Motion», *Trans. R. S. Edin.*, XXV, part. I, p. 241 (1867).

где индекс g какой-либо величины означает наибольшее численное значение этой величины внутри рассматриваемой сферы.

Таким образом, этот объемный интеграл порядка a^2 и может быть опущен при стремлении a к нулю.

Второй объемный интеграл

$$\iiint \Psi \nabla^2 \Phi \, dx \, dy \, dz$$

мы будем считать взятым по объему между малой сферой и поверхностью s , так что область интегрирования не включает точки, где Φ обращается в бесконечность.

Поверхностный интеграл $\iint \Phi \frac{d\Phi}{dv} ds'$ для сферы не может численно превосходить $\Phi_g \iint \frac{d\Psi}{dv} ds'$.

Но по Теореме III, п. 21,

$$\iint \frac{d\Psi}{dv} ds = - \iiint \nabla^2 \Psi \, dx \, dy \, dz,$$

так как здесь dv отсчитывается наружу от сферы. Этот интеграл не может численно превосходить $(\nabla^2 \Psi)_g \cdot \frac{4}{3} \pi a^3$, а Φ_g на поверхности примерно равно e/a , так что $\iint \Phi \frac{d\Psi}{dv} ds$ не может численно превосходить

$$\frac{4}{3} \pi a^2 e (\nabla^2 \Psi)_g,$$

т. е. он порядка a^2 и в пределе при a , стремящемся к нулю, может быть опущен.

Однако поверхностный интеграл по сфере, стоящий в правой части равенства (4):

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{dv} ds',$$

не обращается в нуль, так как

$$\iint \frac{d\Phi}{dv} ds' = -4\pi e$$

(dv отсчитывается наружу от сферы).

Обозначая через Ψ_0 значение Ψ в точке P , получим

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{dv} ds = -4\pi e \Psi_0.$$

Таким образом, уравнение (4) принимает вид

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{dv} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi \, d\zeta - 4\pi e \Psi_0 = \iint \Phi \frac{d\Psi}{dv} ds - \iiint \Phi \nabla^2 \Psi \, d\zeta. \quad (4b)$$

97 а. Следуя Грину, применим этот вариант Теоремы Грина для определения поверхностной плотности распределения, создающего потенциал, значения кото-

рого заданы внутри и вне заданной замкнутой поверхности. Эти значения должны совпадать на поверхности; внутри поверхности $\nabla^2\Psi=0$, а вне нее $\nabla^2\Psi'=0$, где Ψ и Ψ' означают потенциалы внутри и вне поверхности.

Грин начинает с прямой задачи, когда задано распределение поверхностной плотности σ , а потенциалы во внутренней точке P и во внешней точке P' находятся интегрированием:

$$\Psi_P = \iint \frac{\sigma}{r} ds, \quad \Psi_{P'} = \iint \frac{\sigma}{r'} ds, \quad (9)$$

где r и r' соответственно расстояния от точек P и P' .

Полагая $\Phi=1/r$ и применив Теорему Грина к объему внутри поверхности с учетом того, что $\nabla^2\Phi=0$ и $\nabla^2\Psi=0$ в области интегрирования, получим

$$\iint \Psi \frac{d\frac{1}{r}}{dv'} ds - 4\pi\Psi_P = \iint \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dv'} ds, \quad (10)$$

где Ψ_P — значение Ψ в точке P .

Применим еще раз эту теорему к объему, ограниченному поверхностью s и охватывающей ее поверхностью на бесконечно большом расстоянии a . Вклад в поверхностный интеграл от бесконечно удаленной поверхности будет порядка $1/a$ и может быть опущен, откуда

$$\iint \Psi' \frac{d\frac{1}{r}}{dv} ds = \iint \frac{1}{r} \frac{d\Psi'}{dv} ds. \quad (11)$$

Но на поверхности $\Psi=\Psi'$, а поскольку нормали ν и ν' направлены в противоположные стороны, то

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dv} + \frac{d\frac{1}{r}}{dv'} = 0.$$

Таким образом, при сложении уравнений (10) и (11) члены в левой части сократятся, и мы получим

$$-4\pi\Psi_P = \iint \frac{1}{r} \left(\frac{d\Psi}{dv'} + \frac{d\Psi'}{dv} \right) ds. \quad (12)$$

97 б. Грин показал также, что при произвольно заданном потенциале Ψ в каждой точке замкнутой поверхности s можно найти потенциал в любой точке внутри и вне поверхности, если $\nabla^2\Psi=0$ вне и внутри поверхности.

Для этого он выбрал функцию Φ такой, что вблизи точки P она близка к $1/r$, а на поверхности s равна нулю, причем в каждой точке внутри поверхности $\nabla^2\Phi=0$.

Существование такой функции Грин доказывает из физических соображений: если представить себе, что s — проводящая заземленная поверхность, а в точке P находится единичный заряд, то соответствующий потенциал удовлетворял бы приведенным условиям. Действительно, если поверхность s заземлена, то потенциал в каждой ее точке должен равняться нулю, а поскольку потенциал создан зарядом в точке P и наведенными зарядами на s , то $\nabla^2\Phi=0$ во всех точках внутри поверхности.

Применяя к этому случаю Теорему Грина, получим

$$4\pi\Psi_P = \iint \Psi \frac{d\Phi}{dv'} ds, \quad (13)$$

где Ψ под интегралом означает заданное значение потенциала на элементе поверхности ds . Если σ_P — плотность электричества, наведенного единичным зарядом в точке P , то

$$4\pi\sigma_P + \frac{d\Phi}{dv'} = 0 \quad (14)$$

и уравнение (13) можно переписать в виде

$$\Psi_P = - \iint P\sigma ds, \quad (15)$$

где σ — поверхностная плотность электричества, индуцированная на ds единичным зарядом в точке P .

Таким образом, если значение σ известно в каждой точке поверхности для данного положения точки P , то мы можем рассчитать простым интегрированием потенциал в точке P при заданном потенциале в каждой точке поверхности и при условии $\nabla^2\Psi=0$ внутри поверхности.

Ниже мы покажем, что если мы нашли решение Ψ , удовлетворяющее этим условиям, то оно единственно.

Функция Грина

98. Пусть замкнутая поверхность s находится под нулевым потенциалом. Пусть P и Q — две точки с положительной стороны от поверхности s (мы можем принять за положительную как внутреннюю, так и внешнюю сторону) и пусть в точке P находится небольшое тело, несущее единичный заряд. Тогда потенциал в точке Q состоит из двух частей; одна часть вызывается непосредственным действием заряда в точке P , другая — обусловлена действием заряда, индуцированного на поверхности s зарядом в P . Эта вторая часть потенциала называется *Функцией Грина* и обозначается через G_{PQ} .

Функция Грина зависит от положения двух точек P и Q ; вид функции зависит от формы поверхности s . Она была рассчитана для сферической поверхности и еще для нескольких других случаев. Функция Грина дает потенциал в точке Q , создаваемый электричеством, наводимым на поверхности s единичным зарядом в точке P .

Фактический потенциал в точке Q , создаваемый зарядом в точке P и наводимыми им зарядами на s , равен $1/r_{PQ} + G_{PQ}$, где r_{PQ} — расстояние от P до Q .

На поверхности s и во всех точках по отрицательную сторону от s потенциал равен нулю, так что

$$G_{Pa} = - (1/r_{Pa}), \quad (1)$$

где индекс a показывает, что вместо точки Q взята точка A на поверхности s .

Если обозначить через $\sigma_{Pa'}$ поверхностную плотность в точке A' на поверхности s , то, поскольку G_{PQ} является потенциалом, создаваемым в точке Q

поверхностным распределением,

$$G_{pq} = \iint (\sigma_{pa'} / r_{qa'}) ds', \quad (2)$$

где ds' — элемент поверхности s у точки A' , и интегрирование производится по всей поверхности s .

Если бы единичный заряд был расположен в точке Q , то, согласно (1), мы имели бы

$$(1/r_{qa'}) = -G_{qa'} \quad (3)$$

$$= - \iint (\sigma_{qa} / r_{aa'}) ds, \quad (4)$$

где σ_{qa} — плотность в точке A , наводимая единичным зарядом в Q , ds — элемент поверхности, а $r_{aa'}$ — расстояние между точками A и A' . Подставляя это значение $1/r_{qa'}$ в выражение для G_{pq} , получим

$$G_{pq} = - \iiint \frac{\sigma_{qa} \sigma_{pa'}}{r_{aa'}} ds ds'. \quad (5)$$

Поскольку это выражение не меняется от перестановки индексов q и p , мы заключаем, что

$$G_{pq} = G_{qp}. \quad (6)$$

К этому результату мы пришли еще в п. 86, но теперь мы видим, что он выводится математически методом, позволяющим рассчитать функцию Грина.

Предположим, что у нас имеется произвольное распределение электричества, и поместим в поле точечный единичный заряд. Пусть поверхность нулевого потенциала полностью отделяет эту точку от имеющегося распределения заряда. Тогда, приняв эту поверхность за поверхность s , а точку — за точку P , получим, что функция Грина для любой точки с той же стороны поверхности, что и P , будет совпадать с потенциалом распределения электричества, существующего по другую сторону поверхности. Таким способом можно построить сколько угодно примеров, позволяющих найти функцию Грина для частных случаев расположения точки P . Значительно труднее найти вид функции при заданной поверхности s и при произвольном положении точки P , хотя, как мы показали, математически это возможно.

Предположим, что эта задача решена, и что точка P находится внутри поверхности. Тогда во всех точках вне поверхности потенциал поверхностного распределения равен и противоположен по знаку потенциалу точки P . Таким образом, поверхностное распределение *центробарично*⁴ и его действие во всех внешних точках эквивалентно действию единичного положительного заряда в точке P .

99 а. Если положить в Теореме Грина $\Psi = \Phi$, то мы получим

$$\iint \Psi \frac{d\Psi}{dv} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Psi d\zeta = \iiint (\nabla \Psi)^2 d\zeta. \quad (16)$$

Если Ψ — потенциал распределения заряда в пространстве с объемной плотностью ρ и на проводниках с поверхностями s_1, s_2 и т. д., имеющих потенциалы

⁴ Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, § 526.

Ψ_1, Ψ_2 и т. д., с поверхностной плотностью σ_1, σ_2 и т. д., то

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi\rho, \quad (17)$$

$$\frac{d\Psi}{dv} = -4\pi\sigma \quad (18)$$

(dv направлено наружу от проводника) и

$$\iint \frac{d\Psi}{dv_1} ds_1 = -4\pi e_1, \quad (19)$$

где e_1 — заряд поверхности s_1 .

Поделив (16) на -8π , получим

$$\frac{1}{2}(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \dots) + \frac{1}{2} \iiint \Psi \rho dx dy dz = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz. \quad (20)$$

Первый член слева представляет собой электрическую энергию системы, обусловленную поверхностными распределениями, а второй — энергию, обусловленную объемным распределением электричества в поле, если таковое распределение имеется.

Таким образом, правая часть уравнения выражает полную электрическую энергию системы при заданном потенциале как функции координат.

Поскольку мы часто будем пользоваться этим объемным интегралом, мы введем для него специальное обозначение W_ψ , так что

$$W_\psi = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz. \quad (21)$$

Если заряд распределен лишь на поверхностях проводников, то $\rho=0$ и второй член слева в (20) отсутствует.

Первый член слева выражает, как и в п. 84, энергию заряженной системы через заряды и потенциалы проводников, мы обозначаем это выражение через W .

99 б. Пусть Ψ — функция от x, y, z , удовлетворяющая тому условию, что на замкнутой поверхности s она принимает во всех точках известные значения $\bar{\Psi}$. Значения Ψ в точках вне поверхности s совершенно произвольны.

Напишем интеграл

$$\mathcal{N} = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz, \quad (22)$$

где интегрирование производится по объему внутри поверхности s . Докажем, что если Ψ_1 — такая из функций Ψ , удовлетворяющих условию на поверхности, которая удовлетворяет также уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Psi_1 = 0 \quad (23)$$

во всех точках внутри поверхности, то значение W_1 интеграла W , вычисленное для Ψ_1 , меньше, чем для любой другой функции, отличающейся от Ψ_1 хотя бы в одной точке внутри поверхности.

Действительно, пусть Ψ — любая функция, совпадающая с Ψ_1 на поверхности, но не совпадающая всюду внутри поверхности, и положим

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (24)$$

Тогда Ψ_2 обращается в нуль во всех точках поверхности.

Значение W для Ψ равно, очевидно,

$$W = W_1 + W_2 + \frac{1}{4\pi} \iiint \left(\frac{d\Psi_1}{dx} \frac{d\Psi_2}{dx} + \frac{d\Psi_1}{dy} \frac{d\Psi_2}{dy} + \frac{d\Psi_1}{dz} \frac{d\Psi_2}{dz} \right) dx dy dz. \quad (25)$$

По Теореме Грина последнее выражение можно написать в виде

$$\frac{1}{4\pi} \iiint \Psi_2 \nabla^2 \Psi_1 d\zeta - \frac{1}{4\pi} \iint \Psi_2 \frac{d\Psi_1}{dv} ds. \quad (26)$$

Объемный интеграл обращается в нуль, так как $\nabla^2 \Psi_1 = 0$ внутри поверхности, а поверхностный интеграл равен нулю, потому что на поверхности $\Psi_2 = 0$. Таким образом, уравнение (25) принимает вид

$$W = W_1 + W_2. \quad (27)$$

Но подынтегральное выражение в интеграле W_2 представляет собой сумму трех квадратов и не может быть отрицательно, так что сам интеграл может быть либо положительным, либо нулем. Итак, если W_2 не равно нулю, то оно положительно, и, следовательно, W больше W_1 . Если же W_2 равно нулю, то каждое слагаемое под интегралом должно быть равно нулю, т. е. $(d\Psi_2/dx) = 0$, $(d\Psi_2/dy) = 0$, $(d\Psi_2/dz) = 0$ во всех точках внутри поверхности, а Ψ_2 постоянно внутри поверхности. Но на поверхности $\Psi_2 = 0$, значит, оно равно нулю и в любой точке внутри поверхности, т. е. $\Psi = \Psi_1$, так что, если W не больше W_1 , то Ψ должно совпадать с Ψ_1 во всех точках внутри поверхности.

Отсюда следует, что Ψ_1 — единственная функция от x, y, z , равная $\bar{\Psi}$ на поверхности и удовлетворяющая уравнению Лапласа внутри поверхности.

Если бы этим условиям удовлетворяла какая-нибудь другая функция Ψ_3 , то W_3 должно было бы быть меньше любого другого значения W . Но мы уже показали, что W_1 меньше любого другого значения, а следовательно, и меньше W_3 . Следовательно, никакая функция, отличная от Ψ_1 , не может удовлетворять этим условиям.

Ниже мы увидим, что наиболее часто встречается случай, когда поле ограничено одной внешней поверхностью s и некоторым числом внутренних поверхностей s_1, s_2 и т. д., причем принимает нулевое значение на s и постоянные на каждой поверхности значения: Ψ_1 на s_1 , Ψ_2 на s_2 и т. д., как для системы проводников с заданными потенциалами.

Из всех функций Ψ , удовлетворяющих этим условиям, W_Ψ минимально для той функции, которая для каждой точки в поле удовлетворяет условию $\nabla^2 \Psi = 0$.

Теорема Томсона

Лемма

100 а. Пусть Ψ — произвольная функция x, y, z , конечная и непрерывная внутри замкнутой поверхности s и принимающая на некоторых замкнутых по-

верхностях $s_1, s_2, \dots, s_p, \dots$ значения $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p, \dots$, постоянные на каждой поверхности.

Пусть u, v, w — функции x, y, z , которые мы можем рассматривать как составляющие вектора \mathfrak{C} , удовлетворяющего условию соленоидальности

$$-\text{S.}\nabla\mathfrak{C} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0. \quad (28)$$

Положим в Теореме III

$$X = \Psi u, \quad Y = \Psi v, \quad Z = \Psi w. \quad (29)$$

В результате этих подстановок получим

$$\begin{aligned} \sum_p \iint \Psi_p (l_p u + m_p v + n_p w) ds_p + \iiint \Psi \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) dx dy dz + \\ + \iiint \left(u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz = 0; \end{aligned} \quad (30)$$

где поверхностные интегралы берутся по различным поверхностям, объемные^e интегралы — по всему полю, а l_p, m_p, n_p — направляющие косинусы нормали к поверхности s_p в сторону поля. Первый объемный интеграл равен нулю вследствие соленоидальности u, v, w , а поверхностные интегралы равны нулю в следующих случаях:

- 1) если для любой точки поверхности $\Psi = 0$,
 - 2) если для любой точки поверхности $lu + mv + nw = 0$,
 - 3) если поверхность состоит вся из частей, на которых выполняется либо (1), либо (2),
 - 4) если Ψ постоянно на каждой замкнутой поверхности и $\iint (lu + mv + nw) ds = 0$.
- В этих четырех случаях объемный интеграл

$$M = \iiint \left(u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz = 0. \quad (31)$$

100 б. Рассмотрим теперь поле, ограниченное замкнутой поверхностью s и внутренними замкнутыми поверхностями s_1, s_2, \dots .

Пусть Ψ — функция x, y, z , конечная и непрерывная в точках поля, удовлетворяющая Уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad (32)$$

имеющая постоянные, но не заданные значения Ψ_1, Ψ_2, \dots соответственно на поверхностях s_1, s_2, \dots и нулевое значение на внешней поверхности s .

Заряд любой из заряженных поверхностей, скажем s_1 , дается поверхностным интегралом

$$e_1 = - \frac{1}{4\pi} \iint \frac{d\Psi}{dv_1} ds_1, \quad (33)$$

где нормаль v_1 , направлена от поверхности s_1 в сторону электрического поля.

100 в. Пусть теперь f, g, h — функции x, y, z , которые можно рассматривать как составляющие некоторого вектора \mathfrak{D} , удовлетворяющие только тому усло-

вию, что в каждой точке поля должно выполняться условие соленоидальности

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0, \quad (34)$$

и что на каждой из внутренних замкнутых поверхностей, скажем s_1 , интеграл типа

$$\iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h) ds = e_1, \quad (35)$$

где l_1, m_1, n_1 — направляющие косинусы нормали ν_1 к поверхности s_1 в сторону электрического поля, а e_1 — та же величина, что и в (33), т. е. фактически электрический заряд проводника, ограниченного поверхностью s_1 .

Рассмотрим объемный интеграл

$$W_{\mathfrak{D}} = 2\pi \iiint (f^2 + g^2 + h^2) dx dy dz \quad (36)$$

по всему полю внутри s и вне s_1, s_2, \dots и сравним его с интегралом

$$W_{\Psi} = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (37)$$

по тому же объему.

Положим

$$u = f + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dx}, \quad v = g + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dy}, \quad w = h + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dz} \quad (38)$$

и введем

$$W_{\mathfrak{E}} = 2\pi \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz. \quad (39)$$

Тогда, поскольку

$$\begin{aligned} f^2 + g^2 + h^2 &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] + u^2 + v^2 + w^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left[u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \right], \end{aligned} \quad (40)$$

то

$$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi} + W_{\mathfrak{E}} - \iiint \left(u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz.$$

Но, во-первых, u, v, w удовлетворяют условию соленоидальности в любой точке поля, поскольку, согласно (38),

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} - \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \Psi, \quad (41)$$

а по (34) и (32) оба слагаемых правой части (41) равны нулю.

Во-вторых, имеет место равенство

$$\iint (l_1 u + m_1 v + n_1 w) ds_1 = \iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h) ds_1 + \frac{1}{4\pi} \iint \frac{d\Psi}{d\nu_1} ds_1. \quad (42)$$

Но согласно (35) первое слагаемое справа равно e_1 , а согласно (33) второе слагаемое справа равно $-e_1$, так что

$$\iint (l_1 u + m_1 v + n_1 w) ds_1 = 0. \quad (43)$$

Таким образом, так как Ψ_1 постоянно, выполняется четвертое условие п. 100 а, так что последнее слагаемое в правой части (40) равно нулю и уравнение сводится к

$$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi} + W_{\mathfrak{G}}. \quad (44)$$

Далее, подынтегральное выражение в $W_{\mathfrak{G}}$ является суммой трех квадратов $u^2 + v^2 + w^2$ и, следовательно, либо положительно, либо равно нулю. Если хоть в одной точке в поле u , v и w не равны одновременно нулю, то интеграл $W_{\mathfrak{G}}$ положителен, так что $W_{\mathfrak{D}}$ больше W_{Ψ} . Но и значения $u = v = w = 0$ во всех точках этим условиям удовлетворяют.

Таким образом, если в каждой точке

$$f = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dx}, \quad g = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dy}, \quad h = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dz}, \quad (45)$$

то

$$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi} \quad (46)$$

и величина $W_{\mathfrak{D}}$ для этих значений f , g , h меньше, чем для любых других значений f , g , h .

Итак, задача определения смещения и потенциала в каждой точке поля при заданных зарядах на каждом проводнике имеет одно и только одно решение.

Эта теорема в одном из более общих вариантов была впервые установлена сэром У. Томсоном⁵. Ниже мы укажем возможные обобщения теоремы.

100 г. Можно видоизменить эту теорему, предположив, что вектор \mathfrak{D} не соленоидальный в каждой точке, а удовлетворяет условию

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho, \quad (47)$$

где ρ — конечная функция, значение которой задано в каждой точке поля; она может быть положительной и отрицательной, непрерывной и разрывной, но интеграл от нее по конечному объему должен быть конечен.

Можно также предположить, что на некоторых поверхностях, расположенных в поле, имеет место соотношение

$$lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h' = \sigma, \quad (48)$$

где l , m , n и l' , m' , n' — направляющие косинусы нормалей из точки поверхности в области, где составляющие смещения равны соответственно f , g , h и f' , g' , h' а σ — величина, заданная во всех точках поверхности, интеграл от которой по конечной поверхности конечен.

100 д. Можно также изменить условие на граничных поверхностях, приняв, что в каждой точке этих поверхностей

$$lf + mg + nh = \sigma, \quad (49)$$

где σ задано во всех точках.

(В первоначальной формулировке теоремы мы считали заданным лишь интеграл от σ по каждой из поверхностей. Здесь мы считаем заданным значение σ на каждом элементе. Это все равно, что рассматривать в первоначальной формулировке теоремы каждый элемент как отдельную поверхность.)

⁵ Cambridge and Dublin Mathematical Journal, February, 1848.

Во всех этих модификациях теорема остается справедливой, если только помнить, что Ψ должно удовлетворять соответствующим условиям, т. е. общему условию

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} + 4\pi\rho = 0 \quad (50)$$

и условию на поверхности

$$\frac{d\Psi}{dv} + \frac{d\Psi'}{dv'} + 4\pi\sigma = 0. \quad (51)$$

Действительно, положив, как ранее,

$$f + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dx} = u, \quad g + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dy} = v, \quad h + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dz} = w,$$

получим, что u, v, w удовлетворяют общему условию соленоидальности

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

условию на поверхности

$$lu + mv + nw + l'u' + m'v' + n'w' = 0$$

и условию на граничной поверхности

$$lu + mv + nw = 0,$$

откуда опять следует, что

$$M = \iiint \left(u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz = 0$$

и

$$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi} + W_{\mathfrak{G}}.$$

Как и прежде, показывается, что $W_{\mathfrak{D}}$ имеет единственный минимум при $W_{\mathfrak{G}} = 0$, что означает равенство нулю $u^2 + v^2 + w^2$ во всех точках, так что

$$f = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dx}, \quad g = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dy}, \quad h = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dz}$$

101 а. В нашем доказательстве этих теорем мы до сих пор ограничивались той теорией электричества, которая считает свойства электрических систем зависящими от формы и относительного расположения проводников и их зарядов, но никак не учитывает природы диэлектрической среды, находящейся между проводниками.

Согласно этой теории, существует, например, неизменное соотношение между поверхностной плотностью на проводнике и электродвижущей напряженностью вне проводника у самой поверхности, даваемое законом Кулона: $R = 4\pi\sigma$.

Но это верно только для эталонной среды, за которую можно принять воздух. В других средах соотношение будет иным, как показал экспериментально, хотя и не опубликовал, Кавендиш, а затем независимо вновь открыл Фарадей.

Для полного описания этого явления мы нашли необходимым рассмотреть две векторные величины, соотношение между которыми в разных средах раз-

лично. Одна — это электродвижущая напряженность, другая — электрическое смещение. Электродвижущая напряженность связана соотношением неизменного вида с потенциалом, электрическое смещение связано соотношением неизменного вида с распределением заряда, но соотношение между электродвижущей напряженностью и электрическим смещением зависит от природы диэлектрической среды и должно выражаться уравнениями, наиболее общая форма которых до сих пор еще полностью не установлена и может быть установлена лишь в результате опытов с диэлектриками.

101 б. Электродвижущая напряженность — вектор, определенный в п. 68 как отношение механической силы, действующей на малый заряд, к величине этого заряда e . Ее составляющие мы обозначим через P, Q, R , а сам вектор — через \mathcal{E} .

В электростатике криволинейный интеграл от \mathcal{E} всегда не зависит от пути интегрирования, т. е., иными словами, \mathcal{E} является пространственной вариацией потенциала. Таким образом, $P = -d\Psi/dx$, $Q = -d\Psi/dy$, $R = -d\Psi/dz$, или, короче, пользуясь Кватернионными обозначениями, $\mathcal{E} = -\nabla\Psi$.

101 в. Составляющая электрического смещения в каком-либо направлении определена в п. 60 как отношение количества электричества, прошедшего через небольшую площадку A , плоскость которой перпендикулярна рассматриваемому направлению, к величине площадки A . Мы обозначим прямоугольные составляющие электрического смещения буквами f, g, h , а сам вектор — буквой \mathcal{D} .

Объемная плотность в каждой точке определяется уравнением

$$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz},$$

или в Кватернионных обозначениях $\rho = -S.\nabla\mathcal{D}$.

Поверхностная плотность в любой точке заряженной поверхности определяется соотношением

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h',$$

где f, g, h — составляющие смещения на одной стороне поверхности, а l, m, n — направляющие косинусы нормали к поверхности в эту сторону; соответственно f', g', h' и l', m', n' — составляющие смещения и направляющие косинусы нормали для другой стороны.

В Кватернионных обозначениях это уравнение примет вид

$$\sigma = -[S.Uv\mathcal{D} + S.Uv'\mathcal{D}'],$$

где Uv, Uv' — единичные нормали с обеих сторон поверхности, а S указывает на то, что берется скалярная часть произведения.

Для поверхности проводника, обозначая через v внешнюю нормаль и учитывая, что f', g', h' и \mathcal{D}' равны нулю, это уравнение сводится к виду

$$\begin{aligned} \sigma &= lf + mg + nh \\ &= -S.Uv\mathcal{D}. \end{aligned}$$

Таким образом, полный заряд проводника равен

$$\begin{aligned}\sigma &= \iint (lf + mg + nh) ds \\ &= - \iint S.U \nu \mathfrak{D} ds.\end{aligned}$$

101 г. Как показано в п. 84, электрическая энергия системы равна полусумме произведений зарядов на соответствующие потенциалы. Обозначая ее через W , получим

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2} \sum (e\Psi) = \frac{1}{2} \iiint \rho\Psi dx dy dz + \frac{1}{2} \iint \sigma\Psi ds = \\ &= \frac{1}{2} \iiint \Psi \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) dx dy dz + \frac{1}{2} \iint \Psi (lf + mg + nh) ds,\end{aligned}$$

где объемный интеграл берется по всему электрическому полю, а поверхностный — по поверхностям проводников.

Полагая в Теореме III, п. 21, $X = \Psi f$, $Y = \Psi g$, $Z = \Psi h$, получим

$$\begin{aligned}\iint \Psi (lf + mg + nh) ds &= - \iiint \Psi \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) dx dy dz - \\ &- \iiint \left(f \frac{d\Psi}{dx} + g \frac{d\Psi}{dy} + h \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz,\end{aligned}$$

где l , m , n — направляющие косинусы нормали к поверхности в сторону поля.

Подставляя это значение поверхностного интеграла в W , получим

$$W = - \frac{1}{2} \iiint \left(f \frac{d\Psi}{dx} + g \frac{d\Psi}{dy} + h \frac{d\Psi}{dz} \right) dx dy dz,$$

или

$$W = \frac{1}{2} \iiint (fP + gQ + hR) dx dy dz.$$

101 д. Теперь перейдем к соотношению между \mathfrak{D} и \mathfrak{E} . Единица заряда обычно определяется из опытов в воздухе. Из опытов Больцмана мы знаем теперь, что диэлектрическая постоянная для воздуха несколько больше, чем для вакуума, и что она зависит от плотности воздуха. Поэтому, строго говоря, подобно тому как значения коэффициентов преломления в воздухе нуждаются в поправке, так и все измерения электрических величин следует скорректировать, сведя их либо к воздуху при нормальной температуре и нормальном давлении, либо, что с научной точки зрения более предпочтительно, к вакууму. Но в обоих случаях поправки столь малы, что обнаруживаются лишь при чрезвычайно точных измерениях.

В эталонной среде $4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, т. е. $4\pi f = P$, $4\pi g = Q$, $4\pi h = R$.

В изотропной среде с диэлектрической постоянной K

$$4\pi\mathfrak{D} = K\mathfrak{E}, \quad 4\pi f = KP, \quad 4\pi g = KQ, \quad 4\pi h = KR.$$

Однако есть некоторые среды, из которых наиболее исследовано стекло, в которых соотношение между \mathfrak{D} и \mathfrak{E} более сложное и содержит производные по

времени от одной или от обеих этих величин, так что оно имеет вид

$$F(\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \dots) = 0.$$

Мы сейчас не будем рассматривать соотношений такого более общего вида и ограничимся случаем, когда \mathfrak{D} является линейной векторной функцией от \mathfrak{E} .

