АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ

JAMES CLERK MAXWELL

A TREATISE ON ELECTRICITY AND MAGNETISM

Volume I

ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ

В ДВУХ ТОМАХ

Том I

ПЕРЕВОД:
Б. М. БОЛОТОВСКОГО, И. Л. БУРШТЕЙНА,
М. А. МИЛЛЕРА, Е. В. СУВОРОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ:
доктора физико-математических наук
М. Л. ЛЕВИНА,
доктора физико-математических наук
М. А. МИЛЛЕРА,
кандидата физико-математических наук
Е. В. СУВОРОВА

МОСКВА «НАУКА» 1989


ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ
Д.К. МАКСВЕЛЛ

Дж. К. Максвелл. **Трактат об электричестве и магнетизме.** В двух томах. Т. I. М.: Наука, 1989.

ISBN 5—02—000042—6

Работа Д. К. Максвелла (1831—1879) об электричестве и магнетизме впервые была издана в 1873 г. Она содержит созданную Максвеллом теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория в настоящее время составляет фундамент современного естествознания. По своему значению для развития науки «Трактат» стоит в одном ряду с «Началами» Ньютона и «Экспериментальными исследованиями» Фарадея.

Издание рассчитано на физиков, историков науки и читателей, желающих ознакомиться с основными представлениями теории электромагнитного поля по трудам одного из ее создателей.

Рецензент:

академик *А. В. Гапонов-Грехов*

ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

Трактат об электричестве и магнетизме

I

Утверждено к печати Редакционной коллегией серии «Классики науки»

Редактор издательства Г. Г. Гуськов. Художественный редактор М. Л. Храмцов. Технические редакторы З. Б. Павлюк, Т. С. Жарикова. Корректоры Н. Б. Габасова, Л. А. Стойкина

ИБ № 39868

Сдано в набор 17.11.88. Подписано к печати 14.04.89. Формат 70×90 1/16. Бумага типографская № 2 Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 30,6. Усл. кр. отт. 32,01. Уч.-изд. л. 30,5. Тираж 3100 экз. Заказ № 377. Цена 3 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука» 117864, ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука»; Заказ 3677, 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6

$\text{М}\,\dfrac{1604050000\text{-}191}{055\,(02)\text{-}89}$ 116—89, кн. 2

ISBN 5—02—000042—6

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

Выпуск в свет перевода «Трактата об электричестве и магнетизме» Д. К. Максвелла — необходимое (хотя и несколько запоздалое) пополнение русской научной библиотеки. С точки зрения научной информации мировое сообщество становится все менее и менее многоязычным, и уже сейчас представитель любой страны оказывается в состоянии принимать полноценное участие в научно-образовательном и творческом процессе, опираясь всего лишь на два-три языка, к числу которых относится и русский. В связи с этим на нашу науку накладываются определенные обязательства — создавать людям, избравшим русский язык в качестве основного, достаточно полное культурное обеспечение, включающее в себя возможность знакомства со всемирным наследием классиков естествознания. «Трактат» Максвелла составляет непременную часть этого наследия: он принадлежит к тем выдающимся произведениям цивилизации, которые, подобно «Началам» Ньютона, произвели крупномасштабные изменения в развитии естествознания и не только в части проникновения в тайны мироздания, но и в отношении совершенствования способов мышления, принципов «понимания понимания», новых подходов к методам познания природы.

Публиковавшиеся ранее отдельные главы «Трактата» и несколько вариантов перевода Предисловия, конечно же, не могли утолить любознательность и удовлетворить потребность как историков науки, так и просто тех ее тружеников, кто в своих профессиональных продвижениях привык общаться непосредственно с классиками, извлекать из первоисточников поучительные уроки творческих блужданий и терпеливого напряжения мыслей, сосредоточенных в главных направлениях поиска.

