ЧАСТЬ I
ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ГЛАВА I
ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЙ

Электризация трением

27. Опыт I [1]. Возьмем кусок стекла и кусок смолы, не обладающие каждый никакими электрическими свойствами, потрем их друг о друга и оставим натертые поверхности в контакте. Пока еще электрические свойства не будут проявляться. Отделим куски друг от друга. Они начнут взаимно притягиваться.

Если другой кусок стекла потереть о другой кусок смолы, отделить затем эти куски и подвесить их рядом с первыми двумя кусками стекла и смолы, то можно будет заметить: 1) что оба куска стекла отталкивают друг друга, 2) что каждый кусок стекла притягивается к каждому куску смолы, 3) что оба куска смолы отталкивают друг друга.

Эти явления притяжения и отталкивания называются *Электрическими* явлениями, а про тела, проявляющие такие свойства, говорят, что они *наэлектризованы*, или *заряжены электричеством*.

Тела могут быть наэлектризованы и многими другими способами, не только с помощью трения.

Электрические свойства обоих кусков стекла сходны между собой, но противоположны свойствам обоих кусков смолы; то, что отталкивается смолой, притягивается стеклом, а то, что притягивается смолой, отталкивается стеклом.

Если тело, наэлектризованное каким бы то ни было способом, ведет себя подобно стеклу, т. е. отталкивает стекло и притягивает смолу, то говорят, что тело заряжено *стеклообразно*, если же оно притягивает стекло и отталкивает смолу, говорят, что оно заряжено *смолообразно*. Все наэлектризованные тела, как оказалось, наэлектризованы либо стеклообразно, либо смолообразно.

Среди людей науки принято стеклообразную электризацию называть положительной, а смолообразную — отрицательной. Прямо противоположные свойства обоих видов электризации оправдывают приписывание им противоположных знаков, однако вопрос о том, какому из видов электричества приписывать положительный знак, следует считать предметом условного соглашения, подобно тому как чисто условным является откладывание положительных расстояний в графиках в правую сторону.

Между телом наэлектризованным и ненаэлектризованным нельзя обнаружить взаимодействия — ни притяжения, ни отталкивания. Если в каком-либо случае

---

[1] См. Sir W. Thomson, On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium, *Cambridge and Dublin Mathematicat Journal*, March, 1848.

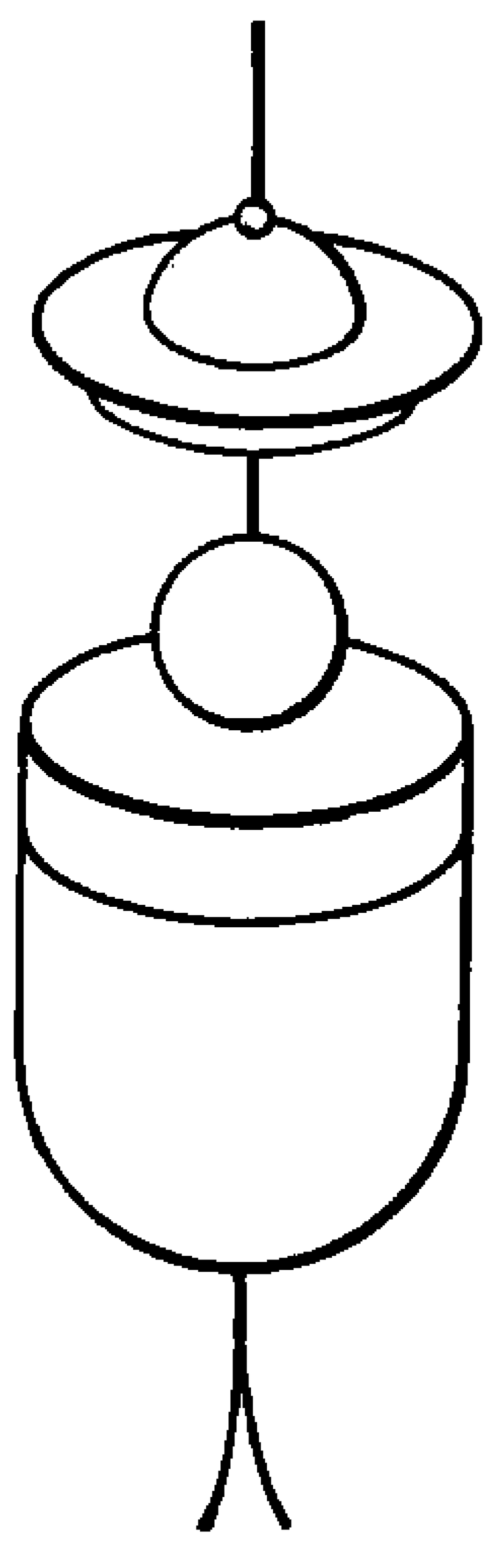

Рис. 4

мы замечаем, что ненаэлектризованные предварительно тела испытывают воздействие наэлектризованных, то это обусловлено тем, что эти тела *электризуются через индукцию.*

Электризация через Индукцию

28. Опыт II[2]. Пусть полый металлический сосуд подвешен на нитях из чистого шелка и пусть такая же нить прикреплена к крышке сосуда, так что сосуд можно открывать и закрывать, не прикасаясь к нему [рис. 4].

Пусть кусочки стекла и смолы, наэлектризованные как и раньше, тоже подвешены на нитях.

Пусть сосуд первоначально не был наэлектризован. Тогда, если наэлектризованный кусочек стекла подвесить внутри сосуда на нити, не касаясь сосуда, и закрыть крышку, то наружная часть сосуда окажется заряженной стеклообразно и можно показать, что степень электризации вне сосуда точно одна и та же, в каком бы месте внутри сосуда мы ни подвешивали кусочек стекла.

Если теперь вынуть кусочек стекла из сосуда, не прикасаясь к нему, то электризация стекла окажется той же, что и до его помещения в сосуд, а электризация сосуда исчезнет.

Такая электризация сосуда, зависящая от того, помещен ли внутрь него заряженный кусочек стекла, и исчезающая при удалении его, называется электризацией через Индукцию.

Сходные эффекты возникли бы в случае, если бы кусочек стекла был подвешен вне сосуда вблизи него, но в этом случае мы обнаружили бы стеклообразную электризацию на одной стороне наружной поверхности сосуда и смолообразную — на другой. Если кусочек стекла находится внутри сосуда, то вся наружная его поверхность заряжена стеклообразно, а вся внутренняя — смолообразно.

Электризация через Проводимость

29. Опыт III. Пусть металлический сосуд наэлектризован через индукцию, как в последнем опыте, и вблизи него на нити из чистого шелка подвешено другое металлическое тело. Внесем металлическую проволоку, также подвешенную на нити, таким образом, чтобы одновременно коснуться наэлектризованного сосуда и второго тела.

При этом второе тело окажется заряженным стеклообразно, а электризация сосуда уменьшится.

Состояние электризации передалось от сосуда второму телу через проволоку. Проволока называется *проводником* электричества, а про второе тело говорят, что оно *наэлектризовано через проводимость.*

---

[2] Этим и несколькими следующими опытами мы обязаны Фарадею (On Static Electrical Inductive Actions, *Phil. Mag.*, 1843 или *Exp. Res.*, vol. II, p. 279).

Проводники и Изоляторы

Опыт IV. Если вместо металлической проволочки использовать стеклянную палочку, брусок из смолы или гуттаперчи или нить из чистого шелка, то никакой передачи электричества не произойдет. Поэтому эти вещества называются Непроводниками электричества. Непроводники используются в опытах по электричеству для крепления наэлектризованных тел без утечки их электричества. В этом случае они называются Изоляторами.

Металлы являются хорошими проводниками. Воздух, стекло, смолы, гуттаперча, эбонит, парафин и т. п.— хорошие изоляторы. Но, как мы увидим ниже, все вещества оказывают сопротивление прохождению электричества и все они допускают такое прохождение, хотя и в чрезвычайно различной степени. Этот вопрос мы рассмотрим, когда перейдем к анализу движения электричества. Сейчас мы будем рассматривать только два класса тел: хорошие проводники и хорошие изоляторы.

В Опыте II наэлектризованное тело вызывает электризацию в металлическом сосуде, будучи отделенным от него воздухом, непроводящей средой. Такая среда, рассматриваемая как передающая электрические эффекты без проводимости, была названа Фарадеем Диэлектрической средой, а действие, передаваемое через нее, названо Индукцией.

В Опыте III наэлектризованный сосуд вызывает электризацию другого металлического тела через вещество проволоки. Предположим, что мы удалим проволоку, вынем из сосуда, не прикасаясь к нему, наэлектризованный кусочек стекла и удалим его на достаточно большое расстояние. Тогда второе тело все еще будет проявлять стеклообразную электризацию, но сосуд после удаления кусочка стекла будет иметь смолообразную электризацию. Если теперь соединить проволокой оба тела, то будет иметь место проводимость вдоль проволоки и вся электризация обоих тел исчезнет. Это показывает, что оба тела были наэлектризованы в равной степени, но противоположно.

30. Опыт V. В Опыте II было показано, что если кусочек стекла, наэлектризованный трением о смолу, подвесить внутри изолированного металлического сосуда, то наблюдаемая снаружи электризация не зависит от положения кусочка стекла. Если теперь ввести внутрь того же сосуда тот кусочек смолы, которым было натерто стекло, не прикасаясь при этом ни к стеклу, ни к сосуду, то окажется, что никакой электризации вне сосуда не возникнет. Отсюда мы заключаем, что электризация смолы в точности равна и противоположна электризации стекла. Помещая внутрь сосуда любое число тел, наэлектризованных любым способом, можно показать, что электризация вне сосуда представляет собой алгебраическую сумму всех электризаций, если смолообразную электризацию считать отрицательной. Мы имеем, таким образом, практический способ сложения электрических эффектов от различных тел без изменения состояния их электризации.

31. Опыт VI. Пусть в нашем распоряжении есть еще один металлический сосуд B и пусть наэлектризованный кусочек стекла помещается в первый сосуд A, а наэлектризованный кусочек смолы — во второй сосуд B. Соединим затем оба сосуда металлической проволочкой, как в Опыте III. Все признаки электризации при этом исчезнут.

Удалим теперь проволочку и вынем кусочки стекла и смолы из сосудов, не прикасаясь к ним. Окажется, что сосуд A наэлектризован смолообразно, а сосуд B — стеклообразно.

Если теперь стекло и сосуд A внести вместе внутрь большего изолированного металлического сосуда C, то обнаружится, что вне сосуда C нет никакой электризации. Это показывает, что электризация сосуда A в точности равна и противоположна электризации куска стекла. Таким же способом можно показать, что электризация сосуда B равна и противоположна электризации куска смолы.

Мы получили, таким образом, способ зарядки сосуда количеством электричества, в точности равным и противоположным количеству электричества на наэлектризованном теле без изменения состояния электризации этого тела. Мы можем таким образом зарядить любое количество сосудов в точности одинаковыми количествами электричества любого рода, которые мы можем принять в качестве временных единиц.

32. Опыт VII. Пусть сосуд B, заряженный некоторым количеством положительного электричества, которое мы примем пока за единицу, вносится в больший изолированный сосуд C, не прикасаясь к нему. Он вызовет положительную электризацию на внешней части сосуда C. Пусть теперь сосуд B соприкоснулся с внутренней поверхностью сосуда C. При этом никакого изменения внешней электризации не будет наблюдаться. Если теперь вынуть сосуд B из сосуда C, не коснувшись его, и унести его на достаточно большое расстояние, то окажется, что сосуд B полностью разряжен, а сосуд C заряжен единицей положительного электричества.

Мы имеем, таким образом, способ передачи заряда от B к C.

Зарядим теперь вновь B единицей электричества, введем его внутрь сосуда C, уже заряженного раньше, приведем его в соприкосновение с внутренностью сосуда C и удалим из сосуда. Сосуд B окажется при этом вновь полностью разряженным, так что заряд на C удвоится.

Повторяя этот процесс, можно установить, что, как бы сильно ни был предварительно заряжен сосуд C и каким бы способом ни заряжался сосуд B, если B вначале полностью окружен сосудом C, затем приведен в соприкосновение с C и, наконец, удален из C, не касаясь его, то заряд B полностью передается C и сосуд B оказывается полностью разряженным.

Этот опыт указывает нам способ зарядки тела произвольным числом единиц электричества. Когда мы перейдем к математической теории электричества, то увидим, что результаты этого опыта позволяют осуществить точную проверку истинности теории.

33. Прежде чем перейти к исследованию закона действия электрической силы, перечислим уже установленные нами факты.

Помещая любую наэлектризованную систему внутрь изолированного полого проводящего сосуда и изучая результирующий эффект вне сосуда, мы устанавливаем характер полной электризации системы, находящейся внутри сосуда, без какой-либо передачи электричества между различными телами системы.

Электризация наружной стороны сосуда может быть установлена с большой точностью путем подсоединения сосуда к электроскопу.

Мы можем считать электроскоп состоящим из листочка золотой фольги, подвешенного между двумя телами, одно из которых заряжено положительно, а другое — отрицательно. Если золотой листочек наэлектризован, то он отклоняется в сторону того тела, которое заряжено противоположно заряду электризации листочка. Увеличивая электризацию обоих тел и чувствительность подвески, можно добиться обнаружения чрезвычайно малой электризации золотого листочка.

Когда мы перейдем к описанию электрометров и умножителей, мы увидим, что существуют еще более тонкие методы обнаружения электризации и проверки точности наших теорий, но пока мы будем считать, что проверка производится соединением полого сосуда с золотым листочком электроскопа.

Этот метод применялся Фарадеем в его замечательных демонстрациях законов электрических явлений [3].

34. I. Полная электризация тела или системы тел остается неизменной, пока не происходит отдача электризации другим телам или получение ее от них.

Как было обнаружено, во всех опытах с электричеством электризация тел изменяется, но всегда оказывается, что это изменение обусловлено несовершенством изоляции и что по мере улучшения средств изоляции потери электризации становятся все меньше. Мы можем поэтому утверждать, что электризация тела, помещенного в идеально изолирующую среду, будет оставаться строго постоянной.

II. При электризации одного тела другим через проводимость полная электризация обоих тел остается той же, т. е. одно тело в такой же мере теряет положительную (или приобретает отрицательную) электризацию, в какой другое тело приобретает положительную (или теряет отрицательную) электризацию. Ибо, если оба эти тела заключить в полый сосуд, то не будет наблюдаться никакого изменения полной электризации.

III. При электризации тела трением или каким-либо другим известным способом образуются равные количества положительной и отрицательной электризации. Ибо электризация системы в целом может быть проведена в полом сосуде или же процесс электризации может производиться внутри самого сосуда, и, как бы сильно ни электризовались части системы, полная электризация, измеряемая отклонением листочка электроскопа, остается неизменно равной нулю.

Таким образом, электризация тела представляет собой физическую величину, поддающуюся измерению, и комбинация на опыте двух или нескольких электризаций происходит подобно алгебраическому сложению двух или нескольких величин. Поэтому мы в праве пользоваться языком, пригодным как для качественного, так и для количественного описания электризации, и говорить о любом наэлектризованном теле как о «заряженном определенным количеством положительного или отрицательного электричества».

35. Возведя электричество, как мы это сделали, в ранг физической величины, не следует слишком спешить с утверждением, что оно является или не является веществом, или же что оно является или не является формой энергии, или же что оно относится к какой-либо известной категории физических величин. Все, что мы до сих пор доказали,— это лишь то, что оно не может быть создано или уничтожено, так что если полное количество электричества внутри замкнутой поверхности увеличивается или уменьшается, то соответствующее количество электри-

---

[3] On Static Electrical Inductive Actions, *Phil. Mag.*, 1873 или *Exp. Res.*, vol. II, p. 279.

чества должно войти внутрь этой замкнутой поверхности или выйти через нее наружу.

Это верно для вещества и выражается уравнением, известным как Уравнение Непрерывности в Гидродинамике.

Это неверно для теплоты, ибо теплота внутри замкнутой поверхности может увеличиваться или уменьшаться без прохождения ее внутрь или наружу через эту поверхность за счет преобразования какой-либо другой формы энергии в теплоту или преобразования теплоты в какую-либо другую форму энергии.

Это неверно даже и для энергии в целом, если допускать непосредственное взаимодействие тел на расстоянии, потому что в этом случае тело, находящееся вне замкнутой поверхности, может обмениваться энергией с телом внутри этой поверхности. Но если все кажущиеся случаи действия на расстоянии представляют собой результат взаимодействия частей промежуточной среды, то можно полагать, что во всех случаях увеличения или уменьшения энергии внутри замкнутой поверхности можно обнаружить прохождение энергии через поверхность, если, конечно, имеется ясное представление о природе взаимодействия частей среды в данном случае.

Но есть еще одно соображение, оправдывающее наше утверждение, что электричество как физическая величина, равнозначная полной электризации тела, не является, подобно теплоте, формой энергии. Наэлектризованная система обладает определенной величиной энергии, и эта энергия может быть найдена умножением количества электричества в каждой части системы на другую физическую величину, называемую Потенциалом этой части системы, и вычислением полусуммы этих произведений. Величины «Количество электричества» и «Потенциал», будучи перемноженными друг на друга, образуют величину «Энергия». Поэтому невозможно, чтобы электричество и энергия были величинами одного типа, так как электричество — лишь один из факторов, определяющих энергию; другим фактором является «Потенциал».

Энергия, являющаяся произведением этих факторов, может рассматриваться также как произведение различных других пар величин, таких как

(сила)×(расстояние, на котором действует сила),
(масса)×(действие тяготения на определенном перепаде высот),
(масса)×(половина квадрата ее скорости),
(давление)×(объем жидкости, вводимый в сосуд при этом давлении),
(химическое сродство)×(химическое изменение, измеряемое числом электрохимических эквивалентов, входящих в соединение).

Если бы нам удалось получить ясное механическое представление о природе электрического потенциала, то в сочетании с представлением об энергии это позволило бы нам определить ту физическую категорию, к которой следует отнести «Электричество».

36. В большинстве теорий по этому вопросу Электричество трактуется как некоторое вещество, но поскольку существует два вида электризации и они, соединяясь, уничтожают друг друга, а мы не можем представить себе двух веществ, уничтожающих друг друга, то проводится различие между Свободным Электричеством и Электричеством Соединенным (связанным).

Теория Двух Жидкостей

В так называемой Теории Двух Жидкостей все тела в ненаэлектризованном состоянии предполагаются заряженными равным количеством положительного и отрицательного электричества. Эти количества электричества предполагаются столь большими, что ни в одном наблюдавшемся до сих пор процессе электризации тело не лишалось еще полностью электричества того или иного рода. Согласно этой теории, процесс электризации состоит в том, что определенное количество P положительного электричества отнимается у тела A и передается телу B, или определенное количество N отрицательного электричества отнимается у тела B и передается телу A, или же имеет место некоторое сочетание этих процессов.

В результате тело A будет иметь на $P+N$ единиц отрицательного электричества больше, чем осталось на нем положительного, причем это положительное электричество считается находящимся в соединенном (связанном) состоянии с равным количеством отрицательного электричества. Количество электричества $P+N$ называется Свободным, остальное электричество называется Связанным, Латентным (скрытым) или Фиксированным электричеством.

В большинстве изложений этой теории эти два вида электричества называются «Жидкостями», так как они способны передаваться от одного тела другому и крайне подвижны в проводящих телах. Другие свойства жидкостей, такие, например, как их инерция, вес, упругость, не приписываются электрическим жидкостям теми авторами, которые используют теорию в чисто математических целях. Но применение слова «Жидкость» способно сбить с толку людей несведующих, в том числе и многих ученых, которые, не являясь естествоиспытателями, хватаются за слово «Жидкость» как за единственный термин, показавшийся им понятным в утверждениях этой теории.

Мы увидим, что математическое рассмотрение вопроса в значительной мере было разработано авторами, пользующимися терминологией «Двухжидкостной» теории. Однако их результаты выведены исключительно из данных, поддающихся экспериментальной проверке, и, следовательно, должны быть истинны независимо от того, принимаем мы теорию двух жидкостей или нет. Поэтому опытное подтверждение математических результатов не является свидетельством ни за, ни против специфических доктрин этой теории.

Введение двух жидкостей позволяет нам рассматривать отрицательную электризацию A и положительную электризацию B как следствие *любого* из трех различных процессов, приводящих к одинаковому результату. Мы выше приняли, что электризация вызвана передачей P единиц положительного электричества от A к B и N единиц отрицательного электричества от B к A. Но если бы $P+N$ единиц положительного электричества было передано от A к B или же $P+N$ единиц отрицательного электричества было передано от B к A, то получающееся в результате количество «свободного электричества» на A и на B было бы такое же, как и раньше, но количество «связанного электричества» на A было бы во втором случае меньше, а в третьем больше, чем в первом.

Таким образом, согласно этой теории, казалось бы, можно изменять не только количество свободного электричества в теле, но и количество связанного электричества. Однако до сих пор не было обнаружено ни одного явления при электризации тел, в котором можно было бы проследить изменение в них количества связанного электричества. Таким образом, либо связанное электричество не имеет поддающихся наблюдению свойств, либо количество связанного электричества не может меняться. Первое предположение для чистого математика не представляет никаких трудностей; он не приписывает этим жидкостям никаких свойств, кроме притяжения и отталкивания, так как он считает эти жидкости просто уничтожающими друг друга, подобно $+e$ и $-e$, т. е. их комбинацию он считает истинным математическим нулем. Для тех же, кто не может пользоваться словом Жидкость, не думая при этом о веществе, трудно себе представить, как может смесь двух жидкостей не иметь вообще никаких свойств, так что добавление большего или меньшего количества этой смеси никак не сказывается на теле ни в увеличении его массы или веса, ни в изменении каких-либо других его свойств. Исходя из этого, некоторые авторы предположили, что в любом процессе электризации передается в точности одинаковое количество обеих жидкостей в противоположных направлениях, так что полное вместе взятое количество обеих жидкостей в любом теле остается всегда неизменным. С помощью этого нового закона они попытались «соблюсти приличия», забыв о том, что в этом законе нет никакой нужды, кроме как для согласования «Двухжидкостной» теории с фактами и предотвращения предсказания ею несуществующих явлений.

Теория Одной Жидкости

37. Теория Одной Жидкости отличается от теории Двух Жидкостей лишь тем, что оба вещества не считаются во всех отношениях одинаковыми, но противоположными; одному из них, обычно отрицательному, придаются свойства и наименование Обычного Вещества, а второе сохраняет название Электрической Жидкости. Частицы жидкости считаются отталкивающимися друг от друга, согласно закону обратной пропорциональности квадрату расстояния, и притягивающимися к частицам вещества, согласно тому же закону. Частицы вещества считаются отталкивающимися друг от друга и притягивающимися к частицам электричества.