Самый общий вид такого соотношения может быть записан в виде $4\pi\mathfrak{D} = \varphi(\mathfrak{E})$, где через φ мы будем всюду в нашем исследовании обозначать линейную векторную функцию. Таким образом, составляющие \mathfrak{D} являются линейными однородными функциями от составляющих \mathfrak{E} и могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} 4\pi f &= K_{xx}P + K_{xy}Q + K_{xz}R, \\ 4\pi g &= K_{yx}P + K_{yy}Q + K_{yz}R, \\ 4\pi h &= K_{zx}P + K_{zy}Q + K_{zz}R, \end{aligned}$$

где первый индекс в каждом коэффициенте K указывает направление составляющей смещения, а второй — направление составляющей электродвижущей напряженности.

В самом общем виде в линейную векторную функцию входят девять независимых коэффициентов. Если коэффициенты с одинаковой парой индексов равны между собой, то такая функция называется самосопряженной.

Если выразить \mathfrak{E} через \mathfrak{D} , то получится соотношение типа $\mathfrak{E} = 4\pi\varphi^{-1}(\mathfrak{D})$, т. е.

$$\begin{aligned} P &= 4\pi(k_{xx}f + k_{yx}g + k_{zx}h), \\ Q &= 4\pi(k_{xy}f + k_{yy}g + k_{zy}h), \\ R &= 4\pi(k_{xz}f + k_{yz}g + k_{zz}h). \end{aligned}$$

101 е. Работа, совершаемая в единице объема среды электродвижущей напряженностью с составляющими P, Q, R при создании смещения с составляющими df, dg, dh , равна

$$dW = Pdf + Qdg + Rdh.$$

Поскольку диэлектрик, в котором имеет место электрическое смещение, является консервативной системой, то W должно быть функцией f, g, h , а поскольку f, g, h могут меняться независимо, то

$$P = \frac{dW}{df}, \quad Q = \frac{dW}{dg}, \quad R = \frac{dW}{dh}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dP}{dg} = \frac{d^2W}{dgdf} = \frac{d^2W}{dfdg} = \frac{dQ}{df}.$$

Но $dP/dg = 4\pi k_{yx}$ — коэффициент перед g в выражении для P , а $dQ/df = 4\pi k_{xy}$ — коэффициент перед f в выражении для Q .

Таким образом, если диэлектрическая среда является консервативной системой (а мы знаем, что это так, потому что ее энергия может сохраняться неограниченно долго), то $k_{xy} = k_{yx}$, т. е. φ^{-1} — самосопряженная функция.

Отсюда следует, что и φ — самосопряженная функция, т. е. $K_{xy} = K_{yx}$.

101 ж. Следовательно, выражение для энергии можно представить в любой из следующих форм:

$$W_{\mathcal{E}} = \frac{1}{8\pi} \iiint [K_{xx}P^2 + K_{yy}Q^2 + K_{zz}R^2 + 2K_{yz}QR + 2K_{zx}RP + 2K_{xy}PQ] dx dy dz,$$

или

$$W_{\mathcal{D}} = 2\pi \iiint [k_{xx}f^2 + k_{yy}g^2 + k_{zz}h^2 + 2k_{yz}gh + 2k_{zx}hf + 2k_{xy}fg] dx dy dz,$$

где индекс указывает на вектор, через который выражается W . Если индекс не указан, то подразумевается, что энергия выражена через оба вектора.

Таким образом, мы имеем всего шесть различных выражений для энергии электрического поля. Три из них содержат заряды и потенциалы поверхностей проводников и приведены в п. 87. Три других выражения являются объемными интегралами по всему электрическому полю и содержат составляющие электродвижущей напряженности, или электрического смещения, или и те и другие.

Поэтому первые три интеграла относятся к теории взаимодействия на расстоянии, а три последних — к теории воздействия через посредство промежуточной среды. Их можно представить в виде

$$W = -\frac{1}{2} \iiint S \cdot \mathcal{D} \mathcal{E} d\zeta,$$

$$W_{\mathcal{E}} = -\frac{1}{8\pi} \iiint S \cdot \mathcal{E} \varphi(\mathcal{E}) d\zeta, \quad W_{\mathcal{D}} = -2\pi \iiint S \cdot \mathcal{D} \varphi^{-1}(\mathcal{D}) d\zeta.$$

101 з. Чтобы обобщить Теорему Грина на случай неоднородной анизотропной среды, достаточно лишь положить в Теореме III, п. 21,

$$X = \Psi \left[K_{xx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{xy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{xz} \frac{d\Phi}{dz} \right],$$

$$Y = \Psi \left[K_{yx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{yy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{yz} \frac{d\Phi}{dz} \right], \quad Z = \Psi \left[K_{zx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{zy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{zz} \frac{d\Phi}{dz} \right],$$

и мы получим

$$\begin{aligned} & \iiint \Psi \left[(K_{xx}l + K_{yx}m + K_{zx}n) \frac{d\Phi}{dx} + (K_{xy}l + K_{yy}m + K_{zy}n) \frac{d\Phi}{dy} + \right. \\ & \left. + (K_{xz}l + K_{yz}m + K_{zz}n) \frac{d\Phi}{dz} \right] ds - \iiint \Psi \left[\frac{d}{dx} \left(K_{xx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{xy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{xz} \frac{d\Phi}{dz} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{d}{dy} \left(K_{yx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{yy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{yz} \frac{d\Phi}{dz} \right) + \frac{d}{dz} \left(K_{zx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{zy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{zz} \frac{d\Phi}{dz} \right) \right] dx dy dz = \\ & = \iiint \left[K_{xx} \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dx} + K_{yy} \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Phi}{dy} + K_{zz} \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Phi}{dz} + K_{yz} \left(\frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Phi}{dy} \right) + \right. \\ & \left. + K_{zx} \left(\frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dz} \right) + K_{xy} \left(\frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Phi}{dx} \right) \right] dx dy dz = \\ & = \iiint \Phi \left[(K_{xx}l + K_{yx}m + K_{zx}n) \frac{d\Psi}{dx} + (K_{xy}l + K_{yy}m + \right. \\ & \left. + K_{zy}n) \frac{d\Psi}{dy} + (K_{xz}l + K_{yz}m + K_{zz}n) \frac{d\Psi}{dz} \right] ds - \\ & - \iiint \Phi \left[\frac{d}{dx} \left(K_{xx} \frac{d\Psi}{dx} + K_{xy} \frac{d\Psi}{dy} + K_{xz} \frac{d\Psi}{dz} \right) + \frac{d}{dy} \left(K_{yx} \frac{d\Psi}{dx} + K_{yy} \frac{d\Psi}{dy} + K_{yz} \frac{d\Psi}{dz} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{d}{dz} \left(K_{zx} \frac{d\Psi}{dx} + K_{zy} \frac{d\Psi}{dy} + K_{zz} \frac{d\Psi}{dz} \right) \right] dx dy dz, \end{aligned}$$

где l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности (следует помнить, что порядок индексов в коэффициентах безразличен).

В кватернионных обозначениях эти соотношения записываются короче:

$$\begin{aligned} & \iint \Psi S. U \nabla \Phi (\nabla \Phi) ds - \iiint \Psi S. \{ \nabla \Phi (\nabla \Psi) \} d\zeta = \\ & = \iiint S. \nabla \Psi \Phi (\nabla \Phi) d\zeta = - \iiint S. \nabla \Phi \Phi (\nabla \Psi) d\zeta = \\ & = \iint \Phi S. U \nabla \Psi (\nabla \Psi) ds - \iiint \Phi S. \{ \nabla \Phi (\nabla \Psi) \} d\zeta. \end{aligned}$$

Границы возможных значений электрической емкости проводника

102 а. Мы уже определили емкость проводника или системы проводников как заряд этого проводника или системы проводников при сообщении им единичного потенциала и при нулевом потенциале всех остальных проводников, находящихся в поле.

Излагаемый ниже метод определения предельных значений, между которыми должно находиться значение емкости проводника, был предложен Дж. У. Стреттом в его работе «О теории резонанса», Phil. Trans., 1871, Art. 306.

Пусть s_1 — поверхность проводника или системы проводников, емкость которых следует определить, а s_0 — поверхность всех остальных проводников. Пусть потенциал s_1 равен Ψ_1 , потенциал s_0 равен Ψ_0 . Если заряд на s_1 равен e_1 , то заряд на s_0 равен $-e_1$.

Емкость q проводника s_1 равна

$$q = e_1 / (\Psi_1 - \Psi_0). \quad (1)$$

Если W — энергия системы при фактическом распределении заряда, то

$$W = e_1 (\Psi_1 - \Psi_0) / 2, \quad (2)$$

так что

$$q = \frac{2W}{(\Psi_1 - \Psi_0)^2} = \frac{e_1^2}{2W}. \quad (3)$$

Чтобы найти верхнюю границу возможных значений емкости, рассмотрим любую функцию Ψ , равную 1 на s_1 и нулю на s_0 , и вычислим значение объемного интеграла

$$W_\Psi = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (4)$$

по всему полю.

Поскольку мы показали (в п. 99б), что W не может превышать W_Ψ , емкость q не может быть больше $2W_\Psi$.

Чтобы найти нижнюю границу возможных значений емкости, рассмотрим любую систему значений f, g, h , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0, \quad (5)$$

и пусть

$$\iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h) ds_1 = e_1. \quad (6)$$

Вычислим теперь значение объемного интеграла

$$W_{\mathfrak{D}} = 2\pi \iiint (f^2 + g^2 + h^2) dx dy dz \quad (7)$$

по всему полю.

Поскольку мы показали в п. 100 в, что W не может превышать $W_{\mathfrak{D}}$, то емкость q не может быть меньше

$$e_1^2 / (2W_{\mathfrak{D}}). \quad (8)$$

Проще всего найти совокупность функций f, g, h , удовлетворяющую условию соленоидальности, приняв какое-то распределение заряда на s_1 и на s_0 так, чтобы суммарный заряд равнялся нулю, и рассчитав потенциал Ψ , соответствующий этому распределению, и электрическую энергию такой системы.

Если теперь положить

$$f = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dx}, \quad g = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dy}, \quad h = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dz},$$

то эти значения f, g, h будут удовлетворять условию соленоидальности.

Однако в этом случае можно найти $W_{\mathfrak{D}}$ и не производя объемного интегрирования. Поскольку для этого решения $\nabla^2 \Psi = 0$ во всех точках поля, то $W_{\mathfrak{D}}$ можно выразить в виде поверхностного интеграла

$$W_{\mathfrak{D}} = \frac{1}{2} \iint \Psi \sigma_1 ds_1 + \frac{1}{2} \iint \Psi \sigma_0 ds_0, \quad (9)$$

где первый интеграл берется по поверхности s_1 , а второй — по s_0 .

Если поверхность s_0 находится на бесконечно большом расстоянии от s_1 , то потенциал на ней равен нулю и второй член исчезает.

102 б. Приближенное решение любой задачи о распределении заряда на проводниках с заданными потенциалами может быть получено следующим образом.

Пусть s_1 — поверхность проводника или системы проводников, находящихся под потенциалом 1, а s_0 — поверхность всех остальных проводников, в том числе и полого проводника, охватывающего все остальные. Впрочем, этот последний проводник может в некоторых случаях находиться на бесконечно большом расстоянии от остальных.

Начнем с построения совокупности линий, прямых или кривых, идущих от s_1 к s_0 .

Вдоль каждой из этих линий будем считать Ψ меняющимся от 1 на s_1 до 0 на s_0 . Если P — точка на одной из таких линий (а s_1 и s_0 — точки пересечения линии с поверхностями), то в качестве первого приближения можно положить $\Psi_1 = (Ps_0/s_1s_0)$.

Таким образом, мы получаем первое приближение для функции Ψ_1 , равной единице на s_1 и нулю на s_0 .

Рассчитанное по Ψ_1 значение W_{Ψ} больше, чем W .

Теперь примем в качестве второго приближения для силовых линий

$$f = -p (d\Psi_1/dx), \quad g = -p (d\Psi_1/dy), \quad h = -p (d\Psi_1/dz). \quad (10)$$

Вектор с составляющими f, g, h нормален поверхностям постоянного Ψ_1 . Определим значение p , потребовав, чтобы вектор f, g, h был соленоидальным.

Мы приходим к соотношению

$$\rho \left(\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\Psi_1}{dy^2} + \frac{d^2\Psi_1}{dz^2} \right) + \frac{dp}{dx} \frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{dp}{dy} \frac{d\Psi_1}{dy} + \frac{dp}{dz} \frac{d\Psi_1}{dz} = 0. \quad (11)$$

Если провести от s_1 к s_0 линию, всюду нормальную к поверхностям постоянного Ψ_1 , и обозначить через s длину, отсчитываемую от s_0 по этой линии, то

$$R \frac{dx}{ds} = -\frac{d\Psi_1}{dx}, \quad R \frac{dy}{ds} = -\frac{d\Psi_1}{dy}, \quad R \frac{dz}{ds} = -\frac{d\Psi_1}{dz}, \quad (12)$$

где R — величина напряженности, равная $-d\Psi_1/ds$, так что

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} \frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{dp}{dy} \frac{d\Psi_1}{dy} + \frac{dp}{dz} \frac{d\Psi_1}{dz} &= -R \frac{dp}{ds}, \\ &= R^2 \frac{dp}{d\Psi_1}, \end{aligned} \quad (13)$$

и уравнение (11) принимает вид

$$\rho \nabla^2 \Psi = R^2 \frac{dp}{d\Psi_1}, \quad (14)$$

откуда

$$\rho = C \exp \int_0^{\Psi_1} \frac{\nabla^2 \Psi_1}{R^2} d\Psi_1, \quad (15)$$

где интеграл понимается как криволинейный интеграл вдоль линии s . Предположим теперь, что вдоль линии s

$$\begin{aligned} -\frac{d\Psi_2}{ds} &= f \frac{dx}{ds} + g \frac{dy}{ds} + h \frac{dz}{ds}, \\ &= -\rho \frac{d\Psi_1}{ds}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда

$$\Psi_2 = C \int_0^{\Psi} \left(\exp \int_0^{\Psi_1} \frac{\nabla^2 \Psi_1}{R^2} d\Psi_1 \right) d\Psi_1, \quad (17)$$

где всегда подразумевается, что интегрирование производится вдоль линии s .

Остается определить постоянную C из условия, что $\Psi_2 = 1$ на s_1 , когда и $\Psi_1 = 1$, т. е.

$$C \int_0^1 \left(\exp \int_0^{\Psi} \frac{\nabla^2 \Psi}{R^2} d\Psi \right) d\Psi = 1. \quad (18)$$

Таким образом, получается второе приближение для Ψ . Этот процесс может быть повторен снова.

В результате, рассчитав W_{Ψ_1} , W_{Ψ_2} , W_{Ψ_3} и т. д., мы получим значения емкости, которые последовательно то больше, то меньше истинной емкости и непрерывно приближаются к ней.

Описанный выше метод требует расчета формы линии s и проведения интегрирования вдоль нее. В общем случае это операции, слишком сложные для практических целей. Однако в некоторых частных случаях можно применить более простой метод получения приближения.

102 в. В качестве иллюстрации метода рассмотрим его применение к нахождению последовательных приближений для эквипотенциальных поверхностей и линий индукции в электрическом поле между двумя почти (но не совсем) плоскими и почти параллельными поверхностями, причем одна из них имеет нулевой потенциал, а другая — единичный.

Пусть уравнения этих поверхностей имеют вид

$$z_1 = f_1(x, y) = a \quad (19)$$

для поверхности с нулевым потенциалом и

$$z_2 = f_2(x, y) = b \quad (20)$$

для поверхности с единичным потенциалом. Здесь a и b — заданные функции от x и y , причем b всегда больше a . Первые производные a и b по x и y считаются малыми величинами, вторыми и более высокими степенями и произведениями которых можно пренебречь.

Предположим сначала, что линии индукции параллельны оси z . Тогда

$$f = 0, \quad g = 0, \quad dh/dz = 0. \quad (21)$$

Таким образом, h постоянно вдоль каждой отдельной линии индукции и

$$\Psi = -4\pi \int_a^z h dz = -4\pi h (z - a). \quad (22)$$

При $z = b$ $\Psi = 1$, так что

$$h = -\frac{1}{4\pi(b-a)} \quad (23)$$

и

$$\Psi = (z-a)/(b-a). \quad (24)$$

Таким образом, мы получили первое приближение для потенциала, дающее систему эквипотенциальных поверхностей, равноотстоящих друг от друга в направлении, параллельном z .

Для получения второго приближения для линий индукции примем, что они всюду нормальны к эквипотенциальным поверхностям, определяемым уравнением (24).

Это условие эквивалентно соотношениям

$$4\pi f = \lambda \frac{d\Psi}{dx}, \quad 4\pi g = \lambda \frac{d\Psi}{dy}, \quad 4\pi h = \lambda \frac{d\Psi}{dz}, \quad (25)$$

где λ определяется требованием, чтобы в каждой точке поля выполнялось условие

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0 \quad (26)$$

и чтобы криволинейный интеграл

$$4\pi \int \left(f \frac{dx}{ds} + g \frac{dy}{ds} + h \frac{dz}{ds} \right) ds, \quad (27)$$

взятый вдоль любой линии индукции от поверхности a до поверхности b , был равен -1 .

Положим

$$\lambda = 1 + A + B(z-a) + C(z-a)^2 \quad (28)$$

и будем пренебрегать степенями и произведениями A , B , C ; пренебрежем также на данном этапе степенями и произведениями первых производных от a и b .

Условие соленоидальности дает при этом

$$B = -\nabla^2 a, \quad C = -\frac{1}{2} \frac{\nabla^2 (b-a)}{b-a}, \quad (29)$$

где

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right). \quad (30)$$

Вместо того чтобы брать криволинейный интеграл по новой линии индукции, мы возьмем его по старой линии индукции, параллельной z . Тогда второе условие соленоидальности дает

$$1 = 1 + A + (1/2)B(b-a) + (1/3)C(b-a)^2,$$

откуда

$$A = \frac{1}{6} (b-a) \nabla^2 (2a+b) \quad (31)$$

и

$$\lambda = 1 + \frac{1}{6} (b-a) \nabla^2 (2a+b) - (z-a) \nabla^2 a - \frac{1}{2} \frac{(z-a)^2}{b-a} \nabla^2 (b-a). \quad (32)$$

Таким образом, мы находим второе приближение для составляющих смещения

$$\begin{aligned} -4\pi f &= \frac{\lambda}{b-a} \left[\frac{da}{dx} + \frac{d(b-a)}{dx} \frac{z-a}{b-a} \right], \\ -4\pi g &= \frac{\lambda}{b-a} \left[\frac{da}{dy} + \frac{d(b-a)}{dy} \frac{z-a}{b-a} \right], \\ -4\pi h &= \frac{\lambda}{b-a} \end{aligned} \quad (33)$$

второе приближение для потенциала

$$\Psi = \frac{z-a}{b-a} + \frac{1}{6} \nabla^2 (2a+b) (z-a) - \frac{1}{2} \nabla^2 a \frac{(z-a)^2}{b-a} - \frac{1}{6} \nabla^2 (b-a) \frac{(z-a)^3}{(b-a)^2}. \quad (34)$$

Если обозначить через σ_a и σ_b поверхностные плотности на поверхностях a и b , а через Ψ_a и Ψ_b — соответствующие потенциалы, то

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{1}{4\pi} (\Psi_a - \Psi_b) \left[\frac{1}{b-a} + \frac{1}{3} \nabla^2 a + \frac{1}{6} \nabla^2 b \right], \\ \sigma_b &= \frac{1}{4\pi} (\Psi_b - \Psi_a) \left[\frac{1}{b-a} - \frac{1}{6} \nabla^2 a - \frac{1}{3} \nabla^2 b \right]. \end{aligned}$$

ГЛАВА V

МЕХАНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
ДВУХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

103. Пусть E_1 и E_2 — две электрические системы, взаимодействие между которыми и является предметом рассмотрения. Пусть распределение заряда в системе E_1 дается объемной плотностью ρ_1 в элементе объема с координатами x_1, y_1, z_1 , а ρ_2 — объемная плотность в элементе объема системы E_2 с координатами x_2, y_2, z_2 .

Тогда x -составляющая силы отталкивания, действующей на элемент E_1 со стороны элемента E_2 , равна

$$\rho_1 \rho_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2,$$

где $r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$, а x -составляющая A полной силы, действующей на систему E_1 из-за наличия системы E_2 , равна

$$A = \iiint \iiint \frac{x_1 - x_2}{r^3} \rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2, \quad (1)$$

где интегрирование по x_1, y_1, z_1 производится по объему, занимаемому системой E_1 , а интегрирование по x_2, y_2, z_2 — по объему, занимаемому системой E_2 . Но поскольку ρ_1 равно нулю вне системы E_1 , а ρ_2 равно нулю вне системы E_2 , то значение интеграла не изменится при расширении пределов интегрирования, так что мы можем считать пределы интегрирования равными $\pm\infty$.

Это выражение для силы является буквальным переводом на математический язык теории, предполагающей прямое воздействие электрической силы между телами на расстоянии и не придающей значения промежуточной среде.

Если теперь определить потенциал Ψ_2 в точке x_1, y_1, z_1 , возникающий из-за наличия системы E_2 , уравнением

$$\Psi_2 = \iiint \frac{\rho_2}{r} dx_2 dy_2 dz_2, \quad (2)$$

то Ψ_2 будет обращаться в нуль на бесконечности и удовлетворять всюду уравнению

$$\nabla^2 \Psi_2 = 4\pi \rho_2. \quad (3)$$

Величину A можно теперь записать в виде тройного интеграла

$$A = - \iiint \frac{d\Psi_2}{dx_1} \rho_1 dx_1 dy_1 dz_1. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что потенциал Ψ_2 имеет определенное значение в каждой точке поля. Сила A выражается через этот потенциал и через плотность электричества ρ_1 в первой системе E_1 ; распределение электричества во второй системе E_2 явно сюда не входит.

Пусть теперь Ψ_1 — потенциал, создаваемый первой системой, выраженный как функция от x, y, z и определяемый уравнением

$$\Psi_1 = \iiint \frac{\rho_1}{r} dx_1 dy_1 dz_1. \quad (5)$$

Он обращается на бесконечности в нуль и удовлетворяет всюду уравнению

$$\nabla^2 \Psi_1 = 4\pi \rho_1. \quad (6)$$

Мы можем теперь исключить ρ_1 из A и получить соотношение

$$A = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{d\Psi_1}{dx_1} \nabla^2 \Psi_1 dx_1 dy_1 dz_1, \quad (7)$$

выражающее силу только через оба потенциала.

104. В рассмотренных до сих пор интегралах безразлично, каковы их пределы, лишь бы они включали весь объем системы E_1 . Но теперь мы предположим, что системы E_1 и E_2 таковы, что существует некоторая замкнутая поверхность s , содержащая внутри всю систему E_1 и ни одной части системы E_2 .

Положим также

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (8)$$

Тогда внутри s имеем $\rho_2 = 0$, $\rho = \rho_1$, а вне s

$$\rho_1 = 0, \quad \rho = \rho_2. \quad (9)$$

Далее, интеграл

$$A_{11} = -\iiint \frac{d\Psi_1}{dx_1} \rho_1 dx_1 dy_1 dz_1 \quad (10)$$

дает x -составляющую результирующей силы, действующей на систему E_1 из-за наличия электричества в самой этой системе. Но по теории прямого взаимодействия эта сила должна быть равна нулю, так как сила действия любой частицы P на частицу Q равна и противоположна силе действия Q на P , а поскольку в интеграл входят составляющие обеих сил, то они уничтожают друг друга.

Поэтому можно написать

$$A = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{d\Psi}{dx} \nabla^2 \Psi dx_1 dy_1 dz_1, \quad (11)$$

где Ψ — потенциал, создаваемый обеими системами, а интегрирование ограничено объемом внутри поверхности s , охватывающей всю систему E_1 и ни одной части системы E_2 .

105. Если считать, что E_2 действует на E_1 не непосредственно на расстоянии, а через посредство напряжений, распределенных в среде, простирающейся непрерывно от E_2 до E_1 , то очевидно, что, зная напряжения во всех точках любой замкнутой поверхности, полностью отделяющей E_1 от E_2 , мы можем определить механическое действие E_2 на E_1 . Если бы сила, действующая на E_1 , не полностью объяснялась напряжением на s , это означало бы прямое взаимодействие между чем-то вне s и чем-то внутри s .

Следовательно, если действие E_2 на E_1 можно объяснить распределением напряжений в промежуточной среде, то оно должно записываться в виде поверхностного интеграла по любой поверхности s , полностью отделяющей E_2 от E_1 .

Попытаемся поэтому представить

$$A = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{d\Psi}{dx} \left[\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} \right] dx dy dz \quad (12)$$

в виде поверхностного интеграла.

По Теореме III, п. 21, это возможно, если удастся найти такие X, Y, Z , что

$$\frac{d\Psi}{dx} \left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} \right) = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}. \quad (13)$$

Преобразуя отдельно каждое слагаемое, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dx} \frac{d^2\Psi}{dx^2} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2, \\ \frac{d\Psi}{dx} \frac{d^2\Psi}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dy} \right) - \frac{d\Psi}{dy} \frac{d^2\Psi}{dx dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dy} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{d\Psi}{dx} \frac{d^2\Psi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dz} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2.$$

Таким образом, если положить

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 &= 8\pi p_{xx}, & \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Psi}{dz} &= 4\pi p_{yz} = 4\pi p_{zy}, \\ \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 &= 8\pi p_{yy}, & \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Psi}{dx} &= 4\pi p_{zx} = 4\pi p_{xz}, \\ \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 &= 8\pi p_{zz}; & \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dy} &= 4\pi p_{xy} = 4\pi p_{yx}, \end{aligned} \quad (14)$$

то

$$A = \iiint \left(\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} \right) dx dy dz, \quad (15)$$

где интегрирование производится по всему объему внутри s .

Преобразуя объемный интеграл по Теореме III, п. 21, получим

$$A = \iint (lp_{xx} + mp_{yx} + np_{zx}) ds, \quad (16)$$

где ds — элемент любой замкнутой поверхности, охватывающий всю систему E_1 , но ни одной части системы E_2 , а l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к ds .

Точно так же для составляющих силы, действующей на E_1 по осям y и z , получим

$$B = \iint (lp_{xy} + mp_{yy} + np_{zy}) ds, \quad (17)$$

$$C = \iint (lp_{xz} + mp_{yz} + np_{zz}) ds. \quad (18)$$

Если в действительности воздействие системы E_2 на E_1 происходит непосредственно на расстоянии, без вмешательства какой-либо среды, то величины ρ_{xx} и т. д. должны рассматриваться как простые сокращенные обозначения определенных математических выражений, не имеющие никакого физического смысла.

Но если принять, что взаимодействие между E_2 и E_1 осуществляется посредством напряжений в среде между ними, то, поскольку уравнения (16), (17), (18) дают составляющие результирующей силы, обусловленной действием извне на поверхность s напряжения, шесть компонент которого равны ρ_{xx} и т. д., величины ρ_{xx} и т. д. следует рассматривать как составляющие реально существующего в среде напряжения.

106. Чтобы получить более ясное представление о природе этого напряжения, изменим форму части поверхности s так, чтобы элемент ds стал частью эквипотенциальной поверхности. (Такое изменение поверхности всегда допустимо, если только при этом не исключается какая-либо часть E_1 и не включается какая-либо часть E_2).

Обозначим через ν наружную нормаль к ds . Пусть $R = - (d\Psi/d\nu)$ — напряженность электрического поля в направлении ν , тогда $(d\Psi/dx) = -Rl$, $(d\Psi/dy) = -Rm$, $(d\Psi/dz) = -Rn$.

Таким образом, шесть составляющих напряжения равны

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= \frac{1}{8\pi} R^2 (l^2 - m^2 - n^2), & \rho_{yz} &= \frac{1}{4\pi} R^2 mn, \\ \rho_{yy} &= \frac{1}{8\pi} R^2 (m^2 - n^2 - l^2), & \rho_{zx} &= \frac{1}{4\pi} R^2 nl, \\ \rho_{zz} &= \frac{1}{8\pi} R^2 (n^2 - l^2 - m^2), & \rho_{xy} &= \frac{1}{4\pi} R^2 lm. \end{aligned}$$

Если a , b , c — составляющие силы, действующей на единицу площади элемента ds , то

$$a = l\rho_{xx} + m\rho_{yx} + n\rho_{zx} = \frac{1}{8\pi} R^2 l, \quad b = \frac{1}{8\pi} R^2 m, \quad c = \frac{1}{8\pi} R^2 n.$$

Таким образом, сила, с которой часть среды, расположенная по внешнюю сторону ds , действует на часть среды, находящуюся по внутреннюю сторону ds , нормальна к элементу площади ds и направлена наружу, т. е. является натяжением, подобным натяжению веревки, и величина этой силы, приходящейся на единицу площади, равна $R^2/8\pi$.

Пусть теперь элемент ds перпендикулярен пересекаемой им эквипотенциальной поверхности. В этом случае

$$l \frac{d\Psi}{dx} + m \frac{d\Psi}{dy} + n \frac{d\Psi}{dz} = 0. \quad (19)$$

Далее:

$$\begin{aligned} 8\pi (l\rho_{xx} + m\rho_{yx} + n\rho_{zx}) &= l \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] + \\ &+ 2m \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dy} + 2n \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dz}. \end{aligned} \quad (20)$$

Умножив (19) на $2(d\Psi/dx)$ и вычтя из (20), найдем

$$8\pi(lp_{xx} + mp_{yx} + np_{zx}) = -l \left[\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right] = -lR^2. \quad (21)$$

Таким образом, составляющие натяжения, действующего на единицу площади элемента ds , равны

$$a = -\frac{1}{8\pi} R^2 l, \quad b = -\frac{1}{8\pi} R^2 m, \quad c = -\frac{1}{8\pi} R^2 n.$$

Таким образом, если элемент ds перпендикулярен эквипотенциальной поверхности, то действующая на него сила нормальна к поверхности, а численное значение силы, действующей на единицу площади, то же, что и в предыдущем случае, но направление ее обратное — это не натяжение, а давление.