Тем более, что «Трактат» являет собой пример первого в истории физики объединения ранее разрозненных концепций в единую систему. Речь идет об электричестве, магнетизме и оптике. Сейчас, когда физики всех стран предпринимают штурм всеобщего объединения взаимодействий, «Трактат» обретает дополнительный, поучительный интерес, как первый (и сразу удачный!) опыт на этом пути. Удивительно и другое. В свое время «Трактат» считался по ряду причин необычно сложным даже для профессионалов,— в частности, многие читатели затруднялись в оценке его целостности и окончательности. В какой-то мере их нерасположение можно понять. Максвелл писал «Трактат» так, как читал лекции, творя по ходу изложения, не страшась излишеств или незавершенностей. Зато сейчас, с высоты нашей электродинамической образованности, такая «рукописность» «Трактата» представляется нам даже выигрышной.

Инициатива перевода «Трактата» Максвелла исходила от Петра Леонидовича Капицы. Он предполагал даже написать предисловие к русскому изданию. К сожалению, это уже не может быть исполнено: П. Л. Капица ушел из жизни, и мы не знаем, как он оценил бы нашу работу сейчас, по ее завершении. Только из-за этой неуверенности мы не решились посвятить свою работу его памяти. Отношение Петра Леонидовича Капицы к «Трактату» не в последнюю очередь определялось еще и тем, что он много лет проработал в Кавендишской лаборатории, и если бы обстоятельства сложились иначе, то П. Л. Капица стал бы Кавендишским профессором после Э. Резерфорда. Напомним, что первым Кавендишским профессором и основателем Кавендишской лаборатории был сам Максвелл.

Перевод выполнен с третьего английского издания 1891 г. Оно несколько отличается от двух предшествующих, первое из которых было выпущено в 1873 г. самим Максвеллом, а второе, посмертное, отредактировано проф. У. Нивеном. Редактором третьего издания, приобретшего репутацию канонического, был Д. Д. Томсон.

Трактат состоит из двух томов. Каждому тому предпослано содержание, где приводятся пояснения (в виде ключевых мыслей) соответствующих параграфов (пунктов). Сами же параграфы в тексте трактата пронумерованы непрерывно и — за редким исключением — никак не озаглавлены; названиями снабжены только части (их четыре) и главы. Первый том объединяет Электростатику (часть I) и Постоянные токи (часть II), второй том — Магнитостатику (часть III) и Электродинамику (часть IV). Максвелловская структура «Трактата» сохранена с той нетронутостью, с которой это вообще можно сделать при переводе с одного языка на другой. Это относится и к предметно-именному указателю, составленному самим Максвеллом весьма своеобразно, указатель не подчинен какому-либо единому правилу.

Далее, чтобы не отвлекать читателя от последовательного восприятия собственно максвелловского текста, мы перенесли в конец второго тома предисловия ко второму и третьему изданию, написанные соответственно Нивеном и Томсоном. Там же помещены комментарии и редакторское послесловие, где даны пояснения особенностей (структурных, стилистических, научных) «Трактата» и тех принципов, которых мы придерживались при его переводе.

В работе над русским текстом «Трактата» участвовала «небольшая бригада» переводчиков и редакторов. Мы стремились как-то сгладить разнородности манер и сохраняем иллюзии, что читатель не обнаружит стилистического разнобоя в главах, переведенных разными людьми. Над электростатическим разделом

«Трактата» работал И. Л. Бурштейн, широко образованный и эрудированный физик, знаток электродинамики, имевший большой опыт перевода научной и научно-исторической литературы. Но ему не суждено было увидеть результаты этого его труда: он скончался незадолго до выпуска «Трактата» в свет. Токовый раздел переведен Б. М. Болотовским, а весь второй том, равно как Предварительная глава и вся сопутствующая основному тексту «атрибутика» — М. А. Миллером и Е. В. Суворовым.

Редакторы и переводчики надеются на жизнеспособность максвелловского «Трактата» на русском языке.