Если тело содержит такое количество электрической жидкости, что частица электрической жидкости, находящаяся вне тела, настолько же отталкивается электрической жидкостью в теле, насколько она притягивается к веществу тела, то такое тело называется Насыщенным. Если количество жидкости в теле больше, чем требуется для насыщения, то излишек называют Избыточной жидкостью, а тело называется Перезаряженным. Если количество жидкости меньше насыщающего, то тело называется Недозаряженным, а количество жидкости, требуемое для его насыщения, называют иногда Недостающей жидкостью. Число единиц электричества, необходимое для насыщения одного грамма обычного вещества, должно быть очень большим, потому что грамм золота можно расплющить в лист площадью в квадратный метр и в таком виде он может иметь отрицательный заряд по крайней мере в 60 000 единиц электричества. Чтобы насытить заряженный таким образом лист золота, требуется ввести в него именно такое количество электрической жидкости, так что полное количество жидкости, необходимое для насыщения, должно быть больше этого. Предполагается, что притяжение между веществом и жидкостью в двух насыщенных телах чуть больше, чем отталкивание между веществом обоих тел и между их жидкостями. Эта остаточная сила считается ответственной за гравитационное притяжение.

Эта теория, как и Двухжидкостная, не слишком много объясняет. Но она заставляет нас считать массу электрической жидкости столь малой, что ни при каких достижимых положительных или отрицательных степенях электризации не обнаруживается увеличение или уменьшение массы или веса тела. Кроме того, эта теория до сих пор не в состоянии дать достаточно разумное основание тому, что именно стеклообразную, а не смолообразную электризацию следует считать обусловленной *избытком* электричества.

Против этой теории иногда выдвигалось одно возражение людьми, которым следовало бы рассуждать более мотивированно. Утверждалось, что учение о взаимном *отталкивании* тех частиц вещества, которые не связаны с электричеством, находится в прямом противоречии с хорошо установленным фактом, что любая частица вещества *притягивается* к любой другой частице всюду во Вселенной, и что если бы теория Одной Жидкости была верна, то небесные тела взаимно отталкивались бы.

Ясно, однако, что, согласно этой теории, если бы небесные тела состояли из вещества, не связанного с электричеством, то они были бы чрезвычайно сильно наэлектризованы отрицательно и взаимно расталкивались бы. Однако у нас нет никаких оснований полагать, что они находятся в таком сильно наэлектризованном состоянии или могли бы поддерживаться в таком состоянии. Земля и все тела, притяжение которых обнаружено, находятся, скорее всего, в ненаэлектризованном состоянии, т. е. содержат нормальный электрический заряд, и единственное взаимодействие между ними — это упомянутая выше остаточная сила. Значительно более оправданным основанием для возражений против этой теории является искусственный характер введения остаточной силы.

В настоящем трактате я предполагаю на различных стадиях исследования проверить эти различные теории в свете дополнительных классов явлений. Со своей стороны, я ожидаю дополнительного освещения природы электричества от изучения того, что имеет место в пространстве, разделяющем электрические тела. В этом характерная особенность манеры исследований, принятой Фарадеем в его «Экспериментальных Исследованиях», и по мере продвижения вперед я намерен представить результаты Фарадея, У. Томсона и др. в связной и математической форме, чтобы можно было почувствовать, какие явления описываются в равной мере хорошо всеми теориями, а какие указывают на присущие каждой теории трудности.

Измерение силы между наэлектризованными телами

38. Силы могут быть измерены различными способами. Например, одно из тел можно подвесить на одном плече чувствительных весов, уравновесив его в ненаэлектризованном состоянии разновесами, подвешенными ко второму плечу. После этого можно поместить под первым телом другое тело на известном расстоянии от него, так что притяжение или отталкивание тел при их электризации может увеличить или уменьшить кажущийся вес первого тела. Вес, который нужно добавить или убавить на втором плече, выраженный в динамических единицах, служит мерой силы между телами. Такое приспособление использовалось сэром К. Сноу Харрисом и принято в абсолютных электрометрах сэра У. Томсона (см. п. 217).

Иногда удобнее использовать крутильные весы, в которых горизонтальный стержень подвешен на тонкой проволочке или нити, так что он может колебаться вокруг вертикальной проволочки, как оси, а тело прикреплено к одному из концов стержня, и на него действует сила в касательном направлении, стремящаяся повернуть стержень вокруг вертикальной оси и закрутить нить подвески на некоторый угол. Крутильная жесткость проволочки находится измерением периода колебаний стержня, момент инерции которого заранее известен, а по углу закручивания и крутильной жесткости можно найти силу притяжения или отталкивания. Крутильные весы были придуманы Майчеллом (Michell) для определения силы гравитационного притяжения между двумя малыми телами и применены Кавендишем для этой цели. Кулон, работая независимо от этих исследователей, вновь изобрел их, тщательно исследовал их действие и успешно применил их для установления законов действия электрических и магнитных сил. С тех пор крутильные весы всегда используются в исследованиях, требующих измерения малых сил (см. п. 215).

39. Предположим, что мы можем каким-либо из этих методов измерить силу, действующую между двумя наэлектризованными телами. Будем считать, что размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними, так что результат мало изменится от какой-либо неравномерности в распределении электризации по любому из тел, и примем, что оба тела подвешены в воздухе так, что находятся на достаточно большом расстоянии от других тел, на которых они могли бы вызвать электризацию через индукцию.

Тогда оказывается, что если тела помещены на фиксированном расстоянии друг от друга и имеют заряды, равные соответственно e и e' наших временных единиц электричества, то они будут взаимно отталкиваться с силой, пропорциональной произведению e на e'. Если e или e' отрицательно, т. е. один из зарядов стеклообразный, а другой смолообразный, то тела будут притягиваться, если же и e, и e' отрицательны, то тела опять будут отталкиваться.

Мы можем считать, что первое тело A заряжено m единицами положительного и n единицами отрицательного электричества, которые можно считать отдельно помещенными на тело, как в Опыте V.

Пусть второе тело B заряжено m' единицами положительного электричества и n' единицами отрицательного.

Тогда каждая из m положительных единиц в теле A будет отталкивать каждую из m' положительных единиц в теле B с определенной силой, скажем, f, что дает полную силу $mm'f$.

Так как действие отрицательного электричества в точности равно и противоположно действию положительного, то каждая из m положительных единиц электричества в теле A будет притягивать каждую из n' отрицательных единиц в теле B с той же силой f, что дает полную силу $mn'f$.

Точно так же n отрицательных единиц в теле A притягивают m' положительных единиц тела B с силой $nm'f$ и отталкивают n' отрицательных единиц тела B с силой $nn'f$.

Таким образом, полное отталкивание равно $(mm'+nn')f$, а полное притяжение $(mn'+m'n)f$.

Результирующее отталкивание равно

$$(mm'+nn'-mn'-nm')f, \quad \text{или} \quad (m-n)(m'-n')f.$$

Но $m-n=e$ — алгебраическое значение заряда в теле A, а $m'-n'=e'$ — алгебраическое значение заряда в теле B, так что результирующее отталкивание можно записать в виде $ee'f$, где величины e и e' всегда подразумеваются взятыми с соответствующими знаками.

Изменение Силы с Расстоянием

40. Установив закон действия силы при фиксированном расстоянии, мы можем теперь измерить силу между телами с неизменным зарядом на разных расстояниях. Прямые измерения показали, что эта сила, как при отталкивании, так и при притяжении, меняется обратно пропорционально квадрату расстояния, так что если f — отталкивание двух единичных зарядов на единичном расстоянии, то отталкивание на расстоянии r равно fr^{-2}, а общее выражение для отталкивания зарядов в e и e' единиц на расстоянии r имеет вид $fee'r^{-2}$.

Определение Электростатической Единицы Электричества

41. До сих пор мы использовали в качестве единицы электричества совершенно произвольный эталон, а именно величину электризации некоторого определенного куска стекла, наэлектризованного в начале наших опытов. Теперь мы в состоянии выбрать единицу, руководствуясь определенным принципом; для того чтобы эта единица могла быть включена в общую систему единиц, мы определим ее так, чтобы f было равно единице. Иными словами — *электростатическая единица электричества — это такое количество положительного электричества, которое, находясь на единичном расстоянии от равного ему количества электричества, отталкивается от него с единичной силой.*

Эта единица называется Электростатической, в отличие от Электромагнитной единицы, которая будет введена позже.

Мы можем теперь записать общий закон электрического взаимодействия в простой форме:

$$F=ee'r^{-2},$$

или: *отталкивание между двумя малыми телами, заряженными соответственно e и e' единицами электричества, численно равно произведению зарядов, деленному на квадрат расстояния.*

Размерность Электростатической Единицы Электричества

42. Пусть $[Q]$ — определенная электростатическая единица электричества, e, e' — численные значения некоторых количеств электричества, $[L]$ — единица длины, а r — численное значение расстояния, $[F]$ — единица силы, а F — численное значение силы. Тогда наше уравнение принимает вид

$$F[F]=ee'r^{-2}[Q^2][L^{-2}],$$

откуда

$$[Q]=[LF^{1/2}]=[L^{3/2}T^{-1}M^{1/2}].$$

Эта единица называется Электростатической Единицей электричества. Для практических целей и в других разделах теории электричества могут применяться другие единицы, но в уравнениях электростатики количества электричества считаются всегда выраженными в электростатических единицах, подобно тому как в физической астрономии мы пользуемся единицей массы, основанной на явлении гравитации и отличающейся от обычной единицы массы.

Доказательство Закона Действия Электрической Силы

43. Можно считать, что опыты Кулона с крутильными весами установили закон действия электрической силы с определенной степенью точности. Однако опыты такого рода становятся трудными и до известной степени неточными из-за различных возмущающих причин, которые должны быть тщательно прослежены и учтены.

Прежде всего оба наэлектризованных тела должны иметь заметные размеры по сравнению с расстоянием между ними, чтобы быть в состоянии нести заряды, достаточные для создания измеримой силы. При этом под действием каждого тела происходит перераспределение электричества на другом теле, так что заряд уже нельзя считать равномерно распределенным по поверхности или сосредоточенным в центре тяжести. Учет этого эффекта требует сложных исследований. Эти исследования были все же весьма искусно проведены Пуассоном для двух сфер. Сэр У. Томсон в своей *Теории Электрических Изображений* сильно упростил это рассмотрение (см. п. 172—175).

Другая трудность вызывается действием электричества, индуцированного на стенках клетки, в которой находится прибор. Если внутреннюю поверхность прибора сделать металлической, то этот эффект станет определенным и измеримым.

Еще одна трудность возникает из-за несовершенства изоляции тел, в результате чего заряд постепенно уменьшается. Кулон исследовал закон этой диссипации и ввел поправку на него в своих опытах.

Методы изолирования заряженных проводников и измерения электрических эффектов значительно улучшены со времен Кулона, особенно сэром У. Томсоном. Однако высокая степень точности закона Кулона установлена не прямыми опытами и измерениями (которые можно использовать лишь для иллюстрации этого закона), а математическим анализом явления, описанного в Опыте VII, а именно того факта, что наэлектризованный проводник B, приведенный в соприкосновение с внутренней поверхностью полого замкнутого проводника C и удаленный затем из него без соприкосновения с C, оказывается совершенно разряженным, независимо от того, каким способом была наэлектризована внешняя поверхность проводника C. С помощью чувствительных электроскопов легко показать, что на B после этого не остается никакого заряда, а согласно математической теории, изложенной в п. 74 е, 74 г это возможно лишь в случае, если сила меняется обратно пропорционально квадрату расстояния; при другом виде закона тело B было бы наэлектризовано.

Электрическое Поле

44. Электрическое Поле — это часть пространства в окрестности наэлектризованных тел, рассматриваемая с точки зрения электрических явлений. Она может быть занята воздухом или другими телами или это может быть так называемый вакуум, из которого мы удалили всякое вещество, поддающееся воздействию имеющимися в нашем распоряжении средствами.

Если наэлектризованное тело поместить в какой-либо части электрического поля, то оно, вообще говоря, вызовет заметное возмущение в электризации других тел.

Но если это тело очень маленькое и заряд его очень мал, то возмущение электризации других тел незначительно, а положение тела можно считать определяемым его центром масс. При этом сила, действующая на тело, будет пропорциональна его заряду и меняет свой знак при изменении знака заряда.

Пусть e — заряд тела, а F — сила, действующая на тело в определенном направлении. Тогда при очень малых e сила F пропорциональна e, т. е. $F=Re$, где R зависит от распределения электричества на других телах в поле. Если бы заряд e можно было сделать равным единице, не возмущая электризации других тел, то мы имели бы $F=R$.

Назовем R Результатирующей Электродвижущей Напряженностью в данной точке поля. Когда мы захотим выразить векторный характер этой силы, мы будем обозначать ее готической буквой $\mathfrak{E}$.

Полная Электродвижущая Сила и Потенциал

45. Если малое тело, несущее малый заряд e, переместить из одной данной точки A в другую точку B по некоторому пути, то это тело будет испытывать в каждой точке пути действие силы Re, где R меняется от точки к точке вдоль пути. Пусть полная работа, совершаемая над телом электрической силой, равна Ee, тогда величина E называется Полной Электродвижущей Силой вдоль пути AB. Если путь представляет собой замкнутый контур и если при этом полная электродвижущая сила вдоль контура не равна нулю, то электричество не может находиться в равновесии и должен течь ток. Таким образом, в электростатике полная электродвижущая сила вдоль любого замкнутого контура должна равняться нулю, так что если A и B — две точки на контуре, то полная электродвижущая сила от A до B одна и та же вдоль обоих участков, на которые разбивается контур, а так как каждый из них можно менять независимо от другого, то полная электродвижущая сила от A до B одна и та же вдоль любого пути от A к B.

Если точка B принимается за начало отсчета для всех других точек, то полная электродвижущая сила от A до B называется Потенциалом точки A. Потенциал зависит только от положения точки A. При математических исследованиях точку B обычно помещают на бесконечно большом расстоянии от наэлектризованных тел. Положительно заряженное тело стремится двигаться из области большего положительного потенциала в область с меньшим положительным или же отрицательным потенциалом; тело, заряженное отрицательно, стремится двигаться в обратном направлении.

В проводнике электризация может свободно перемещаться относительно проводника. Поэтому если две части проводника имеют различные потенциалы, то положительное электричество перемещается из области большего потенциала в область меньшего потенциала до тех пор, пока эта разность потенциалов существует. Таким образом, проводник не может находиться в электрическом равновесии, если все точки проводника не имеют одинакового потенциала. Этот потенциал и называется Потенциалом Проводника.

Эквипотенциальные Поверхности

46. Если реальная или воображаемая поверхность в электрическом поле такова, что электрический потенциал во всех ее точках один и тот же, то эта поверхность называется Эквипотенциальной Поверхностью.

Заряженная частица, вынужденная оставаться на этой поверхности, не проявляет стремления переместиться из одной точки поверхности в другую, поскольку потенциал во всех точках один и тот же. Таким образом, эквипотенциальная поверхность является поверхностью равновесия или поверхностью уровня.

Результирующая сила, действующая в каждой точке поверхности, направлена вдоль нормали к поверхности, а величина силы такова, что работа, совершаемая над единицей электричества при ее перемещении с поверхности V на поверхность V', равна $V—V'$.

Никакие две эквипотенциальные поверхности, имеющие различные потенциалы, не могут пересечься, так как одна и та же точка не может обладать несколькими значениями потенциала, но эквипотенциальная поверхность может пересекаться сама с собой. Это имеет место во всех точках и вдоль всех линий равновесия. При электрическом равновесии поверхность проводника обязательно является эквипотенциальной поверхностью. Если проводник заряжен положительно по всей своей поверхности, то потенциал будет уменьшаться при удалении от поверхности в любом направлении и проводник будет окружен последовательностью поверхностей меньшего потенциала.

Если же (под действием внешних наэлектризованных тел) одни участки поверхности проводника заряжены положительно, а другие отрицательно, то полная эквипотенциальная поверхность будет состоять из поверхности самого проводника и совокупности других поверхностей, смыкающихся с поверхностью проводника вдоль линий, разделяющих области с положительным и отрицательным зарядом. Эти линии будут линиями равновесия: за заряженную частицу, помещенную на одной из таких линий, ни в каком направлении не будет действовать никакая сила.

Если часть поверхности проводника заряжена положительно, а часть отрицательно, то кроме этого проводника в поле обязательно должно присутствовать еще одно заряженное тело. Ибо если допустить, что положительно заряженная частица движется все время в направлении результирующей силы, начиная с положительно заряженной части поверхности, то потенциал у частицы будет непрерывно уменьшаться до тех пор, пока частица либо попадет на отрицательно заряженную поверхность, находящуюся при потенциале, меньшем потенциала проводника, либо уйдет в бесконечность. Поскольку потенциал на бесконечности равен нулю, то последний случай может иметь место лишь при положительном потенциале проводника.

Точно так же отрицательно заряженная частица, начинающая движение с отрицательно заряженной части поверхности, должна либо попасть на положительно заряженную поверхность, либо уйти в бесконечность, причем последнее возможно лишь при отрицательном потенциале проводника.

Таким образом, если на проводнике имеются как положительные, так и отрицательные заряды, то в поле должно быть еще какое-то тело с потенциалом того же знака, что и потенциал этого проводника, но большей абсолютной величины.

Если же проводник произвольной формы находится один в поле, то заряд любого его участка будет того же знака, что и потенциал проводника.

Внутренняя поверхность полого проводящего сосуда, не содержащего заряженных тел, совершенно лишена зарядов. Действительно, если бы какой-то участок поверхности был заряжен положительно, то положительно наэлектризованная частица, движущаяся от этого участка в направлении действующей на нее силы, должна была бы достигнуть отрицательно заряженной поверхности, находящейся под меньшим потенциалом. Но вся внутренняя поверхность проводника имеет один и тот же потенциал. Таким образом, на ней не может быть никакого заряда.

Проводник, помещенный внутрь сосуда и соединенный с ним, может рассматриваться как ограниченный внутренней поверхностью. Поэтому на таком проводнике заряда нет.

Силовые Линии

47. Линия, описываемая точкой, движущейся все время в направлении результирующей напряженности, называется Силовой Линией. Она пересекает эквипотенциальные поверхности под прямым углом. Свойства силовых линий будут в дальнейшем рассмотрены более подробно, так как Фарадей выразил многие законы электрического взаимодействия через введенное им понятие силовых линий, проходящих в электрическом поле и указывающих как направление, так и напряженность в каждой точке.

Электрическое Натяжение

48. Поскольку поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью, результирующая напряженность перпендикулярна этой поверхности. В п. 80 будет показано, что она пропорциональна поверхностной плотности электризации. Таким образом, на электричество, находящееся на небольшом участке поверхности проводника, действует сила, направленная *от* проводника и пропорциональная произведению результирующей напряженности на плотность, т. е. пропорциональная квадрату результирующей напряженности.

Эту силу, действующую подобно натяжению наружу на каждый участок поверхности проводника, мы назовем электрическим Натяжением. Подобно обычному механическому натяжению, оно измеряется силой, действующей на единицу площади.

Слово Натяжение (Tension) употребляется в электричестве в нескольких довольно неопределенных значениях, и в математическом языке его пытаются использовать как синоним Потенциала. Однако, рассмотрев различные применения этого слова, я полагаю, что наиболее соответствует его применению и механической аналогии понимание натяжения как тянущей силы во столько-то фунтов веса на квадратный дюйм поверхности проводника или какой-либо иной поверхности. Мы увидим, что представление Фарадея о том, что это электрическое натяжение существует не только на заряженной поверхности, но и вдоль всей длины силовых линий, приводит к теории электрического взаимодействия как явления напряжения (stress) в среде.

Электродвижущая Сила

49. При соединении тонкой проводящей проволокой двух проводников с различными потенциалами стремление электричества течь по проводу измеряется разностью потенциалов обоих тел. Поэтому разность потенциалов между двумя проводниками или между двумя точками называется Электродвижущей Силой между ними.

Не во всех случаях электродвижущая сила может быть выражена в виде разности потенциалов. Однако такие случаи не рассматриваются в Электростатике. Мы встретимся с ними, когда перейдем к кусочно-однородным (heterogeneous) контурам, химическим действиям, движениям магнитов, неодинаковым температурам и т. п.

Емкость Проводника

50. Пусть один проводник изолирован, а все окружающие его проводники находятся под нулевым потенциалом, будучи соединенными с землей, и пусть этот проводник, заряженный количеством электричества E, имеет потенциал V. Тогда отношение E к V называется Емкостью проводника. Если проводник полностью заключен внутри проводящего сосуда, не прикасаясь к нему, то заряд на внутреннем проводнике будет равен и противоположен по знаку заряду на внутренней поверхности внешнего проводника и будет равен емкости внутреннего проводника, умноженной на разность потенциалов между обоими проводниками.

Электрические Накопители

Система, состоящая из двух проводников, прилегающие поверхности которых отделены друг от друга тонким слоем изолирующей среды, называется электрическим Накопителем (Accumulator). Эти два проводника называют Электродами, а изолирующая среда называется Диэлектриком. Емкость накопителя прямо пропорциональна площади прилегающих поверхностей и обратно пропорциональна толщине слоя между ними. Лейденская банка является накопителем, в котором изолирующей средой является стекло. Накопители иногда называют конденсаторами, но я предпочитаю ограничить применение термина «конденсатор» лишь к приборам, служащим не для хранения электричества, а для увеличения его поверхностной плотности.

СВОЙСТВА ТЕЛ В ИХ ОТНОШЕНИИ К СТАТИЧЕСКОМУ ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ

Сопротивление прохождению электричества через тело

51. Если электрический заряд передается некоторой части металлического тела, то электричество быстро перемещается из областей высокого потенциала в области низкого до тех пор, пока потенциал всего тела не становится одинаковым. Для образцов металла, применяемых в обычных экспериментах, этот процесс совершается за столь малое время, что его нельзя измерить, однако в случае очень длинных и тонких проводов, таких, например, как в телеграфии, потенциал уравнивается лишь по истечении некоторого вполне ощутимого промежутка времени вследствие сопротивления провода прохождению электричества по нему.

Различные вещества очень сильно различаются по сопротивлению прохождению электричества, как можно видеть из таблиц в п. 362, 364 и 367, которые будут пояснены при рассмотрении Электрических Токов.