Итак, мы полностью определили характер напряжения в любой точке среды.

Направление электродвижущей напряженности в точке является главной осью напряжения; напряжение в этом направлении носит характер натяжения, и его численное значение равно

$$p = R^2/8\pi, \quad (22)$$

где R — электродвижущая напряженность.

Любое направление, перпендикулярное этому, также является главной осью напряжения; напряжение вдоль такой оси носит характер давления, численная величина которого также равна p .

Определенное так напряжение — не самого общего вида, так как для него два главных значения напряжения равны друг другу, а третье — равно им численно, но отличается знаком.

Эти условия уменьшают число независимых переменных, определяющих напряжение, с шести до трех; поэтому оно полностью определяется составляющими электродвижущей напряженности — $(d\Psi/dx)$, — $(d\Psi/dy)$, — $(d\Psi/dz)$.

Три соотношения между шестью составляющими напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} p_{yz}^2 &= (p_{xx} + p_{yy})(p_{zz} + p_{xx}), \\ p_{zx}^2 &= (p_{yy} + p_{zz})(p_{xx} + p_{yy}), \\ p_{xy}^2 &= (p_{zz} + p_{xx})(p_{yy} + p_{zz}). \end{aligned} \quad (23)$$

107. Посмотрим теперь, нуждаются ли полученные нами результаты в изменении в случае, когда конечное количество электричества сосредоточено на конечной поверхности, так что объемная плотность заряда бесконечна на поверхности.

Как было показано в п. 78а, 78б, в этом случае составляющие электродвижущей напряженности разрывны на поверхности. Следовательно, и составляющие напряжения тоже разрывны на поверхности.

Пусть l, m, n — направляющие косинусы нормали к ds ; P, Q, R — составляющие электродвижущей напряженности на той стороне, куда проведена нормаль, а P', Q', R' — ее составляющие с другой стороны.

Тогда, согласно 78а и 78б

$$P - P' = 4\pi\sigma l, \quad Q - Q' = 4\pi\sigma m, \quad R - R' = 4\pi\sigma n, \quad (24)$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Если a — составляющая по оси x результирующей силы, действующей на единицу поверхности вследствие напряжений по обе стороны от нее, то

$$\begin{aligned} a &= l(p_{xx} - p'_{xx}) + m(p_{xy} - p'_{xy}) + n(p_{xz} - p'_{xz}) = \\ &= \frac{1}{8\pi} l \{(P^2 - P'^2) - (Q^2 - Q'^2) - (R^2 - R'^2)\} + \frac{1}{4\pi} m(PQ - P'Q') + \frac{1}{4\pi} n(PR - P'R') = \\ &= \frac{1}{8\pi} l \{(P - P')(P + P') - (Q - Q')(Q + Q') - (R - R')(R + R')\} + \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} m \{(P - P')(Q + Q') + (P + P')(Q - Q')\} + \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} n \{(P - P')(R + R') + (P + P')(R - R')\} = \\ &= \frac{1}{2} l\sigma \{l(P + P') - m(Q + Q') - n(R + R')\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} m\sigma \{l(Q + Q') + m(P + P')\} + \frac{1}{2} n\sigma \{l(R + R') + n(P + P')\} = \frac{1}{2} \sigma (P + P'). \end{aligned}$$

Таким образом, приняв, что напряжение во всех точках дается уравнениями (14), мы нашли, что x -составляющая результирующей силы, действующей на единицу площади заряженной поверхности, равна поверхностной плотности заряда, умноженной на среднее арифметическое значение x -составляющей электродвижущей напряженности по обе стороны поверхности.

К этому же результату мы пришли в п. 79 фактически аналогичным методом.

Таким образом, гипотеза о напряжении в окружающей среде применима и в случае, когда на конечной поверхности сосредоточено конечное количество электричества.

Обычно значение результирующей силы, действующей на элемент поверхности, выводится из теории действия на расстоянии при рассмотрении участка поверхности, размеры которого много меньше радиусов кривизны поверхности¹.

Возьмем на нормали к средней точке этого элемента поверхности точку P , расстояние которой от поверхности много меньше размеров элемента поверхности. Электродвижущая напряженность в этой точке, обусловленная небольшим участком поверхности, приблизительно равна напряженности, создаваемой бесконечной плоскостью, т. е. равна $2\pi\sigma$ и направлена от поверхности по нормали к ней. В точке P' , расположенной точно так же по другую сторону поверхности, напряженность будет такая же, но направлена в противоположную сторону.

Теперь рассмотрим ту часть электродвижущей напряженности, которая создается остальной поверхностью и другими заряженными телами, находящимися на конечном расстоянии от рассматриваемого элемента поверхности. Поскольку точки P и P' бесконечно близки друг к другу, составляющие электродвижущей напряженности, создаваемой зарядами, находящимися на конечном расстоянии, будут в обеих точках одинаковы.

Обозначим x -составляющую электродвижущей напряженности в точках A и A' , создаваемую зарядами, находящимися на конечном расстоянии, через

¹ Этот метод берет начало от Лапласа. См. Пуассон «О распределении электричества...». *Mém. de l'Institut*, 1811, p. 30.

P_0 . Тогда значение полной x -составляющей в точке A будет $P = P_0 + 2\pi\sigma l$, а в точке A' — $P' = P_0 - 2\pi\sigma l$, откуда $P_0 = (P + P')/2$.

Но полная механическая сила, действующая на элемент поверхности, должна являться целиком результатом действия зарядов на конечных расстояниях, поскольку суммарная сила действия элемента на самого себя равна нулю. Поэтому x -составляющая силы, приходящейся на единицу площади, равна

$$a = \sigma P_0 = \sigma (P + P')/2. \quad (25)$$

108. Если (как в уравнении (2)) определить потенциал через считаемое заданным распределение электричества, то из того, что действие и противодействие для пары точечных зарядов равны и противоположны, следует, что x -составляющая силы воздействия системы на саму себя равна нулю, что может быть записано в виде

$$\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{d\Psi}{dx} \nabla^2 \Psi \, dx \, dy \, dz = 0. \quad (26)$$

Но если определять Ψ как функцию x, y, z , удовлетворяющую уравнению $\nabla^2 \Psi = 0$ в любой точке вне замкнутой поверхности s и равную нулю на бесконечном расстоянии, то равенство нулю рассматриваемого объемного интеграла по любому объему, включающему s , представляется нуждающимся в доказательстве.

Один из методов доказательства основан на теореме (п. 100в), утверждающей, что если $\nabla^2 \Psi$ задано в любой точке и $\Psi = 0$ на бесконечном расстоянии, то значение Ψ в каждой точке определено и равно

$$\Psi' = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r} \nabla^2 \Psi \, dx \, dy \, dz, \quad (27)$$

где r — расстояние между элементом $dx \, dy \, dz$, где концентрация Ψ задана равной $\nabla^2 \Psi$, и точкой x', y', z' , где ищется Ψ' .

Этим теорема сводится к полученному нами следствию из первого определения Ψ .

Однако если рассматривать Ψ как первичную функцию от x, y, z , через которую выражаются остальные, то целесообразнее свести (26) к поверхностному интегралу

$$A = \iint (lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz}) \, dS. \quad (28)$$

Если поверхность S находится всюду на большом расстоянии a от поверхности s , охватывающей все точки, в которых $\nabla^2 \Psi$ отлично от нуля, то, как мы знаем, Ψ не может численно превосходить e/a ($4\pi e$ — объемный интеграл от $\nabla^2 \Psi$), R не может превосходить — $(d\Psi/da)$, т. е. e/a^2 , а величины p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} не могут каждая превосходить p , т. е. $R^2/(8\pi)$ или $e^2/(8\pi a^4)$. Значит, поверхностный интеграл по сфере очень большого радиуса a не может превосходить $e^2/(2a^2)$ и при неограниченно возрастающем радиусе поверхностный интеграл стремится к нулю.

Но этот поверхностный интеграл равен объемному интегралу (26), причем значение этого интеграла одно и то же, какой бы объем ни охватывала поверхность S , лишь бы она включала в себя все точки, где $\nabla^2 \Psi$ отлично от нуля. Раз этот интеграл равен нулю при бесконечном a , он должен быть равен нулю и для любой поверхности, охватывающей все точки, в которых $\nabla^2 \Psi$ отлично от нуля.

109. Рассмотренное в этой главе распределение напряжений в точности совпадает с распределением, к которому пришел Фарадей в своих исследованиях индукции через диэлектрики. Он резюмирует свои результаты следующими словами:

«1297. Прямая индуктивная сила, которую можно вообразить действующей по линиям между двумя ограничивающими и заряженными проводящими поверхностями, сопровождается боковой или поперечной силой, эквивалентной расширению или отталкиванию этих воображаемых линий (1224); или иначе: сила притяжения, существующая между частицами диэлектрика в направлении индукции, сопровождается силой отталкивания, вызывающей их расхождение в поперечном направлении (1304).

1298. Индукция состоит, по-видимому, в некотором поляризованном состоянии частиц, в которое их приводит наэлектризованное тело, поддерживающее это действие, причем у частиц появляются положительные или отрицательные точки или участки, расположенные симметрично по отношению друг к другу или к индуцирующим поверхностям или частицам. Это состояние должно быть вынужденным, ибо оно создается и поддерживается только силой и при удалении этой силы падает до нормального состояния покоя. Одним и тем же количеством электричества оно может длительно *поддерживаться* только в изоляторах, потому что только они могут сохранять такое состояние частиц».

Это точное изложение тех выводов, к которым мы пришли в наших математических исследованиях. В каждой точке среды существует состояние напряжения, при котором вдоль силовых линий имеет место натяжение, а по всем перпендикулярным им направлениям — давление, причем численно давление равно натяжению и оба они меняются как квадрат результирующей силы в точке.

Выражение «электрическое натяжение» применялось в разных смыслах различными авторами. Я буду всегда применять его для обозначения натяжения вдоль силовой линии, меняющегося, как мы видели, от точки к точке и всегда пропорционального квадрату результирующей силы в точке.

110. Предположение о существовании напряженного состояния такого типа в газообразном или в жидком диэлектрике, например в воздухе или скипидаре, может на первый взгляд показаться противоречащим установленному закону о том, что в жидкости давление во все стороны одинаково. Однако при выводе этого закона из рассмотрения подвижности и равновесия частей жидкости подразумевается, что в жидкости нет никаких воздействий типа предполагаемого здесь воздействия вдоль силовых линий.

Рассмотренное нами состояние напряжения вполне согласуется с подвижностью и равновесием жидкости, поскольку, как мы видели, для любой части жидкости, лишенной заряда, равнодействующая сил, обусловленных напряжениями на ее поверхности, равна нулю, как бы велики эти напряжения ни были. Только если какая-либо часть жидкости заряжена, то ее равновесие нарушается напряжениями на поверхности, но мы знаем, что в этом случае жидкость действительно приходит в движение. Итак, предположенное состояние напряжения не противоречит равновесию жидкого диэлектрика.

Исследованная в Главе IV, п. 99а величина W может быть истолкована как энергия в среде, обусловленная распределением напряжений. Из теорем этой главы следует, что распределение напряжений, удовлетворяющее приведенным

там условиям, обеспечивает также абсолютный минимум W . Но если для какой-либо конфигурации энергия минимальна, то эта конфигурация равновесна и равновесие устойчиво. Таким образом, диэлектрик, находящийся под индуктивным воздействием заряженных тел, сам по себе придет в состояние напряжения, распределенного описанным нами способом.

Не следует забывать, что мы сделали лишь первый шаг в теории воздействия среды. Мы приняли, что она находится в состоянии напряжения, но мы никак не объяснили это напряжение, не показали, как оно поддерживается. Однако этот шаг представляется мне весьма важным, так как он объясняет взаимодействием прилегающих частей среды явления, которые раньше считались объяснимыми только с помощью взаимодействия на расстоянии.

III. Мне не удалось сделать следующий шаг, т. е. дать механическое объяснение этих напряжений в диэлектрике. Поэтому я оставляю теорию на этой ступени и укажу лишь на другие стороны явления индукции в диэлектрике.

I. Электрическое смещение. Когда индукция передается через диэлектрик, то прежде всего возникает смещение электричества в направлении индукции. Так, например, в Лейденской банке, внутреннее покрытие которой заряжено положительно, а внешнее отрицательно, смещение положительного электричества в толще стекла направлено изнутри наружу.

Любое увеличение этого смещения эквивалентно току положительного электричества, текущему изнутри наружу во время увеличения смещения, а любое уменьшение смещения эквивалентно току в обратном направлении.

Полное количество электричества, смещающееся через любую площадку поверхности, зафиксированную в диэлектрике, измеряется величиной, которую мы уже рассмотрели в п. 75 как поверхностный интеграл от индукции через площадь, умноженный на $K/4\pi$, где K — удельная индуктивная способность диэлектрика.

II. Поверхностный заряд частиц диэлектрика. Представим себе любую часть диэлектрика, большую или малую, отделенной (мысленно) от остального диэлектрика замкнутой поверхностью. Тогда мы должны будем считать, что на каждом элементе этой поверхности имеется заряд, измеряемый полным смещением электричества через этот элемент, *отсчитываемым внутрь*.

В случае лейденской банки, внутреннее покрытие которой заряжено положительно, на любом участке стекла внутренняя сторона будет заряжена положительно, а внешняя — отрицательно. Если этот участок находится целиком внутри стекла, то его поверхностный заряд нейтрализуется благодаря противоположному заряду прилегающих к нему частей, но если он прилегает к проводящему телу, внутри которого невозможно индуктивное состояние, то поверхностный заряд не нейтрализуется, а образует тот кажущийся заряд, который обычно называют Зарядом Проводника.

Таким образом, заряд на граничной поверхности между проводником и окружающим его диэлектриком, который в старой теории назывался зарядом проводника, следует в теории индукции называть поверхностным зарядом окружающего диэлектрика.

Согласно этой теории, все заряды — это остаточный эффект поляризации диэлектрика. Поляризация существует во всей толще вещества, но там она нейт-

рализуется наложением противоположно заряженных частей, так что эффект проявляется только на поверхности диэлектрика.

Эта теория полностью объясняет теорему п. 77, что полная индукция через замкнутую поверхность равна полному количеству электричества, умноженному на 4π . Ибо то, что мы называем индукцией через поверхность, есть просто электрическое смещение, умноженное на 4π , а полное смещение наружу по необходимости равно полному заряду внутри поверхности.

Теория объясняет также невозможность сообщения «абсолютного заряда» веществу, поскольку каждая частица диэлектрика имеет равные и противоположные заряды на обоих концах, или, лучше сказать, эти заряды являются лишь проявлением единого явления, которое можно назвать Электрической Поляризацией.

Поляризованная таким образом диэлектрическая среда является вместилищем электрической энергии, причем количество энергии в единице объема среды численно равно электрическому натяжению на единицу площади, и оба они равны половине произведения смещения на напряженность электрического поля, т. е.

$$p = \frac{1}{2} \mathfrak{D}\mathfrak{E} = \frac{1}{8\pi} K\mathfrak{E}^2 = \frac{2\pi}{K} \mathfrak{D}^2,$$

где p — электрическое натяжение, \mathfrak{D} — смещение, \mathfrak{E} — электродвижущая напряженность, K — удельная индуктивная способность.

Если среда не является совершенным изолятором, то вынужденное состояние, которое мы называем поляризацией, постепенно исчезает. Среда поддается электродвижущей силе, электрическое напряжение ослабляется, и потенциальная энергия вынужденного состояния переходит в тепло. Скорость, с которой происходит распад состояния поляризации, зависит от природы среды. Для некоторых типов стекла могут пройти дни или годы, прежде чем поляризация упадет до половины своего начального значения. Для меди такое изменение происходит менее чем за одну биллионную долю секунды.

Мы предположили, что среда, после того как она поляризована, просто предоставлена сама себе. В явлении, называемом электрическим током, постоянное прохождение электричества через среду стремится восстановить состояние поляризации в той же мере, в какой проводимость среды способствует ее исчезновению. Поэтому внешний агент, поддерживающий ток, всегда совершает работу по восстановлению поляризации среды. Но поляризация непрерывно стремится ослабнуть, а ее потенциальная энергия непрерывно переходит в тепло, так что в конце концов энергия, затрачиваемая на поддержание тока, расходуется на постепенное повышение температуры проводника до тех пор, пока за счет теплопроводности и излучения с поверхности не будет теряться столько тепла, сколько порождается электрическим током.

ГЛАВА VI

О ТОЧКАХ И ЛИНИЯХ РАВНОВЕСИЯ

112. Если в какой-либо точке электрического поля равнодействующая сила равна нулю, то такая точка называется Точкой равновесия.

Если каждая точка какой-либо линии является точкой равновесия, то такая линия называется Линией равновесия.

Условия того, что точка является точкой равновесия, имеют вид $(dV/dx)=0$,
 $(dV/dy)=0$, $(dV/dz)=0$.

Таким образом, в такой точке величина V максимальна, минимальна или стационарна по отношению к вариациям координат. Но потенциал может иметь максимум или минимум только в точке, несущей положительный или отрицательный заряд или же в конечной области, ограниченной положительным или отрицательным поверхностным зарядом. Поэтому, если в части поля, не несущей заряда, существует точка равновесия, то это точка стационарности потенциала, а не точка максимума или минимума.

Действительно, условие максимума или минимума заключается в том, что (d^2V/dx^2) , (d^2V/dy^2) и (d^2V/dz^2) должны быть все отрицательны или положительны, если они имеют конечные значения.

Но согласно уравнению Лапласа, в точке, где нет заряда, сумма этих трех величин равна нулю, так что это условие невыполнимо.

Вместо того чтобы исследовать аналитические условия для случаев, когда все составляющие силы одновременно обращаются в нуль, мы дадим общее доказательство с помощью эквипотенциальных поверхностей.

Если в какой-либо точке P достигается истинный максимум V , то во всех других точках в непосредственной окрестности P значения V меньше, чем в P . Следовательно, P окружено системой замкнутых эквипотенциальных поверхностей, каждая из которых охватывает предыдущую, и во всех точках какой-либо из этих поверхностей электрическая сила направлена наружу. Но мы доказали в п. 76, что поверхностный интеграл от электродвижущей напряженности по любой замкнутой поверхности дает полный заряд внутри этой поверхности, умноженный на 4π . В этом случае сила направлена всюду наружу, так что этот поверхностный интеграл обязательно положительный, и, значит, внутри поверхности имеется положительный заряд, а так как мы можем взять эту поверхность сколько угодно близкой к P , то положительный заряд имеется в точке P .

Точно так же можно показать, что если V имеет в P минимум, точка P заряжена отрицательно.

Пусть теперь P — точка равновесия в области, лишенной зарядов. Опишем вокруг P сферу очень малого радиуса. Как мы видели, потенциал не может быть на этой поверхности всюду больше, чем в P , или всюду меньше, чем в P . Следовательно, в некоторых местах поверхности он больше, чем в P , а в некоторых меньше. Эти участки поверхности разделяются линиями, на которых потенциал равен потенциалу в точке P . Вдоль линий, проведенных из P в точки, где потенциал меньше, чем в P , электрическая сила направлена от P , а вдоль линий, проведенных в точки с большим потенциалом, сила направлена к P . Следова-

но, точка P является для одних направлений точкой устойчивого равновесия, а для других — точкой неустойчивого равновесия.

113. Чтобы определить количество точек или линий равновесия, рассмотрим поверхность (или поверхности), на которых потенциал равен заданному значению C . Назовем области, в которых потенциал меньше C , отрицательными, а области, в которых он больше C , положительными. Пусть V_0 — наименьшее, а V_1 — наибольшее значение потенциала в электрическом поле. Если положить $C = V_0$, то отрицательная область будет включать лишь точку или проводник с наименьшим потенциалом, который обязательно заряжен отрицательно. Положительную область образует остальное пространство, и, поскольку она окружает отрицательную область, она является перифрактической областью (см. п. 18).

Если теперь увеличить значение C , то отрицательная область увеличится и образуются новые отрицательные области вокруг отрицательно заряженных тел. Для каждой образуемой таким образом отрицательной области требуется одна степень перифрактичности окружающей положительной области.

По мере расширения различных отрицательных областей две или несколько областей могут сомкнуться в какой-либо точке или по линии. Если смыкаются $n+1$ поверхностей, то положительная область теряет n степеней перифрактичности, а точка или линия смыкания является точкой или линией равновесия n -й степени.

Когда C становится равным V_1 , то положительная область сводится к точке или к проводнику с наибольшим потенциалом и, следовательно, имеет нулевую степень перифрактичности. Следовательно, если каждую точку или линию равновесия считать один, два или n раз в соответствии с ее степенью, то полное число подсчитываемых так точек или линий равновесия будет на единицу меньше числа отрицательно заряженных тел.

Есть еще другие точки или линии равновесия, получающиеся при образовании разделенных положительных областей и повышении перифрактичности отрицательной области. Число таких точек или линий равновесия, подсчитываемое с учетом их степени, на единицу меньше числа положительно заряженных тел.

Назовем точку или линию равновесия положительной, если она находится на стыке двух или нескольких положительных областей, и отрицательной, если она находится в месте соединения отрицательных областей. Тогда при p положительно заряженных телах и n отрицательно заряженных телах сумма степеней положительных точек или линий равновесия равна $p-1$, а отрицательных — $n-1$. При этом бесконечно удаленную поверхность, окружающую электрическую систему, считают телом с зарядом, равным по величине и противоположным по знаку сумме зарядов системы.

Однако кроме этого определенного числа точек или линий равновесия, получающихся при соединении различных областей, могут быть и другие, о которых мы можем лишь сказать, что их должно быть четное число. Потому что если при расширении какой-либо отрицательной области она смыкается сама с собой, то она становится циклической. При повторном смыкании с самой собой она может приобрести любую степень цикличности, причем каждая степень соответствует точке или линии равновесия, в которых возникла цикличность.

По мере расширения отрицательной области и заполнения ею всего пространства она теряет все степени цикличности, которые она приобрела ранее, и

становится в конце концов ациклической. Таким образом, имеется также совокупность точек или линий равновесия, в которых теряется цикличность, причем число степеней равно числу степеней для точек или линий, в которых она увеличивается.

При произвольной форме заряженных тел или проводников мы можем лишь утверждать, что число этих дополнительных точек или линий четно, но для точечных зарядов и сферических проводников их число не может превышать $(n-1) \cdot (n-2)$, где n — количество тел.

114. Потенциал вблизи любой точки P может быть разложен в ряд $V = V_0 + H_1 + H_2 + \dots$, где H_1, H_2, \dots — однородные функции от x, y, z соответственно степени 1, 2 и т. д.

Поскольку в точке равновесия первые производные от V обращаются в нуль, то $H_1 = 0$, если P — точка равновесия.

Пусть H_n — первая отличная от нуля функция, тогда вблизи точки P можно пренебречь всеми функциями более высокой степени, чем H_n .

Но $H_n = 0$ является уравнением конуса степени n , и этот конус является соприкасающимся конусом к эквипотенциальной поверхности в точке P .

Таким образом, получается, что проходящая через точку P эквипотенциальная поверхность имеет в этой точке коническую точку с соприкасающимся конусом степени два или выше. Пересечение этого конуса со сферой с центром в вершине называется Нодалной линией.

Если точка P не находится на линии равновесия, то нодалная линия не имеет самопересечений и состоит из n или меньшего числа замкнутых кривых.

Если нодалная линия имеет самопересечение, то точка P находится на линии равновесия и эквипотенциальная поверхность, проходящая через P , имеет самопересечение по этой линии.

Если самопересечения на нодалной линии расположены не в противоположных точках сферы, то точка P лежит на пересечении трех или большего числа линий равновесия, так как эквипотенциальная поверхность, проходящая через P , должна самопересекаться по каждой линии равновесия.

115. Если пересекаются n листов одной и той же эквипотенциальной поверхности, то углы их взаимного пересечения обязательно равны π/n .

Действительно, примем касательную к линии пересечения за ось z . Тогда $d^2V/dz^2 = 0$. Пусть далее ось x направлена по касательной и одному из листов, тогда $d^2V/dx^2 = 0$. Отсюда согласно уравнению Лапласа следует, что и $d^2V/dy^2 = 0$, т. е. что ось y касательна к другому листу.

При этом предполагается, что H_2 конечно. Если же H_2 равно нулю, то, принимая по-прежнему касательную к линии пересечения за ось z и полагая $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, получим, что поскольку $d^2V/dz^2 = 0$, то

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0,$$

или

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2V}{d\theta^2} = 0.$$

Решение этого уравнения в виде суммы по возрастающим степеням r представляется так:

$$V = V_0 + A_1 r \cos(\theta + \alpha_1) + A_2 r^2 \cos(2\theta + \alpha_2) + \dots + A_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n).$$

В точке равновесия $A_1 = 0$. Если первый отличный от нуля член имеет степень r^n , то

$$V - V_0 = A_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n) + \text{чл. высш. порядка по } r.$$

Это уравнение показывает, что n листов эквипотенциальной поверхности пересекают друг друга под углом π/n . Эта теорема была сформулирована Рэнкином¹.

В свободном пространстве линия равновесия может существовать лишь в особых условиях, но на поверхности проводника она существует обязательно, если на одной части поверхности проводника плотность заряда положительна, а на другой — отрицательна.

Для того чтобы различные части поверхности проводника могли быть заряжены противоположными зарядами, необходимо, чтоб в поле были области, где потенциал выше потенциала тела, и другие области, где потенциал ниже потенциала тела.

Рассмотрим сначала два проводника, заряженных положительно до одинакового потенциала. Где-то между этими двумя телами будет располагаться точка равновесия. Будем постепенно уменьшать потенциал первого тела. Тогда точка равновесия будет постепенно приближаться к нему и в некоторый момент окажется на его поверхности. При дальнейшем изменении потенциала эквипотенциальная поверхность вокруг второго тела, имеющая потенциал, равный потенциалу первого тела, начнет пересекать под прямым углом поверхность первого тела по некоторой замкнутой кривой, являющейся линией равновесия. Эта линия равновесия, обметая всю поверхность проводника, стягивается затем вновь в точку. После этого точка равновесия удаляется от тела по другую его сторону и уходит в бесконечность, когда заряды обоих тел становятся равными по величине и противоположными по знаку.

Теорема Ирншоу

116. Заряженное тело, помещенное в поле электрической силы, не может находиться в состоянии устойчивого равновесия.

Сначала предположим, что электричество на подвижном теле A , а также в системе окружающих тел B фиксировано относительно этих тел.

Пусть V — потенциал в произвольной точке подвижного тела, обусловленный действием окружающих тел B , а e — заряд в некотором малом участке тела A , примыкающем к этой точке. Тогда потенциальная энергия тела A по отношению к системе B равна $M = \Sigma(Ve)$, где суммирование производится по всем заряженным участкам тела A .

¹ «Сводка свойств некоторых линий потока», *Phil. Mag.*, Oct., 1864. См. также Thomson and Tait, «*Natural Philosophy*», § 780; Rankine and Stokes, *Proc. R. S.*, 1867, p. 468, а также W. R. Smith, *Proc. R. S. Edin.*, 1869—70, p. 79.

Пусть a, b, c — координаты произвольного заряженного участка тела A относительно осей, фиксированных в теле A и параллельных осям x, y, z . Пусть абсолютные координаты начала отсчета этих осей равны ξ, η, ζ .

Предположим пока, что тело A может совершать лишь поступательное движение. Тогда абсолютные координаты точки a, b, c равны $x = \xi + a, y = \eta + b, z = \zeta + c$.

Потенциал тела A по отношению к системе B может быть выражен как сумма членов, в каждом из которых V выражено через a, b, c и ξ, η, ζ . Сумма этих членов является функцией от a, b, c , постоянных для любой точки тела, и от ξ, η, ζ , изменяющихся при перемещении тела.

Поскольку каждый член суммы удовлетворяет уравнению Лапласа, то и вся сумма удовлетворяет этому уравнению:

$$\frac{d^2 M}{d\xi^2} + \frac{d^2 M}{d\eta^2} + \frac{d^2 M}{d\zeta^2} = 0.$$

Дадим телу A малое перемещение, так что $d\xi = l dr, d\eta = m dr, d\zeta = n dr$, и пусть dM — приращение потенциала тела A по отношению к окружающей системе B .

Если бы оно было положительно, то для увеличения r надо было бы совершить работу и существовала бы сила $R = dM/dr$, стремящаяся уменьшить r и вернуть тело A в прежнее положение, так что для этого перемещения равновесие было бы устойчивым. Если же, наоборот, оно отрицательно, то сила стремится увеличить r , и равновесие неустойчиво.

Рассмотрим теперь сферу с центром в начале координат и радиусом r столь малым, что при нахождении фиксированной точки тела A внутри этой сферы ни одна точка подвижного тела A не может совпасть с какой-либо частью внешней системы B . Тогда, поскольку внутри сферы $\nabla^2 M = 0$, интеграл $\iint \frac{dM}{dr} dS$ по поверхности сферы равен нулю.

Следовательно, если в какой-либо части поверхности сферы dM/dr положительно, то должна существовать другая часть поверхности, на которой оно отрицательно, и если тело A сместить по направлению, вдоль которого dM/dr отрицательно, то оно будет стремиться отклоняться от первоначального положения, так что равновесие тела обязательно неустойчиво.