Редакторы и переводчики

Март 1989 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Тот факт, что у некоторых тел после их натирания появляется способность притягивать другие тела, был известен еще в древности. В наше время обнаружено множество других разнообразных явлений и установлено, что они связаны с этими явлениями притяжения. Все они были отнесены к классу *Электрических* явлений, названных по имени янтаря — ἤλεκτρον (электрон) — вещества, для которого было впервые дано их описание.

Давно известно также, что феномен действия на расстоянии проявляют и другие тела, в частности магнитный железняк или куски железа и стали, подвергнутые определенной обработке. Оказалось, что эти явления вместе с другими им родственными явлениями отличаются от электрических; они были отнесены к классу явлений *Магнитных*, поскольку в фессальской магнезии был обнаружен магнитный железняк — μάγνης (магнес).

В дальнейшем было установлено, что явления этих двух классов связаны между собой, и эти связи между различными явлениями обоих классов, насколько их удалось выявить, составили содержание учения об электромагнетизме.

В нижеследующем трактате я намерен описать наиболее важные из этих явлений, показать, как они могут быть подвергнуты измерениям, а также проследить математические связи между измеряемыми величинами. Получив таким образом данные для математической теории электромагнетизма и показав, как эта теория может быть применена к расчету явлений, я постараюсь ясно, насколько смогу, осветить взаимосвязи между математической формой этой теории и математической формой основополагающей науки Динамики, чтобы в какой-то мере подготовиться к выделению того класса динамических явлений, среди которого следует искать иллюстрации или объяснения явлений электромагнитных.

При описании явлений я буду отбирать те из них, которые наиболее отчетливо иллюстрируют основные идеи теории, опуская другие явления или откладывая их рассмотрение до той поры, пока читатель не станет более подготовленным.

С математической точки зрения наиболее важным понятием при рассмотрении любого явления является понятие измеряемой величины. Поэтому я буду подходить к электрическим явлениям главным образом с точки зрения их измеримости, описывая методы измерения и определяя эталоны, от которых они зависят.

Применяя математику для вычисления электрических величин, я буду стараться в первую очередь делать наиболее общие выводы из данных, имеющихся в нашем распоряжении, и уже на следующем этапе применять полученные результаты к избранным простейшим случаям. Я буду по возможности избегать касаться тех вопросов, которые, хотя и способствовали выявлению искусности математиков, но не расширили наших научных познаний.

Внутренние взаимосвязи различных отраслей науки, которую нам предстоит изучить, более многочисленны и сложны, чем у любой другой из развитых до сих пор наук. Ее внешние связи, с одной стороны, с динамикой, а с другой — с теплотой, светом, химическим действием и строением тел, по-видимому, указывают на особую важность науки об электричестве, как подспорья в истолковании природы.

Поэтому мне кажется, что изучение электромагнетизма во всей его полноте приобрело сейчас первостепенное значение, являясь средством стимулирования прогресса науки.

Математические законы явлений обоих классов разработаны в значительной степени удовлетворительно.

Исследованы также и связи между этими классами явлений, а вероятность того, что экспериментальные законы обладают строгой точностью, значительно возросла благодаря более широким знаниям об их соотношениях друг с другом.

Наконец, удалось достигнуть известного прогресса в сведении электромагнетизма к динамике, показав, что ни одно электромагнитное явление не противоречит предположению о том, что оно определяется чисто динамическим действием.

Однако все, что было сделано до сих пор, никоим образом не истощило поля деятельности в области электричества, а скорее открыло его, указав на объекты для изучения и снабдив нас средствами исследований.

Вряд ли необходимо распространяться о полезности результатов исследований по магнетизму для навигации, о важности знания истинного направления стрелки компаса и влияния железа на корабле. Но усилия тех людей, которые посредством магнитных наблюдений старались сделать навигацию более надежной, одновременно значительно ускорили прогресс чистой науки.