Все металлы являются хорошими проводниками, хотя сопротивление свинца в 12 раз больше сопротивления меди или серебра, сопротивление железа в 6 раз больше, а сопротивление ртути в 60 раз больше сопротивления меди. Сопротивление всех металлов увеличивается с повышением температуры.

Многие жидкости проводят электричество посредством электролиза. Проводимость такого рода будет рассмотрена в части II. Здесь же мы можем рассматривать все жидкости, содержащие воду, и все влажные вещества как проводники, значительно уступающие металлам, но неспособные изолировать электрический заряд в течение времени, достаточного для наблюдения. Сопротивление электролитов уменьшается с ростом температуры.

С другой стороны, газы при атмосферном давлении, как сухие, так и влажные, являются столь совершенными изоляторами при малых электрических натяжениях, что мы до сих пор не имеем свидетельств прохождения через них электричества за счет обычной проводимости. Постепенная потеря заряда наэлектризованным телом всегда в конце концов сводится к несовершенной изоляции опоры: электричество утекает либо через вещество его опоры, либо вдоль ее поверхности.

Поэтому если рядом подвешены два заряженных тела, то их заряд будет сохраняться дольше, если они заряжены разноименно, нежели в случае одноименного заряда. Ибо хотя электродвижущая сила, стремящаяся вызвать движение электричества через газ, разделяющий проводники, значительно больше в случае противоположного заряда тел, никакой заметной потери заряда через газ не наблюдается. Фактические потери происходят через опоры, а электродвижущая сила через опоры больше при одноименных зарядах тел.

Этот результат кажется странным лишь до тех пор, пока мы ожидаем утечки заряда за счет прохождения электричества через воздух между телами. Прохождение электричества через газы имеет место при пробое и не наступает, прежде чем электродвижущая напряженность достигнет определенного значения.

Предельное значение электродвижущей напряженности в диэлектрике, не вызывающей в нем разряда, называется Электрической Прочностью диэлектрика. Электрическая прочность воздуха уменьшается по мере понижения давления от атмосферного до примерно трех миллиметров ртутного столба. При дальнейшем уменьшении давления электрическая прочность быстро увеличивается, а при максимально достижимом в настоящий момент разряжении электродвижущая напряженность, необходимая для получения искры в четверть дюйма длиной, больше напряженности, вызывающей восьмидюймовую искру при обычном давлении.

Таким образом, вакуум, т. е. то, что остается в сосуде после того, как из него удалено все, что можно удалить, является изолятором с очень большой электрической прочностью.

Электрическая прочность водорода значительно меньше, чем прочность воздуха при том же давлении.

Некоторые сорта стекла в холодном состоянии являются изумительно хорошими изоляторами. Сэр У. Томсон сохранял электрические заряды в герметически запаянных колбах в течение нескольких лет. Однако то же стекло становится проводником при температуре, не превосходящей температуры кипения воды.

Гуттаперча, каучук, эбонит, парафин и смолы являются хорошими изоляторами; так сопротивление гуттаперчи при 75° F в 6×10^{19} раз больше сопротивления меди.

Лед, кристаллы и затвердевшие электролиты также являются изоляторами.

Некоторые жидкости, как, например, керосин, скипидар и некоторые масла, также являются изоляторами, но значительно уступающими хорошим твердым изоляторам.

ДИЭЛЕКТРИКИ

Удельная индуктивная способность

52. Все вещества, изолирующая способность которых такова, что при их помещении между двумя проводниками, находящимися под различным потенциалом, действующая на них электродвижущая сила не производит немедленного перераспределения электричества до установления постоянного значения потенциала, названы Фарадеем Диэлектриками.

Из пока не опубликованных работ Кавендиша видно, что он еще до 1773 г. измерил емкость пластин из стекла, смолы, пчелиного воска и шеллака и установил, во сколько раз их емкость больше емкости воздушной пластины тех же размеров.

Фарадей, которому эти исследования не были известны, установил, что емкость накопителя зависит от природы изолирующей среды между проводниками, а также от размеров самих проводников и их взаимного расположения. Заменяя воздух в накопителе на другие изолирующие среды в качестве диэлектрика и оставляя его во всем остальном неизменным, Фарадей установил, что при замене воздуха другими газами емкость заметно не меняется, но при замене воздуха на шеллак, серу, стекло и т. п. емкость воздуха возрастает в отношении, различном для разных веществ.

Благодаря применению более тонких методов измерения Больцману удалось заметить зависимость индуктивной способности газов от давления.

Эта характеристика диэлектриков, названная Фарадеем Удельной Индуктивной Способностью, называется также Диэлектрической Постоянной вещества. Она определяется как отношение емкости накопителя, в котором диэлектриком служит данное вещество, к емкости этого же накопителя с вакуумным диэлектриком.

Если диэлектрик является плохим изолятором, то измерить его диэлектрическую постоянную довольно трудно, так как заряд в накопителе не будет держаться достаточно долго, чтобы можно было произвести измерения. Однако ясно, что индуктивная способность существует не только для хороших изоляторов; возможно, она существует вообще для всех тел.

Поглощение электричества

53. Было обнаружено, что при использовании некоторых диэлектриков в накопителе имеют место следующие явления. Если накопитель был заряжен в течение некоторого времени, затем внезапно разряжен и вновь изолирован, то он становится опять заряженным электричеством того же знака, что и раньше, но в меньшей степени, так что он может быть вновь разряжен несколько раз подряд все более слабыми разрядами. Это явление называется Остаточным Разрядом.

Мгновенный разряд оказывается всегда пропорциональным разности потенциалов в момент разряда, и отношение этих величин является истинной емкостью накопителя. Но если контакт с разряжающим элементом длительный, так что включает несколько остаточных разрядов, то кажущаяся емкость накопителя, рассчитанная при таком разряде, получится слишком большой.

Если такой накопитель зарядить и оставить изолированным, то кажется, что он теряет свой заряд за счет проводимости. Однако, как было показано, вначале относительная потеря заряда происходит значительно быстрее, чем позже, так что величина проводимости, если ее определить по начальному периоду, будет слишком большой. Так, при испытании изоляции подводного кабеля создается впечатление, что его изоляция улучшается по мере его электризации.

Аналогичные на первый взгляд явления имеют место при передаче тепла в случае, когда противоположные стороны тела поддерживаются при разных температурах. В случае теплоты мы знаем, что это объясняется теплотой, передаваемой самому телу или отдаваемой им. Поэтому и в случае электрических явлений было выдвинуто предположение, что электричество поглощается или испускается частями тела. Однако мы увидим в п. 329, что эти явления можно объяснить, не прибегая к гипотезе о поглощении электричества, приняв, что диэлектрик в некоторой степени неоднороден.

То, что эти явления, называемые Поглощением электричества, не есть истинное поглощение электричества веществом, можно показать, зарядив каким-либо образом электричеством тело, окруженное металлическим изолированным сосудом. Если после зарядки и изоляции этого тела мгновенно разрядить сосуд и оставить изолированным, то никакой заряд не будет впоследствии передан сосуду за счет постепенного растекания электричества с заряженного тела, находящегося внутри него.

54. Этот факт выражается утверждением Фарадея о том, что нельзя зарядить вещество абсолютным и независимым зарядом электричества одного рода [4].

Действительно, из всех проведенных экспериментов следует, что, каково бы ни было электрическое взаимодействие в системе тел, окруженных металлическим сосудом, заряд на внешней поверхности сосуда остается неизменным.

Между тем если бы какая-то часть электричества могла быть введена в тело и поглощена им, или переведена в скрытое состояние, или каким-либо образом могла существовать в нем, не будучи связанной с равной частью противоположного электричества линиями индукции, или же если бы это поглощенное электричество могло постепенно освобождаться и возвращаться в свое обычное состояние, то мы наблюдали бы некоторое изменение электризации окружающего сосуда.

Поскольку это никогда не наблюдается, Фарадей делает вывод, что нельзя сообщить абсолютный заряд веществу и что никакая часть материи не может за счет какого-либо изменения своего состояния испустить или поглотить тот или иной вид электричества. Поэтому он рассматривает индукцию как имеющую «существенную функцию при первом развитии и при последующих явлениях электричества». Его «индукция» (п. 1298) представляет собой поляризованное состояние

[4] *Exp. Res.*, vol. I, Series XI, II. «On the Absolute Charge of Matter» and § 1244.

частиц диэлектрика; каждая частица положительна с одного конца и отрицательна с другого, причем положительная и отрицательная электризация в каждой частице всегда в точности равны.

Пробой [5]

55. Если электродвижущую напряженность в какой-либо точке диэлектрика постепенно увеличивать, то в конце концов достигается предел, при котором происходит внезапный разряд через диэлектрик, обычно сопровождаемый светом и шумом и временным или постоянным разрушением диэлектрика.

Электродвижущая напряженность, при которой это имеет место, является мерой того, что мы можем назвать электрической прочностью диэлектрика. Она зависит от природы диэлектрика, для плотного воздуха она больше, чем для разреженного, для стекла больше, чем для воздуха, но во всех случаях при достаточно большой электродвижущей силе диэлектрик не выдерживает, его изолирующая способность рушится и по диэлектрику протекает электрический ток. Именно по этой причине не могут существовать распределения электричества, при которых где-либо напряженность поля становится бесконечной.

Электрическое свечение

Так, для заряженного проводника с острием теория, основанная на гипотезе сохранения заряда, приводит к выводу, что по мере приближения к острию поверхностная плотность электричества неограниченно возрастает, так что в самой точке острия поверхностная плотность, а значит, и электродвижущая напряженность будут бесконечны. Если бы у воздуха или другого окружающего диэлектрика была неограниченная изолирующая способность, это действительно имело бы место. Фактически же, как только результирующая напряженность в окрестности острия достигает определенного предела, изолирующая способность воздуха исчезает и воздух вблизи острия становится проводником. На некотором расстоянии от острия результирующая напряженность недостаточна для нарушения изоляции воздуха, так что электрический ток обрывается и в воздухе вокруг острия накапливается электрический заряд.

Таким образом, острие окружено частицами воздуха, заряженными электричеством того же рода, что и на острие. Этот заряженный воздух, окружающий острие, приводит к освобождению воздуха у самого острия от части той огромной электродвижущей напряжености, которая была бы при электризации одного лишь проводника. Фактически поверхность наэлектризованного тела теперь уже не имеет острия, так как острие окружено областью заряженного воздуха; теперь уже не граница твердого проводника, а плавная граница этой области может рассматриваться как внешняя наэлектризованная поверхность.

Если бы эта область заряженного воздуха оставалась неподвижной, то наэлектризованное тело сохраняло бы свой заряд, если не на самом себе, то, по крайней мере, в своей окрестности. Однако заряженные частицы воздуха, которым ничто не мешает перемещаться под действием электрической силы, стремятся удалиться от заряженного тела, поскольку оно заряжено электричеством того же рода. Поэтому заряженные частицы стремятся удалиться по направлению сило-

[5] Faraday, *Exp. Res.*, vol. I, Series XII and XIII.

вых линий и приблизиться к тем окружающим телам, которые имеют противоположную электризацию. На место ушедших частиц в область вблизи острия приходят другие, незаряженные частицы. Они уже не защищают частиц у самого острия от чрезмерного электрического натяжения, так что имеет место новый разряд, после чего вновь образовавшиеся заряженные частицы уходят от острия, и так до тех пор, пока тело остается заряженным.

Таким образом, получается следующее явление: на острие и вблизи него наблюдается постоянное свечение, вызываемое постоянным разрядом между острием и окружающем его воздухом.

Заряженные частицы воздуха стремятся удаляться в одном и том же направлении, вызывая тем самым течение воздуха от острия, состоящее из заряженных частиц, возможно, увлекающих собою незаряженные. Искусственно способствуя этому течению, мы можем увеличить свечение, а воспрепятствовав образованию течения, можем прервать свечение [6].

Электрический ветер вблизи острия бывает иногда весьма сильным, однако скорость его быстро падает, и воздух вместе с заряженными частицами переносится дальше общим движением атмосферы, образуя невидимое электрическое облако. Когда заряженные частицы приближаются к какой-либо проводящей поверхности, например к стенке, они наводят на этой поверхности заряд противоположного знака и притягиваются к стенке, но поскольку электродвижущая сила очень мала, они могут длительное время оставаться вблизи стенки, не притягиваясь к ней и не разряжаясь.

Таким образом, они образуют электрическую атмосферу вокруг проводника, наличие которой иногда обнаруживается электрометрами. Однако силы взаимодействия больших масс заряженного воздуха друг с другом и с другими телами чрезвычайно малы по сравнению с обычными силами, вызывающими ветер, зависящими от неодинаковости плотности, обусловленной разностью температур. Поэтому совершенно невероятно, чтобы электрическое взаимодействие вносило заметный вклад в движение обычных грозовых облаков.

Перемещение электричества из одного места в другое за счет движения заряженных частиц называется Электрической Конвекцией или Конвективным Разрядом.

Таким образом, электрическое свечение вызывается постоянным прохождением электричества по воздуху в небольшой области, где натяжение столь велико, что окружающие частицы воздуха заряжаются и непрерывно увлекаются электрическим ветром, являющимся существенной стороной явления.

Свечение легче образуется в разреженном воздухе, чем в плотном, и легче при положительном заряде острия, чем при отрицательном. Это одно из многих отличий положительного электричества от отрицательного, изучение которых необходимо для выявления природы электричества. Однако ни одна из существующих теорий это отличие не учитывает.

---

[6] См. Priestley, «*History of Electricity*», p. 117 and 591 и Cavendish, «Electrical Researches», *Phil. Trans.*, 1771, § 4 или Art. 125 в «*Electrical Researches of the Honourabte Henry Cavendish*».

Электрическая Щетка

56. Электрическая Щетка — это явление, получающееся при электризации затупленного острия или небольшого шарика, когда возникает электрическое поле, натяжение которого уменьшается с расстоянием, но не так быстро, как вблизи острия. Явление состоит в последовательности разрядов, разветвляющихся по мере удаления от шарика и заканчивающихся либо в заряженных областях воздуха, либо на других проводниках. Оно сопровождается звуком, тон которого зависит от интервала между последовательными разрядами. В отличие от случая свечения, никакого потока воздуха не наблюдается.

Электрическая искра

57. Если натяжение в пространстве между двумя проводниками значительно на всем пути между ними, как, например, в случае двух шаров, расстояние между которыми не велико по сравнению с их радиусами, то разряд, если он реализуется, обычно принимает форму искры, при которой почти весь заряд переносится одновременно.

В этом случае, если какая-либо часть диэлектрика не выдержала, то участки, прилегающие к ней по обе стороны в направлении электрической силы, оказываются в состоянии большего натяжения и также не выдерживают, и, таким образом, разряд происходит прямо по диэлектрику, подобно тому как лист бумаги, надорванный с краю, начинает рваться под действием натяжения сначала в месте надрыва, а затем случайным образом по тем местам, где бумага слабее. Точно так же электрическая искра начинается в том месте, где электрическое натяжение впервые преодолеет изоляцию диэлектрика, а затем расходится от этого места на вид весьма нерегулярным образом, проходя по другим слабым местам, например по частицам пыли, взвешенной в воздухе.

Все эти явления существенно различны в разных газах и даже в одном газе при разных давлениях. Некоторые виды электрического разряда в разреженных газах особенно замечательны. В некоторых случаях наблюдается регулярное чередование светящихся и темных слоев, так что, например, при прохождении электричества вдоль трубки, заполненной сильно разреженным газом, видно несколько светящихся дисков, перпендикулярных оси трубки, расположенных через почти одинаковые интервалы вдоль оси и разделенных темными слоями. С увеличением силы тока появляются дополнительные диски и все диски располагаются теснее. В трубке, описанной г-ном Гассио (Gassiot) [7], свечение дисков носит голубоватый оттенок на отрицательной стороне, красноватый — на положительной и ярко-красный — в центре.

Эти и многие другие явления электрического разряда чрезвычайно важны. Их лучшее понимание, возможно, прольет свет как на природу электричества, так и на природу газов и среды, заполняющей пространство. В настоящий момент, однако, они находятся за пределами математической теории электричества.

Электрические явления в турмалине

58. Некоторые кристаллы турмалина и других минералов обладают свойством, которое можно назвать Электрической Полярностью. Пусть кристалл турмали-

[7] *Intellectual Observer*, March, 1866.

на находится при постоянной температуре и не обладает никакой видимой электризацией на поверхности. Повысим теперь температуру кристалла, не нарушая его изоляции. При этом один край кристалла зарядится положительно, а другой — отрицательно. Снимем с поверхности эту видимую электризацию, например, с помощью пламени или иным способом. Если после этого нагреть кристалл еще больше, то на нем появится электризация того же знака, что и раньше, а если его охладить, то край, бывший при нагреве положительным, станет отрицательным.

Такая электризация наблюдается на концах кристаллографической оси. Некоторые кристаллы заканчиваются шестигранной пирамидой с одного конца и трехгранной — с другого. В таких кристаллах край с шестигранной пирамидой заряжается положительно, а с трехгранной — отрицательно.

Сэр У. Томсон предполагает, что каждый участок такого гемиэдрального кристалла и подобных ему имеет определенную электрическую полярность, величина которой зависит от температуры. Находясь в пламени, каждый участок поверхности электризуется ровно настолько, чтобы точно нейтрализовать во всех внешних точках влияние внутренней полярности. Кристал не будет при этом оказывать никакого внешнего электрического воздействия и не будет стремиться изменить свое состояние электризации. Но при нагреве или охлаждении внутренняя поляризация каждой частицы кристалла меняется и уже не может быть уравновешена поверхностной электризацией, так что возникает результирующее внешнее воздействие.

План трактата

59. В нижеследующем трактате я предполагаю сначала изложить обычную теорию электрического действия, которая считает, что оно зависит лишь от наэлектризованных тел и их взаимного расположения, и не учитывает каких-либо явлений в разделяющей их среде. Таким образом, мы установим закон обратных квадратов, теорию потенциала и уравнения Лапласа и Пуассона. Затем мы перейдем к зарядам и потенциалам системы заряженных проводников, связанным системой уравнений, коэффициенты которой можно считать определяемыми экспериментально в тех случаях, когда существующие математические методы неприменимы. Из этих уравнений мы найдем механические силы, действующие между различными заряженными телами.

Затем мы исследуем некоторые общие теоремы, которыми Грин, Гаусс и Томсон указали условия разрешимости задач о распределении электричества. Одно из утверждений этих теорем гласит, что если какая-либо функция удовлетворяет уравнению Пуассона и если на поверхности каждого проводника она принимает значение, совпадающее со значением потенциала этого проводника, то эта функция дает значение истинного потенциала системы в любой точке. Мы выведем также метод нахождения задач, допускающих точное решение.

В теореме Томсона полная энергия системы выражается в виде интеграла от определенной величины по всему пространству между заряженными телами, а также в виде интеграла по одним лишь заряженным поверхностям. Тождественности этих двух выражений можно дать физическую интерпретацию. Физическую взаимосвязь между заряженными телами можно понимать либо как результат состояния разделяющей их среды, либо как результат прямого взаимодействия заряженных тел на расстоянии. Если мы принимаем вторую точку зрения, мы можем установить закон взаимодействия, но не можем уже рассуждать о причине этого закона. Если же, наоборот, принять представление о действии через среду, то возникает вопрос о природе этого воздействия в каждой точке среды.

Из этой теоремы следует, что если говорить о распределении электрической энергии в различных частях диэлектрической среды, то количество энергии в каждом малом объеме среды должно зависеть от квадрата результирующей электродвижущей напряженности в этом месте, умноженного на коэффициент, названный ранее удельной индуктивной способностью среды.

Однако при рассмотрении теории диэлектриков с более общей точки зрения целесообразнее различать электродвижущую напряженность в каждой точке и электрическую поляризацию среды в этой точке, так как, хотя эти направленные величины и связаны друг с другом, в некоторых твердых веществах они направлены неодинаково. Самое общее выражение для электрической энергии среды в единице объема — половина произведения электродвижущей напряженности на электрическую поляризацию и на косинус угла между их направлениями. Во всех жидких диэлектриках электродвижущая напряженность и электрическая поляризация направлены одинаково и их отношение постоянно.

Если мы посчитаем по этой гипотезе полную энергию, сосредоточенную в среде, мы найдем, что она равна энергии зарядов на проводниках по гипотезе прямого взаимодействия на расстоянии. Таким образом, обе гипотезы математически эквивалентны.

Если мы теперь перейдем к исследованию механического состояния среды исходя из гипотезы, что наблюдаемое механическое взаимодействие наэлектризованных тел осуществляется через и посредством среды, подобно тому как в обычном случае воздействие одного тела на другое — через натяжение веревки или давление стержня, то мы придем к выводу, что среда должна находиться в состоянии механического напряжения.

Как показал Фарадей [8], это напряжение заключается в натяжении вдоль силовых линий и равном ему давлении по всем направлениям, перпендикулярным силовым линиям. Величина этих напряжений пропорциональна энергии электризации на единицу объема, т. е., иными словами, пропорциональна квадрату результирующей электродвижущей напряженности, умноженной на удельную индуктивную способность среды.

Такое распределение напряжения является единственным, согласующимся с наблюдаемым механическим воздействием на заряженные тела, а также с наблюдаемым равновесием жидкого диэлектрика, окружающего их. Поэтому я счел научно оправданным шагом признание фактического существования этого состояния напряжения и вывод следствий из этого предположения. Встретив выражение *электрическое натяжение* в различных, точно не очерченных значениях, я попытался ограничить его смысл тем значением, которое, как мне представляется, подразумевали некоторые из употреблявших это выражение, а именно состояние напряжения в диэлектрической среде, вызывающее движение заряженных тел и приводящее при постепенном увеличении к пробою.

При таком понимании электрическое натяжение является величиной такого же рода и измеряемой тем же способом, что и натяжение веревки, а о диэлектрической

---

[8] *Exp. Res.*, Series XI, 1297.

среде, могущей испытывать натяжение не более некоторого определенного значения, можно сказать, что она имеет определенную прочность точно в том же смысле, как мы говорим об определенной прочности веревки. Так, например, Томсон установил, что воздух при обычном давлении и температуре может выдержать электрическое натяжение в 9600 гран на квадратный фут, прежде чем образуется искра.

60. Из гипотезы о том, что электрическое воздействие не является прямым взаимодействием тел на расстоянии, а передается через среду между двумя телами, мы пришли к выводу, что эта среда должна находиться в напряженном состоянии. Мы установили также характер этого напряжения и сравнили его с напряжениями, возникающими в твердых телах. Вдоль силовых линий имеет место натяжение, а перпендикулярно им — давление, численно обе эти силы равны и обе пропорциональны квадрату результирующей напряженности в точке. Установив эти результаты, мы готовы к следующему шагу — к образованию представления о природе электрической поляризации в диэлектрической среде.