Таким образом, равновесие тела неустойчиво, даже если тело может двигаться только поступательно; оно *тем более* неустойчиво для совершенно свободного тела.

Предположим теперь, что тело A является проводником. Мы могли бы рассматривать этот случай как равновесие системы тел, считая подвижное электричество частью этой системы. Тогда мы могли бы заключить, что поскольку система является неустойчивой, будучи лишенной многих степеней свободы при фиксировании распределения электричества, то она *тем более* неустойчива при восстановлении этих степеней свободы.

Но этот случай можно рассмотреть и специально следующим образом.

Пусть сначала распределение электричества на теле A фиксировано и тело A перемещается поступательно на небольшое расстояние dr . Обусловленное этим увеличение потенциала тела A было уже рассмотрено.

Пусть теперь электрическим зарядам предоставлена возможность переместиться по телу A в свое положение равновесия, которое всегда устойчиво. При этом перемещении потенциал обязательно *уменьшится* на величину, которую мы обозначим через Cdr .

Таким образом, полное увеличение потенциала при нефиксированных электрических зарядах равно $[(dM/dr) - C]dr$, а сила, стремящаяся возвратить тело A назад в первоначальное положение, равна $(dM/dr) - C$, где C всегда положительно.

Но мы показали, что для некоторых направлений dM/dr отрицательно, следовательно, при нефиксированном электричестве неустойчивость этих направлений возрастает.

ГЛАВА VII

ФОРМЫ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЛИНИЙ ИНДУКЦИИ В ПРОСТЫХ СЛУЧАЯХ

117. Мы видели, что нахождение распределения электричества на поверхности проводников можно связать с решением уравнения Лапласа

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

где V — функция от x, y, z всюду конечная и непрерывная, обращающаяся в нуль на бесконечности и имеющая заданное постоянное значение на поверхности каждого проводника.

В общем случае не представляется возможным решить существующими математическими методами это уравнение, удовлетворив произвольно заданным условиям, но можно легко привести сколько угодно выражений для функции V , удовлетворяющей этому уравнению, и найти для каждого выражения форму поверхностей проводников, для которой эта функция является истинным решением.

Таким образом, задача определения формы проводников, соответствующей заданному потенциалу, которую естественно назвать обратной задачей, оказывается более легко решаемой, чем прямая задача определения потенциала при заданной форме проводников.

Фактически все известные нам решения задач электричества получены именно таким обратным процессом. Поэтому специалисту в области электричества чрезвычайно важно знать, какие задачи были решены таким способом, так как единственный метод, которым можно надеяться решить новую задачу, это сведение ее к какому-либо случаю, когда подобная задача была решена обратным методом.

Знание результатов обратных задач можно использовать двумя способами. Если требуется построить инструмент для производства электрических измерений с максимальной точностью, то мы можем выбирать такие формы поверхностей заряженных тел, которые соответствуют случаям, для которых мы знаем точное решение. Если же, наоборот, требуется определить электризацию тел заданной формы, то следует начать с какого-нибудь случая, когда одна из эквипотенциаль-

ных поверхностей имеет форму, более или менее близкую к заданной, а затем методом проб изменять решение, пока оно не приблизится к искомому.

Конечно, этот метод с математической точки зрения весьма несовершенен, но это единственный метод, имеющийся в нашем распоряжении, и если у нас нет возможности выбирать наши условия, то мы можем произвести лишь приближенный расчет электризации. Таким образом, нам нужно знать форму эквипотенциальных поверхностей и линий индукции для возможно большего числа различных случаев, какие только удастся собрать и запомнить. Для некоторых случаев, как, например для сферических проводников, известны математические методы, которыми можно воспользоваться. В других случаях не следует гнушаться и более скромным методом прямого построения пробных графиков полей и потенциалов на бумаге и выбора наименее отклоняющегося от требуемого.

Мне представляется, что этот последний метод может быть полезен даже в случае, когда имеется точное решение. Как я убедился, наглядное представление форм эквипотенциальных поверхностей часто приводит к правильному выбору математического метода решения.

Поэтому я построил несколько графиков систем эквипотенциальных поверхностей и линий индукции, чтобы читатель мог привыкнуть к форме этих поверхностей и линий. Способы построения таких графиков будут пояснены в п. 123.

118. На первом графике, приведенном в конце этого тома, дано сечение эквипотенциальных поверхностей, окружающих два точечных одноименных заряда, количества электричества в которых относятся как 20 к 5.

Обе точки окружены здесь системой эквипотенциальных поверхностей, которые по мере уменьшения все более приближаются к сферам, хотя строго сферической ни одна из поверхностей не является. Если две такие поверхности, окружающие соответственно первую и вторую точку, принять за поверхности двух проводящих тел, почти, но не совсем точно сферических, и если эти тела зарядить соответственно одноименными зарядами в отношении 4 к 1, то этот график будет представлять их эквипотенциальные поверхности, если только убрать все поверхности, проходящие внутри обоих тел. Из графика видно, что взаимодействие между этими телами такое же, что и между двумя точками с теми же зарядами, находящимися не точно на середине оси каждого тела, а несколько более удаленных от другого тела, чем середина оси.

Из того же графика можно увидеть, каково будет распределение электричества на любой из окружающих оба центра овалообразных фигур, один конец которых толще другого. Такое тело, будучи заряжено 25 единицами электричества и свободное от внешнего влияния, будет иметь наибольшую плотность электричества на тонком конце, меньшую — на толстом и самую малую плотность — на окружности, которая несколько ближе к тонкому концу, чем к толстому.

Существует одна эквипотенциальная поверхность, показанная на чертеже пунктиром, состоящая из двух лепестков, встречающихся в конической точке P . Эта точка является точкой равновесия, а поверхностная плотность на теле, ограниченном этой поверхностью, была бы равна нулю в этой точке.

Силовые линии образуют в этом случае две отдельные системы, отделяемые друг от друга поверхностью шестого порядка, показанной пунктирной линией, проходящей через точку равновесия и несколько напоминающей лист двухполостного гиперболоида.

Этот график можно считать также представляющим силовые линии и эквипотенциальные поверхности для двух сфер гравитирующей материи с отношением масс 4 к 1.

119. На втором графике мы вновь имеем два точечных заряда, относящихся как 20 к 5, но один из них положительный, а другой отрицательный. В этом случае одна из эквипотенциальных поверхностей, а именно та, что соответствует нулевому потенциалу, является сферой. На графике она изображена пунктирной окружностью Q . Важная роль этой сферической поверхности станет ясна далее, когда мы дойдем до теории электрических изображений.

Из этого графика можно видеть, что если два округлых тела заряжены электричеством противоположного рода, то они притягиваются друг к другу как два точечных заряда с теми же зарядами, но расположенные несколько ближе друг к другу, чем срединные точки этих округлых тел.

И здесь одна из эквипотенциальных поверхностей, показанная пунктиром, состоит из двух лепестков, причем внутренний лепесток охватывает точку с зарядом 5, а внешний охватывает оба тела. Оба лепестка смыкаются в конической точке P , являющейся точкой равновесия.

Если поверхность проводника имеет форму внешнего лепестка, т. е. округлую форму с конической впадиной на одном конце оси, как у яблока, то можно определить значение поверхностной плотности в любой точке при электризации этого проводника. В частности, на дне впадины она равна нулю.

Эта поверхность охватывается другими, у которых впадина уже закруглена, и постепенно уплощается и, наконец, исчезает для эквипотенциальной поверхности, проходящей через точку M .

Силовые линии на этом графике образуют две системы, разделенные поверхностью, проходящей через точку равновесия.

Если рассматривать точки на оси за точкой B , то видно, что результирующая сила уменьшается до кратной точки P , где она обращается в нуль. Затем она меняет знак и достигает максимума в точке M , после чего монотонно убывает.

Однако этот максимум является максимумом лишь по отношению к другим точкам на этой оси: ибо если рассмотреть поверхность, проходящую через M перпендикулярно этой оси, то в точке M сила будет минимальна по сравнению с соседними точками этой поверхности.

120. На графике III представлены эквипотенциальные поверхности и линии индукции, обусловленные точечным зарядом в 10 единиц, помещенным в точке A и окруженным силовым полем, которое до введения точечного заряда было однородным по величине и направлению во всем пространстве.

Каждая эквипотенциальная поверхность имеет свою асимптотическую плоскость. Одна из эквипотенциальных поверхностей, показанная пунктиром, имеет коническую точку и лепесток, охватывающий точку A . Расположенные ниже эквипотенциальные поверхности однолистные и имеют углубление вблизи оси. Выше расположены эквипотенциальные поверхности, состоящие из замкнутой части, охватывающей точку A , и отдельного листа с небольшим углублением вблизи оси.

Если одну из поверхностей ниже точки A принять за поверхность проводника, а за поверхность второго проводника, находящегося под другим потенциалом, принять другую эквипотенциальную поверхность, расположенную далеко внизу

под точкой A , то система линий и поверхностей между этими двумя проводниками будет указывать распределение электрического поля. Если нижний проводник расположен очень далеко от точки A , то его поверхность очень близка к плоскости, так что мы имеем здесь решение для распределения электричества на двух поверхностях, которые обе почти плоские и параллельные друг другу, не считая выступа на верхней поверхности вблизи оси, величина которого зависит от того, какую эквипотенциальную поверхность мы выбираем.

121. На графике IV представлены эквипотенциальные поверхности и линии индукции для трех точечных зарядов A , B и C , причем заряд A равен 15 единицам положительного электричества, заряд B — 12 единицам отрицательного электричества и заряд C — 20 единицам положительного электричества. Точечные заряды расположены на одной прямой, причем $AB=9$, $BC=16$, $AC=25$.

В этом случае поверхность, на которой потенциал равен нулю, состоит из двух сфер с центрами в точках A и C и с радиусами, равными 15 и 20. Сферы эти пересекаются по окружности, которая проходит через плоскость рисунка в точках D и D' ; центром этой окружности является точка B , а радиус ее равен 12. Эта окружность — пример линии равновесия, так как в каждой ее точке равнодействующая сила равна нулю.

Если мы предположим, что сфера с центром в точке A является проводником с зарядом в 3 единицы положительного электричества, находящимся под индуктивным воздействием 20 единиц положительного электричества в точке C , то этот случай будет представлен тем же графиком, если только убрать все линии внутри сферы A . Часть этой сферической поверхности, находящаяся под малой окружностью DD' , будет заряжена отрицательно из-за влияния заряда C . Вся остальная поверхность сферы будет заряжена положительно, а самая малая окружность DD' будет линией нулевого заряда.

Этот же график можно считать представляющим сферу с центром в C , заряженную 8 единицами положительного электричества и находящуюся под воздействием 15 единиц положительного электричества, помещенного в точку A .

Можно также считать, что на графике представлен проводник, образуемый большими сегментами обеих сфер, смыкающимися в DD' , заряженными 23 единицами положительного электричества.

Мы еще вернемся к рассмотрению этого графика как иллюстрации к томсоновской Теории Электрических Изображений, см. п. 168.

122. Эти графики следует изучать как иллюстрации языка Фарадея, таких его выражений, как «силовые линии», «силы наэлектризованного тела» и т. д.

Слово Сила означает ограниченное выражение того действия между двумя материальными телами, благодаря которому их движение становится отличным от движения, которое было бы в отсутствие этого действия. Явление в целом при одновременном рассмотрении обоих тел называется Напряжением и может быть описано как передача количества движения от одного тела к другому. Если мы сосредоточиваем внимание на первом из двух тел, то напряжение, действующее на него, мы называем Движущей Силой или просто Силой, действующей на это тело. Она измеряется количеством движения, получаемым телом в единицу времени.

Механическое взаимодействие двух заряженных тел — это напряжение, а воздействие на одно из этих тел — сила. Сила, действующая на малое заряженное

тело, пропорциональна его собственному заряду, а сила, приходящаяся на единицу заряда, называется Напряженностью силы.

Слово Индукция употребляется Фарадеем для обозначения способа взаимосвязи зарядов наэлектризованных тел: каждая единица положительного заряда связана с единицей отрицательного заряда линией, направление которой в жидких диэлектриках совпадает в каждой точке с направлением электрической напряженности. Такая линия часто называется Силовой линией, но правильнее было бы называть ее линией Индукции.

Далее, количество электричества в теле измеряется, согласно идеям Фарадея, *числом* силовых линий, или, лучше сказать, линий индукции, исходящих из тела. Все эти силовые линии должны где-то кончаться, либо на окружающих телах, либо на стенках и крыше помещения, либо на земле, либо на небесных телах, и, где бы они ни кончались, там присутствует количество электричества, в точности равное и противоположное по знаку тому количеству электричества, которое расположено на участке тела, из которого вышли силовые линии. Из приведенных графиков видно, что это действительно имеет место. Поэтому нет никакого противоречия между взглядами Фарадея и математическими результатами старой теории. Наоборот, идея силовых линий делает ясными эти результаты и дает, по-видимому, средство перехода непрерывным образом от довольно косных понятий старой теории к представлениям, допускающим дальнейшее обобщение и создающим, таким образом, возможность расширения наших знаний в последующих исследованиях.

123. Графики на рис. 5 построены следующим образом. Возьмем сначала случай единственного силового центра — малого наэлектризованного тела с зарядом e . Потенциал на расстоянии r равен $V=e/r$. Следовательно, положив $r=e/V$, мы найдем радиус r сферы, на которой потенциал равен V . Придавая V значения 1, 2, 3 и т. д. и построив соответствующие сферы, мы получим ряд эквипотенциальных поверхностей, на которых потенциалы измеряются натуральными числами. Сечение этих сфер плоскостью, проходящей через их общий центр, образует окружности, каждую из которых мы можем пометить числом, показывающим значение потенциала. Они показаны на рис. 5 справа в виде пунктирных полуокружностей.

Если имеется еще другой силовой центр, мы можем тем же способом построить эквипотенциальные поверхности, относящиеся к нему, и если теперь задаться целью найти форму эквипотенциальных поверхностей, обусловленных обоими центрами, то следует лишь вспомнить, что если V_1 — потенциал, создаваемый одним центром, а V_2 — потенциал, создаваемый другим центром, то обусловленный обоими центрами потенциал равен $V_1+V_2=V$. Поскольку во всех точках пересечения эквипотенциальных поверхностей, относящихся к обоим семействам, мы знаем и V_1 и V_2 , мы знаем также и значение V в них. Поэтому, если построить поверхность, проходящую через все те точки пересечения, для которых V имеет одно и то же значение, то эта поверхность совпадет с истинной эквипотенциальной поверхностью во всех этих точках пересечения, и при достаточной густоте построения исходной системы поверхностей можно построить новую поверхность с любой требуемой точностью. Эквипотенциальные поверхности, соответствующие двум точечным зарядам, равным по величине, но противоположным по знаку, показаны сплошными линиями справа на рис. 5.

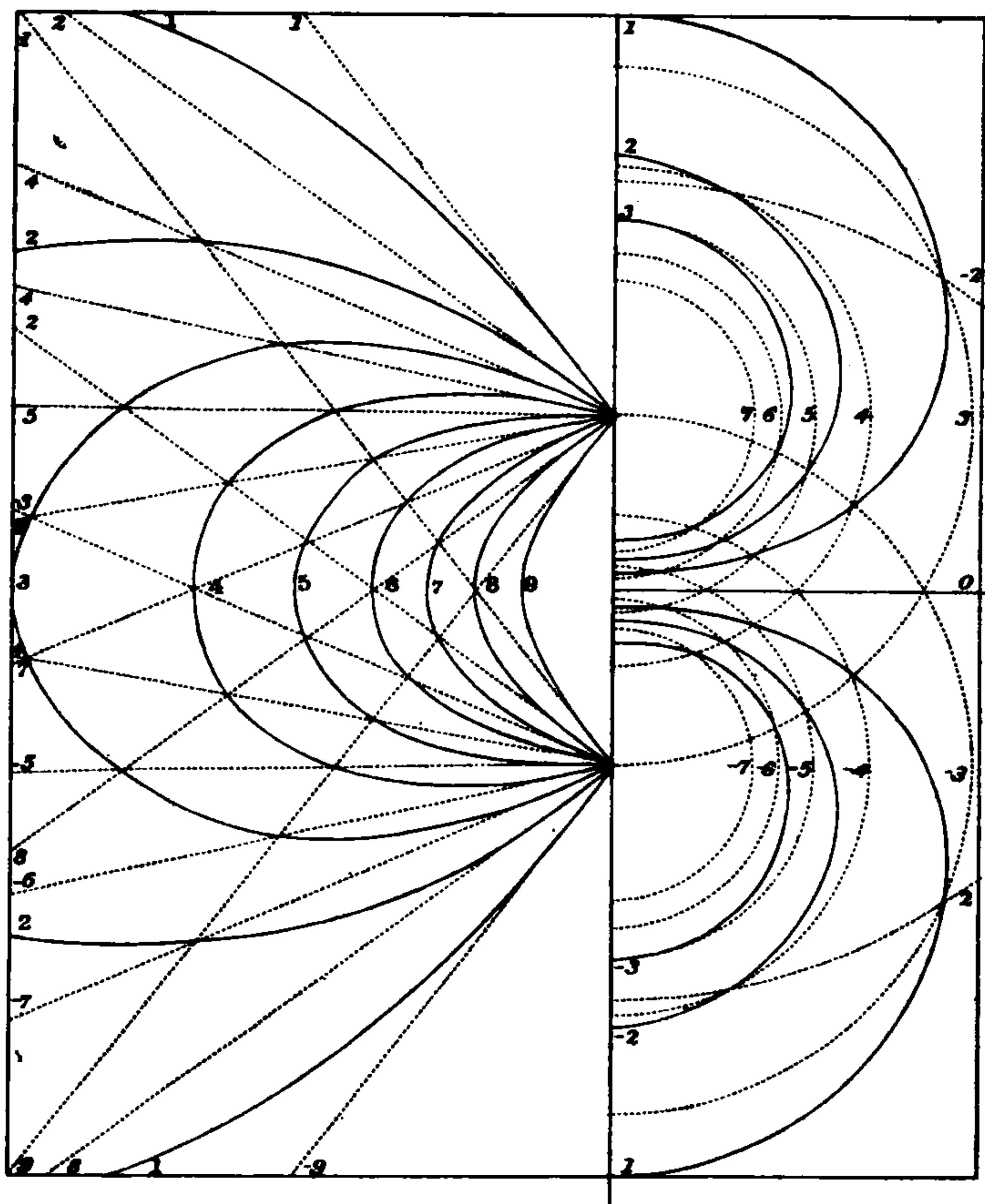


Рис. 5. Метод построения силовых линий и эквипотенциальных поверхностей

Этот метод может быть применен для построения произвольной системы эквипотенциальных поверхностей, если только потенциал является суммой двух потенциалов, для которых эквипотенциальные поверхности уже построены.

Силовые линии для одиночного силового центра представляют собой прямые, выходящие из этого центра. Если мы хотим указать этими линиями и интенсивность, и направление силы в любой точке, мы должны строить их так, чтобы они выделяли на эквипотенциальных поверхностях участки, по которым интеграл от индукции имеет определенное значение. Для этого лучше всего принять, что наша плоская фигура представляет собой сечение пространственной фигуры, образуемой вращением плоской фигуры вокруг оси, проходящей через центр сил. Любая прямая, выходящая из этого центра и образующая угол θ с осью, будет при этом описывать конус, и поверхностный интеграл от индукции по той части любой поверхности, которая вырезается этим конусом со стороны, прилегающей к положительному направлению оси, равен $2\pi e(1 - \cos \theta)$.

Если далее принять, что эта поверхность ограничена линиями пересечения с двумя плоскостями, проходящими через ось и наклоненными друг к другу под углом, стягиваемым дугой, равной половине радиуса, то индукция через ограниченную таким образом поверхность равна

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 (1 - \cos \theta) = \Phi \quad \text{и} \quad \theta = \arccos(1 - 2\Phi/e).$$

Придавая Φ значения $1, 2, 3 \dots e$, мы найдем соответствующую последовательность значений θ , и при целом e число соответствующих силовых линий, считая и ось, будет равно e .

Таким образом, мы имеем метод построения силовых линий, при котором заряд любого силового центра показан числом выходящих из него линий, а индукция через любую поверхность, вырезаемую указанным способом, измеряется числом силовых линий, проходящих через нее. Пунктирные прямые в левой части рис. 5 изображают силовые линии, соответствующие каждому точечному заряду при зарядах 10 и -10 соответственно.

Если на оси рисунка расположены два силовых центра, можно построить силовые линии для каждого центра, соответствующие значениям Φ_1 и Φ_2 . Проведя затем линии через последовательные точки пересечения этих линий, для которых $\Phi_1 + \Phi_2$ имеют одно и то же значение, мы можем найти силовую линию, обусловленную обоими центрами. Таким же способом можно скомбинировать любые две системы силовых линий, симметрично расположенные относительно одной и той же оси. Сплошные кривые в левой части на рис. 5 изображают силовые линии, обусловленные одновременным действием двух заряженных центров.

Построив этим методом эквипотенциальные поверхности и силовые линии, можно проверить точность построения, установив, ортогональны ли всюду обе системы кривых и относятся ли расстояния между соседними эквипотенциальными поверхностями к расстоянию между соседними силовыми линиями как половина среднего расстояния от оси относится к принятой единице длины.

Для любой такой системы конечных размеров силовая линия, индекс Φ которой меньше e , имеет асимптоту, проходящую через электрический центр (п. 89 г) системы и наклоненную к оси под углом, косинус которого равен $1 - 2\Phi/e$, где e — полный заряд системы, если только Φ меньше e . Силовые линии, для которых индекс больше e , являются конечными. Если e равно нулю, то все линии конечны.

Силовые линии, соответствующие однородному полю силы, параллельному оси, представляют собой прямые линии, параллельные этой оси, расстояние которых от оси равно квадратному корню из чисел, образующих арифметическую прогрессию.

Теория эквипотенциальных поверхностей и силовых линий для двух измерений будет дана ниже, когда мы перейдем к теории сопряженных функций¹.

¹ См. статью проф. У. Р. Смита «О потоке электричества в проводящих поверхностях» в *Proc. R. S. Edin.*, 1869—70, p. 79.

ГЛАВА VIII

ПРОСТЫЕ СЛУЧАИ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ

Две параллельные плоскости

124. Рассмотрим прежде всего две параллельные проводящие бесконечно простирающиеся плоскости на расстоянии c друг от друга, находящиеся соответственно под потенциалами A и B .

Очевидно, что в этом случае потенциал V будет функцией от расстояния z до плоскости A и будет одинаков для всех точек любой плоскости, параллельной A и B и расположенной между ними, за исключением точек вблизи краев заряженных поверхностей, которые, по предположению, находятся на бесконечно большом расстоянии от рассматриваемой точки.

Таким образом, уравнение Лапласа сводится к уравнению $d^2V/dz^2=0$, интеграл которого $V=C_1+C_2z$, а поскольку $V=A$ при $z=0$ и $V=B$ при $z=c$, то $V=A+(B-A)z/c$.

Для всех точек между плоскостями напряженность перпендикулярна плоскостям и величина ее равна $R=(A-B)/c$.

В самой толще проводников $R=0$. Следовательно, распределение электричества на первой плоскости имеет поверхностную плотность σ , где $4\pi\sigma=R=(A-B)/c$.

На другой поверхности, на которой потенциал равен B , поверхностная плотность σ' равна и противоположна по знаку σ : $4\pi\sigma'=-R=(B-A)/c$.

Рассмотрим теперь участок первой поверхности площади S , выбранный так, что никакая часть S не находится вблизи границы поверхности.

Количество электричества на этой поверхности $e_1=S\sigma$ и, согласно п. 79, действующая на единицу электричества сила равна $R/2$, так что полная сила, действующая на площадку S и притягивающая ее к другой плоскости, равна

$$F = \frac{1}{2} RS\sigma = \frac{1}{8\pi} R^2S = \frac{S}{8\pi} \frac{(B-A)^2}{c^2}.$$

Здесь сила притяжения выражена через площадь S , разность потенциалов обеих поверхностей $(A-B)$ и расстояние между ними c . Через заряд e_1 и площадь S сила притяжения выражается так: $F=2\pi e_1^2/S$.

Электрическая энергия, обусловленная распределением электричества на площадке S и на соответствующей ей площадке S' поверхности B , определяемой проектированием S на поверхность B системой силовых линий, которые в нашем случае перпендикулярны поверхности, равна

$$W = \frac{1}{2} (e_1A + e_2B), \quad = \frac{1}{2} \frac{S}{4\pi} \frac{(A-B)^2}{c}, \quad = \frac{R^2}{8\pi} Sc, \quad = \frac{2\pi}{S} e_1^2c, \quad = Fc.$$

Первое из этих выражений представляет собой общее выражение для электрической энергии (п. 84).

Второе выражение представляет энергию через площадь, расстояние и разность потенциалов.

Третье выражение представляет энергию через результирующую силу R и объем S , заключенный между площадками S и S' , и показывает, что в единице объема заключена энергия ρ , где $8\pi\rho=R^2$.

Сила притяжения между плоскостями равна ρS , т. е., иными словами, на каждую единицу поверхности действует электрическое натяжение (или отрицательное давление), равное ρ .

Четвертое выражение представляет энергию через заряд.

Пятое выражение показывает, что электрическая энергия равна работе, которую совершила бы электрическая сила, если бы обе поверхности сомкнулись, двигаясь параллельно самим себе при сохранении постоянной величины заряда на них.

Заряд выражается через разность потенциалов соотношением

$$e_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{S}{c} (A - B) = q (A - B).$$

Коэффициент q представляет заряд, обусловленный единичной разностью потенциалов. Этот коэффициент называется Емкостью поверхности S , обусловленной ее расположением относительно противоположной поверхности.

Предположим теперь, что среда между обеими поверхностями уже не воздух, а какое-либо другое диэлектрическое вещество с удельной индуктивной способностью K . Тогда заряд, обусловленный заданной разностью потенциалов, будет в K раз больше, чем в воздухе, т. е. $e_1 = KS(A - B)/4\pi c$.

Полная энергия будет равна

$$W = \frac{KS}{8\pi c} (A - B)^2 = \frac{2\pi}{KS} e_1^2 c,$$

а сила между поверхностями

$$F = \rho S = \frac{KS}{8\pi} \frac{(A - B)^2}{c^2} = \frac{2\pi}{KS} e_1^2.$$

Следовательно, сила между двумя поверхностями, поддерживаемыми при заданных потенциалах, меняется пропорционально удельной индуктивной способности диэлектрика K , а сила между двумя поверхностями с заданными зарядами меняется обратно пропорционально K .

Две concentрические сферические поверхности

125. Если две concentрические сферические поверхности радиусов a и b , причем b больше a , поддерживаются соответственно под потенциалами A и B , то, очевидно, потенциал V является функцией расстояния r от их центра. В этом случае уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0.$$

Его решение $V = C_1 + C_2 r^{-1}$, и из условия $V = A$ при $r = a$ и $V = B$ при $r = b$ следует, что в пространстве между сферическими поверхностями

$$V = \frac{Aa - Bb}{a - b} + \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} r^{-1}, \quad R = - \frac{dV}{dr} = \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} r^{-2}.$$

Если σ_1 и σ_2 — поверхностные плотности на противоположащих поверхностях сплошного шара радиуса a и сферической полости радиуса b , то

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{A-B}{a^{-1}-b^{-1}}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{4\pi b^2} \frac{B-A}{a^{-1}-b^{-1}}.$$

Если e_1 и e_2 — полные электрические заряды этих поверхностей, то

$$e_1 = 4\pi a^2 \sigma_1 = \frac{A-B}{a^{-1}-b^{-1}} = -e_2.$$

Следовательно, емкость сферы, окруженной сферической оболочкой, равна $ab/(b-a)$.

Если внешняя поверхность оболочки тоже сфера радиуса c , то при отсутствии других проводников поблизости заряд на внешней поверхности равен $e_3 = Bc$.

Таким образом, полный заряд на внутренней сфере равен

$$e_1 = \frac{ab}{b-a} (A-B),$$

а на внешней оболочке

$$e_2 + e_3 = \frac{ab}{b-a} (B-A) + Bc.$$

Положив $b = \infty$, мы получим случай сферы в бесконечном пространстве. Электрическая емкость такой сферы равна a , т. е. численно равна радиусу сферы.

Электрическое натяжение на внутренней сфере, приходящееся на единицу площади, равно

$$p = \frac{1}{8\pi} \frac{b^2}{a^2} \frac{(A-B)^2}{(b-a)^2}.$$

Результирующая сила, обусловленная этим натяжением, для полусферы равна $\pi a^2 p = F$ и перпендикулярна основанию полусферы. Если она уравновешивается поверхностным натяжением, испытываемым по круговой границе полусферы с натяжением на единицу длины равным T , то $F = 2\pi a T$.

Отсюда

$$F = \frac{b^2}{8} \frac{(A-B)^2}{(b-a)^2} = \frac{e_1^2}{8a^2}, \quad T = \frac{b^2}{16\pi a} \frac{(A-B)^2}{(b-a)^2}.$$

Если сферический мыльный пузырь наэлектризовать до потенциала A , то при радиусе a его заряд будет Aa , а поверхностная плотность заряда будет $\sigma = A/(4\pi a)$.

Результирующая напряженность у внешней поверхности равна $4\pi\sigma$, а внутри пузыря равна нулю, так что, согласно п. 79, электрическая сила, действующая на единицу поверхности, равна $2\pi\sigma$, причем направлена она наружу. Следовательно, электризация уменьшает давление воздуха внутри пузыря на $2\pi\sigma^2$, т. е. на $A^2/(8\pi a^2)$.

Но можно показать, что если T_0 — натяжение в жидкой пленке, передаваемое через линию единичной длины, то внутреннее давление, необходимое для удержа-

ния пузыря от схлопывания, равно $2T_0/a$. Если электрической силы как раз достаточно для удержания пузыря в равновесии при одинаковом давлении воздуха вне и внутри пузыря, то $A^2 = 16\pi a T_0$.