Гаусс, будучи членом Германского магнитного союза, вложил свой могучий интеллект в теорию магнетизма и методы его наблюдения. И он не только многое привнес в наше знание теории притяжений, но и перестроил всю науку о магнетизме в отношении используемых приборов, методов наблюдения и расчета результатов, так что его труды по земному магнетизму могут быть взяты за образец физического исследования для всех, кто занимается измерением любых сил в природе.

Важные применения электромагнетизма в телеграфии также оказали обратное воздействие на чистую науку, придав точным электрическим измерениям коммерческую ценность и предоставив возможность исследователям в области электричества использовать аппаратуру в масштабах, значительно превышающих масштабы обычной лаборатории. Этот спрос на знания по электричеству, а также экспериментальные возможности их приобретения уже возымели весьма значительные последствия как для стимулирования активности передовых исследователей в области электричества, так и для распространения среди практиков такой степени точности знания, которая, видимо, должна привести к общему научному прогрессу всей инженерной профессии.

Существует несколько трактатов, где электрические и магнитные явления изложены популярно. Однако они не отвечают потребностям тех людей, которые лицом к лицу сталкиваются с величинами, подлежащими измерениям, и чей ум не остается удовлетворенным опытами в лекционном зале.

Существует также масса математических работ, представляющих огромную важность для науки об электричестве, но они упрятаны в объемистых трудах ученых обществ; они не образуют единой связанной системы, очень неравноценны по своим достоинствам и в большинстве своем находятся за пределами понимания кого бы то ни было, кроме признанных (professed) математиков.

Поэтому я полагал, что будет полезен трактат, который имел бы главной своей задачей охват всего предмета в целом с общей методической позиции, трактат, в котором было бы указано, как каждая часть этого предмета становится доступной проверке путем действительных измерений.

Общее построение трактата существенно отличается от построения нескольких превосходных трудов по электричеству, в большинстве своем опубликованных в Германии. Может показаться даже, что я несправедливо поскупился отдать должное исследованиям некоторых знаменитых ученых в области электричества и математики. Одна из причин состоит в том, что, прежде чем начать изучение электричества, я решил не читать никаких математических работ по этому предмету, пока не проштудирую вначале «Экспериментальные исследования по электричеству» Фарадея («Experimental Researches in Electricity»).

Мне было известно, что между пониманием явлений Фарадеем и математиками предполагается существование таких различий, что ни он, ни они не были удовлетворены языком друг друга. У меня было также убеждение в том, что это расхождение не возникло вследствие чьей-либо неправоты. Впервые меня убедил в этом сэр Уильям Томсон [1], советам и помощи которого, равно как и его опубликованным работам, я обязан большей части знаний, приобретенных мною по данному предмету.

По мере изучения Фарадея я осознал, что его подход к пониманию явлений тоже является математическим, хотя и не представлен в общепринятой форме

---

[1] Я пользуюсь случаем выразить свою признательность сэру У. Томсону и профессору Тэту (Tait) за многие ценные предложения, сделанные во время печатания этой книги.

через математические символы. Я нашел также, что его методы могут быть выражены в обычных математических формах и, таким образом, сопоставлены с методами признанных математиков.

Так, например, Фарадей своим мысленным взором видел пронизывающие все пространство силовые линии там, где математики видели центры сил, притягивающие на расстоянии. Фарадей видел среду там, где они не видели ничего, кроме расстояния. Фарадей усматривал местонахождение явлений в тех реальных процессах, которые происходят в среде, а они довольствовались тем, что нашли его в силе (power) действия на расстоянии, которая прикладывается к электрическим жидкостям.

Когда я облек все то, что считал идеями Фарадея, в математическую форму, то обнаружил, что в целом результаты обоих подходов совпадают, так что оба метода объясняют одни и те же явления и выводят одни и те же законы действия; но методы Фарадея напоминают те, в которых, начиная с общего, путем анализа приходят к частному, тогда как обычные математические методы основаны на принципе отправления от частного и построения общего путем синтеза.