Элементарный участок тела можно назвать поляризованным, если он приобретает равные, но противоположные свойства с противоположных концов. Представление о внутренней поляризации удобнее всего изучить на примере постоянных магнитов; более подробно мы на нем остановимся, когда перейдем к рассмотрению магнетизма.

Электрическая поляризация элементарного участка диэлектрика — это вынужденное состояние, в которое среда переходит под воздействием электродвижущей силы, исчезающее при устранении этой силы. Мы можем представить его как некоторое электрическое смещение, вызываемое электродвижущей напряженностью. Если электродвижущая сила воздействует на проводящую среду, она вызывает в ней ток, если же среда непроводящая или диэлектрическая, то ток не может длительно по ней течь, но электричество смещается в среде в направлении электродвижущей напряженности, причем величина этого смещения зависит от величины напряженности, так что при увеличении или уменьшении электродвижущей напряженности в том же отношении увеличивается или уменьшается электрическое смещение.

Величина смещения измеряется количеством электричества, пересекающим единицу площади в процессе увеличения смещения от нуля до фактического значения. Таким образом, оно является мерой электрической поляризации.

Аналогия между действием электродвижущей напряженности, вызывающей электрическое смещение, и обычной механической силой, вызывающей смещение упругого тела, настолько очевидна, что я осмелился назвать отношение электродвижущей напряженности к соответствующему электрическому смещению *коэффициентом электрической упругости* среды. Этот коэффициент для разных сред различен и меняется обратно пропорционально диэлектрической постоянной среды.

Изменение электрического смещения, очевидно, представляет собой электрический ток. Однако этот ток может существовать лишь пока меняется смещение, а так как смещение не может превосходить определенного значения, не вызывая пробоя, то ток не может идти неограниченно долго в одном направлении, подобно току в проводниках.

В турмалине и других пироэлектрических кристаллах, по-видимому, может существовать состояние электрической поляризации, зависящее от температуры, для создания которого не требуется внешняя электродвижущая сила. Если бы внутренность тела была в состоянии постоянной электрической поляризации, то внешняя поверхность тела постепенно зарядилась бы так, чтобы нейтрализовать действие внутренней поляризации во всех точках вне тела. Этот внешний поверхностный заряд нельзя было бы обнаружить ни одним из общепринятых способов и нельзя было бы удалить ни одним из обычных методов удаления поверхностного заряда. Поэтому внутренняя поляризация вещества никак не могла бы быть обнаружена, разве только если бы каким-либо способом, например изменением температуры, можно было увеличить или уменьшить величину внутренней поляризации. При этом внешняя электризация уже не смогла бы нейтрализовать внешний эффект от внутренней поляризации, и мы обнаружили бы кажущуюся электризацию, как в случае турмалина.

Если заряд e равномерно распределен по поверхности сферы, то результирующая напряженность в любой точке среды, окружающей сферу, пропорциональна заряду e, деленному на квадрат расстояния от центра сферы. Эта результирующая напряженность, согласно нашей теории, сопровождается смещением электричества в наружном направлении от сферы.

Если мы теперь проведем концентрическую сферу радиуса r, то полное смещение E через эту поверхность будет пропорционально результирующей напряженности, умноженной на площадь сферической поверхности. Но результирующая напряженность прямо пропорциональна заряду e и обратно пропорциональна квадрату радиуса, а площадь поверхности прямо пропорциональна квадрату радиуса.

Таким образом, полное смещение E пропорционально заряду e и не зависит от радиуса.

Чтобы определить соотношение между зарядом e и количеством электричества E, смещаемым наружу через любую сферическую поверхность, рассмотрим работу, совершаемую над средой в области между двумя концентрическими сферическими поверхностями при увеличении смещения от E до $E+\delta E$. Если V_1 и V_2 — потенциалы соответственно на внутренней и на наружной поверхности, то электродвижущая сила, производящая это дополнительное смещение, равна $V_1—V_2$, так что работа, затраченная на увеличение смещения, равна $(V_1—V_2)\delta E$.

Если теперь считать внутреннюю сферу совпадающей с наэлектризованной поверхностью, а радиус внешней сферы устремить в бесконечность, то V_1 перейдет в потенциал сферы V, а V_2 станет равным нулю, так что вся работа, совершаемая в окружающей среде, равна $V\delta E$.

Но, согласно обычной теории, работа, совершаемая при увеличении заряда, равна $V\delta e$, и если, как мы считаем, эта работа тратится на увеличение смещения, то $\delta E=\delta e$, а так как E и e одновременно обращаются в нуль, то $E=e$, т. е.:

смещение в наружную сторону через любую сферическую поверхность, концентрическую заряженной сфере, равно заряду на этой сфере.

Чтобы уточнить наше представление об электрическом смещении, рассмотрим накопитель, образуемый двумя проводящими пластинами A и B, разделенными слоем диэлектрика C. Пусть W — проводящая проволока, соединяющая A и B, и пусть под действием электродвижущей силы некоторая величина Q положительного электричества перешла по проволоке от B к A. Положительная электризация на A и отрицательная электризация на B вызовут определенную электродвижущую силу, действующую от A к B в диэлектрическом слое, а она вызовет электрическое смещение от A к B в диэлектрике. Величина этого смещения, измеряемая количеством электричества, вынужденным пересечь воображаемое сечение диэлектрика, разделяющее его на два слоя, будет, согласно нашей теории, в точности равно Q. См. п. 75, 76, 111.

Таким образом, получается, что в то самое время, когда количество электричества Q переносится вдоль проволоки электродвижущей силой от B к A, пересекая при этом любое сечение проводника, такое же количество электричества пересекает любое сечение диэлектрика в направлении от A к B благодаря электрическому смещению.

Смещение электричества во время разряда накопителя будет обратным. В проволоке разряд означает перенос Q от A к B, а в диэлектрике смещение будет уменьшаться, так что количество электричества Q пересечет каждое сечение в направлении от B к A.

Поэтому каждый случай зарядки или разряда может рассматриваться как движение по замкнутому контуру, так что любое сечение контура пересекается одинаковым количеством электричества за одно и то же время, причем это имеет место не только в вольтовых цепях, где это всегда признавалось, но и в тех случаях, когда обычно электричество считали накапливающимся в определенных местах.

61. Таким образом, мы пришли к весьма замечательному следствию рассматриваемой теории, а именно что движение электричества подобно движению *несжимаемой* жидкости, так что полное количество его внутри воображаемой фиксированной замкнутой поверхности остается всегда неизменным. На первый взгляд этот результат находится в прямом противоречии с тем фактом, что мы можем зарядить проводник, внести его в замкнутое пространство и тем самым изменить количество электричества в этом пространстве.

Но нужно вспомнить, что обычная теория не учитывает электрического смещения в веществе диэлектрика, рассмотренного нами выше, сосредоточивая внимание лишь на рассмотрении электризации граничных поверхностей проводников и диэлектриков. Примем в случае заряженного проводника, что заряд его положительный. Тогда, если окружающий диэлектрик простирается во все стороны вне замкнутой поверхности, то имеет место электрическая поляризация, сопровождаемая смещением в наружную сторону через всю замкнутую поверхность, и поверхностный интеграл от смещения, взятый по этой поверхности, будет равен заряду проводника внутри нее.

Таким образом, при внесении заряженного проводника в замкнутое пространство немедленно возникает смещение равного этому заряду количества электричества наружу через поверхность, и полное количество электричества внутри поверхности остается неизменным.

Теория электрической поляризации будет более подробно рассмотрена в главе V, а механические иллюстрации ее будут даны в п. 344, но полное понимание ее значения не может быть достигнуто, пока мы не перейдем к рассмотрению электромагнитных явлений.

62. Специфические черты теории таковы.

Энергия электризации сосредоточена в диэлектрической среде независимо от того, является эта среда твердой, жидкой или газообразной, плотной или разреженной или даже является так называемым вакуумом, лишь бы она была способна передавать электрическое воздействие.

В каждом участке среды энергия запасена в форме напряженного состояния, называемого электрической поляризацией, величина которой зависит от результирующей электродвижущей напряженности в данном месте.

Электродвижущая сила, действующая на диэлектрик, вызывает так называемое электрическое смещение. Связь между напряженностью и смещением в наиболее общем случае будет исследована ниже при рассмотрении проводимости, но в наиболее важных случаях смещение происходит в направлении напряженности и численно равно напряженности, умноженной на $K/4\pi$, где K — удельная индуктивная способность диэлектрика.

Возникающая при электрической поляризации энергия, приходящаяся на единицу объема диэлектрика, равна половине произведения электродвижущей напряженности на электрическое смещение и (если необходимо) на косинус угла между их направлениями.

В жидких диэлектриках электрическая поляризация сопровождается натяжением в направлении линий индукции и равным ему давлением по всем направлениям, перпендикулярным линиям индукции, причем натяжение или давление на единицу площади численно равно энергии, приходящейся на единицу объема в данном месте.

Поверхность каждого элементарного объема, на которые можно считать разделенным диэлектрик, следует считать заряженной так, что поверхностная плотность в каждой точке поверхности равна по величине смещению в этой точке поверхности, *отсчитываемому внутрь*. Если смещение направлено в положительном направлении, то поверхность элемента объема будет заряжена отрицательно на положительной стороне элемента объема и положительно — на отрицательной. Эти поверхностные заряды вообще уничтожают друг друга при рассмотрении соседних элементов объема, за исключением случаев, когда в диэлектрике есть внутренний заряд, или же в случае заряда на поверхности диэлектрика.

Чем бы ни являлось электричество и что бы мы ни понимали под движением электричества, явление, называемое электрическим смещением, представляет собой движение электричества в том же смысле, в каком и перенос определенного количества электричества по проволоке является движением электричества. Единственное отличие заключается в том, что в диэлектрике имеется сила, называемая нами электрической упругостью, действующая против электрического смещения и заставляющая электричество возвращаться назад при устранении электродвижущей силы, тогда как в проводниках эта электрическая упругость непрерывно преодолевается, так что устанавливается истинный ток проводимости и сопротивление зависит не от полного количества электричества, смещенного со своего положения равновесия, а от количества электричества, пересекающего сечение проводника в заданное время.

Во всех случаях движение электричества подчиняется тому же условию, что и движение несжимаемой жидкости, а именно в каждый момент через любую заданную замкнутую поверхность должно вытекать столько, сколько в нее втекает. Отсюда следует, что любой электрический ток должен образовывать замкнутый контур. Важность этого результата станет видна при исследовании законов электромагнетизма.

Поскольку, как мы видели, теория прямого взаимодействия на расстоянии математически тождественна с теорией взаимодействия через среду, фактические явления могут объясняться как одной теорией, так и другой с привлечением в случае возникновения трудностей той или иной подходящей гипотезы.

Так, Моссотти развил математическую теорию диэлектриков, исходя из обычной теории притяжения, просто дав электрическую интерпретацию вместо магнитной для обозначений в исследовании Пуассона, где тот выводит теорию магнитной индукции из теории магнитных жидкостей. Он предположил существование внутри диэлектрика небольших проводящих элементов, противоположные поверхности которых могут через индукцию приобретать заряд противоположного знака, но которые не могут в целом терять или приобретать заряд, будучи изолированы друг от друга непроводящей средой. Эта теория диэлектриков согласуется с законами электричества и, возможно, действительно правильна. Если она правильна, то удельная индуктивная способность для диэлектрика может быть больше, но не может быть меньше, чем для вакуума.

До сих пор не найдено ни одного случая диэлектрика с индуктивной способностью меньше, чем у вакуума. Если бы такой диэлектрик был обнаружен, от физической теории Моссотти пришлось бы отказаться, хотя все его формулы остались бы справедливы, потребовалось бы лишь изменить знак коэффициента.

Во многих разделах физической науки уравнения одинакового вида оказываются применимыми к описанию явлений заведомо различной природы, как, например, электрическая индукция в диэлектриках, проводимость в проводниках, магнитная индукция. Во всех этих случаях связь между напряженностью и вызываемым ею эффектом описывается системой уравнений одного и того же вида, так что, решив какую-либо задачу в одной из областей, можно эту задачу и ее решение перевести на язык других областей, и эти новые утверждения тоже будут справедливы.

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТАТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Определение электричества как математической величины

63. Мы видели, что свойства заряженных тел таковы, что заряд одного тела может быть равен заряду другого или сумме зарядов двух тел и что два тела, заряженных одинаково, но противоположно, не оказывают никакого действия на внешние тела, если их поместить вместе внутрь замкнутого изолированного проводящего сосуда. Мы можем выразить все эти свойства в краткой и согласованной форме, считая наэлектризованное тело *заряженным* определенным *количеством электричества*, которое мы обозначим через e. Если заряд положителен, т. е., согласно обычному соглашению, стеклообразный, то e будет положительной величиной. Если заряд отрицателен, т. е. смолообразный, то e будет отрицательной величиной, а величину $-e$ можно истолковать либо как отрицательное количество стеклянного электричества, либо как положительное количество смоляного электричества.

Сложение двух равных, но противоположных электрических зарядов $+e$ и $-e$ приводит к незаряженному состоянию, описываемому нулем. Поэтому незаряженное тело мы можем рассматривать как виртуально заряженное равными, но противоположными зарядами неопределенной величины, а заряженное тело можем считать виртуально заряженным неравными количествами положительного и отрицательного электричества, причем алгебраическая сумма этих зарядов дает наблюдаемую электризацию. Очевидно, однако, что такой способ рассмотрения заряженных тел совершенно искусственный. Его можно сравнить с пониманием скорости тела как состоящей из двух или нескольких различных скоростей, ни одна из которых не является настоящей скоростью тела.

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ

Трехмерное распределение

64. *Определение.* Объемной плотностью электричества в данной точке пространства является предел отношения количества электричества внутри сферы с центром в данной точке к объему этой сферы при неограниченном уменьшении радиуса сферы.

Мы будем обозначать это отношение через ρ; оно может быть как положительным, так и отрицательным.

Поверхностное распределение

Как теория, так и эксперимент показывают, что в некоторых случаях заряд тела находится целиком на поверхности. Плотность в точке поверхности, определенная как указано выше, была бы бесконечно большой. Поэтому мы примем другой способ измерения поверхностной плотности.

Определение. Плотностью электричества в данной точке на поверхности является предел отношения количества электричества внутри сферы с центром в данной точке к площади поверхности, вырезаемой этой сферой при неограниченном уменьшении радиуса сферы.

Мы будем обозначать поверхностную плотность буквой σ.

Те читатели, которые представляют себе электричество материальной жидкостью или совокупностью частиц, должны в этом случае считать электричество распределенным по поверхности в виде слоя определенной толщины θ с плотностью равной ρ_0 или тому значению ρ, которое получится при максимально тесном расположении частиц на поверхности. Очевидно, в этой теории $\rho_0\theta=\sigma$. При отрицательном значении σ, согласно этой теории, определенный слой толщины θ остается полностью лишенным положительного электричества и заполненным целиком отрицательным электричеством или — в одножидкостной теории — веществом.

Нет, однако, никаких экспериментальных указаний ни на наличие электрического поверхностного слоя конечной толщины, ни на то, что электричество представляет собой жидкость или совокупность частиц. Поэтому мы предпочитаем не вводить обозначения для толщины слоя, а пользоваться специальным обозначением для поверхностной плотности.

Линейное распределение

Иногда удобно считать электричество распределенным на линии, т. е. на длинном узком теле, толщиной которого мы пренебрегаем. В этом случае мы можем определить линейную плотность в каждой точке как предел отношения заряда на элементе линии к длине этого элемента при неограниченном уменьшении этой длины.

Если линейную плотность обозначить через λ, то полное количество электричества на кривой будет равно $e=\int \lambda ds$, где ds — элемент длины кривой. Аналогично, если σ — поверхностная плотность, то полное количество электричества на поверхности равно $e=\iint \sigma dS$, где dS — элемент поверхности.

Наконец, если ρ — объемная плотность в каждой точке пространства, то полный заряд в некотором объеме равен $e=\iiint \rho dxdydz$, где $dxdydz$ — элемент объема. Пределами интегрирования во всех случаях являются границы кривой, поверхности или рассматриваемой части пространства.

Очевидно, e, λ, σ и ρ — величины различного рода, причем размерность каждой последующей величины меньше размерности предыдущей на множитель размерности длины, так что если l означает длину, то величины e, $l\lambda$, $l^2\sigma$ и $l^3\rho$ будут одного и того же рода, и если $[L]$ — единица длины, а $[\lambda]$, $[\sigma]$, $[\rho]$ — единицы плотностей различного рода, то $[e]$, $[L\lambda]$, $[L^2\sigma]$, $[L^3\rho]$ означают все единицу электричества.

Определение единицы электричества

65. Пусть A и B — две точки, находящиеся на расстоянии в единицу длины. Пусть два тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием AB, заряжены равными количествами положительного электричества и помещены соответственно в точки A и B и пусть заряды их таковы, что сила их взаимного расталкивания равна единичной силе (способ ее измерения указан в п. 6). Тогда заряд каждого тела считается равным единице количества электричества.

Если бы тело B было заряжено единицей отрицательного электричества, то, поскольку взаимодействие тел носило бы противоположный характер, тела бы притягивались с единичной силой. Если бы заряд A тоже был отрицательным и равным единице, мы вновь имели бы отталкивание с единичной силой.

Поскольку взаимодействие любых двух порций электричества не зависит от наличия остальных, сила расталкивания e единиц электричества в точке A и e' единиц электричества в точке B будет равна ee', если расстояние AB равно единице (см. п. 39).

Закон действия силы между заряженными телами

66. Кулон показал на опыте, что сила, действующая между заряженными телами, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними, меняется обратно пропорционально квадрату расстояния. Таким образом, сила расталкивания двух таких тел, несущих заряды e и e' и находящихся на расстоянии r, равна ee'/r^2.

В п. 74в, 74г и 74д мы покажем, что этот закон — единственный, согласующийся с наблюденным фактом, состоящим в том, что проводник, помещенный внутрь другого полого замкнутого проводника и находящийся с ним в контакте, полностью теряет свой электрический заряд. Наше убеждение в точности закона обратных квадратов следует считать основанным скорее на опытах такого рода, нежели на непосредственных измерениях Кулона.

Результирующая сила между двумя телами

67. Чтобы рассчитать результирующую силу между двумя телами, мы можем разделить каждое тело на элементы объема и рассмотреть силу отталкивания электричества, расположенного на каждом элементе одного объема, от электричества на каждом элементе второго объема. Таким образом, мы получим систему сил, число которых равно произведению чисел элементов, на которые разделено каждое тело. Затем следует сложить действие всех этих сил по правилам Статики. Таким образом, чтобы найти составляющую в направлении оси x, нужно найти значение шестикратного интеграла

$$\iiiiiint \frac{\rho\rho'(x-x')\,dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{3/2}},$$

где x, y, z — координаты точки первого тела, плотность заряда в которой равна ρ; x', y', z', ρ' — соответствующие величины для второго тела, и интегрирование производится сначала по одному телу, а затем по другому.

Результирующая напряженность в точке

68. Для упрощения математических выкладок удобно рассматривать действие заряженного тела не на другое тело произвольной формы, а на достаточно малое тело, заряженное достаточно малым количеством электричества, помещенное в произвольную точку пространства, куда простирается электрическое действие. Принимая заряд этого тела достаточно малым, мы делаем неощутимым его искажающее действие на заряд первого тела.

Пусть e — заряд малого тела, и пусть при помещении в точку (x, y, z) на него действует сила Re, направляющие косинусы которой l, m, n. Тогда мы можем назвать R результирующей электрической напряженностью в точке (x, y, z).

Если X, Y, Z — составляющие R, то $X=Rl$, $Y=Rm$, $Z=Rn$. Говоря о результирующей электрической напряженности в точке, мы не обязательно имеем в виду, что здесь фактически действует какая-то сила; мы только хотим сказать, что если бы в эту точку было помещено заряженное тело, то на него действовала бы сила Re, где e — заряд этого тела [1].

Определение. Результирующая электрическая напряженность в точке — это сила, которая действовала бы на малое тело, заряженное единичным положительным зарядом, если бы его поместили в эту точку, не исказив имеющегося распределения электричества.

Эта сила стремится не только переместить заряженное тело, но также переместить электричество на этом теле, так что положительное электричество стремится

---

[1] Электрическая и магнитная напряженности в электричестве и магнетизме соответствуют напряженности тяготения, обозначаемой обычно через g в теории тяготения.

сместиться в направлении R, а отрицательное — в противоположном направлении. Поэтому величина R называется также Электродвижущей Напряженностью в точке (x, y, z).

Если мы захотим выразить явно тот факт, что результирующая напряженность является вектором, мы будем обозначать ее готической буквой $\mathfrak{E}$. Если тело является диэлектриком, то, согласно принятой в этом трактате теории, электричество смещается в нем, причем количество электричества, смещаемое в направлении вектора $\mathfrak{E}$ через единичную площадку, перпендикулярную $\mathfrak{E}$, равно $\mathfrak{D}=K\mathfrak{E}/4\pi$, где $\mathfrak{D}$—смещение, $\mathfrak{E}$—напряженность поля, а K—индуктивная способность диэлектрика.

Если тело является проводником, то состояние напряжения непрерывно снимается, так что возникает ток проводимости, поддерживаемый до тех пор, пока в среде действует $\mathfrak{E}$.

Линейный интеграл от электрической напряженности или электродвижущая сила вдоль дуги кривой

69. Электродвижущая сила вдоль заданной дуги AP некоторой кривой измеряется численно работой, которая была бы совершена электрической напряженностью над единичным положительным зарядом, перемещаемым вдоль кривой, начиная с точки A и кончая точкой P дуги.

Если s — длина дуги, отмеряемая от точки A, а результирующая напряженность R в каждой точке кривой образует угол ε с касательной к кривой, проведенной в положительном направлении, то работа, совершенная над единичным электрическим зарядом при его перемещении вдоль элемента кривой ds, равна $R\cos\varepsilon ds$, а полная электродвижущая сила E равна $E=\int\limits_0^s R\cos\varepsilon\, ds$, где интегрирование производится от начала до конца дуги.