Две бесконечные коаксиальные цилиндрические поверхности

126. Пусть радиус внешней поверхности проводящего цилиндра равен a , а радиус внутренней поверхности полого цилиндра, коаксиального первому, равен b . Пусть их потенциалы соответственно равны A и B . Потенциал V зависит в этом случае только от расстояния r от оси, так что уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = 0,$$

откуда $V = C_1 + C_2 \ln r$.

Поскольку $V = A$ при $r = a$ и $V = B$ при $r = b$, то

$$V = [A \ln(b/r) + B \ln(r/a)] / \ln(b/a).$$

Если σ_1 и σ_2 — поверхностные плотности на внутренней и внешней поверхностях, то

$$4\pi\sigma_1 = \frac{A-B}{a \ln \frac{b}{a}}, \quad 4\pi\sigma_2 = \frac{A-B}{b \ln \frac{b}{a}}.$$

Для зарядов e_1 и e_2 на участках обоих цилиндров между двумя сечениями, перпендикулярными оси, и отстоящими друг от друга на расстояние l , имеем

$$e_1 = 2\pi a l \sigma_1 = \frac{1}{2} \frac{A-B}{\ln \frac{b}{a}} l = -e_2.$$

Следовательно, емкость участка внутреннего цилиндра длины l равна $l/2 \ln(b/a)$.

Если пространство между цилиндрами занято не воздухом, а диэлектриком с удельной индуктивной способностью K , то емкость участка внутреннего цилиндра длины l равна $lK/2 \ln(b/a)$.

Энергия распределения электричества на рассматриваемом участке бесконечного цилиндра равна $lK(A-B)^2/4 \ln(b/a)$.

127. Пусть два полых цилиндрических проводника A и B произвольной длины (рис. 6), имеющие общую ось x , расположены один с отрицательной стороны от начала координат, а другой с положительной стороны и разделены небольшим промежутком вблизи начала координат.

Пусть цилиндр C длины $2l$ расположен так, что его центральная точка находится на расстоянии x от начала координат в положительную сторону, а сам цилиндр C входит внутрь полых цилиндров.

Положим потенциал полого цилиндра на положительной стороне равным A , на отрицательной стороне равным B и потенциал внутреннего цилиндра равным C , обозначим через α емкость единицы длины C по отношению к A , а через β — емкость единицы длины C по отношению к B .

Поверхностная плотность на участках цилиндров в фиксированных точках вблизи начала координат и в точках, находящихся на заданном небольшом расстоянии от концов внутреннего проводника, не зависит от величины x , если только внутренний цилиндр достаточно глубоко входит внутрь обоих полых цилиндров. Вблизи концов полых цилиндров и вблизи концов внутреннего цилиндра устанавливается распределение электричества, которое мы еще пока не можем рассчитать, однако распределение у начала координат не меняется при перемещении внутреннего цилиндра, если ни один из его концов не подходит близко к

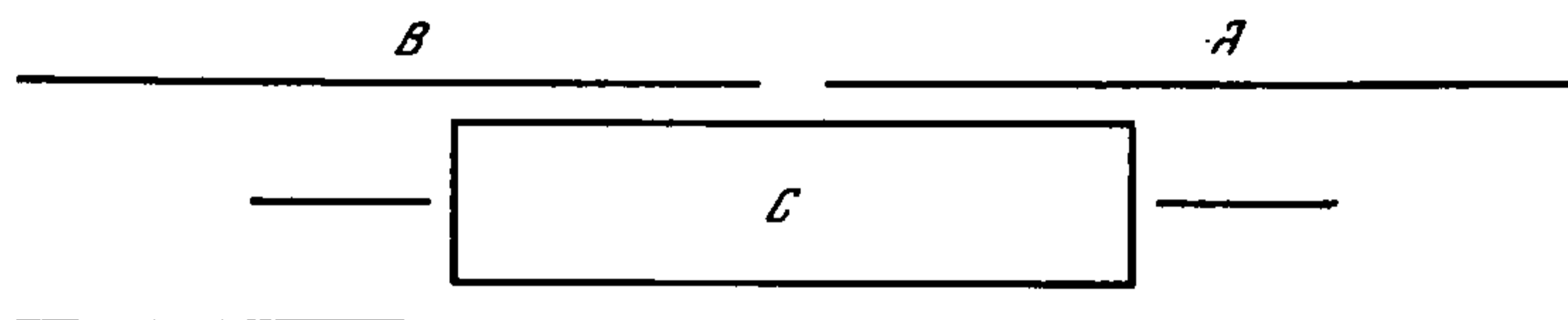


Рис. 6

началу координат, а распределения у концов внутреннего цилиндра перемещаются вместе с цилиндром, так что эффект перемещения цилиндра сводится лишь к увеличению или уменьшению тех участков внутреннего цилиндра, на которых заряд распределен как на бесконечном цилиндре.

Следовательно, зависимость полной энергии системы от x дается выражением

$$Q = \frac{1}{2} \alpha (l+x) (C-A)^2 + \frac{1}{2} \beta (l-x) (C-B)^2 + \text{величины, не зависящие от } x,$$

а результирующая сила, параллельная оси цилиндров, равна, согласно п. 93б,

$$X = \frac{dQ}{dx} = \frac{1}{2} \alpha (C-A)^2 - \frac{1}{2} \beta (C-B)^2,$$

поскольку энергия представлена через потенциалы.

Если сечения цилиндров A и B одинаковы, то $\alpha = \beta$ и $X = \alpha (B-A)[C - (A+B)/2]$.

Таким образом, оказывается, существует постоянная сила, действующая на внутренний цилиндр и втягивающая его в тот внешний цилиндр, потенциал которого больше отличается от потенциала внутреннего проводника.

Если C по величине значительно больше $A+B$, то сила приблизительно равна $X = \alpha (B-A)C$, так что можно определить разность потенциалов двух цилиндров, если измерить X , причем точность измерения увеличивается с повышением потенциала внутреннего цилиндра C . Этот принцип в несколько модифицированном виде принят в томсоновском квадрантном электрометре (п. 219).

Это же приспособление из трех цилиндров можно использовать для измерения емкости, соединив B и C . Если потенциал A равен нулю, а потенциал B и C равен V , то количество электричества на A равно $E_3 = (q_{13} + \alpha (l+x))V$, где q_{13} зависит от распределения электричества на концах цилиндра, но не зависит от x . Переместив цилиндр вправо, так что x перейдет в $x+\xi$, мы увеличим емкость цилиндра C на определенную величину $\alpha\xi$, где $\alpha = 1/[2 \ln(b/a)]$, а a и b — радиусы противоположащих цилиндрических поверхностей.

ГЛАВА IX

СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

128. Математическая теория сферических гармоник исследовалась в целом ряде специальных трактатов. В 1878 г. вышло второе издание в двух томах книги *Handbuch der Kugelfunctionen* д-ра Э. Хайне (E. Heine), являющейся наиболее детальным исследованием в этой области, а д-р Ф. Нейманн опубликовал свои *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen* (Leipzig, Teubner, 1878). Значительно улучшено рассмотрение этого вопроса во втором издании 1879 г. *Natural Philosophy* Томсона и Тэта, а публикация книг Тодхантера, *Elementary Treatise on Laplace's Functions, Lamé's Functions and Bessel's Functions* и Феррерса *Elementary Treatise on Spherical Harmonics and subjects connected with them* сделали излишним детальное рассмотрение чисто математических вопросов в книге по электричеству.

И все же я оставил здесь представление сферической гармоники через ее полюса.

*Об особых точках,
в которых потенциал становится бесконечным*

129 а. Если электрический заряд A_0 равномерно распределен по поверхности сферы, центр которой имеет координаты (a, b, c) , то потенциал любой точки (x, y, z) вне сферы, согласно п. 125, равен

$$V = A_0/r, \quad (1)$$

где

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2. \quad (2)$$

Поскольку выражение для V не зависит от радиуса сферы, оно останется тем же и в предположении бесконечно малого радиуса. Физически это означало бы, что заряд помещается на поверхности бесконечно малой сферы, что по существу то же самое, что математическая точка. Мы выше показали (п. 55, 81), что для значения поверхностной плотности электричества существует предел, так что физически невозможно поместить конечный заряд электричества на сферу меньше некоторого радиуса.

Тем не менее, поскольку (1) описывает возможное распределение потенциала в пространстве, окружающем сферу, мы можем математически считать потенциал как бы создаваемым зарядом A_0 , сосредоточенным в математической точке (a, b, c) , а эту точку можно назвать особой точкой нулевого порядка.

Существуют и другие типы особых точек, свойства которых мы рассмотрим ниже, но, прежде чем перейти к этому, следует определить некоторые выражения, которые окажутся нам полезными при рассмотрении направлений в пространстве и соответствующих им точек на сфере.

129 б. *Осью* называется любое фиксированное направление в пространстве. Мы будем считать, что оно определяется меткой на сфере в той точке, где радиус, проведенный из центра сферы в направлении оси, пересекает поверхность сферы. Эта точка называется *Полюсом* оси. Таким образом, ось имеет не два полюса, а один.

Если μ — косинус угла между осью h и любым вектором r , а

$$\rho = \mu r, \quad (3)$$

то ρ — проекция r по направлению оси h .

Различные оси отличаются разными индексами, а косинус угла между двумя осями обозначается через λ_{mn} , где m и n — индексы, характеризующие оси.

Дифференцирование по оси h , имеющей направляющие косинусы L, M, N , обозначается так:

$$\frac{d}{dh} = L \frac{d}{dx} + M \frac{d}{dy} + N \frac{d}{dz}. \quad (4)$$

Из этих определений следует, что

$$\frac{dr}{dh_m} = \frac{\rho_m}{r} = \mu_m, \quad (5)$$

$$\frac{d\rho_n}{dh_m} = \lambda_{mn} = \frac{d\rho_m}{dh_n}, \quad (6)$$

$$\frac{d\mu_m}{dh_n} = \frac{\lambda_{mn} - \mu_m \mu_n}{r}. \quad (7)$$

Если теперь предположить, что потенциал в точке (x, y, z) , обусловленный особой точкой любого порядка, помещенной в начале координат, равен $A f(x, y, z)$ то, если эту точку поместить на конце оси h , потенциал в точке (x, y, z) будет

$$A f[(x-Lh), (y-Mh), (z-Nh)].$$

Если теперь такую же во всех отношениях особую точку, но с противоположным знаком A поместить в начало координат, то потенциал, создаваемый обеими точками, будет равен

$$\begin{aligned} V &= A f[(x-Lh), (y-Mh), (z-Nh)] - A f(x, y, z) = \\ &= -Ah \frac{d}{dh} f(x, y, z) + \text{члены, содержащие } h^2. \end{aligned}$$

Если теперь h , неограниченно уменьшать, а A неограниченно увеличивать, оставляя их произведение конечным и равным A' , тогда предельное значение потенциала пары точек будет равно

$$V' = -A' \frac{d}{dh} f(x, y, z). \quad (8)$$

Если $f(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то, поскольку оно линейное, функция V' , являющаяся разностью двух функций, каждая из которых по отдельности удовлетворяет уравнению Лапласа, также должна удовлетворять этому уравнению.

129 в. Потенциал особой точки нулевого порядка

$$V_0 = A_0/r \quad (9)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, любая функция, получающаяся из него последовательным дифференцированием по любому числу осей, также должна удовлетворять этому уравнению.

Точку первого порядка можно получить, взяв две точки нулевого порядка с равными, но противоположными по знаку зарядами — A_0 и A_0 и поместив первую точку в начало координат, а вторую на конце оси h_1 . Затем нужно неограниченно уменьшать h_1 и увеличивать A_0 так, чтобы их произведение $A_0 h_1$ было все время равно A_1 . Окончательным результатом такого процесса, соответствующим слиянию обеих точек, является точка первого порядка с моментом A_1 и осью h_1 . Таким образом, точка первого порядка является двукратной. Ее потенциал равен

$$V_1 = -h_1 \frac{d}{dh_1} V_0 = A_1 \frac{\mu_1}{r^2}. \quad (10)$$

Поместив в начало координат точку первого порядка с моментом — A_1 , а на конце оси h_2 другую точку первого порядка с моментом A_1 и уменьшая затем h_2 с одновременным увеличением A_1 , так что

$$A_1 h_2 = A_2 / 2, \quad (11)$$

мы получим точку второго порядка, потенциал которой

$$V_2 = -h_2 \frac{d}{dh_2} V_1 = A_2 \frac{1}{2} \frac{3\mu_1\mu_2 - \lambda_{12}}{r^3}. \quad (12)$$

Точку второго порядка можно назвать четырехкратной (квадрупольной) точкой, так как она получается при сближении четырех точек нулевого порядка. Она имеет две оси h_1 и h_2 и момент A_2 . Направления этих осей и величина момента полностью определяют характер точки.

Последовательно дифференцируя по n осям мы получим потенциал, создаваемый точкой n -го порядка. Он представляет собой произведение трех множителей — константы, некоторой комбинации косинусов и $r^{-(n+1)}$. По причинам, которые станут ясны в дальнейшем, значение константы удобно выбирать так, что при совпадении всех осей с радиус-вектором коэффициент момента равен $r^{-(n+1)}$. Поэтому мы будем делить на n при дифференцировании по h_n .

Таким образом, мы получим вполне определенное численное значение для каждого потенциала, которому мы и присвоим название Пространственной Гармоники степени — $(n+1)$, а именно

$$V_n = (-1)^n \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d}{dh_1} \frac{d}{dh_2} \dots \frac{d}{dh_n} \frac{1}{r}. \quad (13)$$

При умножении этой величины на постоянную она по-прежнему остается потенциалом, создаваемым некоторой точкой n -го порядка.

129 г. Результат операции (13) имеет вид

$$V_n = Y_n r^{-(n+1)}, \quad (14)$$

где Y_n — функция n косинусов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ углов между r и n осями и $n(n-1)/2$ косинусов λ_{12} и т. д. углов между парами осей.

Если считать направления r и n осей задаваемыми точками на сферической поверхности, то можно рассматривать Y_n как величину, меняющуюся от точки к точке на этой поверхности и являющуюся функцией $n(n+1)/2$ расстояний между n полюсами осей и полюсом радиус-вектора. Поэтому мы называем Y_n Поверхностной Гармоникой порядка n .

130а. Теперь мы покажем, что каждой поверхностной гармонике порядка n соответствует наряду с пространственной гармоникой порядка $(n+1)$ и другая порядка n , т. е. что

$$H_n = Y_n r^n = V_n r^{2n+1} \quad (15)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа.

Действительно,

$$\frac{dH_n}{dx} = (2n+1) r^{2n-1} x V_n + r^{2n+1} \frac{dV_n}{dx},$$

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} = (2n+1) [(2n-1)x^2 + r^2] r^{2n-3} V_n + 2(2n+1) r^{2n-1} x \frac{dV_n}{dx} + r^{2n+1} \frac{d^2 V_n}{dx^2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_n}{dx^2} + \frac{d^2 H_n}{dy^2} + \frac{d^2 H_n}{dz^2} &= (2n+1)(2n+2) r^{2n-1} V_n + \\ &+ 2(2n+1) r^{2n-1} \left(x \frac{dV_n}{dx} + y \frac{dV_n}{dy} + z \frac{dV_n}{dz} \right) + r^{2n+1} \left(\frac{d^2 V_n}{dx^2} + \frac{d^2 V_n}{dy^2} + \frac{d^2 V_n}{dz^2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Но V_n — однородная функция от x, y, z отрицательной степени $n+1$, так что

$$x \frac{dV_n}{dx} + y \frac{dV_n}{dy} + z \frac{dV_n}{dz} = -(n+1) V_n. \quad (17)$$

Поэтому первые два слагаемых в правой части (16) взаимно сокращаются, а поскольку V_n удовлетворяет уравнению Лапласа, то и третье слагаемое равно нулю, так что и H_n удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является пространственной гармоникой степени n .

Здесь мы имеем дело с частным случаем более общей теоремы об электрической инверсии, утверждающей, что если $F(x, y, z)$ — функция от x, y, z , удовлетворяющая уравнению Лапласа, то существует другая функция

$$\frac{a}{r} F\left(\frac{a^2 x}{r^2}, \frac{a^2 y}{r^2}, \frac{a^2 z}{r^2}\right),$$

также удовлетворяющая уравнению Лапласа (см. п. 162).

130 б. Поверхностная гармоника Y_n содержит $2n$ произвольных переменных, так как она определяется положением n ее полюсов на сфере, а каждый полюс определяется двумя координатами. Следовательно, пространственные гармоники V_n и H_n также содержат $2n$ произвольных переменных. При этом обе они после умножения на постоянную удовлетворяют уравнению Лапласа.

Чтобы показать, что AH_n — наиболее общая рациональная однородная функция степени n , которая может удовлетворять уравнению Лапласа, заметим, что общая рациональная однородная функция K степени n содержит $(n+1)(n+2)/2$ членов. Но $\nabla^2 K$ является однородной функцией степени $n-2$ и, следовательно, содержит $n(n-1)/2$ членов, так что условие $\nabla^2 K = 0$ требует равенства каждого из этих членов нулю. Таким образом, мы получаем $n(n-1)/2$ уравнений для $(n+1)(n+2)/2$ членов функции K , так что в наиболее общей форме однородной функции степени n , удовлетворяющей уравнению Лапласа, остается $2n+1$ произвольных постоянных. Но H_n после умножения на произвольную постоянную как

раз удовлетворяет требуемым условиям и содержит $2n+1$ произвольных постоянных. Таким образом, это и есть наиболее общая форма.

131 а. Теперь мы можем построить распределение потенциала, при котором ни сам потенциал, ни его первые производные не обращаются в бесконечность ни в одной точке.

Функция $V_n = Y_n r^{-(n+1)}$ удовлетворяет условию обращения в нуль на бесконечности, но становится бесконечной в начале координат.

Функция $H_n = Y_n r^n$ конечна и непрерывна на конечных расстояниях от начала координат, но не обращается в нуль на бесконечности.

Но если принять потенциал во всех точках вне сферы радиуса a с центром в начале координат равным $a^n Y_n r^{-(n+1)}$, а потенциал во всех точках внутри сферы равным $a^{-(n+1)} Y_n r^n$ и предположить, что на самой сфере электричество распределено с поверхностной плотностью σ , определяемой соотношением

$$4\pi\sigma a^2 = (2n+1)Y_n, \quad (18)$$

то все условия для потенциала, создаваемого заряженной так оболочкой, будут выполнены.

Действительно, потенциал всюду конечен и непрерывен и обращается в нуль на бесконечности. Первые производные потенциала всюду конечны и непрерывны, за исключением заряженной поверхности, где они удовлетворяют уравнению

$$\frac{dV}{dv} + \frac{dV'}{dv'} + 4\pi\sigma = 0, \quad (19)$$

и уравнение Лапласа удовлетворяется во всех точках как внутри, так и вне поверхности сферы.

Таким образом, это распределение потенциала удовлетворяет всем условиям, и, согласно п. 100 в, оно является единственным распределением, удовлетворяющим этим условиям.

131 б. Потенциал, создаваемый сферой радиуса a с поверхностной плотностью, задаваемой соотношением

$$4\pi a^2 \sigma = (2n+1)Y_n, \quad (20)$$

во всех точках вне сферы совпадает с потенциалом соответствующей особой точки n -го порядка.

Предположим теперь, что имеется некоторая электрическая система E , расположенная вне сферы, и что Ψ — потенциал, создаваемый этой системой. Найдем значение $\Sigma(\Psi e)$ для особой точки. Эта величина дает часть электрической энергии, зависящую от воздействия внешней системы на особую точку.

Если A_0 — заряд особой точки нулевого порядка, то искомая потенциальная энергия равна

$$W_0 = A_0 \Psi. \quad (21)$$

Если имеются две такие точки, причем отрицательная находится в начале координат, а положительная точка с тем же по величине зарядом — на конце оси h_1 , то потенциальная энергия равна

$$-A_0 \Psi + A_0 \left(\Psi + h_1 \frac{d\Psi}{dh_2} + \frac{1}{2} h_1^2 \frac{d^2\Psi}{dh_1^2} + \dots \right)$$

и при неограниченном росте A_0 и уменьшении h_1 так, что $A_0 h_1 = A_1$, получим значение потенциальной энергии для точки первого порядка

$$W_1 = A_1 (d\Psi/dh_1). \quad (22)$$

Аналогично для точки n -го порядка получим потенциальную энергию

$$W_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} A_n \frac{d^n \Psi}{dh_1 dh_2 \dots dh_n}. \quad (23)$$

131 в. Если принять заряд внешней системы состоящим из отдельных частей, каждую из которых мы обозначим через dE , а заряд особой точки порядка n считать образованным отдельными частичными зарядами de , то

$$\Psi = \Sigma [(1/r)dE]. \quad (24)$$

Но если потенциал V_n , обусловленный наличием особой точки, равен

$$V_n = \Sigma [(1/r)de], \quad (25)$$

а потенциальная энергия, обусловленная воздействием E на e , равна

$$W_n = \Sigma (\Psi de) = \Sigma \Sigma [(1/r)dEde] = \Sigma (V_n dE), \quad (26)$$

то последнее выражение представляет собой потенциальную энергию, обусловленную воздействием e на E .

Аналогично если σds — заряд на элементе ds оболочки, то, поскольку потенциал, обусловленный оболочкой в месте нахождения внешней системы E равен V_n , имеем

$$W_n = \Sigma (V_n dE) = \Sigma \Sigma [(1/r)dE\sigma ds] = \Sigma (\Psi \sigma ds). \quad (27)$$

Последний член содержит суммирование по поверхности сферы. Приравнивая его к первому выражению для W_n , получим

$$\iint \Psi \sigma ds = \Sigma (\Psi de) = \frac{1}{n!} A_n \frac{d^n \Psi}{dh_1 \dots dh_n}. \quad (28)$$

Если вспомнить, что $4\pi a^2 = (2n+1)Y_n$, а $A_n = a^n$, то получим

$$\iint \Psi Y_n ds = \frac{4\pi}{n!(2n+1)} a^{n+2} \frac{d^n \Psi}{dh_1 \dots dh_n}. \quad (29)$$

Это уравнение сводит операцию интегрирования $\Psi Y_n ds$ по всем элементам поверхности сферы радиуса a к операции дифференцирования Ψ по n осям гармоники и вычисления значения этой производной в центре сферы, если только Ψ удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках внутри сферы, а Y_n — поверхностная гармоника порядка n .

132. Пусть теперь Ψ — пространственная гармоника положительной степени m вида

$$\Psi = a^{-m} Y_m r^m. \quad (30)$$

¹ В дальнейшем удобнее будет обозначать произведение положительных целых чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ через $n!$.

На поверхности сферы $r=a$, а $\Psi=Y_m$, так что уравнение (29) принимает в этом случае вид

$$\iint Y_m Y_n ds = \frac{4\pi}{n!(2n+1)} a^{n-m+2} \frac{d^n (Y_m r^n)}{dh_1 \dots dh_n}, \quad (31)$$

где значение производной следует брать в центре сферы.

Если n меньше m , то в результате дифференцирования получится однородная функция от x , y и z степени $m-n$, значение которой в центре сферы равно нулю. Если n равно m , то в результате дифференцирования получится постоянная, значение которой мы определим в п. 134. При дальнейшем дифференцировании получится нуль. Таким образом, интеграл $\iint Y_m Y_n ds$ равен нулю при неодинаковых m и n .

Мы пришли к этому результату чисто математическим путем, потому что, хотя мы и пользовались такими физическими понятиями, как электрическая энергия, все эти понятия рассматривались не как физическое явление, подлежащее исследованию, а как определенное математическое выражение. Математик может с равным правом воспользоваться этими или какими-либо другими математическими функциями, которые он сочтет полезными, но физик, которому приходится проводить математические преобразования, понимает их лучше всего, если каждый этап расчета допускает физическое истолкование.

133. Определим теперь вид поверхностной гармоники Y_n в зависимости от положения точки P на сфере по отношению к n полюсам гармоники.

Мы имеем

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1, & Y_1 &= \mu_1, & Y_2 &= (3\mu_1\mu_2/2) - \lambda_{12}/2, \\ Y_3 &= (5\mu_1\mu_2\mu_3/2) - (\mu_1\lambda_{23} + \mu_2\lambda_{31} + \mu_3\lambda_{12})/2 \end{aligned} \quad (32)$$

и т. д.

Таким образом, каждое слагаемое в Y_n состоит из произведений косинусов, причем множители типа μ — с одним индексом, это косинусы углов между P и различными полюсами, а множители типа λ — с двумя индексами, это косинусы углов между полюсами.

Поскольку каждая ось вводится одним из n дифференцирований, индекс этой оси может встретиться один и только один раз среди индексов косинусов в каждом слагаемом.

Значит, если в каком-либо слагаемом имеется s косинусов с двойными индексами, то должны входить еще $n-2s$ косинусов с единичными индексами.

Будем записывать сумму всех произведений косинусов, в которых s косинусов с двойными индексами, в сокращенном виде

$$\sum (\mu^{n-2s}\lambda^s).$$

В каждом таком произведении все индексы встречаются по одному разу и ни один не повторяется.

Чтобы показать, что некоторый определенный индекс m встречается только у μ или только у λ , мы будем указывать его индексом у μ или λ . Таким образом, равенство

$$\sum (\mu^{n-2s}\lambda^s) = \sum (\mu_m^{n-2s}\lambda^s) + \sum (\mu^{n-2s}\lambda_m^s) \quad (33)$$

показывает, что вся совокупность произведений может быть разделена на две части, в одной из которых индекс m встречается среди направляющих косинусов переменной точки P , а в другой — среди косинусов углов между полюсами.

Предположим теперь, что для определенного значения n

$$Y_n = A_{n,0} \Sigma(\mu^n) + A_{n,1} \Sigma(\mu^{n-2} \lambda^1) + \text{и т. д.} + A_{n,s} \Sigma(\mu^{n-2s} \lambda^s) + \text{и т. д.}, \quad (34)$$

где через A обозначены численные коэффициенты. Мы можем записать эту сумму в сокращенной форме:

$$Y_n = S [A_{n,s} \Sigma(\mu^{n-2s} \lambda^s)], \quad (35)$$

где S показывает суммирование по всем значениям s не больше $n/2$, включая и нулевое.

Чтобы получить соответствующую пространственную гармонику отрицательной степени $(n+1)$ порядка n , умножим на $r^{-(n+1)}$ и получим

$$V_n = S [A_{n,s} r^{2s-2n-1} \Sigma(\rho^{n-2s} \lambda^s)], \quad (36)$$

где положено $r\mu = \rho$, как в уравнении (3).

Если продифференцировать V_n по новой оси h_m , то получится $-(n+1)V_{n+1}$, и, следовательно,

$$(n+1)V_{n+1} = S [A_{n,s} (2n+1-2s) r^{2s-2n-3} \Sigma(\rho^{n-2s+1} \lambda^s) - A_{n,s} r^{2s-2n-1} \Sigma(\rho^{n-2s-1} \lambda_m^{s+1})]. \quad (37)$$

Чтобы получить члены, содержащие s косинусов с двойными индексами, нужно уменьшить s на единицу в последнем члене. В результате получим

$$(n+1)V_{n+1} = S [r^{2s-2n-3} \{A_{n,s} (2n-2s+1) \Sigma(\rho_m^{n-2s+1} \lambda^s) - A_{n,s-1} \Sigma(\rho^{n-2s+1} \lambda_m^s)\}]. \quad (38)$$

Но оба эти типа произведений отличаются друг от друга лишь тем, что в одном из них индекс m встречается лишь у ρ , а в другом — у λ . Таким образом, коэффициенты перед ними должны быть одинаковы, а поскольку мы могли прийти к тому же результату, положив $n+1$ вместо n в выражении для V_n и умножив на $n+1$, мы получаем уравнения

$$(n+1)A_{n+1,s} = (2n-2s+1)A_{n,s} = -A_{n,s-1}. \quad (39)$$

Если положить здесь $s=0$, то

$$(n+1)A_{n+1,0} = (2n+1)A_{n,0} \quad (40)$$

и, следовательно, поскольку $A_{1,0}=1$,

$$A_{n,0} = 2n! / [2^n \cdot (n!)^2]. \quad (41)$$

Отсюда находится общее выражение для коэффициента

$$A_{n,s} = (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s} n! (n-s)!} \quad (42)$$

и окончательно тригонометрическое выражение для поверхностной гармоники

$$Y_n = S \left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s} n! (n-s)!} \Sigma(\mu^{n-2s} \lambda^s) \right]. \quad (43)$$

Это выражение определяет значение поверхностной гармоники в любой точке P сферической поверхности через косинусы расстояний P от различных полюсов и расстояний полюсов друг от друга.

Легко видеть, что если какой-либо из полюсов переносится в противоположную точку сферической поверхности, то значение гармоники меняется на противоположное по знаку. Действительно, каждый косинус, содержащий индекс этого полюса, поменяет знак, а в каждое слагаемое гармоники индекс этого полюса входит один и только один раз.

Если два или любое четное число полюсов переносится в соответственно противоположные им точки, то значение гармоники, очевидно, не меняется.

Профессор Сильвестер показал (*Phil. Mag.*, Oct. 1876), что при заданной гармонике задача определения n прямых, совпадающих с ее осями, имеет одно и только одно решение, хотя, как мы видели, положительные направления этих осей можно парами менять на противоположные.

134. Теперь мы можем определить значение поверхностного интеграла $\iint Y_m Y_n ds$ в случае, когда порядок обеих поверхностных гармоник одинаков, хотя направления их осей могут быть в общем случае разными.