Я обнаружил также, что некоторые из наиболее плодотворных методов исследования, открытых математиками, могли бы быть выражены в терминах представлений, заимствованных у Фарадея, значительно лучше, чем они выражались в их оригинальной форме.

Так, например, вся теория потенциала, рассматриваемого в качестве некоторой величины, удовлетворяющей определенному дифференциальному уравнению в частных производных, по существу относится к методу, названному мною фарадеевским. Согласно же другому методу потенциал, если его вообще следует вводить, должен рассматриваться как результат суммирования зарядов электризованных частиц, каждый из которых поделен на его расстояние до заданной точки. Поэтому многие из математических открытий, сделанных Лапласом, Пуассоном, Грином и Гауссом, занимают должное место в этом трактате и находят соответствующее свое выражение на языке представлений, в основном заимствованных у Фарадея.

Огромный прогресс учения об электричестве был достигнут главным образом в Германии благодаря тем, кто культивировал теорию действия на расстоянии. Ценные электрические измерения Вебера интерпретируются им в соответствии с этой теорией, а электромагнитные воззрения, которые исходили от Гаусса и были продолжены Вебером, И. и К. Нейманами, Лоренцом и другими, опирались на теорию действия на расстоянии, но, правда, действия, зависящего либо непосредственно от относительной скорости частиц, либо от постепенного распространения чего-либо — потенциала или силы — от одной частицы к другой. Тот большой успех, которого достигли эти выдающиеся люди в применении математики к электрическим явлениям, придает, и это естественно, дополнительный вес их теоретическим построениям, и поэтому те, кто при изучении электричества обращаются к ним, как к величайшим авторитетам в области математической теории электричества, должны бы, вероятно, впитать в себя, наряду с их математическими приемами, также и их физические гипотезы.

Эти физические гипотезы, однако, совершенно чужды принятому мною взгляду на вещи. Одна из целей, которую я преследую, состоит в том, чтобы дать возможность людям, пожелавшим изучить электричество, увидеть, читая этот трактат, что существует и другой способ рассмотрения данного предмета, не менее пригодный для объяснения явлений, и хотя местами, как может показаться, менее определенный, но, я думаю, более достоверно соответствующий нашим истинным знаниям как в том, что утверждается, так и в том, что остается неразрешенным.

Более того, с общенаучной (philosophical) точки зрения было бы очень важно провести сравнение этих двух методов — ведь каждый из них преуспел в объяснении главных электромагнитных явлений, в рамках обоих методов была предпринята попытка объяснить распространение света как явления электромагнитного и фактически вычислена его скорость. В то же время их основные взгляды на то, что происходит в действительности, а также большая часть вторичных представлений о соответствующих величинах коренным образом различаются.

Поэтому я принял на себя скорее роль адвоката, чем судьи, и скорее проиллюстрировал примерами один из этих методов, чем пытался дать беспристрастное описание обоих. Я не сомневаюсь в том, что метод, названный мною немецким, также найдет себе сторонников и будет изложен с мастерством, достойным его изобретательности.

Я не пытался дать исчерпывающего перечисления электромагнитных явлений, экспериментов и приборов. Изучающим эти предметы и желающим прочитать все известное о них большую помощь окажет «Трактат об электричестве» профессора А. де ля Рива (A. de la Rive, «Traité d'Electricitè»), а также несколько немецких трактатов, таких, как «Гальванизм» Видемана (Wiedemann, «Galvanismus»), «Электризация трением» Рисса (Riess, «Reibungselelektricität»), «Введение в электростатику» Бэра (Beer, «Einleitung in die Elektrostatik») и др.