Если использовать составляющие напряженности, то это выражение примет вид

$$E=\int\limits_0^s \left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

Если X, Y, Z таковы, что $Xdx+Ydy+Zdz$ образует полный дифференциал функции — V от x, y, z, то

$$E=\int\limits_A^P (X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=-\int\limits_A^P dV=V_A-V_P,$$

где интегрирование производится по любому пути от точки A к точке P, будь то заданная кривая или любая другая линия, соединяющая A и P.

Здесь V — скалярная функция положения точки в пространстве, т. е. значение координат точки определяет значение V, причем это значение не зависит от положения и направления осей координат (см. п. 16).

О функциях положения точки

В последующем, описывая какую-либо величину как функцию положения точки, мы имеем в виду, что для каждого положения точки функция имеет определенное значение. Мы не подразумеваем при этом, что это значение всегда выражается одной и той же формулой для всех точек пространства; оно может выражаться одной формулой по одну сторону от некоторой поверхности и другой — по другую сторону.

О потенциальных функциях

70. Величина $Xdx+Ydy+Zdz$ является полным дифференциалом во всех случаях, когда сила обусловлена притяжением или отталкиванием, напряженность которых зависит от расстояний до некоторого числа точек. Если r_1 — расстояние одной из этих точек от точки (x, y, z), а R_1 — напряженность отталкивания, то

$$X_1 = R_1 \frac{x-x_1}{r_1} = R_1 \frac{dx_1}{dx}$$

и аналогично для Y_1 и Z_1, так что

$$X_1dx+Y_1dy+Z_1dz=R_1dr_1,$$

а поскольку R_1 зависит только от r_1, то R_1dr_1 является полным дифференциалом некоторой функции от r_1, скажем,— V_1.

Аналогично для любой другой силы R_2, действующей из центра, находящегося на расстоянии r_2,

$$X_2dx+Y_2dy+Z_2dz=R_2dr_2=-V_2.$$

Но $X=X_1+X_2+$ и т. д., и аналогично Y и Z, так что

$$Xdx+Ydy+Zdz=-dV_1-dV_2- \text{ и т. д.}=-dV.$$

Интеграл от этой величины, обращающийся в нуль на бесконечности, называется Потенциальной Функцией.

В теории притяжения эта функция была впервые применена Лапласом при расчете притяжения Земли. Грин в своем исследовании «О применении математического анализа к электричеству» дал ей название Потенциальной Функции. Гаусс независимо от Грина также пользовался термином Потенциал. Клаузиус и другие понимали под Потенциалом работу, которая была бы совершена при удалении двух тел или систем на бесконечное расстояние друг от друга. Мы будем придерживаться применения этого слова в том смысле, в каком оно используется в последних английских работах и избегнем неопределенности, приняв следующее определение сэра У. Томсона.

Определение потенциала. Потенциал в Точке — это работа, которая была бы совершена электрическими силами над единичным положительным зарядом, внесенным в эту точку без искажения распределения заряда, при переносе его из этой точки на бесконечное расстояние, или, что то же самое—работа внешнего источника при переносе единичного положительного заряда из бесконечности (или из любого места, где потенциал равен нулю) в данную точку.

Выражение напряженности и ее составляющих через потенциал

71. Поскольку полная электродвижущая сила вдоль любой дуги AB равна $E_{AB}=V_A-V_B$, то, положив дугу AB равной ds, получим для составляющей напряженности в направлении ds: $R\cos\varepsilon=-(dV/ds)$, откуда, приняв последовательно ds параллельными каждой из осей, получим

$$X=-\frac{dV}{dx}, \qquad Y=-\frac{dV}{dy}, \qquad Z=-\frac{dV}{dz},$$

$$R=\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Саму напряженность, величина которой равна R, а составляющие равны X, Y, Z, мы будем обозначать готической буквой $\mathfrak{E}$, как в п. 68.

Потенциал во всех точках внутри проводника одинаков

72. Проводник — это тело, которое позволяет электричеству перемещаться от одной части тела к другой под действием электродвижущей силы. Если электричество находится в равновесии, то внутри проводника не может быть электродвижущей напряженности. Таким образом, $R=0$ во всем объеме, занятом проводником. Отсюда следует, что $(dV/dx)=0$, $(dV/dy)=0$, $(dV/dz)=0$, так что для всех точек проводника $V=C$, где C — постоянная величина.

Поскольку потенциал во всех точках внутри проводника равен C, величину C называют Потенциалом проводника. C можно определить как работу, которую должна совершить внешняя сила, чтобы перенести единичный заряд из бесконечности на проводник в предположении, что распределение электричества не искажается в присутствии этого единичного заряда.

В п. 246 будет показано, что в общем случае контакта двух тел различного рода через поверхность контакта действует электродвижущая сила от одного тела к другому, так что, когда они находятся в равновесии, потенциал одного тела выше потенциала другого. Поэтому мы пока будем считать, что все наши проводники сделаны из одного и того же металла и находятся при одинаковой температуре.

Если потенциалы проводников A и B равны соответственно V_A и V_B, то электродвижущая сила вдоль проволоки, соединяющей A и B, равна V_A-V_B в направлении от A к B, т. е. положительное электричество будет стремиться перейти с проводника с большим потенциалом на другой проводник.

В науке об электричестве Потенциал находится в таком же соотношении с Электричеством, как Давление — с Жидкостью в Гидростатике или Температура — с Теплотой в Термодинамике. И Электричество, и Жидкость, и Теплота стремятся перейти из одного места в другое, если соответственно потенциал, давление или температура в первом месте больше, чем во втором. Жидкость, безусловно, является веществом, теплота, конечно, не является веществом, так что, хотя аналогии такого рода и могут оказать помощь в формировании представлений о формальных соотношениях между электрическими величинами, нужно быть внимательным, чтобы та или иная аналогия не была истолкована как указание на то, что электричество — это вещество, подобное воде, или состояние возбуждения, подобное теплоте.

Потенциал произвольной электрической системы

73. Если имеется единственный точечный заряд величины e и r — расстояние точки x', y', z' от этого заряда, то

$$V = \int_r^\infty R\,dr = \int_r^\infty \frac{e}{r^2}\,dr = \frac{e}{r}.$$

Если же имеется произвольное число точечных зарядов e_1, e_2 и т. д. в точках с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и т. д. и их расстояния до точки (x', y', z') равны r_1, r_2 и т. д., то потенциал системы в точке (x', y', z') равен $V=\Sigma\ (e/r)$.

Если плотность заряда в произвольной точке (x, y, z) заряженного тела равна ρ, то потенциал, создаваемый телом, равен $V=\iiint \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz$, где $r=\{(x-x')^2+ (y-y')^2+(z-z')^2\}^{1/2}$, а интегрирование производится по всему телу.

О доказательстве закона обратных квадратов

74 а. Факт обратной пропорциональности силы, действующей между заряженными телами, квадрату расстояния между ними можно считать установленным прямыми опытами Кулона с крутильными весами. Однако выводимый из этих опытов результат с необходимостью содержит погрешность, обусловленную случайными ошибками каждого эксперимента, а как раз в опыте с крутильными весами такие ошибки у не слишком искусного экспериментатора весьма ощутимы.

Значительно более точное подтверждение закона действия силы может быть получено из опыта, аналогичного описанному в п. 32 (опыт VII).

В до сих пор еще не опубликованной работе по электричеству Кавендиш показал, что справедливость закона обратных квадратов определяется результатами такого опыта.

Он закрепил шар на изолирующей подставке и присоединил две полусферы с помощью стеклянных стержней к двум деревянным рамам, вращающимся на петлях вокруг оси, так что при сближении рам эти полусферы образовывали изолированную сферическую оболочку, концентрическую шару.

Шар можно было соединять с полусферами с помощью короткой проволочки, подвешенной на шелковой нити, так что проволочку можно было удалять, не разряжая прибора.

С помощью лейденских банок, потенциал которых был предварительно измерен электрометром, он заряжал полусферы, соединенные с шаром, и тотчас же вытаскивал соединяющую проволочку с помощью шелковой нити, разводил и разряжал полусферы и проверял электрическое состояние шара с помощью шарового электрометра.

Этот электрометр, считавшийся в то время (1773 г.) самым чувствительным, не обнаружил никаких следов заряда.

Затем Кавендиш сообщал шару заряд, составляющий известную долю заряда, ранее сообщенного полусферам, и вновь исследовал шар электрометром.

Таким образом он установил, что заряд шара в первоначальном опыте должен быть менее 1/60 заряда всей установки, так как больший заряд был бы обнаружен электрометром.

Затем он рассчитал отношение заряда на шаре к заряду на полусферах в предположении, что сила расталкивания обратно пропорциональна расстоянию в степени, слегка отличающейся от двойки, и нашел, что если бы это отличие составляло 1/50, то на шаре был бы заряд равный 1/57 от заряда всей установки, т. е. его мог бы обнаружить электрометр.

74 б. Недавно этот опыт был повторен в Кавендишской Лаборатории в несколько ином виде.

Полусферы были закреплены на изолированной подставке, а шар закреплен внутри в надлежащем положении с помощью эбонитового кольца. В таком приспособлении изолирующая подставка шара никогда не находится под действием заметной электрической силы и, следовательно, никогда не заряжается, так что полностью исключается искажающее действие переползания электричества вдоль поверхности изолятора.

Полусферы не отводились перед проверкой потенциала шара. Они оставались на своем месте, но разряжались на землю. Влияние заданного заряда шара на электрометр в этом случае было меньше, чем при отведенных полусферах, но этот недостаток с лихвой искупался полнейшей защитой от всех внешних электрических воздействий благодаря проводящим оболочкам.

Короткая проволочка, обеспечивавшая соединение оболочки с шаром, была прикреплена к небольшому металлическому диску, прикрывавшему небольшое отверстие в оболочке, так что, когда проволочка вместе с диском приподнималась с помощью шелковой нити, в отверстие можно было погрузить электрод электрометра до контакта с находящимся внутри шаром.

Электрометром служил Томсоновский Квадрантный Электрометр, описанный в п. 219. Корпус электрометра и один из его электродов были все время соединены с землей, а измерительный электрод соединялся с землей до разрядки оболочки.

Для определения первоначального заряда оболочки на значительном расстоянии от нее располагался на подставке небольшой латунный шарик.

Опыт проводился следующим образом.

Оболочка заряжалась контактом с лейденской банкой. Небольшой шарик соединялся с землей и приобретал отрицательный заряд через индукцию, после чего он изолировался. Проволочка, соединявшая шар и оболочки, удалялась с помощью шелковой нити. Затем оболочка разряжалась и оставалась заземленной. Измерительный электрод отключался от земли, и через отверстие в оболочке приводился в контакт с шаром.

Электрометр не регистрировал ни малейшего эффекта.

Для проверки чувствительности прибора оболочка отсоединялась от земли, а небольшой шарик разряжался на землю. При этом электрометр показывал положительное отклонение D.

Отрицательный заряд на шарике составлял около 1/54 от первоначального заряда оболочки, положительный заряд, индуцированный этим шариком при заземлении оболочки, составлял около 1/9 заряда шарика. Таким образом, после заземления шарика потенциал оболочки, регистрируемый электрометром, составлял 1/486 ее первоначального потенциала.

Если бы отталкивание было пропорционально r^{q-2}, то потенциал шара составлял бы долю $-0{,}1478q$ от потенциала оболочки согласно уравнению (22) п. 74 г.

Поэтому, если $\pm d$ — наибольшее отклонение электрометра, могущее оказаться не замеченным, а D — отклонение, зарегистрированное во второй части опыта, то q не может превосходить $\pm\frac{1}{72}\frac{d}{D}$ (поскольку $0{,}1478qV\Big/\frac{1}{486}V$ должно быть меньше, чем d/D).

Даже в грубых опытах D превосходило $300d$, так что q не может превосходить $\pm 1/21600$.

Теория этого опыта

74 в. Найдем потенциал в произвольной точке, создаваемый однородной сферической оболочкой при силе расталкивания двух единичных зарядов, описываемой заданной функцией расстояния.

Пусть $\varphi(r)$ — расталкивание двух единичных зарядов на расстоянии r, а $f(r)$ — такая функция, что

$$\frac{df(r)}{dr}\left(=f'(r)\right)=r\int_r^{\infty}\varphi(r)\,dr. \tag{1}$$

Пусть радиус оболочки равен a, а поверхностная плотность заряда на ней σ. Тогда если через α обозначить полный заряд на оболочке, то

$$\alpha=4\pi a^2\sigma. \tag{2}$$

Пусть b — расстояние заданной точки от центра оболочки, а r — расстояние этой точки от любой данной точки оболочки.

Если мы введем сферические координаты точки на оболочке, выбрав полюс в центре оболочки, а ось проходящей через заданную точку, то получим

$$r^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta. \tag{3}$$

Заряд элемента оболочки равен

$$\sigma a^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta, \tag{4}$$

а потенциал, создаваемый этим элементом в заданной точке, равен

$$\sigma a^2\sin\theta\frac{f'(r)}{r}\,d\theta\,d\varphi. \tag{5}$$

Это выражение нужно проинтегрировать по φ от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$, что дает

$$2\pi\sigma a^2\sin\theta\frac{f'(r)}{r}\,d\theta. \tag{6}$$

Остается провести интегрирование по θ от $\theta=0$ до $\theta=\pi$.

Дифференцируя (3), найдем

$$r\,dr=ab\sin\theta\, d\theta. \tag{7}$$

Подставляя значение $d\theta$ в (6), получим

$$2\pi\sigma\frac{a}{b}f'(r)\,dr. \tag{8}$$

Интегрирование дает

$$V=2\pi\sigma\frac{a}{b}\{f(r_1)-f(r_2)\},\tag{9}$$

где r_1 — наибольшее значение r, равное всегда $a+b$, а r_2 — наименьшее значение r, равное $b-a$ в случае, когда заданная точка находится вне оболочки, и $a-b$, когда эта точка внутри оболочки.

Если α — полный заряд оболочки, а V — создаваемый им потенциал в данной точке, то для точек вне оболочки

$$V=\frac{\alpha}{2ab}\{f(b+a)-f(b-a)\},\tag{10}$$

на самой оболочке

$$V=\frac{\alpha}{2a^2}f(2a),\tag{11}$$

а для точек внутри ее

$$V=\frac{\alpha}{2ab}\{f(a+b)-f(a-b)\}.\tag{12}$$

Найдем теперь потенциалы двух концентрических сферических оболочек с радиусами внешней и внутренней оболочек равными a и b и зарядами α и β.

Обозначая потенциал внешней оболочки через A, а внутренней через B, мы найдем из вышесказанного, что

$$A=\frac{\alpha}{2a^2}f(2a)+\frac{\beta}{2ab}\{f(a+b)-f(a-b)\},\tag{13}$$

$$B=\frac{\beta}{2b^2}f(2b)+\frac{\alpha}{2ab}\{f(a+b)-f(a-b)\}.\tag{14}$$

В первой части опыта оболочки соединены короткой проволочкой и приобретают обе одинаковый потенциал V.

Полагая $A=B=V$ и решая уравнения (13) и (14) относительно β, мы найдем заряд на внутреннем проводнике:

$$\beta=2Vb\frac{bf(2a)-a[f(a+b)-f(a-b)]}{f(2a)f(2b)-[f(a+b)-f(a-b)]^2}.\tag{15}$$

В опыте Кавендиша полусферы, образующие оболочку, отводились на расстояние, которое мы можем считать бесконечным, и разряжались. Потенциал внутренней оболочки (т. е. шара) становился при этом равным

$$B_1=\frac{\beta}{2b^2}f(2b).\tag{16}$$

При повторении опыта в Кавендишской Лаборатории наружная оболочка оставалась на месте, но заземлялась, так что $A=0$. В этом случае для потенциала внутреннего шара, выраженного через V, получим

$$B_2=V\left\{1-\frac{a}{b}\frac{f(a+b)-f(a-b)}{f(2a)}\right\}.\tag{17}$$

74 г. Примем теперь вместе с Кавендишем, что сила обратно пропорциональна некоторой степени расстояния, не сильно отличающейся от двойки.

Положим

$$\varphi(r)=r^{q-2}, \tag{18}$$

тогда

$$f(r)=\frac{1}{1-q^2}r^{q+1}. \tag{19}$$

Если считать q малым, то это выражение можно представить по теореме об экспоненте в виде разложения

$$f(r)=\frac{1}{1-q^2}r\left\{1+q\ln r+\frac{1}{1\cdot 2}(q\ln r)^2+\ldots\right\}. \tag{20}$$

Если пренебречь членами, содержащими q^2, то выражения (16) и (17) примут вид

$$B_1=\frac{1}{2}\frac{a}{a-b}Vq\left[\ln\frac{4a^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a-b}\right], \tag{21}$$

$$B_2=\frac{1}{2}Vq\left[\ln\frac{4a^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a-b}\right]. \tag{22}$$

Отсюда можно найти q по данным опыта.

74 д. Лаплас первым показал, что никакая функция расстояния, кроме обратно пропорциональной квадрату расстояния, не удовлетворяет условию, что однородная сферическая оболочка не действует на частицу, находящуюся внутри нее [2].

Если мы примем, что β в выражении (15) всегда равно нулю, мы сможем применить метод Лапласа для нахождения вида $f(r)$. Из (15) следует, что

$$bf(2a)-af(a+b)+af(a-b)=0.$$

Дифференцируя дважды по b и деля на a, получим $f''(a+b)=f''(a-b)$.

Если это равенство выполняется тождественно, то $f''(r)=C_0=\text{const}$. Отсюда $f'(r)=C_0r+C_1$ и, согласно (1),

$$\int_r^\infty \varphi(r)\,dr=\frac{f'(r)}{r}=C_0+\frac{C_1}{r}, \qquad \varphi(r)=\frac{C_1}{r^2}.$$

Заметим здесь, что хотя предположение Кавендиша о том, что сила меняется как некоторая степень расстояния, представляется менее общим, чем предположение Лапласа, что сила является произвольной функцией расстояния, оно является единственным совместимым с тем фактом, что подобные поверхности могут быть заряжены так, чтобы иметь подобные электрические свойства.

Ибо, если бы сила была функцией расстояния, отличной от степенной, то отношение сил на двух различных расстояниях не было бы функцией отношения расстояний, а зависело бы от абсолютного значения этих расстояний и поэтому содержало бы отношения этих расстояний к абсолютно фиксированной длине.

[2] *Méc. Cél.*, I, 2.

Фактически Кавендиш сам отмечает, что, согласно его собственной гипотезе о строении электрической жидкости, распределение электричества на двух геометрически подобных проводниках не может быть в точности подобным, если только заряды проводников не пропорциональны объемам. Действительно, он предполагает, что частицы электрической жидкости плотно спрессованы вблизи поверхности тела, а это эквивалентно предположению о том, что закон взаимодействия не является законом обратных квадратов, и для сильно сблизившихся частиц расталкивание начинает расти значительно быстрее с дальнейшим уменьшением расстояния между ними.

Поверхностный интеграл от электрической индукции и электрическое смещение через поверхность

75. Пусть R — результирующая напряженность в произвольной точке поверхности, а ε — угол, который она образует с нормалью, проведенной к положительной стороне поверхности. Тогда $R\cos\varepsilon$ — составляющая напряженности по нормали к поверхности, и если dS — элемент поверхности, то электрическое смещение через dS будет, согласно п. 68, равно $(1/4\pi)KR\cos\varepsilon\, dS$. Поскольку мы сейчас не рассматриваем никаких диэлектриков, кроме воздуха, то $K=1$.

Мы можем, однако, избежать на этой стадии применения теории электрического смещения, назвав величину $R\cos\varepsilon\, dS$ Индукцией через элемент dS. Эта величина хорошо известна в математической физике, но название ее мы заимствовали у Фарадея. Поверхностный интеграл от индукции равен $\iint R\cos\varepsilon\, dS$. Из п. 21 следует, что если X, Y, Z — составляющие R и если они непрерывны в области, ограниченной замкнутой поверхностью S, то индукция, отсчитываемая изнутри наружу, равна

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) dx\, dy\, dz,$$

где интегрирование проводится по всему объему, охватываемому поверхностью.

Индукция через замкнутую поверхность, обусловленная отдельным силовым центром

76. Пусть в точке O находится количество электричества e и пусть r — расстояние произвольной точки P от точки O. Тогда напряженность в этой точке равна $R=er^{-2}$ и направлена по OP.

Пусть из точки O проведена в произвольном направлении прямая в бесконечность. Если точка O находится вне заданной замкнутой поверхности, то эта прямая либо не пересечет этой поверхности, либо выйдет из нее столько же раз, сколько войдет. Если O находится внутри поверхности, то прямая должна сначала выйти из поверхности, а потом она может попеременно входить и выходить любое число раз, но в конце концов она должна выйти из поверхности.

Пусть ε — угол между OP и наружной нормалью к поверхности в точке, где ее пересекает OP. Там, где прямая выходит из поверхности, $\cos\varepsilon$ положителен, а там, где входит,— отрицателен.

Опишем теперь вокруг точки O сферу единичного радиуса, и пусть прямая OP описывает коническую поверхность с малым углом раскрыва и с вершиной в точке O.

Этот конус вырежет малый элемент $d\omega$ на поверхности сферы и малые элементы dS_1, dS_2 и т. д. на замкнутой поверхности в различных местах пересечения прямой OP с нею.

Поскольку каждый из этих элементов dS пересекает конус на расстоянии r от вершины и наклонен под углом ε, то $dS = \pm r^2 \sec \varepsilon d\omega$, а так как $R = er^{-2}$, то $R \cos \varepsilon dS = \pm e d\omega$. При этом положительный знак берется, когда r выходит из поверхности, а отрицательный — когда входит.

Если точка O находится вне поверхности, то положительных значений столько же, сколько отрицательных, так что для любого направления $\sum R \cos \varepsilon dS = 0$, и, следовательно, $\iint R \cos \varepsilon dS = 0$, где интегрирование производится по всей замкнутой поверхности.

Если же точка O находится внутри замкнутой поверхности, то радиус-вектор OP сначала выходит из поверхности, что дает положительный вклад $e d\omega$, а потом равное число раз входит и выходит, так что в этом случае $\sum R \cos \varepsilon dS = e d\omega$.

Взяв интеграл по всей замкнутой поверхности, мы охватим всю сферическую поверхность, площадь которой равна 4π, так что

$$\iint R \cos \varepsilon \, dS = e \iint d\omega = 4\pi e.$$

Таким образом, мы заключаем, что полная индукция в наружном направлении через замкнутую поверхность, обусловленная силовым центром e, находящимся в точке O, равна нулю, если точка O находится вне поверхности, и равна $4\pi e$, если точка O находится внутри поверхности.