Для этого нужно построить пространственную гармонику $Y_m r^m$ и продифференцировать ее по каждой из n осей Y_n .

Любой член $Y_m r^m$ типа $r^m \mu^{m-2s} \lambda^s$ может быть представлен в виде $r^{2s} \rho_m^{m-2s} \lambda_{nm}^s$. Дифференцируя его n раз последовательно по n осям Y_n , мы увидим, что при дифференцировании r^{2s} по s из этих осей у нас появятся s раз величины ρ_n и численный множитель $2s(2s-2)\dots 2$, т. е. $2^s s!$. Продолжение дифференцирования на следующие s осей превращает эти ρ_n в λ_{nn} , но не вводит никаких дополнительных численных множителей, а при дифференцировании по остальным $n-2s$ осям множители ρ_m переходят в λ_{mn} , так что в результате получается $2^s s! \lambda_{nn}^s \lambda_{mm}^s \lambda_{mn}^{n-2s}$.

Таким образом, согласно (31),

$$\iint Y_m Y_n ds = \frac{4\pi}{n! (2n+1)} a^{n-m+2} \frac{d^n (Y_m r^m)}{dh_1 \dots dh_n}, \quad (44)$$

а по (43)

$$Y_m r^m = S \left[(-1)^s \frac{(2m-2s)!}{2^{m-s} m! (m-s)!} \Sigma (r^{2s} \rho_m^{m-2s} \lambda_{mm}^s) \right]. \quad (45)$$

Следовательно, произведя дифференцирование и вспомнив, что $m=n$, получим

$$\iint Y_m Y_n ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1) (n!)^2} S \left[(-1)^s \frac{(2n-2s)! s!}{2^{n-2s} (n-s)!} \Sigma (\lambda_{mm}^s \lambda_{nn}^s \lambda_{mn}^{n-2s}) \right]. \quad (46)$$

135 а. Выражение (46) для поверхностного интеграла от произведения двух поверхностных гармоник принимает весьма замечательный вид в случае, когда все оси одной из гармоник, скажем Y_m , совпадают друг с другом, так что Y_m становится так называемой «зональной гармоникой порядка m », определяемой нами ниже и обозначаемой символом P_m .

В этом случае все косинусы вида λ_{nm} можно записать как μ_n , где μ_n — косинусы угла между общей осью P_m и одной из осей Y_n . Косинусы типа λ_{mm} все равны единице, так что вместо $\Sigma \lambda_{mm}^s$ нужно подставить число соче-

таний без повторения индексов по s символов из n , характеризующихся двумя индексами. Отсюда следует, что

$$\sum \lambda_{mm}^s = n! / [2^s s! (n - 2s)!]. \quad (47)$$

Число перестановок оставшихся $n - 2s$ индексов осей P_m равно $(n - 2s)!$ Следовательно,

$$\sum (\lambda_{mn}^{n-2s}) = (n - 2s)! \mu^{n-2s}. \quad (48)$$

Таким образом, в случае, когда все оси Y_m совпадают друг с другом, уравнение (46) принимает вид

$$\iint Y_n P_m ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)n!} S \left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}(n-s)!} \sum (\mu^{n-2s} \lambda^s) \right] \quad (49)$$

$$= \frac{4\pi a^2}{2n+1} Y_{n(m)}, \text{ согласно (43),} \quad (50)$$

где $Y_{n(m)}$ — значение Y_n в полюсе P_m .

К этому результату можно прийти и следующим более коротким путем:

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось z совпала с осью m и пусть $Y_n r^n$ представлено как однородная функция x, y, z степени n .

В полюсе P_m $x = y = 0$, а $z = r$, так что если Cz^n — слагаемое, не содержащее x и y , то C есть значение Y_n в полюсе P_m .

Уравнение (31) принимает в этом случае вид

$$\iint Y_n P_m ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (Y_n r^n).$$

Поскольку m равно n , то дифференцирование Cz^n дает $n!C$, а остальные члены дают нуль. Следовательно,

$$\iint Y_n P_m ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} C,$$

где C — значение Y_n в полюсе P_m .

135 б. Это очень важный результат теории сферических гармоник, так как он показывает, как найти ряд сферических гармоник, выражающий значение величины, которая принимает произвольно заданные конечные и непрерывные значения во всех точках сферической поверхности.

Действительно, пусть F — значение этой величины в точке Q сферы, а ds — элемент ее поверхности. Умножим $F ds$ на P_n , зональную гармонику с полюсом в точке P на той же сферической поверхности, и проинтегрируем по поверхности. Полученный результат, поскольку он зависит от положения точки P , можно рассматривать как функцию положения точки P .

Но так как значение в точке P зональной гармоники с полюсом Q равно значению в Q зональной гармоники того же порядка с полюсом в P , то можно считать, что для каждого элемента ds поверхности построена зональная гармоника с полюсом в Q и с коэффициентом $F ds$.

Таким образом, мы получим систему налагающихся друг на друга зональных гармоник с полюсами в каждой точке сферы, в которой F имеет ненулевое зна-

чение. Поскольку все они отличаются лишь множителем от поверхностной гармоники порядка n , их сумма также отличается лишь множителем от поверхностной гармоники (не обязательно зональной) порядка n .

Таким образом, поверхностный интеграл $\iint FP_n ds$, рассматриваемый как функция точки P , отличается лишь множителем от поверхностной гармоники Y_n , а значит, и $\frac{2n+1}{4\pi a^2} \iint FP_n ds$ является именно той поверхностной гармоникой n -го порядка, которая входит в представление F рядом по гармоникам, если только F может быть так представлено.

Действительно, если F может быть представлено в виде $F = A_0 Y_0 + A_1 Y_1 + \dots + A_n Y_n + \dots$, то, умножая на $P_n ds$ и беря поверхностный интеграл по всей сфере, мы получим

$$\iint FP_n ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} A_n Y_n,$$

поскольку все члены, содержащие произведение гармоник различного порядка, обратятся в нуль.

Таким образом, единственное возможное разложение по сферическим гармоникам имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi a^2} \left[\iint FP_0 ds + \dots + (2n+1) \iint FP_n ds + \dots \right]. \quad (51)$$

Сопряженные гармоники

136. Мы видели, что поверхностный интеграл от произведения двух гармоник различного порядка всегда равен нулю. Но даже и для двух гармоник одного и того же порядка поверхностный интеграл от их произведения может равняться нулю. В этом случае говорят, что гармоники сопряжены друг другу. Условие взаимной сопряженности двух гармоник выражается в приравнении нулю правой части уравнения (46).

Если одна из гармоник зональная, то условие сопряженности сводится к тому, что другая гармоника обращается в нуль в полюсе зональной гармоники.

Если начать с определенной гармоники n -го порядка, то условие сопряженности ей другой гармоники накладывает на $2n$ ее переменных одно условие.

Чтобы третья гармоника была сопряжена обоим предыдущим, нужно на ее $2n$ переменных наложить два условия. Продолжая таким образом построение гармоник, сопряженных всем предыдущим, мы будем иметь число условий, равное числу ранее имевшихся гармоник, так что на $(2n+1)$ -ю гармонику будет налагаться $2n$ условий для $2n$ ее переменных, т. е. эта гармоника будет полностью определена.

Любая функция $A Y_n$, кратная поверхностной гармонике n -го порядка, может быть выражена суммой кратных любой совокупности $2n+1$ сопряженных гармоник того же порядка, так как коэффициенты $2n+1$ сопряженных гармоник дают в наше распоряжение как раз столько свободных величин, сколько содержится параметров в $A Y_n$ ($2n$ переменных в Y_n и коэффициент A).

Чтобы найти коэффициент перед какой-либо сопряженной гармоникой, скажем перед Y_n^σ , предположим, что $A Y_n = A_0 Y_n^0 + \dots + A_\sigma Y_n^\sigma + \dots$. Умножим это равенство на $Y_n^\sigma ds$ и найдем поверхностный интеграл по сфере. Все

слагаемые, содержащие произведение сопряженных друг другу гармоник, обратятся в нуль и останется уравнение

$$A \iint Y_n Y_n^\sigma ds = A_\sigma \iint (Y_n^\sigma)^2 ds, \quad (2)$$

из которого и определяется A_σ .

Следовательно, при заданной системе $2n+1$ сопряженных гармоник всякая другая гармоника n -го порядка может быть выражена через эти гармоники, причем-единственным образом. Отсюда следует, что никакая другая гармоника не может быть сопряжена всем им.

137. Мы видели, что если полная система взаимно сопряженных гармоник n -го порядка задана, то любая другая гармоника того же порядка выражается через них. В такой системе из $2n+1$ гармоник имеется $2n(2n+1)$ переменных, связанных $n(2n+1)$ уравнениями, так что $n(2n+1)$ переменных можно считать произвольными.

Мы могли бы, следуя Томсону и Тэту, выбрать в качестве системы сопряженных гармоник такую, в которой n полюсов каждой гармоники распределены так, что j полюсов совпадают с полюсом оси x , k — с полюсом оси y и $l (=n-i-k)$ — с полюсом оси z . Если задать $n+1$ распределений, для которых $l=0$, и n распределений, для которых $l=1$, то все остальные можно через них выразить.

Фактически всеми математиками (включая Томсона и Тэта) принята система, в которой $n-\sigma$ полюсов совпадают с точкой, которую мы можем назвать Положительным Полюсом сферы, а остальные σ полюсов помещены через равные расстояния по экватору при нечетном их числе или через равные расстояния по половине экватора при четном числе.

В этом случае все $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-\sigma}$ равны $\cos \theta$; мы обозначим $\cos \theta$ через μ . Если вместо $\sin \theta$ ввести ν , то $\mu_{n-\sigma+1}, \dots, \mu_n$ примут вид $\nu \cos(\varphi - \beta)$, где β — азимут одного из полюсов на экваторе.

Величины λ_{pq} равны единице, если p и q меньше $n-\sigma$, равны нулю, если один из индексов больше $n-\sigma$, а другой меньше, и равны $\cos s\pi/\sigma$, если оба индекса больше $n-\sigma$. Здесь s — целое число, меньшее σ .

138. Если все полюса совпадают с полюсом сферы, т. е. $\sigma=0$, то соответствующая гармоника называется Зональной гармоникой. Поскольку зональная гармоника имеет важное значение, мы выделим ей специальное обозначение P_n .

Значение зональной гармоники можно найти либо из тригонометрического представления (43), либо непосредственно дифференцированием:

$$P_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right] = \\ &= \sum \left[(-1)^p \frac{(2n-2p)!}{2^n p! (n-p)! (n-2p)!} \mu^{n-2p} \right], \quad (54) \end{aligned}$$

где p принимает все целые значения от нуля до наибольшего целого, не превышающего $n/2$.

Иногда удобно представить P_n как однородную функцию от $\cos \theta$ и $\sin \theta$, или, в наших обозначениях, от μ и ν :

$$P_n = \mu^n - \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2} \mu^{n-2} \nu^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \mu^{n-4} \nu^4 - \dots = \\ = \sum \left[(-1)^p \frac{n!}{2^{2p} (p!)^2 (n-2p)!} \mu^{n-2p} \nu^{2p} \right]. \quad (55)$$

В математических исследованиях по этому вопросу доказывается, что $P_n(\mu)$ является коэффициентом при h^n в разложении $(1-2\mu h + h^2)^{-1/2}$ и что $P_n(\mu)$ равно также $\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n$.

Поверхностный интеграл от квадрата зональной гармоники равен

$$\iint (P_n)^2 ds = 2\pi a^2 \int_{-1}^{+1} (P_n(\mu))^2 d\mu = \frac{4\pi a^2}{2n+1}, \quad (56)$$

так что

$$\int_{-1}^{+1} (P_n(\mu))^2 d\mu = \frac{2}{2n+1}. \quad (57)$$

139. Если зональная гармоника рассматривается просто как функция от μ без специальной ссылки на сферическую поверхность, она может быть названа Коэффициентом Лежандра.

Если же рассматривать зональную гармонику на сферической поверхности, точки которой определяются координатами θ и φ , и принять, что полюс зональной гармоники находится в точке (θ', φ') , то значение зональной гармоники в точке (θ, φ) будет функцией четырех углов $\theta', \varphi', \theta, \varphi$, но поскольку оно зависит лишь от μ , т. е. от косинуса дуги, соединяющей точки (θ, φ) и (θ', φ') , оно не меняется при замене θ на θ' и φ на φ' и наоборот. Выраженная так зональная гармоника называется Коэффициентом Лапласа. Томсон и Тэт называют ее Биаксиальной Гармоникой.

Любая однородная функция от x, y, z , удовлетворяющая уравнению Лапласа, может быть названа Пространственной гармоникой, а значение пространственной гармоники на поверхности сферы с центром в начале координат может быть названо Поверхностной гармоникой. В этой книге мы определили поверхностную гармонику через ее n полюсов, так что в ней только $2n$ переменных. Пространственная гармоника в более широком смысле, имеющая $2n+1$ переменных, отличается от пространственной гармоники в узком смысле слова умножением на произвольную постоянную. Пространственная гармоника в широком смысле слова, выраженная через θ и φ , называется Функцией Лапласа.

140 а. Чтобы получить другие гармоники симметричной системы, нужно продифференцировать по σ осям, лежащим в плоскости xu и образующим друг с другом угол π/σ . Это удобнее всего сделать с помощью системы комплексных координат, приведенной в *Natural Philosophy* Томсона и Тэта (т. I, с. 148 первого издания, с. 185 — второго).

Если положить $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$, где i означает $\sqrt{-1}$, то операция дифференцирования по осям σ , одна из которых образует угол α с осью x , может быть записана для нечетных σ следующим образом:

$$\left(e^{i\alpha} \frac{d}{d\xi} + e^{-i\alpha} \frac{d}{d\eta} \right) \left(e^{i\left(\alpha + \frac{2\pi}{\sigma}\right)} \frac{d}{d\xi} + e^{-i\left(\alpha + \frac{2\pi}{\sigma}\right)} \frac{d}{d\eta} \right) \left(e^{i\left(\alpha + \frac{4\pi}{\sigma}\right)} \frac{d}{d\xi} + e^{-i\left(\alpha + \frac{4\pi}{\sigma}\right)} \frac{d}{d\eta} \right) \dots$$

Это эквивалентно

$$\cos \sigma \alpha \left\{ \frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} + \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} \right\} + \sin \sigma \alpha \cdot i \left\{ \frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} - \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} \right\}. \quad (58)$$

Для четных σ можно доказать, что операция дифференцирования может быть записана в виде

$$(-1)^{\frac{\sigma+2}{2}} \left\{ \cos \sigma \alpha \cdot i \left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} - \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} \right) - \sin \sigma \alpha \left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} + \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} \right) \right\}. \quad (59)$$

Таким образом, если положить

$$i \left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} - \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} \right) = D^{(\sigma)}_S, \quad \frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} + \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} = D^{(\sigma)}_C,$$

то операции дифференцирования по осям σ можно выразить через $D^{(\sigma)}_S$, $D^{(\sigma)}_C$. В действительности это, конечно, вещественные операции, которые могут быть выражены и без комплексных обозначений. Так,

$$2^{\sigma-1} D^{(\sigma)}_S = \sigma \frac{d^{\sigma-1}}{dx^{\sigma-1}} \frac{d}{dy} - \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^{\sigma-3}}{dx^{\sigma-3}} \frac{d^3}{dy^3} + \dots, \quad (60)$$

$$2^{\sigma-1} D^{(\sigma)}_C = \frac{d^\sigma}{dx^\sigma} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^{\sigma-2}}{dx^{\sigma-2}} \frac{d^2}{dy^2} + \dots \quad (61)$$

Мы будем также писать

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} D^{(\sigma)}_S = D^{(\sigma)}_{S_n} \quad \text{и} \quad \frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} D^{(\sigma)}_C = D^{(\sigma)}_{C_n}, \quad (62)$$

так что $D^{(\sigma)}_{S_n}$ и $D^{(\sigma)}_{C_n}$ обозначают операции дифференцирования по n осям, из которых $n - \sigma$ совпадают с осью z , а остальные σ расположены под равными углами друг к другу в плоскости xy , причем обозначение $D^{(\sigma)}_{S_n}$ применяется, если ось y совпадает с одной из этих осей, а $D^{(\sigma)}_{C_n}$ — когда ось y делит пополам угол между осями.

Обе тессеральные поверхностные гармоники порядка n типа σ можно теперь представить в виде

$$Y^{(\sigma)}_{S_n} = (-1)^n \frac{1}{n!} r^{n+1} D^{(\sigma)}_{S_n} \frac{1}{r}, \quad (63)$$

$$Y^{(\sigma)}_{C_n} = (-1)^n \frac{1}{n!} r^{n+1} D^{(\sigma)}_{C_n} \frac{1}{r}. \quad (64)$$

Положив $\mu = \cos \theta$, $\nu = \sin \theta$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, $r^2 = \xi\eta + z^2$, так что $z = \mu r$, $\rho = \nu r$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получим

$$D^{(\sigma)}_S \frac{1}{r} = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma} \sigma!} i (\eta^\sigma - \xi^\sigma) \frac{1}{r^{2\sigma+1}}, \quad (65)$$

$$D^{(\sigma)}_C \frac{1}{r} = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma} \sigma!} (\xi^\sigma + \eta^\sigma) \frac{1}{r^{2\sigma+1}}, \quad (66)$$

где можно положить

$$\frac{i}{2} (\eta^\sigma - \xi^\sigma) = \rho^\sigma \sin \sigma\varphi, \quad \frac{1}{2} (\xi^\sigma + \eta^\sigma) = \rho^\sigma \cos \sigma\varphi. \quad (67)$$

Остается лишь продифференцировать по z , что мы и сделаем, выразив результат либо через r и z , либо как однородную функцию от z и ρ , деленную на некоторую степень r :

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} \frac{1}{r^{2\sigma+1}} = (-1)^{n-\sigma} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{2^\sigma \sigma!}{(2\sigma)!} \frac{1}{r^{2n+1}} \left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)} z^{n-\sigma-2} r^2 + \dots \right] \quad (68)$$

или

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} \frac{1}{r^{2\sigma+1}} = (-1)^{n-\sigma} \frac{(n+\sigma)!}{(2\sigma)!} \frac{1}{r^{2n+1}} \left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)} z^{n-\sigma-2} \rho^2 + \dots \right]. \quad (69)$$

Если ввести

$$\Theta_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma \left[\mu^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-\sigma-2} + \right. \\ \left. + \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-\sigma-4} - \dots \right] \quad (70)$$

и

$$\bar{\Theta}_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma \left[\mu^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)} \mu^{n-\sigma-2} \nu^2 + \right. \\ \left. + \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{4 \cdot 8 \cdot (\sigma+1)(\sigma+2)} \mu^{n-\sigma-4} \nu^4 - \dots \right], \quad (71)$$

то

$$\Theta_n^{(\sigma)} = \frac{2^{n-\sigma} n! (n+\sigma)!}{(2n)! \sigma!} \bar{\Theta}_n^{(\sigma)}, \quad (72)$$

так что обе эти функции отличаются лишь постоянным множителем.

Теперь мы можем выразить обе тессеральные гармоники порядка n типа σ через Θ или $\bar{\Theta}$:

$$Y_n^{(\sigma)}{}_S = \frac{(2n)!}{2^{n+\sigma} n! n!} \Theta_n^{(\sigma)} 2 \sin \sigma\varphi = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma} n! \sigma!} \bar{\Theta}_n^{(\sigma)} 2 \sin \sigma\varphi, \quad (73)$$

$$Y_n^{(\sigma)}{}_C = \frac{(2n)!}{2^{n+\sigma} n! n!} \Theta_n^{(\sigma)} 2 \cos \sigma\varphi = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma} n! \sigma!} \bar{\Theta}_n^{(\sigma)} 2 \cos \sigma\varphi. \quad (74)$$

Следует учесть, что если $\sigma=0$, то $\sin \sigma\varphi=0$, а $\cos \sigma\varphi=1$.

Для каждого значения σ от 1 до n включительно имеются две гармоники, но при $\sigma=0$ $Y_n^{(0)}{}_S=0$, а $Y_n^{(0)}{}_C=P_n$ — зональная гармоника. Таким образом, полное число гармоник порядка n равно $2n+1$, как и должно быть.

140 б. Численное значение Y , принятое в этой книге, получается дифференцированием r^{-1} по n осям и делением на $n!$. Оно представляет собой произведение четырех множителей—синуса или косинуса от $\sigma\varphi$, ν^σ , функции от μ (или от μ и ν) и численного коэффициента.

Произведение второго и третьего множителя, т. е. зависящая от θ часть, выражается через три различные функции, отличающиеся, однако, лишь численными множителями. Если ее представить как произведение ν^σ на ряд по убывающим степеням μ , первый член которого равен $\mu^{n-\sigma}$, то получится функция, которую, следуя Томсону и Тэту, мы обозначаем через Θ .

Функция, которую Хайне (Heine) (*Handbuch der Kugelfunctionen*, § 47) обозначает $P_\sigma^{(n)}$ и называет *zugeordnete Function erster Art*, или, как переводит Тодхантер, «присоединенная функция первого рода» (associated function of the first kind) связана с $\Theta_n^{(\sigma)}$ соотношением

$$\Theta_n^{(\sigma)} = (-1)^{\sigma/2} P_\sigma^{(n)}. \quad (75)$$

Ряд по убывающим степеням μ , начинающийся с $\mu^{n-\sigma}$, обозначен Хайне символом $\mathfrak{P}_\sigma^{(n)}$, а Тодхантером—символом $\tilde{\omega}(\sigma, n)$.

Этот ряд можно представить в двух других видах:

$$\mathfrak{P}_\sigma^{(n)} = \tilde{\omega}(\sigma, n) = \frac{(n-\sigma)!}{(2n)!} \frac{d^{n+\sigma}}{d\mu^{n+\sigma}} (\mu^2 - 1)^n = \frac{2^n (n-\sigma)! n!}{(2n)!} \frac{d^\sigma}{d\mu^\sigma} P_n. \quad (76)$$

Последнее представление, в котором этот ряд получается дифференцированием зональной гармоник по μ , по-видимому, подсказало мысль о введении обозначения $T_n^{(\sigma)}$, принятого Феррерсом, который определяет его так:

$$T_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma \frac{d^\sigma}{d\mu^\sigma} P_n = \frac{(2n)!}{2^n (n-\sigma)! n!} \Theta_n^{(\sigma)}. \quad (77)$$

Если эту же величину представить как однородную функцию от μ и ν и поделить на коэффициент перед $\mu^{n-\sigma}\nu^\sigma$, получится функция, обозначенная нами через $\bar{\Theta}_n^{(\sigma)}$.

140 в. Гармоники симметричной системы классифицируются Томсоном и Тэтом в зависимости от формы кривых на сфере, на которых они обращаются в нуль.

Значение зональной гармоник в произвольной точке сферы является функцией косинуса расстояния от полюса. Приравнявая значение функции нулю, получим уравнение n -й степени, все корни которого лежат в промежутке от -1 до $+1$, и, следовательно, соответствуют n широтным параллелям на сфере.

Ограниченные этими параллелями зоны поочередно положительны и отрицательны, причем круг, окружающий полюс, всегда положителен.

Таким образом, зональные гармоники пригодны для выражения функции, обращающейся в нуль на определенной параллели на сфере или на какой-либо конической поверхности в пространстве.

Другие гармоники симметричной системы встречаются парами, причем одна функция в паре содержит косинус, а другая — синус от $\sigma\varphi$. Поэтому они обращаются в нуль на σ меридианных кругах на сфере, а также на $n-\sigma$ параллелях, так что сферическая поверхность разделена на $2\sigma(n-\sigma-1)$ четырехугольников или «тессер», считая в том числе 4σ треугольников у полюсов. Поэтому они полез-

ны при исследованиях, касающихся четырехугольников (тессер) на сфере, ограниченных меридианами и параллелями.

Все эти гармоники называются Тессеральными, за исключением последней пары, обращающейся в нуль лишь на n меридианных кругах и делящих сферическую поверхность на $2n$ секторов. Эти две гармоники называются Секторными.

141. Найдем теперь значение поверхностного интеграла от квадрата произвольной тессеральной гармоники по сфере. Для этого можно применить метод п. 134. Перейдем от поверхностной гармоники $Y_n^{(\sigma)}$ к пространственной гармонике положительной степени, умножив ее на r^n , продифференцируем эту пространственную гармонику по n осям самой этой гармоники, а затем положим $x=y=z=0$ и умножим результат на $4\pi a^2/[n!(2n+1)]$.

Эта последовательность операций запишется в наших обозначениях так:

$$\iint (Y_n^{(\sigma)})^2 ds = \frac{4\pi a^2}{n!(2n+1)} D_n^{(\sigma)}(r^n Y_n^{(\sigma)}). \quad (78)$$

Записав пространственную гармонику в виде однородной функции от z , ξ и η :

$$r^n Y_n^{(\sigma)} = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma} n! \sigma!} i (\eta^\sigma - \xi^\sigma) \left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)} z^{n-\sigma-2} \xi \eta + \dots \right], \quad (79)$$

мы видим, что после выполнения дифференцирований по z все слагаемые в сумме, кроме первого, исчезают и появляется множитель $(n-\sigma)!$.

Продолжая дифференцирование по ξ и η , мы избавимся и от этих переменных, введя при этом множитель $-2i\sigma!$, так что окончательный результат имеет вид

$$\iint (Y_n^{(\sigma)})^2 ds = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n! n!}. \quad (80)$$

Правую часть этого уравнения мы сокращенно обозначим через $[n, \sigma]$.

Это соотношение справедливо для всех значений σ от 1 до n включительно, но при $\sigma=0$ нет гармоники с $\sin \sigma\varphi$.

Таким же способом можно показать, что

$$\iint (Y_n^{(\sigma)} c)^2 ds = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n! n!} \quad (81)$$

для всех значений σ от 1 до n включительно.

При $\sigma=0$ гармоника становится зональной гармоникой и

$$\iint (Y_n^{(0)} c)^2 ds = \iint (P_n)^2 ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1}, \quad (82)$$

что можно получить прямо из уравнения (50), положив $Y_n = P_n$ и учтя, что значение зональной гармоники в ее полюсе равно единице.

142 а. Теперь мы можем применить метод п. 136 для определения коэффициента перед любой тессеральной поверхностной гармоникой в разложении произвольной функции от положения точки на сфере. Действительно, пусть F — произвольная функция и A_n^σ — коэффициент перед $Y_n^{(\sigma)}$ в разложении этой функ-

ции по поверхностным гармоникам симметричной системы. Тогда

$$\iint F Y_n^{(\sigma)} ds = A_n \iint (Y_n^{(\sigma)})^2 ds = A_n^{(\sigma)} [n, \sigma], \quad (83)$$

где $[n, \sigma]$ — сокращенное обозначение значения поверхностного интеграла, даваемого равенством (80).

142 б. Пусть Ψ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа и не имеющая особых точек в пределах радиуса a от точки O , которую мы примем за начало координат. Такую функцию всегда можно разложить в ряд по пространственным гармоникам положительной степени с началом координат в точке O .

Одним из способов такого разложения является построение сферы с центром в точке O радиусом, меньшим a , и разложение значений потенциала на поверхности сферы в ряд по поверхностным гармоникам. Умножая каждую гармонику на r/a в степени, равной порядку поверхностной гармоники, мы получим пространственные гармоники, суммой которых и является заданная функция.

Но более удобным способом, не требующим интегрирования, является дифференцирование по осям гармоник симметричной системы.

Предположим, например, что в разложении Ψ есть член вида $A_n^{(\sigma)} c_n Y_n^{(\sigma)} r^n$.

Если к функции Ψ и ее разложению применить операцию

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} \left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} + \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} \right)$$

и положить после дифференцирования x, y, z равными нулю, то в разложении исчезнут все члены, кроме члена, содержащего $A_n^{(\sigma)} c_n$.

Перейдя в операторе, применяем к функции Ψ , к дифференцированию по действительным осям, мы получим равенство

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}} \left[\frac{d^\sigma}{dx^\sigma} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^{\sigma-2}}{dx^{\sigma-2}} \frac{d^2}{dy^2} + \dots \right] \Psi = A_n^{(\sigma)} c_n \frac{(n+\sigma)! (n-\sigma)!}{2^\sigma n!}, \quad (84)$$

позволяющее определить коэффициент перед любой гармоникой ряда через производные от Ψ по x, y, z в начале координат.

143. Из уравнения (50) видно, что любая гармоника всегда может быть представлена как сумма системы зональных гармоник того же порядка, полюса которых распределены по поверхности сферы. Упрощение этой системы не представляется, однако, легким. Но с целью сделать наглядными некоторые свойства сферических гармоник, я рассчитал зональные гармоники третьего и четвертого порядка и описанным выше методом сложения функций построил эквипотенциальные линии на сфере для гармоник, являющихся суммой двух зональных гармоник (см. рис. VI—IX в конце этого тома).

На рис. VI показана разность двух зональных гармоник третьего порядка, оси которых наклонены под углом 120° в плоскости рисунка. Эта разность представляет собой гармонику второго типа с $\sigma=1$ и осью, перпендикулярной рисунку.

На рис. VII также показана гармоника третьего порядка, но оси зональных гармоник, сумма которых построена, наклонены под углом 90° , и результат не относится к какому-либо типу симметричной системы. Одна из узловых линий — большой круг, но две другие, пересекаемые ею, не являются кругами.

На рис. VIII показана разность двух зональных гармоник четвертого порядка, оси которых перпендикулярны. В результате получается тессеральная гармоника с $n=4$, $\sigma=2$.

На рис. IX показана сумма этих же гармоник. Результат дает представление об одном из типов гармоник четвертого порядка общего вида. Для этого типа узловая линия состоит из шести непересекающихся овалов. Внутри этих овалов гармоника положительна, а в шестисвязной области сферической поверхности, лежащей вне овалов, гармоника отрицательна.