Я почти целиком ограничивался математической трактовкой предмета, но рекомендовал бы изучающему его, после того как он усвоит — по возможности экспериментально,— какие явления следует наблюдать, внимательно прочитать «Экспериментальные исследования по электричеству» Фарадея. Он найдет там строго современный исторический отчет о некоторых величайших открытиях и исследованиях в области электричества, выполненных в том порядке и в той последовательности, которые едва ли могли быть улучшены, даже если заранее были бы известны их результаты; они изложены языком человека, который уделял методике точного описания научных операций и их результатов много внимания [2].

Чтение оригинальных трудов дает изучающему любой предмет большое преимущество, ибо наука всегда наиболее полно усваивается в стадии зарождения. В случае «Исследований» Фарадея сделать это сравнительно легко — они опубликованы отдельными частями, и их можно читать последовательно. Если чем-то из написанного здесь мною я смогу облегчить изучающему понимание фарадеевских способов мыслить и выражаться, то сочту выполненной одну из главных целей своих, а именно передачу другим того восхищения, которое испытал я сам при чтении «Исследований» Фарадея.

Описание явлений и элементов теории по каждому вопросу можно найти в первых главах каждой из четырех частей, на которые разделен трактат. Здесь изучающий обнаружит достаточно материала для элементарного знакомства со всем предметом науки.

Остальные главы каждой части охватывают более сложные разделы теории, процессы численного расчета, приборы и методику экспериментального исследования.

Соотношения между электромагнитными явлениями и явлениями излучения, теория молекулярных электрических токов и результаты размышлений о природе действия на расстоянии рассматриваются в последних четырех главах второго тома.

Джеймс Клерк Максвелл

1 февраля 1873 года

---

[2] «Жизнь и письма Фарадея», т. I, с. 395.

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ГЛАВА

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

ЧАСТЬ I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ГЛАВА I

ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЙ

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

ГЛАВА III

О РАБОТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛ И ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПРОВОДНИКОВ

ГЛАВА IV

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

ГЛАВА V

МЕХАНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ГЛАВА VI

О ТОЧКАХ И ЛИНИЯХ РАВНОВЕСИЯ

ГЛАВА VII

ФОРМЫ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЛИНИЙ ИНДУКЦИИ В ПРОСТЫХ СЛУЧАЯХ

ГЛАВА VIII

ПРОСТЫЕ СЛУЧАИ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ

ГЛАВА IX

СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

ГЛАВА X
КОНФОКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ГЛАВА XI
ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

ГЛАВА XII

СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

ГЛАВА XIII

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

ЧАСТЬ II

ЭЛЕКТРОКИНЕМАТИКА

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

ГЛАВА II

ПРОВОДИМОСТЬ И СОПРОТИВЛЕНИЕ

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА МЕЖДУ ТЕЛАМИ, НАХОДЯЩИМИСЯ В КОНТАКТЕ

ГЛАВА IV

ЭЛЕКТРОЛИЗ

ГЛАВА V
ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

ГЛАВА VI
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

ГЛАВА VII
ПРОХОЖДЕНИЕ ТОКА В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

ГЛАВА VIII

СОПРОТИВЛЕНИЕ И ПРОВОДИМОСТЬ В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

ГЛАВА IX

ПРОХОЖДЕНИЕ ТОКА ЧЕРЕЗ ОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

ГЛАВА X
ПРОХОЖДЕНИЕ ТОКА В ДИЭЛЕКТРИКАХ

ГЛАВА XI
ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКОВ

ГЛАВА XII
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ГЛАВА
ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

1. Любое выражение для какой-нибудь Величины состоит из двух факторов или компонент. Одним из таковых является наименование некоторой известной величины того же типа, что и величина, которую мы выражаем. Она берется в качестве эталона отсчета. Другим компонентом служит число, показывающее, сколько раз надо приложить эталон для получения требуемой величины. Эталонная, стандартная величина называется в технике Единицей, а соответствующее число — Численным Значением данной величины.

Сколько существует разновидностей измеряемых величин, столько же должно существовать и различных единиц; однако во всех динамических науках эти единицы можно определять через три основные: единицу Длины, единицу Времени и единицу Массы. Так, единицы площади и объема определяются соответственно как квадрат и куб, стороны которых равны единице длины.