Поскольку в воздухе смещение равно индукции, деленной на 4π, то смещение через замкнутую поверхность, отсчитываемое наружу, равно количеству электричества внутри поверхности.

Следствие. Отсюда следует также, что если поверхность не замкнута, а ограничена некоторой заданной замкнутой кривой, то полная индукция через эту поверхность равна ωe, где ω — телесный угол из точки O, опирающийся на эту замкнутую кривую. Эта величина зависит, следовательно, только от самой замкнутой кривой, а форма поверхности, ограниченной этой кривой, может меняться произвольным образом, лишь бы только она не переходила с одной стороны силового центра на другую.

Об уравнениях Лапласа и Пуассона

77. Поскольку значение полной индукции одного силового центра через замкнутую поверхность зависит лишь от того, находится ли он внутри поверхности или нет, и никак не зависит от положения этого центра, то если имеется несколько таких силовых центров e_1, e_2 и т. д. внутри поверхности и несколько центров e_1', e_2' и т. д. вне поверхности, то $\iint R \cos \varepsilon dS = 4\pi e$, где e означает алгебраическую сумму количеств электричества всех силовых центров внутри замкнутой поверхности, т. е. полное количество электричества, находящееся внутри поверхности, причем смоляное электричество считается отрицательным.

Если электричество распределено внутри поверхности так, что плотность его нигде не обращается в бесконечность, то согласно п. 64 $4\pi e = 4\pi\iiint \rho\, dx\, dy\, dz$, а согласно п. 75

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) dx\, dy\, dz.$$

Если мы примем в качестве поверхности замкнутую поверхность, ограничивающую элемент объема $dx\, dy\, dz$, то, приравнивая эти выражения, получим

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi\rho.$$

Если существует потенциал V, то согласно п. 71

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi\rho = 0.$$

Это уравнение в случае плотности, равной нулю, называется Уравнением Лапласа. В более общей форме оно было впервые приведено Пуассоном. Оно позволяет нам при известном потенциале во всех точках определить распределение электричества. Обозначим, как в п. 26, величину

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

через $-\nabla^2 V$. Тогда мы можем выразить уравнение Пуассона словами: плотность электричества, умноженная на 4π, есть концентрация потенциала $\nabla^2 V$. Там, где нет заряда, нет концентрации потенциала, в этом и заключается интерпретация уравнения Лапласа.

Согласно п. 72 потенциал V постоянен внутри проводника. Значит, внутри проводника объемная плотность заряда равна нулю, и весь заряд должен быть на поверхности проводника.

Если предположить, что при поверхностном и линейном распределении электричества объемная плотность ρ остается конечной, а электричество распределено в виде тонкого слоя или узкой нити, то в пределе, увеличивая ρ и уменьшая толщину слоя или сечение нити, мы можем прийти к истинному поверхностному или линейному распределению. Уравнение для потенциала, справедливое в процессе всего предельного перехода, останется справедливым и в пределе, если его интерпретация соответствует реальным обстоятельствам.

Изменение потенциала на заряженной поверхности

78 а. Потенциальная функция V должна быть физически непрерывной в смысле п. 7, за исключением граничных поверхностей между двумя различными средами, на которых, как мы увидим в п. 246, может существовать разность потенциалов между различными веществами, так что при равновесии электричества потенциал в некоторой точке одного вещества больше потенциала в смежной точке второго вещества на постоянную величину C, зависящую от природы обоих веществ и от их температуры.

Что касается первых производных от V по x, y или z, то они могут быть разрывны, и, согласно п. 8, точки разрыва должны лежать на поверхности, уравнение которой можно записать в виде

$$\varphi=\varphi(x,\ y,\ z)=0. \tag{1}$$

Эта поверхность отделяет область отрицательного φ от области положительного φ.

Пусть V_1 — потенциал в произвольной заданной точке в отрицательной области, а V_2 — потенциал в произвольной заданной точке положительной области. Тогда в любой точке на поверхности, где $\varphi=0$, которую можно считать принадлежащей обеим областям,

$$V_1+C=V_2, \tag{2}$$

где C — постоянная разность потенциалов (если таковая имеется) между положительной и отрицательной сторонами поверхности.

Пусть l, m, n — направляющие косинусы нормали ν_2 в данной точке поверхности в сторону положительной области. Направляющие косинусы нормали ν_1 в сторону отрицательной области будут $-l$, $-m$ и $-n$.

Скорости изменения V вдоль нормалей будут равны

$$\frac{dV_1}{d\nu_1}=-l\frac{dV_1}{dx}-m\frac{dV_1}{dy}-n\frac{dV_1}{dz}, \tag{3}$$

$$\frac{dV_2}{d\nu_2}=l\frac{dV_2}{dx}+m\frac{dV_2}{dy}+n\frac{dV_2}{dz}. \tag{4}$$

Проведем на поверхности какую-либо кривую, и пусть s — длина, отсчитываемая вдоль этой кривой от некоторой фиксированной точки на ней. В каждой точке поверхности, а значит, и в каждой точке этой кривой, $V_2-V_1=C$. Дифференцируя это равенство по s, получим

$$\left(\frac{dV_2}{dx}-\frac{dV_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds}+\left(\frac{dV_2}{dy}-\frac{dV_1}{dy}\right)\frac{dy}{ds}+\left(\frac{dV_2}{dz}-\frac{dV_1}{dz}\right)\frac{dz}{ds}=0, \tag{5}$$

а поскольку нормаль перпендикулярна этой кривой, то

$$l\frac{dx}{ds}+m\frac{dy}{ds}+n\frac{dz}{ds}=0. \tag{6}$$

Из (3), (4), (5) и (6) следует, что

$$\frac{dV_2}{dx}-\frac{dV_1}{dx}=l\left(\frac{dV_1}{d\nu_1}+\frac{dV_2}{d\nu_2}\right), \tag{7}$$

$$\frac{dV_2}{dy}-\frac{dV_1}{dy}=m\left(\frac{dV_1}{d\nu_1}+\frac{dV_2}{d\nu_2}\right), \tag{8}$$

$$\frac{dV_2}{dz}-\frac{dV_1}{dz}=n\left(\frac{dV_1}{d\nu_1}+\frac{dV_2}{d\nu_2}\right). \tag{9}$$

Если рассматривать изменение электродвижущей напряженности в точке при прохождении через поверхность, то составляющая напряженности, перпендикулярная поверхности, может скачком измениться на поверхности, но две другие составляющие, параллельные касательной плоскости, остаются непрерывными при пересечении поверхности.

78 б. Чтобы определить величину заряда на поверхности, рассмотрим замкнутую поверхность, находящуюся частично в положительной области и частично в отрицательной, так что она охватывает часть поверхности разрыва.

Поверхностный интеграл $\iint R\cos\varepsilon dS$ по этой поверхности равен $4\pi e$, где e — количество электричества внутри замкнутой поверхности.

Повторяя рассуждения п. 21, получим

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right) dx\,dy\,dz + \iint \{l\,(X_2-X_1)+ \\ + m\,(Y_2-Y_1)+n\,(Z_2-Z_1)\}\, dS, \tag{10}$$

где трехкратный интеграл берется по всему объему внутри замкнутой поверхности, а двукратный — по поверхности разрыва.

Подставляя значения входящих сюда величин согласно (7), (8) и (9), получим

$$4\pi e = \iiint 4\pi\rho\, dx\,dy\,dz - \iint \left(\frac{dV_1}{d\nu_1}+\frac{dV_2}{d\nu_2}\right) dS. \tag{11}$$

Но по определению объемной плотности ρ и поверхностной плотности σ

$$4\pi e = 4\pi \iiint \rho\, dx\,dy\,dz + 4\pi \iint \sigma\, dS. \tag{12}$$

Сравнивая два последних слагаемых этих уравнений, получим

$$\frac{dV_1}{d\nu_1}+\frac{dV_2}{d\nu_2}+4\pi\sigma = 0. \tag{13}$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением для V на заряженной поверхности с поверхностной плотностью σ.

78 в. Если V — функция от x, y, z, удовлетворяющая в данной непрерывной области пространства уравнению Лапласа

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0$$

и в некоторой конечной части этой области V постоянно и равно C, то V постоянно и равно C во всей области, где справедливо уравнение Лапласа.

Если V не равно C во всей области, то обозначим через S поверхность, ограничивающую конечную область, где $V=C$.

На поверхности S $V=C$.

Пусть ν — наружная нормаль к поверхности S. Поскольку S является границей непрерывной области, в которой $V=C$, то при перемещении по нормали от поверхности S значение V начинает отличаться от C. Таким образом, $dV/d\nu$ сразу вне поверхности может быть положительно или отрицательно, но не может быть равно нулю, за исключением нормалей на граничной линии между положительной и отрицательной областью.

Для нормали ν', направленной внутрь поверхности S, очевидно, $V'=C$ и $(dV'/d\nu')=0$.

Итак, в каждой точке поверхности S, за исключением некоторых граничных линий,

$$\frac{dV}{d\nu}+\frac{dV'}{d\nu'}(=-4\pi\sigma)$$

является конечной величиной, положительной или отрицательной, так что на всей поверхности S, кроме некоторых граничных линий, разделяющих положительные и отрицательные области, имеется непрерывное распределение заряда.

На этой поверхности уравнение Лапласа не выполняется (за исключением точек, лежащих на некоторых линиях). Таким образом, поверхность S, ограничивающая область, внутри которой $V=C$, охватывает всю непрерывную область, в которой выполняется уравнение Лапласа.

Сила, действующая на заряженную поверхность

79. Общие выражения для составляющих силы, действующей на заряженное тело, параллельных трем координатным осям, имеют вид

$$A=\iiint \rho X\,dx\,dy\,dz \tag{14}$$

и аналогичные выражения для составляющих B и C, параллельных осям y и z.

Однако на заряженной поверхности ρ бесконечно, а X может претерпевать разрыв, так что рассчитать силу непосредственно по этим формулам мы не можем.

Однако мы показали, что разрыв претерпевает лишь составляющая напряженности, нормальная заряженной поверхности, две другие составляющие остаются непрерывными.

Примем ось x перпендикулярной поверхности в данной точке и допустим также, по крайней мере на первом этапе рассмотрения, что X меняется в действительности не скачком, а непрерывно от X_1 до X_2 при изменении x от x_1 до x_2. Если в результате расчета мы получим определенный предел для силы при x_2-x_1 стремящемся к нулю, мы сможем считать его справедливым при $x_2=x_1$, когда заряженная поверхность имеет нулевую толщину.

Подставляя для ρ его значение по п. 77, получим

$$A=\frac{1}{4\pi}\iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)X\,dx\,dy\,dz. \tag{15}$$

Интегрирование по x от $x=x_1$ до $x=x_2$ дает

$$A=\frac{1}{4\pi}\iint\left[\frac{1}{2}(X_2^2-X_1^2)+\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)X\,dx\right]dy\,dz. \tag{16}$$

Таково значение A для слоя, параллельного плоскости yz, толщиной x_2-x_1.

Поскольку Y и Z непрерывны, то $(dY/dy)+(dZ/dz)$ конечно, а поскольку X также конечно, то

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)X\,dx<C(x_2-x_1),$$

где C — наибольшее значение $[(dY/dy)+(dZ/dz)]X$ между $x=x_1$ и $x=x_2$.

При неограниченном уменьшении x_2-x_1 этот член стремится к нулю, так что

$$A=\iint \frac{1}{8\pi}(X_2^2-X_1^2)\,dy\,dz, \tag{17}$$

где X_1 — значение X на отрицательной стороне поверхности, а X_2 — на положительной.

Согласно п. 78б,

$$X_2-X_1=\frac{dV_1}{dx}-\frac{dV_2}{dx}=4\pi\sigma, \tag{18}$$

так что (17) можно переписать в виде

$$A=\iint \frac{1}{2}(X_2+X_1)\,\sigma\,dy\,dz. \tag{19}$$

Здесь $dydz$ — элемент поверхности, σ — поверхностная плотность, а $(X_2+X_1)/2$ — арифметическое среднее значение электродвижущих напряженностей по обе стороны поверхности.

Таким образом, на элемент заряженной поверхности действует сила, составляющая которой по нормали к поверхности равна произведению заряда этого элемента на арифметическое среднее значений нормальной составляющей напряженности по обе стороны поверхности.

Поскольку обе оставшиеся составляющие электродвижущей напряженности не испытывают разрыва, вычисление их вклада в силу, действующую на поверхность, не вызывает осложнений.

Теперь мы можем считать, что нормаль к поверхности расположена произвольным образом относительно осей координат, и написать общее выражение для составляющих силы, действующей на элемент поверхности dS:

$$\begin{aligned} A&=(1/2)\,(X_1+X_2)\sigma dS,\\ B&=(1/2)\,(Y_1+Y_2)\sigma dS,\\ C&=(1/2)\,(Z_1+Z_2)\sigma dS. \end{aligned} \tag{20}$$

Заряженная поверхность проводника

80. Мы показали выше (п. 72), что всюду в веществе проводника при электрическом равновесии $X=Y=Z=0$, так что V постоянно.

Следовательно,

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=4\pi\rho=0,$$

т. е. ρ равно нулю во всей толщине проводника: внутри проводника не может быть никаких зарядов.

Таким образом, на проводнике, находящемся в электрическом равновесии, возможно лишь поверхностное распределение электричества.

Распределение электричества в толще тела возможно лишь для непроводящих тел.

Поскольку внутри проводника результирующая напряженность равна нулю, то вне проводника, непосредственно у его поверхности, она должна быть направлена по нормали к поверхности, равняться $4\pi\sigma$ и действовать в наружном направлении.

Это соотношение между поверхностной плотностью и результирующей напряженностью вблизи поверхности проводника известно как Закон Кулона, поскольку Кулон экспериментально установил, что электродвижущая напряженность вблизи некоторой точки поверхности проводника перпендикулярна поверхности и пропорциональна поверхностной плотности в этой точке. Численное значение $R=4\pi\sigma$ было установлено Пуассоном.

Сила, действующая на элемент заряженной поверхности проводника dS, равна, согласно п. 79, $(R\sigma/2)dS=2\pi\sigma^2dS=(R^2/8\pi)dS$, поскольку с внутренней стороны поверхности напряженность равна нулю.

Эта сила действует по нормали к проводнику и направлена наружу независимо от того, заряжена поверхность положительно или отрицательно.

Сила в динах, действующая на один квадратный сантиметр поверхности, равна $(R\sigma/2)=2\pi\sigma^2=R^2/8\pi$, она действует как натяжение наружу от поверхности проводника.

81. Если теперь представить себе заряженное продолговатое тело, то, уменьшая его поперечные размеры, можно прийти к понятию заряженной линии.

Пусть ds — длина небольшого элемента продолговатого тела, c — его периметр, а σ — поверхностная плотность заряда на его поверхности. Обозначая через λ заряд, приходящийся на единицу длины, получим $\lambda=c\sigma$. При этом результирующая электрическая напряженность вблизи поверхности будет равна $4\pi\sigma=4\pi\lambda/c$.

Если при постоянном λ неограниченно уменьшать c, то напряженность на поверхности будет стремиться к бесконечности. Но для каждого диэлектрика существует предел, выше которого напряженность не может подняться, не вызывая пробоя. Поэтому распределение электричества, при котором конечное количество электричества расположено на конечном участке линии, несовместимо с условиями, существующими в природе.

Даже если бы и нашелся такой изолятор, в котором бесконечная напряженность не вызывает пробоя, линейный проводник все равно нельзя было бы зарядить конечным количеством электричества, так как, поскольку конечный заряд создал бы бесконечный потенциал, потребовалось бы бесконечно большая электродвижущая сила, чтобы перенести заряд на линейный проводник.

Аналогично можно показать, что и точечный заряд конечной величины не может существовать в природе. Однако в некоторых случаях удобно говорить о линейных зарядах и точечных зарядах. Мы будем представлять их как заряженные проволоки или малые тела, размеры которых пренебрежимы по сравнению с основными существенными расстояниями.

Поскольку количество электричества на любом заданном участке провода при заданном потенциале стремится к нулю при неограниченном уменьшении диаметра провода, распределение заряда на телах конечных размеров не изменится существенно при внесении очень тонкой металлической проволочки в поле, например, для соединения этих тел с землей, электрической машиной или электрометром.

О силовых линиях

82. Если построить кривую, направление которой совпадает в каждой точке с направлением результирующей напряженности в этой точке, то такая кривая называется Силовой Линией.

На любом участке силовой линии она идет от места с большим потенциалом к месту с меньшим потенциалом.

Поэтому силовая линия не может пересекать саму себя, но должна иметь начало и конец. Начало силовой линии, согласно п. 80, должно быть расположено на положительно заряженной поверхности, а конец силовой линии должен находиться на отрицательно заряженной поверхности.

Началом и концом силовой линии называются соответствующие точки положительной и отрицательной заряженной поверхности.

Если силовая линия перемещается так, что ее начало описывает замкнутую кривую на положительной поверхности, то ее конец описывает соответствующую замкнутую кривую на отрицательной поверхности, а сами силовые линии образуют трубчатую поверхность, называемую трубкой индукции. Такую трубку называют Соленоидом [3].

В каждой точке боковой поверхности трубки сила лежит в касательной плоскости, так что индукции поперек поверхности нет. Следовательно, если в трубке не содержится заряженного вещества, то, согласно п. 77, полная индукция через замкнутую поверхность, образуемую боковой поверхностью трубки и двумя ее торцами, равна нулю, следовательно, значение $\iint R\cos\varepsilon\, dS$ для обоих торцов должно быть одинаково по величине и отличаться знаком.

Если эти торцевые поверхности являются поверхностями проводников, то $\varepsilon=0$ и $R=-4\pi\sigma$, так что интеграл $\iint R\cos\varepsilon\, dS$ переходит в $-4\pi\iint\sigma\, dS$, т. е. равен заряду поверхности, умноженному на 4π.

Таким образом, положительный заряд участка поверхности, охватываемого замкнутой кривой в начале силовой трубки, численно равен отрицательному заряду, охватываемому соответствующей замкнутой кривой в конце силовой трубки.

Из свойств силовых линий можно вывести ряд важных следствий.

Внутренняя поверхность замкнутого проводящего сосуда совершенно лишена заряда, и потенциал всех точек внутри нее тот же, что и у проводника, если внутри сосуда нет заряженных тел.

Действительно, поскольку силовая линия должна начинаться на положительно заряженной поверхности, а кончаться на отрицательно заряженной, а никаких заряженных тел внутри сосуда нет, то силовая линия, если она существует внутри сосуда, должна начинаться и кончаться на самой поверхности сосуда. Но потенциал в начале силовой линии должен быть больше, чем в конце, между тем мы показали, что потенциал во всех точках проводника один и тот же.

Значит, в объеме внутри полого проводящего сосуда не может быть никаких силовых линий, если там нет никаких заряженных тел.

---

[3] От σωλήν — труба. Фарадей (§ 3271) употребляет термин «сфондилоид» в том же смысле.

Если проводник, находящийся внутри замкнутого полого сосуда, соединен с этим сосудом, то его потенциал становится равным потенциалу сосуда, а поверхность его становится непрерывно связанной с внутренней поверхностью сосуда. Следовательно, на проводнике нет никакого заряда.

Если представить себе произвольную заряженную поверхность разбитой на элементарные участки так, что заряд каждого участка равен единице, и если построить в силовом поле соленоиды, опирающиеся на эти элементарные площадки, то поверхностный интеграл через любую другую поверхность будет выражаться числом соленоидов, пересекаемых этой поверхностью. Именно в этом смысле Фарадей применяет понятие силовых линий для указания не только на направление, но и на величину силы в произвольной точке поля.

Мы пользуемся выражением Силовые Линии потому, что им пользовались Фарадей и другие. Строго говоря, их следовало бы назвать Линиями Электрической Индукции.

В обычных случаях линии индукции указывают также величину и направление результирующей электродвижущей напряженности в каждой точке, поскольку напряженность и индукция направлены одинаково и находятся в постоянном отношении. Однако бывают случаи, когда важно помнить, что эти линии указывают именно индукцию, а напряженность непосредственно определяется эквипотенциальными поверхностями: она перпендикулярна этим поверхностям и обратно пропорциональна расстоянию между соседними поверхностями.

Об удельной индуктивной способности

83а. Выше при исследовании поверхностных интегралов мы приняли обычное представление о прямом воздействии на расстоянии и не учитывали никаких эффектов, зависящих от природы диэлектрической среды, в которой наблюдаются эти силы.

Но Фарадей заметил, что количество электричества, наводимое заданной электродвижущей силой на поверхности проводника, граничащего с диэлектриком, для разных диэлектриков различно. Для большинства твердых и жидких диэлектриков оно больше, чем для воздуха и для газов. Поэтому говорят, что у этих веществ удельная индуктивная способность больше, чем у воздуха, который Фарадей принял за эталонную среду.

Мы можем выразить теорию Фарадея на математическом языке, сказав, что в диэлектрической среде индукция через поверхность представляет собой произведение нормальной составляющей электрической напряженности на коэффициент, являющийся удельной индуктивной способностью этой среды. Если этот коэффициент обозначить через K, то всюду при вычислении поверхностных интегралов нам надо будет умножить X, Y, Z на K, так что уравнение Пуассона примет вид

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)+4\pi\rho=0. \qquad (1)$$

На поверхности раздела двух сред с индуктивными способностями K_1 и K_2, потенциалы в которых мы обозначим V_1 и V_2, характеристическое уравнение можно записать в виде

$$K_1 \frac{dV_1}{d\nu_1} + K_2 \frac{dV_2}{d\nu_2} + 4\pi\sigma = 0, \tag{2}$$

где ν_1, ν_2 — нормали в сторону первой и второй среды, а σ — истинная поверхностная плотность заряда на поверхности раздела, т. е. количество электричества, фактически находящееся на поверхности в виде заряда, изменить которое можно, лишь подведя к данному месту или отведя от него какой-то заряд.

Кажущееся распределение электричества

83 б. Если исходить из фактического распределения потенциала и найти по нему объемную плотность ρ' и поверхностную плотность σ' в предположении, что K всюду равно единице, то величину ρ' можно назвать кажущейся объемной плотностью, а σ' — кажущейся поверхностной плотностью, потому что полученное таким образом распределение электричества создавало бы фактически имеющееся распределение потенцала в предположении, что приведенный в п. 66 закон для электрической силы не требует никакой поправки для учета различия в свойствах диэлектриков.

Кажущийся заряд электричества внутри заданного объема может увеличиваться или уменьшаться без какого-либо прохождения электричества через границы этого объема. Поэтому его следует отличать от истинного заряда, удовлетворяющего уравнению непрерывности.