На всех этих графиках показаны ортогональные проекции сферической поверхности.

Я построил также на рис. V плоское сечение через ось сферы, чтобы показать эквипотенциальные поверхности и силовые линии, создаваемые сферической поверхностью, на которой распределение поверхностного заряда определяется сферической гармоникой первого порядка.

Внутри сферы эквипотенциальные поверхности являются эквидистантными плоскостями, а силовые линии — прямые, параллельные оси, причем их расстояния от оси пропорциональны квадратным корням из натуральных чисел. Линии вне сферы могут служить примером того, как выглядели бы характеристики магнитного поля Земли, если бы земной магнетизм был распределен наиболее простым образом.

144 а. Теперь мы в состоянии найти распределение электричества на сферическом проводнике под действием электрических сил с заданным потенциалом.

Указанными выше методами разложим заданный потенциал Ψ в ряд по пространственным гармоникам положительной степени с началом координат в центре сферы.

Пусть $A_n r^n Y_n$ — одна из этих гармоник. Поскольку на проводящей сфере потенциал постоянен, то должен существовать член $-A_n r^n Y_n$, обусловленный распределением заряда по поверхности сферы, а значит, в разложение $4\pi\sigma$ должно входить слагаемое $4\pi\sigma_n = (2n+1)a^{n-1}A_n Y_n$.

Таким образом, мы можем определить коэффициенты всех гармоник в выражении для поверхностной плотности, за исключением нулевой. Коэффициент перед гармоникой нулевого порядка зависит от заряда e сферы и дается соотношением $4\pi\sigma_0 = a^{-2}e$.

Потенциал сферы равен $V = \Psi_0 + (e/a)$.

144 б. Пусть теперь сфера помещена вблизи заземленных проводников и известна функция Грина G от координат любых двух точек x, y, z и x', y', z' в области, куда помещена сфера.

Если поверхностная плотность на сфере представлена как ряд по сферическим гармоникам, то проявления электричества вне сферы в точности такие же, какие были бы при помещении ряда воображаемых особых точек в центре сферы, первая из которых представляет собой простой точечный заряд, равный заряду сферы, а остальные — кратные точки различного порядка, соответствующие гармоникам плотности заряда на поверхности сферы.

Обозначим функцию Грина через $G_{pp'}$, где индекс p указывает точку с координатами x, y, z , а индекс p' — точку с координатами x', y', z' .

Если заряд A_0 помещен в точку p' , то, считая x', y', z' постоянными, мы можем рассматривать $G_{pp'}$ как функцию от x, y, z . Потенциал, создаваемый электричеством, наведенным на окружающих тела зарядом A_0 , равен

$$\Psi = A_0 G_{pp'}. \quad (1)$$

Если бы заряд A_0 находился не в точке p' , а был равномерно распределен по сфере радиуса a с центром в точке p' , то значение Ψ в точках вне сферы осталось бы таким же.

При неравномерном распределении заряда по сфере представим поверхностную плотность заряда в виде ряда по сферическим гармоникам

$$4\pi a^2 \sigma = A_0 + 3A_1 Y_1 + \dots + (2n-1)A_n Y_n + \dots, \quad (2)$$

что всегда можно сделать.

Потенциал, создаваемый каждым членом этого разложения, например членом

$$4\pi a^2 \sigma_n = (2n+1)A_n Y_n, \quad (3)$$

равен $\frac{r^n}{a^{n+1}} A_n Y_n$ в точках внутри сферы и $\frac{a^n}{r^{n+1}} A_n Y_n$ в точках вне сферы.

Последнее выражение, согласно (13), (14) из п. 129 в и 129 г, равно

$$(-1)^n A_n \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dh_1 \dots dh_n} \frac{1}{r},$$

т. е. потенциал вне сферы, создаваемый распределением заряда на поверхности сферы, такой же, как от определенной кратной точки с осями h_1, \dots, h_n и моментом $A_n a^n$. Следовательно, распределение электричества на окружающих проводниках и потенциал, создаваемый этим распределением, будут такими же, как и для такой кратной точки.

Таким образом, потенциал в точке p с координатами x, y, z , обусловленный наведенным электричеством на окружающих тела, равен

$$\Psi_n = (-1)^n A_n \frac{d'^n}{d'h_1 d'h_2 \dots d'h_n} G, \quad (4)$$

где штрихи при d показывают, что дифференцирование производится по x', y', z' . После дифференцирования эти координаты приравниваются к координатам центра сферы.

Удобно считать Y_n разбитым на $2n+1$ составляющих симметричной системы. Пусть $A_n Y_n^{(\sigma)}$ — одна из этих составляющих. Тогда

$$\frac{d'^n}{d'h_1 \dots d'h_n} = D_n^{(\sigma)}. \quad (5)$$

Здесь не нужно ставить индекс s или c , указывающий, какая из функций, $\sin \sigma\phi$ или $\cos \sigma\phi$, входит в гармонику.

Мы можем теперь написать полное выражение для потенциала Ψ , возникающего из-за наведенного заряда:

$$\Psi = A_0 G + \sum \sum \left[(-1)^n A_n^{(\sigma)} \frac{a^n}{n!} D_n^{(\sigma)} G \right]. \quad (6)$$

Но на сфере потенциал постоянен, т. е.

$$\Psi + \frac{1}{a} A_0 + \sum \sum \left[\frac{r^{n_1}}{a^{n_1+1}} A_{n_1}^{(\sigma_1)} Y_{n_1}^{(\sigma_1)} \right] = \text{const.} \quad (7)$$

Применим теперь к этому выражению операцию $D_{n_1}^{(\sigma_1)}$, где дифференцирование производится по x, y, z , а значения n_1 и σ_1 независимы от n и σ . В (7) обращаются в нуль все члены, кроме члена с $V_{n_1}^{(\sigma_1)}$, и мы получаем

$$-2 \frac{(n_1 + \sigma_1)! (n_1 - \sigma_1)!}{2^{2\sigma_1} n_1!} \frac{1}{a^{n_1+1}} A_{n_1}^{(\sigma_1)} = A_0 D_{n_1}^{(\sigma_1)} G + \sum \sum \left[(-1)^n A_n^{(\sigma)} \frac{a^n}{n!} D_{n_1}^{(\sigma_1)} D_n^{(\sigma)} G \right]. \quad (8)$$

Таким образом, мы получили систему уравнений, в левой части которых содержится подлежащий определению коэффициент. Первое слагаемое в правой части содержит A_0 , заряд сферы, его можно считать главным слагаемым.

Если пока остальными слагаемыми пренебречь, то получится в первом приближении

$$A_{n_1}^{(\sigma_1)} = -\frac{1}{2} \frac{2^{2\sigma_1} n_1!}{(n_1 + \sigma_1)! (n_1 - \sigma_1)!} A_0 a^{n_1+1} D_{n_1}^{(\sigma_1)} G. \quad (9)$$

Если наименьшее расстояние от центра сферы до ближайшего из окружающих проводников обозначить через b , то

$$a^{n_1+1} D_{n_1}^{(\sigma_1)} G < n_1! \left(\frac{a}{b} \right)^{n_1+1}.$$

Следовательно, при b , много большем радиуса сферы a , коэффициенты остальных сферических гармоник много меньше A_0 . Отношение последующих членов в правой части уравнения (8) к первому будет порядка $(a/b)^{2n+n_1+1}$. Поэтому в первом приближении ими можно пренебречь. Во втором приближении можно в эти члены подставить значения коэффициентов из первого приближения и так далее до тех пор, пока не будет достигнута нужная степень приближения.

*Распределение электричества
на почти сферическом проводнике*

145 а. Пусть уравнение поверхности проводника имеет вид

$$r = a(1 + F), \quad (1)$$

где F — функция от направления r , т. е. от θ и ϕ квадратом которой можно пренебречь в данном исследовании.

Представим F в виде ряда по поверхностным гармоникам

$$F = f_0 + f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \dots + f_n Y_n. \quad (2)$$

Из всех этих членов первый член определяется отливом среднего радиуса от a . Если предположить, что a равно среднему радиусу, т. е. приблизительно равно радиусу сферы того же объема, что и заданный проводник, то коэффициент f_0 обратится в нуль.

Второе слагаемое, с коэффициентом f_1 , зависит от расстояния между центром масс проводника, предполагаемого однородным по плотности, и началом коорди-

нат. Если принять центр масс за начало координат, то коэффициент f_1 тоже обратится в нуль.

Предположим сначала, что на проводник с зарядом A_0 не действует внешняя электрическая сила. Тогда потенциал вне проводника должен иметь вид

$$V = A_0 \frac{1}{r} + A_1 Y'_1 \frac{1}{r^2} + \dots + A_n Y'_n \frac{1}{r^{n+1}} + \dots \quad (3)$$

Здесь не предполагается, что поверхностные гармоники того же вида, что и в разложении F .

На поверхности проводника потенциал равен потенциалу проводника, т. е. постоянной величине α . Поэтому, выражая степени r через a и F и пренебрегая квадратами и высшими степенями F , мы получим

$$\alpha = A_0 \frac{1}{a} (1 - F) + A_1 \frac{1}{a^2} Y'_1 (1 - 2F) + \dots + A_n \frac{1}{a^{n+1}} Y'_n (1 - (n+1)F) + \dots \quad (4)$$

Поскольку коэффициенты A_1 и т. д., очевидно, много меньше A_0 , мы можем для начала пренебречь произведениями этих коэффициентов на F .

Если теперь подставить вместо F в первом члене (4) его разложение по сферическим гармоникам и приравнять нулю слагаемые со сферическими гармониками одинакового порядка, мы получим

$$\alpha = A_0/a, \quad (5)$$

$$A_1 Y'_1 = A_0 a f_1 Y_1 = 0, \quad (6)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n Y'_n = A_0 a^n f_n Y_n. \quad (7)$$

Из этих уравнений следует, что функции Y должны быть того же типа, что и Y' и, следовательно, совпадать с ними, и что $A_1 = 0$ и $A_n = A_0 a^n f_n$.

Для определения плотности заряда в произвольной точке поверхности можно воспользоваться уравнением

$$4\pi\sigma = -\frac{dV}{dv} = -\frac{dV}{dr} \cos \varepsilon \quad (\text{приближенно}). \quad (8)$$

Здесь ν — нормаль, а ε — угол между нормалью и радиусом. Поскольку в нашем исследовании мы считаем F и его первые производные по θ и φ малыми, мы можем считать $\cos \varepsilon = 1$, так что

$$4\pi\sigma = -\frac{dV}{dr} = A_0 \frac{1}{r^2} + \dots + (n+1) A_n Y_n \frac{2}{r^{n+2}} + \dots \quad (9)$$

Выражая степени r через a и F и пренебрегая произведениями F на A_n , получим

$$4\pi\sigma = A_0 \frac{1}{a^2} (1 - 2F) + \dots + (n+1) A_n \frac{1}{a^{n+2}} Y_n. \quad (10)$$

Разлагая F по сферическим гармоникам и подставляя найденные значения A_n , получим

$$4\pi\sigma = A_0 \frac{1}{a^2} [1 + f_2 Y_2 + 2f_3 Y_3 + \dots + (n-1) f_n Y_n]. \quad (11)$$

Таким образом, если поверхность отличается от поверхности сферы тонким слоем, толщина которого меняется как сферическая гармоника порядка n , то отношение разности поверхностных плотностей заряда в любых двух точках к их сумме в $n-1$ раз больше отношения разностей радиус-векторов этих двух точек к их сумме.

145 б. Пусть теперь почти сферический проводник находится под действием внешних электрических сил, потенциал которых обозначим через U . Разложим его в ряд по сферическим гармоникам положительной степени с началом координат в центре объема проводника

$$U = B_0 + B_1 r Y'_1 + B_2 r^2 Y'_2 + \dots + B_n r^n Y'_n + \dots \quad (12)$$

Штрихи при Y показывают, что эти гармоники не обязательно того же типа, что гармоники того же порядка в разложении для F .

Если бы проводник был точно сферическим, то потенциал, создаваемый его поверхностным зарядом в точке вне проводника, был бы равен

$$V = A_0 \frac{1}{r} - B_1 \frac{a^3}{r^2} Y'_1 - \dots - B_n \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} Y'_n - \dots \quad (13)$$

Пусть истинный потенциал, создаваемый поверхностным зарядом, равен $V+W$, где

$$W = C_1 \frac{1}{r^2} Y''_1 + \dots + C_m \frac{1}{r^{m+1}} Y''_m + \dots \quad (14)$$

Гармоники с двумя штрихами отличаются от гармоник входящих как в F , так и в U , а коэффициенты C малы, поскольку F мало.

Потенциалы должны удовлетворять условию, что при $r=a(1+F)$ сумма

$$U+V+W = \text{const} = A_0/a + B_0$$

равна потенциалу проводника.

Выражая степени r через a и F , сохраняя первую степень F , умноженную на A или B , и пренебрегая произведениями F на малые величины C , получим

$$F \left[-A_0 \frac{1}{a} + 3B_1 a Y'_1 + 5B_2 a^2 Y'_2 + \dots + (2n+1) B_n a^n Y'_n + \dots \right] + \\ + C_1 \frac{1}{a^2} Y''_1 + \dots + C_m \frac{1}{a^{m+1}} Y''_m + \dots = 0. \quad (15)$$

Чтобы найти коэффициенты C , нужно выполнить умножение в первой строчке и выразить результат через сферические гармоники. Тогда этот ряд, взятый с обратным знаком, и будем рядом для W на поверхности проводника.

Произведение двух поверхностных сферических гармоник порядка n и m является рациональной функцией степени $n+m$ по x/r , y/r , z/r и, следовательно, может быть разложено в ряд по сферическим гармоникам степени не выше $n+m$. Поэтому, если F может быть разложено по сферическим гармоникам степени не выше m , а потенциал внешних сил может быть разложен по сферическим гармоникам степени не выше n , то потенциал, создаваемый поверхностными зарядами, будет содержать сферические гармоники степени не выше $m+n$.

Соответствующая поверхностная плотность заряда может быть затем найдена по потенциалу из приближенного равенства

$$4\pi\sigma + \frac{d}{dr}(U + V + W) = 0. \quad (16)$$

145 в. Почти сферический проводник в почти сферическом и почти концентрическом проводящем сосуде.

Пусть уравнение поверхности проводника

$$r = a(1 + F), \quad (17)$$

где

$$F = f_1 Y_1 + \dots + f_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)}, \quad (18)$$

а уравнение внутренней поверхности сосуда

$$r = b(1 + G), \quad (19)$$

где

$$G = g_1 Y_1 + \dots + g_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)}. \quad (20)$$

Здесь коэффициенты f и g малы по сравнению с единицей, а $Y_n^{(\sigma)}$ — поверхностные гармоники порядка n типа σ .

Пусть потенциал проводника равен α , а потенциал сосуда β . Представим потенциал в произвольной точке между проводником и сосудом в виде разложения по сферическим гармоникам

$$\Psi = h_0 + h_1 Y_1 r + \dots + h_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)} r^n + \dots + k_0 \frac{1}{r} + k_1 Y_1 \frac{1}{r^2} + \dots + k_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)} \frac{1}{r^{n+1}} + \dots \quad (21)$$

Нужно определить постоянные h и k из условия, что $\Psi = \alpha$ при $r = a(1 + F)$ и $\Psi = \beta$ при $r = b(1 + G)$.

Из предыдущего рассмотрения ясно, что все коэффициенты h и k , кроме h_0 и k_0 , малы, так что их произведениями на F можно пренебречь. Поэтому можно написать

$$\alpha = h_0 + k_0 \frac{1}{a} (1 - F) + \dots + \left(h_n^{(\sigma)} a^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{a^{n+1}} \right) Y_n^{(\sigma)} + \dots, \quad (22)$$

$$\beta = h_0 + k_0 \frac{1}{b} (1 - G) + \dots + \left(h_n^{(\sigma)} b^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{b^{n+1}} \right) Y_n^{(\sigma)} + \dots \quad (23)$$

Отсюда следует

$$\alpha = h_0 + k_0 \frac{1}{a}, \quad (24)$$

$$\beta = h_0 + k_0 \frac{1}{b}, \quad (25)$$

$$k_0 \frac{1}{a} f_n^{(\sigma)} = h_n^{(\sigma)} a^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{a^{n+1}}, \quad (26)$$

$$k_0 \frac{1}{b} g_n^{(\sigma)} = h_n^{(\sigma)} b^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{b^{n+1}}, \quad (27)$$

откуда получаем заряд внутреннего проводника

$$k_0 = (\alpha - \beta) ab / (b - a) \quad (28)$$

и значения коэффициентов гармоник порядка n

$$h_n^{(\sigma)} = k_0 \frac{b^n g_n^{(\sigma)} - a^n f_n^{(\sigma)}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}, \quad (29)$$

$$k_n^{(\sigma)} = k_0 a^n b^n \frac{b^{n+1} f_n^{(\sigma)} - a^{n+1} g_n^{(\sigma)}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}. \quad (30)$$

Следует при этом помнить, что коэффициенты $f_n^{(\sigma)}$, $g_n^{(\sigma)}$, $h_n^{(\sigma)}$, $k_n^{(\sigma)}$ относятся к одному и тому же порядку и к одному и тому же типу.

Поверхностная плотность заряда на внутреннем проводнике дается соотношением

$$4\pi\sigma a^2 = k_0 (1 + \dots + A_n Y_n^{(\sigma)} + \dots),$$

где

$$A_n = \frac{f_n^{(\sigma)} \{(n+2) a^{2n+1} + (n-1) b^{2n+1}\} - g_n^{(\sigma)} (2n+1) a^{n+1} b^n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}. \quad (31)$$

146. В качестве примера применения зональных гармоник рассмотрим равновесие электричества на двух сферических проводниках.

Пусть a и b — радиусы сфер, а c — расстояние между их центрами. Для кратности мы положим $a = cx$, $b = cy$, так что x и y — числа, меньшие единицы.

Примем прямую, соединяющую центры сфер, за ось зональных гармоник, и пусть полюсом зональных гармоник, относящихся к каждой сфере, служит точка этой сферы, наиболее близкая к другой сфере.

Обозначим через r расстояние произвольной точки до центра первой сферы, а через s — расстояние той же точки от центра второй сферы.

Пусть поверхностная плотность заряда σ_1 для первой сферы дается выражением

$$4\pi\sigma_1 a^2 = A + A_1 P_1 + 3A_2 P_2 + \dots + (2m+1) A_m P_m, \quad (1)$$

так что A — полный заряд сферы, а A_1 и т. д. — коэффициенты зональных гармоник P_1 и т. д.

Потенциал такого распределения заряда можно представить в виде

$$U' = \frac{1}{a} \left[A + A_1 P_1 \frac{r}{a} + A_2 P_2 \frac{r^2}{a^2} + \dots + A_m P_m \frac{r^m}{a^m} \right] \quad (2)$$

для точек внутри сферы и

$$U = \frac{1}{r} \left[A + A_1 P_1 \frac{a}{r} + A_2 P_2 \frac{a^2}{r^2} + \dots + A_m P_m \frac{a^m}{r^m} \right] \quad (3)$$

для точек вне сферы.

Подобным образом, если поверхностная плотность заряда на второй сфере дается выражением

$$4\pi\sigma_2 b^2 = B + B_1 P_1 + \dots + (2n+1) B_n P_n, \quad (4)$$

Для нахождения потенциалов α и β обеих сфер у нас имеются уравнения (7) и (8), которые мы можем теперь записать в виде

$$c\alpha = A \frac{1}{x} + B + B_1 y + B_2 y^2 + \dots + B_n y^n, \quad (14)$$

$$c\beta = B \frac{1}{y} + A + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m \quad (15)$$

Таким образом, если ограничиться коэффициентами от A_1 до A_m и от B_1 до B_n , то у нас есть $m+n$ уравнений для выражения этих величин через заряды обеих сфер A и B , а подставляя значения этих коэффициентов в (14) и (15), мы можем выразить потенциалы сфер через их заряды.

Эти операции можно произвести с помощью определителей, но с вычислительной точки зрения удобнее действовать следующим образом.

Подставив в уравнение (12) значения B_1, \dots, B_n из уравнений (13), мы получим

$$A_1 = -Bx^2 + Ax^2 y^3 [2 \cdot 1 + 3 \cdot 1y^2 + 4 \cdot 1y^4 + 5 \cdot 1y^6 + 6 \cdot 1y^8 + \dots] + \\ + A_1 x^3 y^3 [2 \cdot 2 + 3 \cdot 3y^2 + 4 \cdot 4y^4 + 5 \cdot 5y^6 + \dots] + A_2 x^4 y^3 [2 \cdot 3 + 3 \cdot 6y^2 + 4 \cdot 10y^4 + \dots] \\ + A_3 x^5 y^3 [2 \cdot 4 + 3 \cdot 10y^2 + \dots] + A_4 x^6 y^3 [2 \cdot 5 + \dots] + \dots; \quad (16)$$

$$A_2 = -Bx^3 + Ax^3 y^3 [3 \cdot 1 + 6 \cdot 1y^2 + 10 \cdot 1y^4 + 15 \cdot 1y^6 + \dots] \\ + A_1 x^4 y^3 [3 \cdot 2 + 6 \cdot 3y^2 + 10 \cdot 4y^4 + \dots] + A_2 x^5 y^3 [3 \cdot 3 + 6 \cdot 6y^2 + \dots] \\ + A_3 x^6 y^3 [3 \cdot 4 + \dots] + \dots; \quad (17)$$

$$A_3 = -Bx^4 + Ax^4 y^3 [4 \cdot 1 + 10 \cdot 1y^2 + 20 \cdot 1y^4 + \dots] \\ + A_1 x^5 y^3 [4 \cdot 2 + 10 \cdot 3y^2 + \dots] + A_2 x^6 y^3 [4 \cdot 3 + \dots] + \dots; \quad (18)$$

$$A_4 = -Bx^5 + Ax^5 y^3 [5 \cdot 1 + 15 \cdot 1y^2 + \dots] + A_1 x^6 y^3 [5 \cdot 2 + \dots] + \dots \quad (19)$$

Подставляя в правые части этих равенств приближенные значения A_1 и т. д. и повторяя этот процесс для высших приближений, мы можем довести приближение для коэффициента до любой степени по восходящим степеням и произведениям x и y . Если положить $A_n = p_n A - q_n B$, $B_n = -r_n A + s_n B$, то

$$p_1 = x^2 y^3 [2 + 3y^2 + 4y^4 + 5y^6 + 6y^8 + 7y^{10} + 8y^{12} + 9y^{14} + \dots] \\ + x^5 y^6 [8 + 30y^2 + 75y^4 + 154y^6 + 280y^8 + \dots] + x^7 y^6 [18 + 90y^2 + 288y^4 + 735y^6 + \dots] \\ + x^9 y^6 [32 + 200y^2 + 780y^4 + \dots] + x^{11} y^6 [50 + 375y^2 + \dots] + x^{13} y^6 [72 + \dots] + \dots \\ \dots + x^8 y^9 [32 + 192y^2 + \dots] + x^{10} y^9 [144 + \dots] \dots; \quad (20)$$

$$q_1 = x^2 + x^5 y^3 [4 + 9y^2 + 16y^4 + 25y^6 + 36y^8 + 49y^{10} + 64y^{12} + \dots] \\ + x^7 y^3 [6 + 18y^2 + 40y^4 + 75y^6 + 126y^8 + 196y^{10} + \dots] \\ + x^9 y^3 [8 + 30y^2 + 80y^4 + 175y^6 + 336y^8 + \dots] + x^{11} y^3 [10 + 45y^2 + 140y^4 + 350y^6 + \dots] \\ + x^{13} y^3 [12 + 63y^2 + 224y^4 + \dots] + x^{15} y^3 [14 + 84y^2 + \dots] + x^{17} y^3 [16 + \dots] + \dots \\ + x^8 y^6 [16 + 72y^2 + 209y^4 + 488y^6 + \dots] + x^{10} y^6 [60 + 342y^2 + 1222y^4 + \dots] \\ + x^{12} y^6 [150 + 1050y^2 + \dots] + x^{14} y^6 [308 + \dots] + \dots + x^{11} y^9 [64 + \dots] + \dots \quad (21)$$

Дальше удобнее будет выразить эти коэффициенты через a , b и c и расположить их по степеням c . Это облегчит дифференцирование по c . Таким образом,

получим

$$\begin{aligned}
 p_1 = & 2a^2b^3c^{-5} + 3a^2b^5c^{-7} + 4a^2b^7c^{-9} + (5a^2b^9 + 8a^5b^6)c^{-11} + (6a^2b^{11} + 39a^5b^8 + 18a^7b^6)c^{-13} \\
 & + (7a^2b^{13} + 75a^5b^{10} + 90a^7b^8 + 32a^9b^6)c^{-15} \\
 & + (8a^2b^{15} + 154a^5b^{12} + 288a^7b^{10} + 32a^8b^9 + 200a^9b^8 + 50a^{11}b^6)c^{-17} \\
 & + (9a^2b^{17} + 280a^5b^{14} + 735a^7b^{12} + 192a^8b^{11} + 780a^9b^{10} \\
 & + 144a^{10}b^9 + 375a^{11}b^8 + 72a^{13}b^6)c^{-19} + \dots; \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_1 = & a^2c^{-2} + 4a^5b^3c^{-8} + (6a^7b^3 + 9a^5b^5)c^{-10} + (8a^9b^3 + 18a^7b^5 + 16a^5b^7)c^{-12} \\
 & + (10a^{11}b^3 + 30a^9b^5 + 16a^8b^6 + 40a^7b^7 + 25a^5b^9)c^{-14} \\
 & + (12a^{13}b^3 + 45a^{11}b^5 + 60a^{10}b^6 + 80a^9b^7 + 72a^8b^8 + 75a^7b^9 + 36a^5b^{11})c^{-16} \\
 & + (14a^{15}b^3 + 63a^{13}b^5 + 150a^{12}b^6 + 140a^{11}b^7 + 342a^{10}b^8 + 175a^9b^9 + 209a^8b^{10} \\
 & + 126a^7b^{11} + 49a^5b^{13})c^{-18} + (16a^{17}b^3 + 84a^{15}b^5 + 308a^{14}b^6 + 224a^{13}b^7 + 1050a^{12}b^8 \\
 & + 414a^{11}b^9 + 1222a^{10}b^{10} + 336a^9b^{11} + 488a^8b^{12} + 196a^7b^{13} + 64a^5b^{15})c^{-20} + \dots \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_2 = & 3a^3b^3c^{-6} + 6a^3b^5c^{-8} + 10a^3b^7c^{-10} + (12a^6b^6 + 15a^3b^9)c^{-12} \\
 & + (27a^8b^6 + 54a^6b^8 + 21a^3b^{11})c^{-14} + (48a^{10}b^6 + 162a^8b^8 + 158a^6b^{10} + 28a^3b^{13})c^{-16} \\
 & + (75a^{12}b^6 + 360a^{10}b^8 + 48a^9b^9 + 606a^8b^{10} + 372a^6b^{12} + 36a^3b^{15})c^{-18} + \dots \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_2 = & a^3c^{-3} + 6a^6b^3c^{-9} + (9a^8b^3 + 18a^6b^5)c^{-11} + (12a^{10}b^3 + 36a^8b^5 + 40a^6b^7)c^{-13} \\
 & + (15a^{12}b^3 + 60a^{10}b^5 + 24a^9b^6 + 100a^8b^7 + 75a^6b^9)c^{-15} + (18a^{14}b^3 + 90a^{12}b^5 \\
 & + 90a^{11}b^6 + 200a^{10}b^7 + 126a^9b^8 + 225a^8b^9 + 126a^6b^{11})c^{-17} \\
 & + (21a^{16}b^3 + 126a^{14}b^5 + 225a^{13}b^6 + 350a^{12}b^7 + 594a^{11}b^8 + 525a^{10}b^9 \\
 & + 418a^9b^{10} + 441a^8b^{11} + 196a^6b^{13})c^{-19} + \dots \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_3 = & 4a^4b^3c^{-7} + 10a^4b^5c^{-9} + 20a^4b^7c^{-11} + (16a^7b^6 + 35a^4b^9)c^{-13} + (36a^9b^6 + 84a^7b^8 + \\
 & + 56a^4b^{11})c^{-15} + (64a^{11}b^6 + 252a^9b^8 + 282a^7b^{10} + 84a^4b^{13})c^{-17} + \dots \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_3 = & a^4c^{-4} + 8a^7b^3c^{-10} + (12a^9b^3 + 30a^7b^5)c^{-12} + (16a^{11}b^3 + 60a^9b^5 + 80a^7b^7)c^{-14} \\
 & + (20a^{13}b^3 + 100a^{11}b^5 + 32a^{10}b^6 + 200a^9b^7 + 175a^7b^9)c^{-16} + (24a^{15}b^3 + 150a^{13}b^5 \\
 & + 120a^{12}b^6 + 400a^{11}b^7 + 192a^{10}b^8 + 525a^9b^9 + 336a^7b^{11})c^{-18} + \dots \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_4 = & 5a^5b^3c^{-8} + 15a^5b^5c^{-10} + 35a^5b^7c^{-12} + (20a^8b^6 + 70a^5b^9)c^{-14} \\
 & + (45a^{10}b^6 + 120a^8b^8 + 126a^5b^{11})c^{-16} + \dots \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_4 = & a^5c^{-5} + 10a^8b^3c^{-11} + (15a^{10}b^3 + 45a^8b^5)c^{-13} + (20a^{12}b^3 + 90a^{10}b^5 + 140a^8b^7)c^{-15} \\
 & + (25a^{14}b^3 + 150a^{12}b^5 + 40a^{11}b^6 + 350a^{10}b^7 + 350a^8b^9)c^{-17} + \dots \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$p_5 = 6a^6b^3c^{-9} + 21a^6b^5c^{-11} + 56a^6b^7c^{-13} + (24a^9b^6 + 126a^6b^9)c^{-15} + \dots \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 q_5 = & a^6c^{-6} + 12a^9b^3c^{-12} + (18a^{11}b^3 + 63a^9b^5)c^{-14} \\
 & + (24a^{13}b^3 + 126a^{11}b^5 + 224a^9b^7)c^{-16} + \dots \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$p_6 = 7a^7b^3c^{-10} + 28a^7b^5c^{-12} + 84a^7b^7c^{-14} + \dots \quad (32)$$

$$q_6 = a^7c^{-7} + 14a^{10}b^3c^{-13} + (21a^{12}b^3 + 84a^{10}b^5)c^{-15} + \dots \quad (33)$$

$$p_7 = 8a^8b^3c^{-11} + 36a^8b^5c^{-13} + \dots \quad (34)$$

$$q_7 = a^8 c^{-8} + 16a^{11} b^3 c^{-14} + \dots \quad (35)$$

$$p_8 = 9a^9 b^3 c^{-12} + \dots \quad (36)$$

$$q_8 = a^9 c^{-9} + \dots \quad (37)$$

Значения r_n и s_n можно написать, переставив a и b соответственно в q_n и в p_n .