В неоднородном диэлектрике, в котором K меняется непрерывно, для кажущейся объемной плотности ρ' справедливо соотношение

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi\rho' = 0. \tag{3}$$

Сопоставляя его с уравнением (1), получим

$$4\pi(\rho - K\rho') + \frac{dK}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{dK}{dy}\frac{dV}{dy} + \frac{dK}{dz}\frac{dV}{dz} = 0. \tag{4}$$

Истинная электризация, обозначаемая через ρ, создаст в диэлектрике с неоднородной индуктивной способностью, обозначаемой через K, такой же потенциал в каждой точке, какой создала бы кажущаяся электризация с плотностью ρ' в диэлектрике с индуктивной способностью, равной всюду единице.

Кажущаяся поверхностная плотность σ' определяется по электрическим силам, действующим в окрестности поверхности с помощью обычного характеристического уравнения

$$\frac{dV_1}{d\nu_1} + \frac{dV_2}{d\nu_2} + 4\pi\sigma' = 0.$$

Если твердый диэлектрик произвольной формы является идеальным изолятором и на его поверхность не внесен никакой заряд, то истинный заряд на ней равен нулю, каковы бы ни были действующие на нее электрические силы. Таким образом,

$$K_1 \frac{dV_1}{d\nu_1} + K_2 \frac{dV_2}{d\nu_2} = 0,$$

откуда

$$\frac{dV_1}{d\nu_1}=\frac{4\pi\sigma' K_2}{K_1-K_2}, \qquad \frac{dV_2}{d\nu_2}=\frac{4\pi\sigma' K_1}{K_2-K_1}.$$

Поверхностная плотность σ' — это кажущаяся электризация, создаваемая индукцией на поверхности твердого диэлектрика. Она полностью исчезает при устранении индуцирующей силы, но если в период действия индуцирующей силы разрядить кажущуюся электризацию поверхности, проведя по ней пламенем, то после устранения индуцирующей силы появится истинная электризация, равная и противоположная σ' [4].

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ II

Уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)+4\pi\rho=0,$$

$$K_2\frac{dV}{d\nu_2}+K_1\frac{dV}{d\nu_1}+4\pi\sigma=0$$

выражают условие, что смещение через любую замкнутую поверхность отличается множителем 4π от количества электричества внутри нее. Первое уравнение получается сразу при применении этого принципа к параллелепипеду, грани которого перпендикулярны координатным осям, а второе — применением к цилиндру, охватывающему элемент заряженной поверхности.

Предваряя результаты следующей главы, мы можем вывести эти уравнения непосредственно из фарадеевского определения удельной индуктивной способности. Рассмотрим случай конденсатора, состоящего из двух бесконечных параллельных пластин. Пусть V_1 и V_2 — потенциалы этих пластин, d — расстояние между ними, а E — заряд на площади A одной из пластин. Тогда, если K — удельная индуктивная способность разделяющего их диэлектрика, то

$$E=KA\frac{V_1-V_2}{4\pi d}.$$

Энергия системы Q, согласно п. 84, равна

$$\frac{1}{2}E(V_1-V_2)=\frac{1}{2}KA\frac{(V_1-V_2)^2}{4\pi d},$$

или, если обозначить через F электродвижущую напряженность в произвольной точке между пластинами, $Q=(1/8\pi)KAdF^2$. Если мы считаем энергию сосредоточенной в диэлектрике, то на единицу объема придется энергия Q/Ad, так что количество энергии в единице объема равно $KF^2/8\pi$. Этот результат остается справедливым и для неоднородного поля, так что энергия для произвольного электрического поля равна

$$Q=\frac{1}{8\pi}\iiint KF^2\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{8\pi}\iiint K\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz.$$

[4] См. Фарадей «Remarks on Static Induction», *Proceedings of the Royal Institution*, Feb. 12, 1858.

Предположим, что потенциал каждой точки поля увеличился на малую величину δV, где δV — произвольная функция от x, y, z, тогда вариация энергии δQ будет даваться уравнением

$$\delta Q=\frac{1}{4\pi}\iiint\left(K\left\{\frac{dV}{dx}\frac{d\,\delta V}{dx}+\frac{dV}{dy}\frac{d\,\delta V}{dy}+\frac{dV}{dz}\frac{d\,\delta V}{dz}\right\}\right)dx\,dy\,dz,$$

или, согласно теореме Грина,

$$\delta Q=-\frac{1}{4\pi}\iint\left(K_1\frac{dV}{d\nu_1}+K_2\frac{dV}{d\nu_2}\right)\delta V\,dS-\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)\right\}\delta V\,dx\,dy\,dz,$$

где $d\nu_1$ и $d\nu_2$ — элементы нормалей к поверхности в сторону первой и второй среды соответственно.

Но согласно п. 85, 86

$$\delta Q=\sum(e\delta V)=\iint\sigma\delta V\,dS+\iiint\rho\delta V\,dx\,dy\,dz,$$

и поскольку δV произвольно, то

$$-\frac{1}{4\pi}\left(K_1\frac{dV}{d\nu_1}+K_2\frac{dV}{d\nu_2}\right)=\sigma,$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)\right\}=\rho,$$

что и совпадает с уравнениями в тексте.

В опытах Фарадея пламя можно рассматривать как проводник, связанный с землей. Влияние диэлектрика выражается в появлении кажущейся электризации на его поверхности. Эта кажущаяся электризация, воздействуя на проводящее пламя, притягивает к себе электричество противоположного знака, распределяющееся по поверхности диэлектрика, тогда как электричество того же знака отталкивается через пламя на землю. Таким образом, на поверхности диэлектрика появляется действительная электризация, компенсирующая влияние кажущейся электризации. При устранении индуцирующей силы кажущаяся электризация исчезает, а действительная электризация остается и уже не компенсируется кажущейся.

ГЛАВА III

О РАБОТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛ И ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПРОВОДНИКОВ

84. *О Работе, которую должен совершить внешний агент, чтобы зарядить систему заданным образом.*

Работа, затрачиваемая при перенесении количества электричества δe с бесконечного расстояния (или из любой точки, где потенциал равен нулю) в данную часть системы с потенциалом V, равна, по определению (п. 70), $V\delta e$.

В результате такой операции заряд в данной части системы возрастает на δe, так что если до этого он был равен e, его значение становится равным $e+\delta e$.

Следовательно, работа, совершаемая при заданном изменении зарядов системы, выражается интегралом

$$W = \Sigma\left(\int V\delta e\right), \tag{1}$$

где суммирование производится по всем частям заряженной системы.

Из выражения для потенциала, приведенного в п. 73, видно, что потенциал в данной точке может рассматриваться как сумма нескольких слагаемых, каждое из которых представляет собой потенциал соответствующей части заряда системы.

Таким образом, если V — потенциал в данной точке, обусловленный некоторой системой зарядов, которую мы обозначим $\Sigma(e)$, а V' — потенциал в той же точке, обусловленный другой системой зарядов, обозначаемой через $\Sigma(e')$, то потенциал в этой точке, обусловленный одновременным наличием обеих систем зарядов, будет $V+V'$.

Следовательно, если каждый заряд системы увеличивается в отношении n к 1, то и потенциал в любой точке системы также изменяется в отношении n к 1.

Поэтому предположим, что внесение заряда в систему происходит следующим образом. Пусть сначала система не заряжена и находится под нулевым потенциалом и пусть все части системы заряжаются одновременно со скоростью, пропорциональной их окончательному заряду.

Так, если e — окончательное значение заряда, а V — окончательное значение потенциала какой-либо части системы, то если на некотором этапе этого процесса заряд равен ne, то и потенциал равен nV, и мы можем описать весь процесс зарядки как непрерывное увеличение n от 0 до 1.

Когда n меняется от n до $n+\delta n$, каждая часть системы, окончательный заряд которой равен e, а окончательный потенциал V, увеличивает свой заряд на $e\delta n$, а поскольку ее потенциал равен nV, то совершаемая над ней работа равна $eVn\delta n$.

Отсюда полная работа, совершаемая при зарядке системы, равна

$$\sum(eV)\int_0^1 n\,dn = \frac{1}{2}\sum(eV), \tag{2}$$

т. е. полусумме произведений зарядов различных частей системы на соответствующие им потенциалы.

Такова работа, затрачиваемая внешним источником при зарядке системы описанным нами способом, но поскольку система консервативная, то работа, затрачиваемая на приведение системы в это же состояние любым другим способом, будет той же.

Поэтому мы называем величину

$$W = \frac{1}{2}\sum(eV) \tag{3}$$

электрической энергией системы, выраженной через заряды различных частей системы и их потенциалы.

85 а. Предположим теперь, что система переходит из состояния (e, V) в состояние (e', V') таким образом, что различные заряды одновременно изменяются со скоростями, пропорциональными их полному приращению $e'-e$.

Если в какой-либо момент заряд определенной части системы равен $e+n\,(e'-e)$, то ее потенциал равен $V+n\,(V'-V)$, а работа, совершенная при изменении заряда этой части системы, равна

$$\int_0^1 (e'-e)\,[V+n(V'-V)]\,dn=\frac{1}{2}(e'-e)\,(V'+V),$$

так что если W' — энергия системы в состоянии (e', V'), то

$$W'-W=\frac{1}{2}\sum(e'-e)(V'+V). \tag{4}$$

$$\text{Но}\quad W=\frac{1}{2}\sum(eV)\quad \text{и}\quad W'=\frac{1}{2}\sum(e'V').$$

Подставляя эти значения в (4), получим

$$\Sigma\,(eV')=\Sigma\,(e'V). \tag{5}$$

Таким образом, если рассмотреть два различных состояния электризации одной и той же заданной системы заряженных проводников, то сумма произведений зарядов в первом состоянии на значения потенциалов соответствующих проводников во втором состоянии равна сумме произведений зарядов во втором состоянии на потенциалы соответствующих проводников в первом состоянии.

Это соотношение из элементарной теории электричества соответствует Теореме Грина из аналитической теории. Выбрав надлежащим образом начальное и конечное состояние системы, можно получить целый ряд полезных результатов.

85 б. Из (4) и (5) можно прийти к другому выражению для превращения энергии, где оно выражается через приращение потенциала:

$$W'-W=\frac{1}{2}\sum(e'+e)\,(V'-V). \tag{6}$$

Для бесконечно малых приращений (4) и (6) запишутся в виде

$$dW=\Sigma\,(V\delta e)=\Sigma\,(e\delta V). \tag{7}$$

Если обозначить через W_e и W_V выражения для W соответственно через заряды и через потенциалы системы, а через A_r, e_r и V_r — один из проводников системы, его заряд и его потенциал, то

$$V_r=(dW_e/de_r), \tag{8}$$

$$e_r=(dW_V/dV_r). \tag{9}$$

86. Пусть в произвольно заданной системе проводников какой-либо из них, который мы обозначим через A_t, не имеет заряда ни в начальном, ни в конечном состоянии, тогда для этого проводника $e_t=0$ и $e'_t=0$, так что члены, соответствующие проводнику A_t, отсутствуют в обеих частях равенства (5).

Если какой-либо другой проводник, скажем A_u, имеет нулевой потенциал в обоих состояниях системы, то $V_u=0$ и $V'_u=0$, так что соответствующие проводнику A_u члены отсутствуют в обеих частях равенства (6).

Предположим теперь, что все проводники, за исключением двух, скажем A_r и A_s, либо изолированы и не заряжены, либо заземлены, тогда уравнение (5) примет вид

$$e_rV'_r+e_sV'_s=e'_rV_r+e'_sV_s. \tag{10}$$

Пусть в начальном состоянии $e_r=1$ и $e_s=0$, а в конечном $e'_r=0$ и $e'_s=1$, тогда уравнение (10) примет вид

$$V'_r=V_s, \tag{11}$$

т. е. если единичный заряд, сообщенный проводнику A_r, повышает потенциал изолированного проводника A_s до V, то единичный заряд, сообщенный проводнику A_s, повышает потенциал изолированного проводника A_r до того же значения V при условии, что все остальные проводники системы либо изолированы и не заряжены, либо заземлены, так что их потенциал равен нулю.

Здесь мы впервые встречаемся в области электричества с соотношением взаимности. Такие соотношения взаимности встречаются во всех областях знания и помогают нам часто находить решения новых задач по известным решениям более простых задач.

Так, из того факта, что в точке вне проводящей сферы с единичным зарядом потенциал равен r^{-1}, где r — расстояние от центра сферы, мы заключаем, что малое тело с единичным зарядом, помещенное на расстоянии r от центра проводящей незаряженной сферы, подымает ее потенциал до значения r^{-1}.

Предположим теперь, что в начальном состоянии $V_r=1$ и $V_s=0$, а в конечном $V'_r=0$ и $V'_s=1$, тогда уравнение (10) примет вид

$$e_s=e'_r, \tag{12}$$

т. е. если при повышении потенциала A_r до 1 на заземленном проводнике A_s индуцируется заряд e, то при повышении потенциала A_s до 1 на заземленном проводнике A_r индуцируется такой же заряд e.

Наконец, сделаем третье предположение, что в начальном состоянии $V_r=1$, а $e_s=0$, а в конечном $V'_r=0$, а $e'_s=1$; уравнение (10) принимает на этот раз вид

$$e'_r+V_s=0. \tag{13}$$

Таким образом, если при незаряженном проводнике A_s повышение потенциала A_r до 1 приводит к повышению потенциала A_s до V, то при заземленном проводнике A_r единичный заряд, сообщенный A_s, индуцирует на проводнике A_r отрицательный заряд, численно равный V.

Во всех этих случаях часть остальных проводников может быть изолирована и не заряжена, остальные должны быть заземлены.

Третий рассмотренный случай является элементарной формой одной из теорем Грина. В качестве примера его применения предположим, что мы установили распределение электрического заряда на различных частях проводящей системы, находящейся под нулевым потенциалом, индуцированное единичным зарядом, сообщенным определенному телу системы A_s.

Пусть η_r — заряд тела A_r при этих условиях. Тогда, если предположить, что на A_s заряда нет, а остальным телам сообщены различные потенциалы, то потенциал тела A_s будет

$$V_s = -\Sigma\,(\eta_r V_r). \tag{14}$$

Таким образом, если мы установили поверхностную плотность в любой точке полого проводящего сосуда, находящегося под нулевым потенциалом, обусловленную единичным зарядом, находящимся в заданной точке внутри сосуда, то, зная значение потенциала в каждой точке поверхности этого же размера и формы, что и внутренняя поверхность проводника, мы можем найти потенциал в точке внутри этой поверхности, где находился единичный заряд.

Следовательно, если потенциал известен во всех точках замкнутой поверхности, то его можно определить и в любой точке внутри, если внутри поверхности нет заряженных тел, и во всех точках снаружи, если снаружи нет заряженных тел.

Теория системы проводников

87. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — n проводников произвольной формы, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — их заряды, а $V_1, V_2, \ldots, V_n$ — их потенциалы. Пусть диэлектрическая среда, разделяющая проводники, остается неизменной и не заряжается при рассматриваемых ниже операциях.

В п. 84 было показано, что потенциал каждого проводника является однородной линейной функцией от n зарядов проводников. Следовательно, электрическая энергия системы, являющаяся полусуммой произведений потенциала каждого проводника на его заряд, должна быть однородной квадратичной функцией от n зарядов типа

$$W_e = (1/2)\,p_{11}e_1^2 + p_{12}e_1e_2 + (1/2)\,p_{22}e_2^2 + p_{13}e_1e_3 + p_{23}e_2e_3 + (1/2)\,p_{33}e_3^2 + \ldots . \tag{15}$$

Индекс e указывает, что W представлено как функция зарядов. W без индекса будет означать выражение (3), в которое входят и заряды и потенциалы.

Из выражения (15) можно найти потенциал любого проводника. Потенциал определяется как работа, необходимая для переноса единичного заряда из области нулевого потенциала в точку с данным потенциалом, а поскольку эта работа идет на увеличение W, то достаточно продифференцировать W_e по заряду определенного проводника, чтобы найти его потенциал. Таким образом, получим систему n линейных уравнений

$$\begin{aligned}
V_1 &= p_{11}e_1 + \ldots + p_{r1}e_r + \ldots + p_{n1}e_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
V_s &= p_{1s}e_1 + \ldots + p_{rs}e_r + \ldots + p_{ns}e_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
V_n &= p_{1n}e_1 + \ldots + p_{rn}e_r + \ldots + p_{nn}e_n,
\end{aligned} \tag{16}$$

выражающих n потенциалов через n зарядов.

Коэффициенты p_{rs} называются коэффициентами потенциала. Каждый коэффициент имеет два индекса, первый из которых указывает на заряд, а второй — на потенциал.

Коэффициент p_{rr} с одинаковыми индексами показывает величину потенциала проводника A_r при единичном заряде на нем и при нулевых зарядах на всех остальных проводниках. Существует n таких коэффициентов по числу проводников.

Коэффициент p_{rs} с разными индексами показывает величину потенциала на проводнике A_s при единичном заряде на проводнике A_r и при нулевых зарядах всех остальных проводников, кроме A_r.

Мы уже показали в п. 86, что $p_{rs}=p_{sr}$. Мы можем доказать это сейчас короче, рассмотрев цепочку равенств

$$p_{rs}=\frac{dV_s}{de_r}=\frac{d}{de_r}\frac{dW_e}{de_s}=\frac{d}{de_s}\frac{dW_e}{de_r}=\frac{dV_r}{de_s}=p_{sr}. \qquad (17)$$

Число *различных* коэффициентов с двумя отличающимися индексами равно, следовательно, $n\,(n-1)/2$, по одному для каждой пары проводников.

Решая уравнения (16) относительно e_1, e_2 и т. д., мы получим n уравнений, выражающих заряды через потенциалы

$$\begin{aligned} e_1 &= q_{11}V_1+\ldots+q_{1s}V_s+\ldots+q_{1n}V_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_r &= q_{r1}V_1+\ldots+q_{rs}V_s+\ldots+q_{rn}V_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= q_{n1}V_1+\ldots+q_{ns}V_s+\ldots+q_{nn}V_n. \end{aligned} \qquad (18)$$

В этом случае также $q_{rs}=q_{sr}$, так как

$$q_{rs}=\frac{de_r}{dV_s}=\frac{d}{dV_s}\frac{dW_V}{dV_r}=\frac{d}{dV_r}\frac{dW_V}{dV_s}=\frac{de_s}{dV_r}=q_{sr}. \qquad (19)$$

Подставляя значения зарядов в выражение для электрической энергии

$$W=[e_1V_1+\ldots+e_rV_r+\ldots+e_nV_n]/2, \qquad (20)$$

мы получим выражение для энергии через потенциалы

$$W_V=\frac{1}{2}q_{11}V_1^2+q_{12}V_1V_2+\frac{1}{2}q_{22}V_2^2+q_{13}V_1V_3+q_{23}V_2V_3+\frac{1}{2}q_{33}V_3^2+\ldots. \qquad (21)$$

Коэффициент с одинаковыми индексами называется Электрической Емкостью того проводника, к которому он относится.

Определение. Емкость проводника — это его заряд при единичном потенциале этого проводника и при нулевом потенциале остальных проводников.

Это подходящее определение для емкости проводника, если не делается никаких дополнительных уточнений. Но иногда оказывается удобным задавать другие условия на некоторых или на всех прочих проводниках, например, считать часть из них незаряженными. Мы можем тогда определить емкость проводника при этих условиях как его заряд при единичном потенциале.

Прочие коэффициенты называются коэффициентами индукции. Каждый из этих коэффициентов q_{rs} показывает величину заряда, появляющегося на A_r при единичном потенциале проводника A_s и нулевых потенциалах всех остальных проводников, кроме A_s.

Математический расчет коэффициентов потенциала и коэффициентов емкости в общем случае весьма труден. Ниже мы покажем, что эти коэффициенты имеют всегда вполне определенное значение, а в некоторых частных случаях рассчитаем их. Мы покажем также, как их можно определить на опыте.

Если идет речь о емкости проводника без указания формы и положения остальных проводников системы, то подразумевается его емкость при условии, что никаких других проводников или заряженных тел нет на конечном расстоянии от рассматриваемого проводника.

Если иметь дело только с емкостями и коэффициентами индукции, то иногда оказывается удобным записывать их в виде $[A.P]$. Этот символ означает заряд на проводнике A при единичном потенциале проводника P (и при нулевом потенциале остальных проводников).

Аналогично $[(A+B).\ (P+Q)]$ будет означать заряд на $A+B$ при единичных потенциалах на P и Q. Легко видеть, что, поскольку

$$[(A+B).\ (P+Q)]=[A.P]+[A.Q]+[B.P]+[B.Q]=[(P+Q).\ (A+B)],$$

эти составные символы ведут себя по отношению к сложению и умножению как обычные числа.

Символ $[A.A]$ означает заряд на проводнике A при единичном потенциале A, т. е. емкость проводника A.

Аналогично $[(A+B).\ (A+Q)]$ означает сумму зарядов на проводниках A и B при единичном потенциале на A и на Q и при нулевом потенциале остальных проводников, кроме A и Q. Эту величину можно разложить на сумму $[A.A]+$ $+[A.B]+[A.Q]+[B.Q]$.

Коэффициенты потенциала не могут быть рассмотрены таким же способом. Коэффициенты индукции представляют собой заряды, и эти заряды можно складывать, а коэффициенты потенциала представляют собой потенциалы. Если потенциал проводника A равен V_1, а потенциал проводника B равен V_2, то сумма V_1+V_2 не описывает какое-либо физическое явление, хотя разность $V_1—V_2$ является электродвижущей силой от A к B.

Коэффициенты индукции между двумя проводниками можно выразить через емкости этих проводников и через совместную емкость обоих проводников: $[A.B]=$ $=[(A+B).\ (A+B)]/2—[A.A]/2—[B.B]/2$.

Размерность коэффициентов

88. Поскольку потенциал заряда e на расстоянии r равен e/r, то размерность электрического заряда равна произведению размерностей потенциала и длины.

Поэтому коэффициенты емкости и индукции имеют ту же размерность, что и длина, так что каждый из них может быть представлен отрезком прямой, длина которого не зависит от принятой системы единиц.

По тем же соображениям коэффициенты потенциала имеют размерность, обратную размерности длины.

О некоторых условиях, которым должны удовлетворять коэффициенты

89 а. Прежде всего, поскольку электрическая энергия системы является существенно положительной величиной, то выражающая ее квадратичная форма от зарядов или от потенциалов должна быть положительной при любых положительных или отрицательных значениях зарядов или потенциалов.

Существует n условий того, что однородная квадратичная функция n переменных всегда положительна; их можно записать в виде

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11}, & p_{12} \\ p_{21}, & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots \begin{vmatrix} p_{11} & \ldots, & p_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ p_{n1}, & \ldots, & p_{nn} \end{vmatrix} > 0. \qquad (22)$$

Эти n условий необходимы и достаточны для того, чтобы квадратичная форма W_e была существенно положительной [1]. Но поскольку в выражении (16) проводники могут быть расположены в произвольном порядке, то положительным должен быть любой детерминант, образованный симметрично из коэффициентов, относящихся к любому сочетанию из n проводников, причем число таких сочетаний равно $2^n—1$. Однако из всех этих условий лишь n оказываются независимыми.

Коэффициенты емкости и индукции удовлетворяют таким же условиям.

89 б. *Все коэффициенты потенциала положительны, причем ни один из коэффициентов p_{rs} не превосходит p_{rr} или p_{ss}.*

Пусть проводнику A_r сообщен единичный заряд, а все остальные проводники не заряжены. При этом образуется некоторая система эквипотенциальных поверхностей. Одна из них совпадает с поверхностью проводника A_r; потенциал на ней равен p_{rr}. Если проводник A_s расположен в полости внутри проводника A_r, т. е. полностью окружен им, то потенциал A_s тоже равен p_{rr}.

Если же проводник A_s находится вне A_r, то его потенциал p_{rs} будет заключаться между p_{rr} и нулем.

Действительно, рассмотрим силовые линии, выходящие из заряженного проводника A_r. Заряд проводника измеряется превышением числа выходящих из проводника линий над числом заканчивающихся на нем. Поэтому для незаряженного проводника число входящих в проводник линий должно равняться числу выходящих из него. Линии, входящие в проводник, приходят из области с большим потенциалом, а выходящие линии уходят в области с меньшим потенциалом. Поэтому потенциал незаряженного проводника должен быть промежуточным между наибольшим и наименьшим потенциалом в поле, и, следовательно наибольший и наименьший потенциал не может достигаться на незаряженном теле.

Таким образом, наибольшим потенциалом должен быть потенциал p_{rr} заряженного тела A_r, а наименьшим — потенциал на бесконечном расстоянии, равный нулю; потенциалы всех остальных проводников p_{rs} должны лежать между p_{rr} и нулем.

Если A_s полностью охватывает A_t, то $p_{rs}=p_{rt}$.

89 в. *Ни один из коэффициентов индукции не может быть положительным и сумма всех коэффициентов индукции, относящихся к определенному проводнику*

---

[1] См. Williamson, «*Differential Calculus*», 3rd edition, p. 407.

численно не превышает коэффициента емкости этого проводника, который всегда положителен.

Пусть A_r находится под единичным потенциалом, тогда как на всех остальных проводниках поддерживается нулевой потенциал. Тогда заряд на A_r будет равен q_{rr}, а на любом прочем проводнике A_s равен q_{rs}.

Число силовых линий, выходящих из A_r, равно q_{rr}. Часть из них кончается на других проводниках, часть может уходить в бесконечность, но ни одна силовая линия не может идти с одного из прочих проводников на другой или же в бесконечность, так как все они находятся под нулевым потенциалом.

Ни одна силовая линия не может выйти из такого проводника A_s, так как ни одна область поля не имеет потенциал ниже, чем на A_s. Если проводник A_s полностью отрезан от проводника A_r замкнутой поверхностью одного из проводников, то q_{rs} равно нулю. Если A_s не отрезано полностью, то q_{rs} отрицательно.

Если один из проводников A_t полностью окружает A_r, то все силовые линии, выходящие из A_r, попадают на A_t и на проводники, находящиеся внутри A_t, и сумма коэффициентов индукции этих проводников по отношению к A_r будет равна величине q_{rr} с обратным знаком. Если же A_r не полностью окружено проводником, то арифметическая сумма коэффициентов индукции q_{rs} будет меньше, чем q_{rr}.

Мы вывели эти две теоремы независимо, исходя из физических соображений. Предоставляем любителям математики установить, является ли одна из них следствием другой.

89 г. Если в поле имеется единственный проводник, то его собственный коэффициент потенциала равен обратной величине его емкости.

Центр распределения электричества в отсутствие внешних сил называется электрическим центром проводника. Если проводник симметричен относительно своего геометрического центра, то эта точка и является электрическим центром. Если размеры проводника малы по сравнению с рассматриваемыми расстояниями, то положение электрического центра можно определить достаточно точно на глаз.

Потенциал на расстоянии c от электрического центра имеет значение между $\frac{e}{c}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)$ и $\frac{e}{c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}\right)$, где e — заряд проводника, а a — наибольшее расстояние точек его поверхности от электрического центра.

Действительно, если предположить, что заряд сосредоточен в двух точках, находящихся на расстоянии a по обе стороны от электрического центра, то первое из приведенных выражений даст потенциал в точке, лежащей на прямой, соединяющей заряды, а второе — на перпендикулярной ей прямой. Для всех остальных распределений заряда внутри сферы радиуса a потенциал будет иметь значение, промежуточное между этими двумя.

Если в поле имеется два проводника, то их взаимный коэффициент потенциала равен $1/c'$, где c' отличается от расстояния c между их электрическими центрами не больше чем на $(a^2+b^2)/c$. Здесь a и b — наибольшие расстояния точек поверхностей обоих тел от их электрических центров.

89 д. Если в поле вносится новый проводник, то собственные коэффициенты потенциала всех остальных проводников уменьшаются.

Действительно, предположим сначала, что новое тело B — диэлектрик (с такой же удельной индуктивной способностью, как у воздуха) и не несет на себе никаких зарядов. Тогда если одному из проводников A_1 сообщить заряд e_1, то на распределение электричества на проводниках тело B не повлияет, так как B остается всюду незаряженным, и электрическая энергия системы будет просто равна $(e_1V_1)/2=(e_1^2p_{11})/2$.

Пусть теперь B становится проводником. Заряд начнет по нему перетекать из областей с большим потенциалом в области с меньшим потенциалом, при этом электрическая энергия системы уменьшится, так что величина $(e_1^2p_{11})/2$ должна уменьшиться.

Поскольку e_1 остается постоянным, должно уменьшиться p_{11}.

Если к телу B будет добавлено другое тело b, находящееся в контакте с ним, то p_{11} еще больше уменьшится.

В самом деле, предположим сначала, что тела B и b не соединены. Внесение нового тела b уменьшит p_{11}. Пусть после этого тела B и b соединены. Если какой-либо заряд перейдет с одного тела на другое, то он пойдет от большего потенциала к меньшему, так что, как мы показали, p_{11} опять уменьшится.

Таким образом, уменьшение p_{11} проводящим телом B больше того, которое было бы при внесении любого проводника, поверхность которого вписывается в B, и меньше того, которое было бы при внесении любого проводника, поверхность которого охватывает B.

В главе XI мы покажем (п. 146), что сфера диаметром b на расстоянии r, большом по сравнению с b, уменьшает величину p_{11} приблизительно на $b^3/(8r^4)$.

Отсюда следует, что если тело B любой другой формы, и b — его наибольший поперечный размер, то уменьшение p_{11} должно быть меньше $b^3/(8r^4)$.

Поэтому если наибольший размер тела B настолько мал по сравнению с расстоянием от тела A_1, что величинами порядка $b^3/(8r^4)$ мы можем пренебречь, то в качестве достаточного приближения для p_{11} можно рассматривать обратную величину емкости уединенного тела A_1.

90 а. Пусть емкость уединенного проводника A_1 равна K_1, емкость уединенного проводника A_2 равна K_2, и пусть среднее расстояние между этими проводниками равно r, причем r очень велико по сравнению с наибольшими поперечными размерами A_1 и A_2. Тогда $p_{11}=(1/K_1)$, $p_{12}=(1/r)$, $p_{22}=(1/K_2)$, $V_1=e_1K_1^{-1}+e_2r^{-1}$, $V_2=e_1r^{-1}+e_2K_2^{-1}$.

Отсюда $q_{11}=K_1(1-K_1K_2r^{-2})^{-1}$, $q_{12}=-K_1K_2r^{-1}(1-K_1K_2r^{-2})^{-1}$, $q_{22}=K_2(1-K_1K_2r^{-2})^{-1}$.

Здесь q_{11} и q_{22}—емкости проводников A_1 и A_2, когда они уже не удалены по отдельности на бесконечное расстояние от всех тел, а помещены на расстоянии r друг от друга.

90 б. Если два проводника настолько близки друг к другу, что их коэффициент взаимной индукции велик, то такую комбинацию мы называем Конденса тором.

Пусть A и B — два проводника (электрода) конденсатора.

Пусть L — емкость A, N — емкость B, а M — коэффициент взаимной индукции (следует помнить, что M отрицательно, так что численные значения $L+M$ и $M+N$ меньше, чем L и N).

Пусть a и b — электроды другого конденсатора, находящегося на расстоянии R от первого, причем R много больше размеров каждого конденсатора, и пусть коэффициенты емкости и индукции уединенного конденсатора ab равны соответственно l, n, m. Рассчитаем влияние одного из конденсаторов на коэффициенты другого.

Положим

$$D=LN-M^2, \qquad d=\ln-m^2.$$

Тогда коэффициенты потенциала для каждого из конденсаторов в отдельности будут равны

$$\begin{aligned} p_{AA}&=D^{-1}N, & p_{aa}&=d^{-1}n,\\ p_{AB}&=-D^{-1}M, & p_{ab}&=-d^{-1}m,\\ p_{BB}&=D^{-1}L, & p_{bb}&=d^{-1}l. \end{aligned}$$

Значения этих коэффициентов существенно не изменятся от присутствия другого конденсатора на расстоянии R.

Коэффициент потенциала для любых двух проводников, находящихся на расстоянии R, равен R^{-1}, так что $p_{Aa}=p_{Ab}=p_{Ba}=p_{Bb}=R^{-1}$.

Таким образом, уравнения для потенциала имеют вид

$$\begin{aligned} V_A&=D^{-1}Ne_A-D^{-1}Me_B+R^{-1}e_a+R^{-1}e_b,\\ V_B&=-D^{-1}Me_A+D^{-1}Le_B+R^{-1}e_a+R^{-1}e_b,\\ V_a&=R^{-1}e_A+R^{-1}e_B+d^{-1}ne_a-d^{-1}me_b,\\ V_b&=R^{-1}e_A+R^{-1}e_B-d^{-1}me_a+d^{-1}le_b. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно зарядов, получим

$$\begin{aligned} q_{AA}&=L'=L+\frac{(L+M)^2(l+2m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},\\ q_{AB}&=M'=M+\frac{(L+M)(M+N)(l+2m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},\\ q_{Aa}&=-\frac{R(L+M)(l+m)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},\\ q_{Ab}&=-\frac{R(L+M)(m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)}, \end{aligned}$$

где L', M', N' — значения L, M, N при внесении второго конденсатора в поле.

Если в поле вносится лишь один проводник a, то $m=n=0$ и

$$\begin{aligned} q_{AA}&=L'=L+\frac{(L+M)^2 l}{R^2-l(L+2M+N)},\\ q_{AB}&=M'=M+\frac{(L+M)(M+N)l}{R^2-l(L+2M+N)},\\ q_{Aa}&=-\frac{Rl(L+M)}{R^2-l(L+2M+N)}. \end{aligned}$$

Если имеется просто два проводника A и a, то $M=N=m=n=0$, и

$$q_{AA}=L+\frac{L^2l}{R^2-Ll}, \qquad q_{Aa}=-\frac{RLl}{R^2-Ll},$$

что согласуется с выражениями, найденными в п. 90 а.

Величина $L+2M+N$ дает полный заряд конденсатора при единичном потенциале на электродах. Она не может превосходить половины наибольшего размера конденсатора.

$L+M$ — заряд первого электрода, а $M+N$ — заряд второго при единичном потенциале на обоих электродах. Обе эти величины должны быть положительны и меньше емкости самого электрода. Поэтому поправки в коэффициентах емкости конденсатора значительно меньше, чем для простого проводника той же емкости.

Приближения такого рода часто полезны при оценке емкости проводников неправильной формы, находящихся на значительном расстоянии от остальных проводников.

91. Если в поле вносится округлый проводник A_3, размеры которого малы по сравнению с расстоянием между проводниками, то коэффициент потенциала A_1 относительно A_2 увеличивается, если A_3 находится внутри сферы, построенной на прямой A_1A_2 как на диаметре, и уменьшается, если A_3 вне этой сферы.

Действительно, единичный положительный заряд на A_1 создает распределение электричества на A_3, при котором $+e$ находится на стороне, наиболее удаленной от A_1, а $-e$ — на стороне, ближайшей к A_1. Потенциал на A_2, создаваемый этим распределением электричества на A_3, будет положительным или отрицательным в зависимости от того, какой из зарядов, $+e$ или $-e$, ближе к A_2, и если тело A_3 не очень вытянуто, то это зависит от того, будет ли угол $A_1A_3A_2$ тупым или острым, т. е. находится ли точка A_3 внутри или вне сферы, построенной на A_1A_2 как на диаметре.

Для продолговатого тела A_3 легко видеть, что если его наибольшая ось расположена по касательной к окружности, проходящей через точки A_1, A_3 и A_2, то оно может повысить потенциал A_2, даже находясь полностью вне сферы, и, наоборот, если его наибольшая ось направлена по радиусу этой окружности, то оно может уменьшить потенциал A_2, даже находясь полностью внутри сферы. Эти соображения служат лишь для грубой оценки ожидаемых явлений при заданной конфигурации прибора.

92. Если в поле вносится новый проводник A_3, то емкости всех имевшихся ранее в поле проводников увеличиваются, а численные значения коэффициентов индукции любой пары проводников уменьшаются.

Действительно, допустим, что A_1 находится под единичным потенциалом, а все остальные проводники — под нулевым. Поскольку заряд вновь внесенного проводника будет отрицательным, он индуцирует на всех остальных проводниках положительный заряд, тем самым увеличивая положительный заряд A_1 и уменьшая отрицательные заряды всех остальных проводников.

93 а. *Работа, совершаемая электрическими силами при перемещении системы изолированных заряженных проводников.*

Поскольку проводники изолированы, то их заряды остаются при перемещении постоянными. Пусть их потенциалы равны $V_1, V_2, \ldots, V_n$ до перемещения и $V_1', V_2', \ldots, V_n'$ — после. Тогда электрическая энергия равна $W = (1/2)\Sigma\,(eV)$ до перемещения и $W' = (1/2)\Sigma\,(eV')$ — после.

Работа, совершаемая при перемещении электрическими силами, равна разности начальной энергии W и конечной энергии W', т. е. $W - W' = (1/2)\Sigma[e(V-V')]$.

Это выражение дает значение работы при любом перемещении системы изолированных проводников, большом или малом.

Чтобы найти силу, стремящуюся произвести какой-либо частный вид перемещения, обозначим через φ переменную, изменение которой соответствует этому виду перемещения, а через Φ — соответствующую силу, которую мы считаем положительной, если электрическая сила стремится увеличить φ. Тогда $\Phi d\varphi = -dW_e$, т. е. $\Phi = -(dW_e/d\varphi)$, где W_e — электрическая энергия, выраженная как квадратичная функция от зарядов.

93 б. Докажем, что $(dW_e/d\varphi) + (dW_V/d\varphi) = 0$.

У нас есть три различных выражения для энергии системы.

Во-первых, $W = (1/2)\Sigma(eV)$. Это определенная функция от n зарядов и n потенциалов.

Во-вторых, $W_e = (1/2)\Sigma\Sigma\,(e_r e_s p_{rs})$, где r и s могут быть и одинаковыми и разными, причем в сумму включается как rs, так и sr. Это функция от n зарядов и от переменных, определяющих их расположение. Пусть φ одна из этих переменных.

И, в-третьих, $W_V = (1/2)\Sigma\Sigma\,(V_r V_s q_{rs})$, где суммирование производится как и выше. Это функция от n потенциалов и от переменных, определяющих конфигурацию, одной из которых является φ.

Поскольку $W = W_e = W_V$, то $W_e + W_V - 2W = 0$.

Представим себе, что n зарядов, n потенциалов и φ как-то меняются согласованным образом. Тогда

$$\sum\left[\left(\frac{dW_e}{de_r} - V_r\right)\delta e_r\right] + \sum\left[\left(\frac{dW_V}{dV_s} - e_s\right)\delta V_s\right] + \left(\frac{dW_e}{d\varphi} + \frac{dW_V}{d\varphi}\right)\delta\varphi = 0.$$

Однако n зарядов, n потенциалов и φ не являются независимыми, так как лишь $n+1$ из этих величин независимы. Но мы уже доказали, что $(dW_e/de_r) = V_r$, так что первая сумма тождественно обращается в нуль. Отсюда следует, что $(dW_V/dV_s) = e_s$ (даже если бы мы это уже не доказали раньше) и, наконец, что $(dW_e/d\varphi) + (dW_V/d\varphi) = 0$.

Работа, совершаемая электрическими силами при перемещении системы проводников, потенциалы которых поддерживаются постоянными

93 в. Из последнего уравнения следует, что сила равна $\Phi = (dW_V/d\varphi)$, так что если система перемещается при условии, что все потенциалы остаются постоянными, то работа, совершаемая электрическими силами, равна

$$\int \Phi\, d\varphi = \int dW_V = W'_V - W_V,$$

т. е. равна в этом случае *приращению* электрической энергии.

Таким образом, мы имеем здесь увеличение энергии при одновременном совершении системой работы. Следовательно, в систему должна подводиться энергия от какого-либо внешнего источника, например от вольтовой батареи, обеспечивающей постоянство потенциалов при перемещении.

Совершаемая батареей работа равна, следовательно, сумме совершаемой системой работы и приращения энергии, а поскольку они равны, то работа, совершаемая батареей, равна удвоенной работе, совершаемой системой проводников при перемещении.

О сравнении подобных заряженных систем

94. Если две заряженные системы геометрически подобны, так что соответствующие длины в этих системах относятся как L к L', и если диэлектрик, разделяющий проводники в обеих системах, один и тот же, то коэффициенты индукции и емкости этих систем относятся как L к L'. Действительно, если рассмотреть соответствующие части A и A' этих систем и предположить, что количество электричества на A равно e, а на A' равно e', то создаваемые этими зарядами потенциалы V и V' в соответствующих точках B и B' будут равны $V=(e/AB)$, $V'=(e'/A'B')$. Но AB относится к $A'B'$ как L к L', так что $e:e'=LV:L'V'$.

В случае же, когда индуктивные способности диэлектриков в этих системах различны и равны K для первой и K' для второй, если потенциалы в соответствующих точках первой и второй систем относятся как V к V', а заряды в соответствующих частях систем — как e к e', то $e:e'=LVK:L'V'K'$. По этой пропорции мы можем находить отношение полных зарядов соответствующих частей двух систем, которые, во-первых, геометрически подобны, во-вторых, содержат среды, удельные индуктивные способности которых относятся друг к другу в соответствующих точках как K и K', и, в-третьих, заряжены так, что их потенциалы в соответствующих точках относятся как V к V'.

Отсюда следует, что если q — какой-либо коэффициент емкости или индукции первой системы, а q' — соответствующий коэффициент второй системы, то $q:q'=LK:L'K'$, а если p и p' — соответствующие коэффициенты потенциала в обеих системах, то $p:p'=(1/LK):(1/L'K')$.

Если одно из тел смещено в первой системе, а соответствующее ему тело смещено подобным образом во второй системе, то эти смещения относятся как L к L'; если действующие на тела силы обозначить через F и F', то работы, совершенные в обеих системах, относятся как FL к $F'L'$.

Но полная электрическая энергия равна полусумме произведений зарядов на потенциалы заряженных тел, так что, обозначая через W и W' полную электрическую энергию двух подобных систем, получим $W:W'=eV:e'V'$, и разности энергий, получающихся при подобных перемещениях в обеих системах, будут находиться в том же отношении. Поскольку FL пропорционально работе электрической силы на перемещении, то $FL:F'L'=eV:e'V'$.

Комбинируя эти пропорции, мы найдем, что отношение силы, действующей на какое-либо тело в одной системе к силе, действующей на соответствующее тело во второй системе, равно

$$F:F'=V^2K:V'^2K',$$

или

$$F:F'=\frac{e^2}{L^2K}:\frac{e'^2}{L'^2K'}.$$

Первая пропорция показывает, что в подобных системах сила пропорциональна квадрату электродвижущей силы и индуктивной способности среды и не зависит от фактических размеров системы.

Следовательно, два проводника, помещенные в жидкость с индуктивной способностью больше, чем у воздуха, и заряженные до определенного потенциала, будут притягиваться сильнее, чем они притягивались бы в воздухе при тех же потенциалах.

Вторая пропорция показывает, что если количество электричества на каждом теле задано, то силы пропорциональны квадратам зарядов и обратно пропорциональны квадратам расстояний, а также обратно пропорциональны индуктивным способностям сред. Следовательно, два проводника с заданными зарядами, помещенные в жидкость с индуктивной способностью большей, чем у воздуха, будут притягиваться слабее, чем они притягивались бы в воздухе при тех же зарядах.

ГЛАВА IV
ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

95 а. Во второй главе мы рассчитали потенциальную функцию и исследовали некоторые ее свойства, исходя из предположения, что существует непосредственное действие на расстоянии между заряженными телами, являющееся равнодействующей непосредственного воздействия различных заряженных элементов этих тел друг на друга.

Если этот метод исследования назвать прямым, то обратный ему метод будет заключаться в принятии предположения, что потенциал — это функция, обладающая теми свойствами, которые мы вывели выше, и в исследовании вида этой функции.

В прямом методе потенциал вычисляется по распределению заряда с помощью интегрирования, причем оказывается, что он удовлетворяет определенным уравнениям в частных производных. В обратном методе эти уравнения в частных производных считаются заданными, а ищется потенциал и распределение электричества.

Прямой метод применим лишь в тех случаях, когда задано распределение электричества. Если распределение заряда по проводнику подлежит определению, то следует применять обратный метод.

Мы должны показать, что обратный метод приводит во всех случаях ко вполне определенному результату, и установить некоторые общие теоремы, вытекающие из уравнения в частных производных Пуассона

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=0.$$

Выражаемые этим уравнением математические идеи отличны по своему характеру от идей, выражаемых интегральным соотношением

$$V=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho}{r}\,dx'\,dy'\,dz'.$$

В дифференциальном уравнении мы выражаем тот факт, что сумма вторых производных от V в окрестности любой точки связана определенным образом с плотностью заряда в этой точке, и никак не связываем значение V в данной