Если теперь выразить потенциалы обеих сфер через эти коэффициенты в виде

$$\alpha = lA + mB, \quad (38)$$

$$\beta = mA + nB, \quad (39)$$

то величины l , m , n будут коэффициентами потенциала (п. 87), причем

$$m = c^{-1} + p_1 a c^{-2} + p_2 a^2 c^{-3} + \dots, \quad (40)$$

$$n = b^{-1} - q_1 a c^{-2} - q_2 a^2 c^{-3} - \dots, \quad (41)$$

или, выражая через a , b , c ,

$$\begin{aligned} m = & c^{-1} + 2a^3 b^3 c^{-7} + 3a^3 b^3 (a^2 + b^2) c^{-9} + a^3 b^3 (4a^4 + 6a^2 b^2 + 4b^4) c^{-11} \\ & + a^3 b^3 [5a^6 + 10a^4 b^2 + 8a^3 b^3 + 10a^2 b^4 + 5b^6] c^{-13} + a^3 b^3 [6a^8 + 15a^6 b^2 + 30a^5 b^3 + 20a^4 b^4 \\ & + 30a^3 b^5 + 15a^2 b^6 + 6b^8] c^{-15} + a^3 b^3 [7a^{10} + 21a^8 b^2 + 75a^7 b^3 + 35a^6 b^4 + 144a^5 b^5 \\ & + 35a^4 b^6 + 75a^3 b^7 + 21a^2 b^8 + 7b^{10}] c^{-17} + a^3 b^3 [8a^{12} + 28a^{10} b^2 + 154a^9 b^3 + 56a^8 b^4 \\ & + 446a^7 b^5 + 102a^6 b^6 + 446a^5 b^7 + 56a^4 b^8 + 154a^3 b^9 + 28a^2 b^{10} + 8b^{12}] c^{-19} \\ & + a^3 b^3 [9a^{14} + 36a^{12} b^2 + 280a^{11} b^3 + 84a^{10} b^4 + 1107a^9 b^5 + 318a^8 b^6 + 1668a^7 b^7 + 318a^6 b^8 \\ & + 1107a^5 b^9 + 84a^4 b^{10} + 280a^3 b^{11} + 36a^2 b^{12} + 9b^{14}] c^{-21} + \dots, \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = & b^{-1} - a^3 c^{-4} - a^5 c^{-6} - a^7 c^{-8} - (a^3 + 4b^3) a^6 c^{-10} - (a^5 + 12a^2 b^3 + 9b^5) a^6 c^{-12} \\ & - (a^7 + 25a^4 b^3 + 36a^2 b^5 + 16b^7) a^6 c^{-14} - (a^9 + 44a^6 b^3 + 96a^4 b^5 + 16a^3 b^6 \\ & + 80a^2 b^7 + 25b^9) a^6 c^{-16} - (a^{11} + 70a^8 b^3 + 210a^6 b^5 + 84a^5 b^6 + 260a^4 b^7 + 72a^3 b^8 \\ & + 150a^2 b^9 + 36b^{11}) a^6 c^{-18} - (a^{13} + 104a^{10} b^3 + 406a^8 b^5 + 272a^7 b^6 + 680a^6 b^7 + 468a^5 b^8 \\ & + 575a^4 b^9 + 209a^3 b^{10} + 252a^2 b^{11} + 49b^{13}) a^6 c^{-20} - (a^{15} + 147a^{12} b^3 + 720a^{10} b^5 \\ & + 693a^9 b^6 + 1548a^8 b^7 + 1836a^7 b^8 + 1814a^6 b^9 + 1640a^5 b^{10} + 1113a^4 b^{11} \\ & + 488a^3 b^{12} + 392a^2 b^{13} + 64b^{15}) a^6 c^{-22} + \dots \quad (43) \end{aligned}$$

Выражение для l может быть получено из выражения для n перестановкой a и b .

Потенциальная энергия системы, согласно п. 87, равна

$$W = \frac{1}{2} lA^2 + mAB + \frac{1}{2} nB^2, \quad (44)$$

а сила расталкивания обеих сфер, согласно п. 93а, равна

$$-\frac{dW}{dc} = \frac{1}{2} A^2 \frac{dl}{dc} + AB \frac{dm}{dc} + \frac{1}{2} B^2 \frac{dn}{dc}. \quad (45)$$

Поверхностная плотность заряда в любой точке каждой сферы дается уравнениями (1) и (4) как функция коэффициентов A_n и B_n .

ГЛАВА X

КОНФОКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

147. Пусть общее уравнение конфокальной системы имеет вид

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \quad (1)$$

где λ — переменный параметр, для которого индексом мы будем различать вид поверхности второго порядка, а именно будем писать λ_1 для двухполостного гиперболоида, λ_2 — для однополостного гиперболоида и λ_3 — для эллипсоида. Величины $a, \lambda_1, b, \lambda_2, c, \lambda_3$ возрастают в указанном здесь порядке. Величина a введена здесь ради симметрии, в наших окончательных результатах мы будем всегда считать $a=0$.

Если мы рассмотрим три поверхности с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то из уравнений этих поверхностей найдем, что значение x^2 в точке пересечения удовлетворяет уравнению

$$x^2 (b^2 - a^2)(c^2 - a^2) = (\lambda_1^2 - a^2)(\lambda_2^2 - a^2)(\lambda_3^2 - a^2). \quad (2)$$

Значения y^2 и z^2 могут быть найдены симметричной перестановкой a, b, c . Дифференцируя это равенство по λ_1 , получим

$$\frac{dx}{d\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - a^2} x. \quad (3)$$

Если ds_1 — длина участка кривой пересечения поверхностей λ_2 и λ_3 , отсекаемого поверхностями λ_1 и $\lambda_1 + d\lambda_1$, то

$$\left(\frac{ds_1}{d\lambda_1}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda_1}\right)^2 = \frac{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}{(\lambda_1^2 - a^2)(\lambda_1^2 - b^2)(\lambda_1^2 - c^2)}. \quad (4)$$

Знаменатель этой дроби равен произведению квадратов полуосей поверхности λ_1 .

Обозначим

$$D_1^2 = \lambda_3^2 - \lambda_2^2, \quad D_2^2 = \lambda_3^2 - \lambda_1^2, \quad D_3^2 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \quad (5)$$

и положим $a=0$. Тогда

$$\frac{ds_1}{d\lambda_1} = \frac{D_2 D_3}{\sqrt{b^2 - \lambda_1^2} \sqrt{c^2 - \lambda_1^2}}. \quad (6)$$

Легко видеть, что D_2 и D_3 — полуоси центрального сечения поверхности λ_1 , сопряженного диаметру, проходящему через данную точку, и что полуось D_3 параллельна ds_2 , а D_2 параллельна ds_3 .

¹ Это исследование заимствовано главным образом из весьма интересной книги «*Leçons sur les Fonctions Inverses des Transcendentes et les Surfaces Isothermes*», par G. Lamé, Paris, 1857.

Если, кроме того, мы выразим три параметра $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ через три функции α, β, γ , определяемые уравнениями

$$\alpha = \int_0^{\lambda_1} \frac{cd\lambda_1}{V(b^2 - \lambda_1^2)(c^2 - \lambda_1^2)}, \quad \beta = \int_b^{\lambda_2} \frac{cd\lambda_2}{V(\lambda_2^2 - b^2)(c^2 - \lambda_2^2)}, \quad \gamma = \int_c^{\lambda_3} \frac{cd\lambda_3}{V(\lambda_3^2 - b^2)(\lambda_3^2 - c^2)}, \quad (7)$$

то получим

$$ds_1 = (1/c) D_2 D_3 d\alpha, \quad ds_2 = (1/c) D_3 D_1 d\beta, \quad ds_3 = (1/c) D_1 D_2 d\gamma. \quad (8)$$

148. Пусть теперь V — потенциал произвольной точки α, β, γ , тогда составляющая результирующей силы в направлении ds_1 равна

$$R_1 = - \frac{dV}{ds_1} = - \frac{dV}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds_1} = - \frac{dV}{d\alpha} \frac{c}{D_2 D_3}. \quad (9)$$

Поскольку ds_1, ds_2, ds_3 взаимно перпендикулярны, поверхностный интеграл по элементу площади $ds_2 ds_3$ равен

$$R_1 ds_2 ds_3 = - \frac{dV}{d\alpha} \frac{c}{D_2 D_3} \frac{D_3 D_1}{c} \frac{D_1 D_2}{c} d\beta d\gamma = - \frac{dV}{d\alpha} \frac{D_1^2}{c} d\beta d\gamma. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь элемент объема, заключенный между поверхностями α, β, γ и $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma$. Таких элементов будет восемь, по одному в каждом октанте пространства.

Мы нашли поверхностный интеграл от нормальной составляющей силы (отсчитываемой внутрь) для элемента поверхности, отсекаемого на поверхности α поверхностями β и $\beta + d\beta, \gamma$ и $\gamma + d\gamma$.

Поверхностный интеграл для соответствующего элемента поверхности $\alpha + d\alpha$ равен

$$+ \frac{dV}{d\alpha} \frac{D_1^2}{c} d\beta d\gamma + \frac{d^2 V}{d\alpha^2} \frac{D_1^2}{c} d\alpha d\beta d\gamma,$$

поскольку D_1 не зависит от α . Поверхностный интеграл по обеим противоположным граням элемента объема будет равен сумме этих выражений, т. е.

$$\frac{d^2 V}{d\alpha^2} \frac{D_1^2}{c} d\alpha d\beta d\gamma.$$

Точно так же поверхностные интегралы по двум другим парам граней равны

$$\frac{d^2 V}{d\beta^2} \frac{D_2^2}{c} d\alpha d\beta d\gamma \quad \text{и} \quad \frac{d^2 V}{d\gamma^2} \frac{D_3^2}{c} d\alpha d\beta d\gamma.$$

Эти шесть граней ограничивают элемент объемом

$$ds_1 ds_2 ds_3 = \frac{D_1^2 D_2^2 D_3^2}{c^3} d\alpha d\beta d\gamma,$$

и если ρ — объемная плотность заряда на этом элементе, то, согласно п. 77, мы найдем, что полный поверхностный интеграл по элементу в сумме с умноженным

на 4π количеством электричества на нем равен нулю, т. е., деля на $d\alpha d\beta d\gamma$,

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} D_1^2 + \frac{d^2V}{d\beta^2} D_2^2 + \frac{d^2V}{d\gamma^2} D_3^2 + 4\pi\rho \frac{D_1^2 D_2^2 D_3^2}{c^2} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) представляет собой пуассоновское обобщение уравнения Лапласа, записанное в эллипсоидальных координатах.

При $\rho=0$ четвертый член исчезает и уравнение эквивалентно уравнению Лапласа.

Общее рассмотрение этого уравнения читатель найдет в упомянутой выше работе Ламе.

149. Чтобы определить величины α , β , γ , мы можем выразить их в виде обычных эллиптических интегралов, введя вспомогательные углы θ , φ и ψ , где

$$\lambda_1 = b \sin \theta, \quad (12)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{c^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}, \quad (13)$$

$$\lambda_3 = c \sec \psi. \quad (14)$$

Если положить $b=kc$ и $k^2+k'^2=1$, то k и k' можно назвать двумя дополнительными модулями конфокальной системы. Тогда получим

$$\alpha = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (15)$$

— эллиптический интеграл первого рода, для которого можно воспользоваться обычным обозначением $F(k, \theta)$.

Таким же образом найдем, что

$$\beta = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \cos^2 \varphi}} = F(k') - F(k', \varphi), \quad (16)$$

где $F(k')$ — полная функция для модуля k' , а

$$\gamma = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \psi}} = F(k) - F(k, \psi). \quad (17)$$

Здесь α представлено как функция угла θ , который, в свою очередь, является функцией от λ_1 , β — функция от φ и, следовательно, от λ_2 , а γ — функция от ψ и, следовательно, от λ_3 .

Можно, наоборот, эти углы и параметры рассматривать как функции от α , β , γ . Свойства таких обратных функций, а также других функций, связанных с ними, рассмотрены в трактате Ламе по этому вопросу.

Легко видеть, что, поскольку параметры — периодические функции от вспомогательных углов, они являются также периодическими функциями от α , β , γ . Периоды λ_1 и λ_3 равны $4F(k)$, а период λ_2 равен $2F(k')$.

Частные решения

150. Уравнение Лапласа удовлетворяется, если V является линейной функцией от α , β , γ . Следовательно, мы можем найти из уравнения распределение электричества на любых двух конфокальных поверхностях одного семейства, находящихся под заданными потенциалами, а также определить потенциал в любой точке между ними.

Двухполостный гиперboloид

Постоянное α соответствует двухполостному гиперboloиду. Пусть на рассматриваемом листе поверхности α имеет тот же знак, что и x . Так мы сможем рассматривать по отдельности каждый лист.

Пусть α_1 и α_2 — значения α , соответствующие двум одиночным листам, которые могут принадлежать разным гиперboloидам или одному и тому же, и пусть V_1 и V_2 — значения поддерживаемых на них потенциалов. Тогда, если положить

$$V = \frac{\alpha_1 V_2 - \alpha_2 V_1 + \alpha (V_1 - V_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad (18)$$

то будут выполнены все условия на обеих поверхностях и в пространстве между ними. Если в объеме за поверхностью α_1 положить V постоянным и равным V_1 , а в объеме за поверхностью α_2 положить V постоянным и равным V_2 , то мы получим полное решение для этого частного случая.

Результирующая сила в любой точке обоих листов равна

$$\pm R_1 = - \frac{dV}{ds_1} = - \frac{dV}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds_1}, \quad (19)$$

или

$$R_1 = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{c}{D_2 D_3}. \quad (20)$$

Если p_1 — перпендикуляр из центра к касательной плоскости в произвольной точке, а P_1 — произведение полуосей поверхности, то $p_1 D_2 D_3 = P_1$. Отсюда следует, что

$$R_1 = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{c p_1}{P_1}, \quad (21)$$

т. е. сила в любой точке поверхности пропорциональна длине перпендикуляра из центра к касательной плоскости.

Поверхностная плотность σ может быть найдена из уравнения

$$4\pi\sigma = R_1. \quad (22)$$

Полное количество электричества на сегменте, отсекаемом на листе гиперboloида плоскостью $x=d$, равно

$$Q = \frac{c}{2} \frac{V_1 - V_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{d}{\lambda_1} - 1 \right). \quad (23)$$

Следовательно, полный заряд на всем бесконечном листе бесконечен.

Предельные формы этой поверхности:

1. При $\alpha = F(k)$ поверхность является частью плоскости xz , расположенной с положительной стороны от положительной ветви гиперболы, уравнение которой

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1. \quad (24)$$

2. При $\alpha = 0$ поверхность переходит в плоскость yz .

3. При $\alpha = -F(k)$ поверхность является частью плоскости xz , расположенной с отрицательной стороны от отрицательной ветви той же гиперболы.

Однополостный гиперболоид

Положив постоянным β , мы получаем уравнение однополостного гиперболоида. Поэтому две поверхности, образующие границы электрического поля, должны принадлежать двум различным гиперболоидам. В остальном исследование проводится так же, как и для двухполостного гиперболоида. Точно так же при заданной разности потенциалов плотность заряда в произвольной точке поверхности пропорциональна длине перпендикуляра из центра к касательной плоскости, а полный заряд на бесконечной поверхности бесконечен.

Предельные формы

1. При $\beta = 0$ поверхность является частью плоскости xz , заключенной между двумя ветвями гиперболы, уравнение которой (24) написано выше.

2. При $\beta = F(k')$ поверхность является частью плоскости xy , находящейся вне фокального эллипса, уравнение которого

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1. \quad (25)$$

Эллипсоиды

Для каждого заданного эллипсоида γ постоянно. Если два эллипсоида γ_1 и γ_2 поддерживаются при потенциалах V_1 и V_2 , то для произвольной точки γ между ними

$$V = \frac{\gamma_1 V_2 - \gamma_2 V_1 + \gamma (V_1 - V_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}. \quad (26)$$

Поверхностная плотность заряда в произвольной точке равна

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{c p_3}{P_3}, \quad (27)$$

где p_3 — перпендикуляр из центра к касательной плоскости, а P_3 — произведение полуосей.

Полный электрический заряд на каждой поверхности дается соотношением

$$Q_2 = c \frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_2} = -Q_1 \quad (28)$$

и конечен.

При $\gamma = F(k)$ поверхность эллипсоида уходит в бесконечность по всем направлениям.

Если положить $V_2=0$, а $\gamma_2=F(k)$, мы получим для электрического заряда на эллипсоиде γ , находящемся под потенциалом V в безгранично простирающемся поле, выражение

$$Q=cV/[F(k)-\gamma]. \quad (29)$$

Предельная форма для эллипсоидов получается при $\gamma=0$, когда поверхность превращается в часть плоскости xy внутри фокального эллипса, уравнение которого (25) написано выше.

Поверхностная плотность заряда по обе стороны эллиптической пластинки с уравнением (25) и эксцентриситетом k равна

$$\sigma = \frac{V}{4\pi \sqrt{c^2-b^2}} \frac{1}{F(k)} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{c^2-b^2}}}, \quad (30)$$

а заряд ее равен

$$Q=cV/F(k). \quad (31)$$

Частные случаи

151. Если c остается конечным, в то время как b , а следовательно, и k неограниченно уменьшаются, принимая в конце концов нулевое значение, система поверхностей преобразуется следующим образом:

Действительная ось и одна из мнимых осей каждого двухлопастного гиперболоида неограниченно уменьшаются, а сама поверхность в конце концов переходит в две плоскости, пересекающиеся по оси z .

Величина α совпадает с θ , и уравнение системы меридиональных плоскостей, к которым свелись гиперболоиды, имеет вид

$$\frac{x^2}{(\sin \alpha)^2} - \frac{y^2}{(\cos \alpha)^2} = 0. \quad (32)$$

Что касается величины β , то определение (7) в п. 147 привело бы нас к бесконечному значению интеграла на нижнем пределе. Чтобы избежать этого, определим

β в этом частном случае интегралом $\int_{\lambda_2}^c \frac{cd\lambda_2}{\lambda_2 \sqrt{c^2-\lambda_2^2}}$.

Положив теперь $\lambda_2=c \sin \varphi$, получим для β

$$\int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi}, \text{ т. е. } [\ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}],$$

откуда

$$\cos \varphi = (e^{\beta} - e^{-\beta}) / (e^{\beta} + e^{-\beta}) \quad (33)$$

и, следовательно,

$$\sin \varphi = 2 / (e^{\beta} + e^{-\beta}). \quad (34)$$

Если мы назовем экспоненциальную функцию $(e^{\beta} + e^{-\beta})/2$ гиперболическим косинусом или, короче, гипокосинусом β и обозначим через $\operatorname{ch} \beta$, а функцию $(e^{\beta} - e^{-\beta})/2$ назовем гипосинусом β и обозначим $\operatorname{sh} \beta$ и введем таким же образом

функции, аналогичные другим простым тригонометрическим функциям, то получим, что $\lambda_2 = c \operatorname{sch} \beta$, а уравнение для системы однополостных гиперболоидов имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{(\operatorname{sch} \beta)^2} - \frac{z^2}{(\operatorname{th} \beta)^2} = c^2. \quad (35)$$

Величина γ сводится к ψ , так что $\lambda_3 = c \sec \gamma$ и уравнение для системы эллипсоидов имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{(\sec \gamma)^2} + \frac{z^2}{(\operatorname{tg} \gamma)^2} = c^2. \quad (36)$$

Такого рода эллипсоиды представляют собою тела вращения относительно своих сопряженных осей и называются планетарными эллипсоидами.

Количество электричества на планетарном эллипсоиде, находящемся под потенциалом V в безграничном поле, равно

$$Q = cV / [(\pi/2) - \gamma], \quad (37)$$

где $c \sec \gamma$ — экваториальный радиус, а $c \operatorname{tg} \gamma$ — полярный радиус.

При $\gamma = 0$ фигура становится круговым диском радиуса c и

$$\sigma = V / (2\pi^2 \sqrt{c^2 - r^2}), \quad (38)$$

$$Q = cV / (\pi/2). \quad (39)$$

152. *Второй случай.* Пусть $b = c$, тогда $k = 1$, $k' = 0$,

$$\alpha = \operatorname{Intg}[(\pi + 2\theta)/4], \text{ откуда } \lambda_1 = c \operatorname{th} \alpha, \quad (40)$$

и уравнение двухполостных гиперболоидов вращения принимает вид

$$\frac{x^2}{(\operatorname{th} \alpha)^2} - \frac{y^2 + z^2}{(\operatorname{sch} \alpha)^2} = c^2. \quad (41)$$

Величина β переходит в φ , а каждый однополостный гиперболоид сводится к паре плоскостей, пересекающихся по оси x , уравнение которых

$$\frac{y^2}{(\sin \beta)^2} - \frac{z^2}{(\cos \beta)^2} = 0. \quad (42)$$

Это система меридиональных плоскостей, для которых β служит координатой долготы.

Величина γ , определяемая формулой (7) (п. 147), становится в этом случае бесконечной на нижнем пределе. Чтоб избежать этого, определим γ интегралом

$$\int_{\lambda_3}^{\infty} \frac{cd \lambda_3}{\lambda_3^2 - c^2}.$$

Положив теперь $\lambda_3 = c \sec \psi$, получим $\gamma = \int_{\psi}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sin \psi}$, откуда $\lambda_3 = c \operatorname{cth} \gamma$, и урав-

нение семейства эллипсоидов принимает вид

$$\frac{x^2}{(\operatorname{cth} \gamma)^2} + \frac{y^2 + z^2}{(\operatorname{csh} \gamma)^2} = c^2. \quad (43)$$

Эти эллипсоиды вращения, для которых осью вращения является поперечная ось, называются яйцеобразными эллипсоидами.

Количество электричества на яйцеобразном эллипсоиде, находящемся под потенциалом V в безграничном поле, равно в этом случае, согласно (29),

$$cV / \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sin \psi}, \quad (44)$$

где $c \sec \psi_0$ — полярный радиус.

Если обозначить полярный радиус через A , а экваториальный — через B , последняя формула запишется в виде

$$V \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{\ln \frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{B}}. \quad (45)$$

Если экваториальный радиус много меньше полярного, как в случае провода с закругленными концами, то

$$Q = AV / (\ln 2A - \ln B). \quad (46)$$

Если b , и c стремятся к нулю, а их отношение остается постоянным, то система поверхностей переходит в две системы конфокальных конусов и систему сферических поверхностей, радиусы которых обратно пропорциональны γ .

Если отношение b к c равно нулю или единице, то система поверхностей превращается в систему меридиональных плоскостей, систему круговых конусов с общей осью и систему концентрических сферических поверхностей, радиусы которых обратно пропорциональны γ . Это обычная система сферических полярных координат.

Цилиндрические поверхности

153. При бесконечно большом значении c поверхности становятся цилиндрическими с образующими, параллельными оси z . Одна система цилиндров является гиперболической, а именно та, в которую вырождаются двухполостные гиперболоиды. Когда c бесконечно велико, $k=0$ и, следовательно, $\theta=\alpha$, так что уравнение этой системы имеет вид

$$\frac{x^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = b^2. \quad (47)$$

Другая система цилиндров — эллиптическая, и поскольку $k=0$, то β равно

$$\int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 - b^2}}, \text{ т. е. } \lambda_2 = b \operatorname{ch} \beta,$$

и уравнение этой системы имеет вид

$$\frac{x^2}{(\operatorname{ch} \beta)^2} + \frac{y^2}{(\operatorname{sh} \beta)^2} = b^2. \quad (48)$$

Эти две системы поверхностей показаны на рис. X в конце этого тома.

Конфокальные параболоиды

154. Если в общих уравнениях перенести начало координат в точку на оси x , находящуюся на расстоянии t от центра системы, и подставить вместо x , λ , b и c соответственно величины $t+x$, $t+\lambda$, $t+b$ и $t+c$, а затем неограниченно увеличивать t , то мы получим в пределе уравнение системы параболоидов с фокусами в точках $x=b$ и $x=c$, т. е. уравнение

$$4(x-\lambda) + \frac{y^2}{\lambda-b} + \frac{z^2}{\lambda-c} = 0. \quad (49)$$

Если обозначить переменный параметр для первой системы эллиптических параболоидов через λ , для системы гиперболических параболоидов — через μ и для второй системы эллиптических параболоидов — через ν , то λ , b , μ , c , ν будут расположены в порядке нарастания величины и имеют место соотношения

$$\begin{aligned} x &= \lambda + \mu + \nu - c - b, \\ y^2 &= 4(b-\lambda)(\mu-b)(\nu-b)/(c-b), \\ z^2 &= 4(c-\lambda)(c-\mu)(\nu-c)/(c-b). \end{aligned} \quad (50)$$

Чтобы избежать бесконечных значений в интегралах (7) для параболической системы, соответствующие интегралы берутся в других пределах.

В этом случае полагают

$$\alpha = \int_{\lambda}^b \frac{d\lambda}{\sqrt{(b-\lambda)(c-\lambda)}}, \quad \beta = \int_b^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu-b)(c-\mu)}}, \quad \gamma = \int_c^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu-b)(\nu-c)}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} [(c+b) - (c-b) \operatorname{ch} \alpha], \\ \mu &= \frac{1}{2} [(c+b) - (c-b) \cos \beta], \\ \nu &= \frac{1}{2} [(c+b) + (c-b) \operatorname{ch} \gamma]; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (c+b) + \frac{1}{2} (c-b) (\operatorname{ch} \gamma - \cos \beta - \operatorname{ch} \alpha), \\ y &= 2(c-b) \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2}, \\ z &= 2(c-b) \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (52)$$

При $b=c$ мы имеем случай параболоидов вращения вокруг оси x и

$$\begin{aligned} x &= a(e^{2\alpha} - e^{2\gamma}), \\ y &= 2ae^{\alpha+\gamma} \cos \beta, \\ z &= 2ae^{\alpha+\gamma} \sin \beta. \end{aligned} \quad (53)$$

Поверхности, для которых постоянно β , представляют собой плоскости, проходящие через ось, а β — угол, образуемый такой плоскостью с некоторой фиксированной плоскостью, проходящей через ось.

Поверхности, для которых постоянно α , представляют собой конфокальные параболоиды. При $\alpha = -\infty$ параболоид вырождается в прямую, заканчивающуюся в начале координат.

Значения α , β , γ можно выразить через r , θ , φ — сферические Полярные координаты с началом координат в фокусе и осью θ , совпадающей с осью параболоидов:

$$\alpha = \ln [r^{1/2} \cos (\theta/2)], \quad \beta = \varphi, \quad \gamma = \ln [r^{1/2} \sin (\theta/2)]. \quad (54)$$

Случай, когда потенциал равен α , можно сравнить с пространственной зональной гармоникой $r^i Q_i$. Оба потенциала удовлетворяют уравнению Лапласа и являются однородными функциями от x , y , z , но в случае параболоида на оси имеется разрыв, так как α изменяется при замене θ на $\theta + 2\pi$.

Поверхностная плотность заряда на заряженном параболоиде в безграничном поле (в том числе на полубесконечной прямой) обратно пропорциональна квадратному корню из расстояния от фокуса, или, в случае прямой, расстояния от ее конца.

ГЛАВА XI

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ИНВЕРСИЯ

155. Мы уже показали, что для проводящей сферы, находящейся под действием заданного распределения заряда, можно найти распределение заряда на ее поверхности методом сферических гармоник.

Для этого нужно разложить потенциал воздействующей системы в ряд по пространственным гармоникам положительной степени с центром в начале координат, после чего находится соответствующий ряд пространственных гармоник отрицательной степени, описывающий потенциал, обусловленный распределением электричества на сфере.

С помощью этого весьма мощного метода анализа Пуассон нашел распределение электричества на сфере под влиянием заданной электрической системы и решил даже более сложную задачу нахождения распределения электричества на двух проводящих сферах, влияющих друг на друга. Эти исследования были существенно продолжены Плана и другими, подтвердившими точность расчетов Пуассона.

Применяя этот метод к наиболее простому случаю сферы, находящейся под действием единичного точечного заряда, мы должны разложить потенциал точечного заряда в ряд по пространственным гармоникам и найти второй ряд пространственных гармоник, описывающий потенциал вне сферы, создаваемый электризацией сферы.

По-видимому, никто из этих математиков не обнаружил, что этот второй ряд дает выражение для потенциала, создаваемого некоторым воображаемым точечным зарядом, который не существует физически как точечный заряд, но может быть назван электрическим изображением, потому что во внешних точках дейст-