Иногда все же мы обнаруживаем несколько единиц одного и того же вида, возникших по независимым соображениям. Так, галлон (объем десяти фунтов воды) используется в качестве единицы емкости наряду с кубическим футом. В некоторых случаях галлон может быть удобной мерой, но он не относится к системным единицам, так как его численное отношение к кубическому футу не равно круглому целому числу.

2. При построении математической системы мы считаем основные единицы — длины, времени и массы — заданными, а все производные единицы выводим из них с помощью простейших приемлемых определений.

Формулы, к которым мы приходим, должны быть такими, чтобы представитель любого народа, подставляя вместо символов численные значения величин, измеренные в его национальных единицах, получил бы верный результат.

Следовательно, во всех научных исследованиях очень важно использовать единицы, принадлежащие к системе, должным образом определенной, равно как и знать их связи с основными единицами, чтобы иметь возможность сразу же пересчитывать результаты из одной системы в другую.

Удобнее всего это делать, установив *размерность* каждой единицы по отношению к трем основным. Если некоторая заданная единица изменяется как n-я степень одной из основных единиц, то говорят, что она *n-размерна* или имеет размерность n по отношению к этой единице.

Например, принятая в науке единица объема всегда представляет собой куб, стороны которого равны единице длины. Если единица длины изменится, то единица объема изменится как третья степень длины, поэтому говорят, что единица объема относительно единицы длины имеет размерность равную трем.

Знание размерности единиц снабжает нас способом проверки, который следует применять к уравнениям, полученным в результате длительных исследований. Размерность каждого из членов такого уравнения относительно каждой из трех основных единиц должна быть одной и той же. Если это не так, то уравнение бессмысленно, оно содержит какую-то ошибку, поскольку его интерпретация оказывается разной и зависящей от той произвольной системы единиц, которую мы принимаем [1].

Три основные единицы

3. (1) *Длина.* Эталоном длины, используемым в нашей стране в научных целях, служит фут, который составляет третью часть стандартного ярда, хранящегося в Казначейской Палате.

Во Франции и в других странах, принявших метрическую систему, эталоном длины является метр. Теоретически это одна десятимиллионная часть длины земного меридиана, измеренного от полюса до экватора; практически же это длина хранящегося в Париже эталона, изготовленного Борда (Borda) с таким расчетом, чтобы при температуре таянья льда он соответствовал значению длины меридиана, полученному Делямбром (Delambre). Изменения, отражающие новые и более точные измерения Земли, не вносятся в метр, наоборот,— сама дуга меридиана исчисляется в первоначальных метрах.

В астрономии за единицу длины принимается иногда среднее расстояние от Земли до Солнца.

При современном состоянии науки наиболее универсальным эталоном длины из числа тех, которые можно было бы предложить, служила бы длина волны света определенного вида, испускаемого каким-либо широко распространенным веществом (например, натрием), имеющим в своем спектре четко отождествляемые линии. Такой эталон не зависел бы от каких-либо изменений в размерах Земли и его следовало бы принять тем, кто надеется, что их писания окажутся более долговечными, чем это небесное тело.

При работе с размерностями единиц мы будем обозначать единицу длины как $[L]$. Если численное значение длины равно l, то это понимается как значение, выраженное через определенную единицу $[L]$, так что вся истинная длина представляется как $l\,[L]$.

4. (2) *Время.* Во всех цивилизованных странах стандартная единица времени выводится из периода обращения Земли вокруг своей оси. Звездные сутки или истинный период обращения Земли может быть установлен с большой точностью при обычных астрономических наблюдениях, а средние солнечные сутки могут быть вычислены из звездных благодаря нашему знанию продолжительности года.

Секунда среднего солнечного времени принята в качестве единицы времени во всех физических исследованиях.

В астрономии за единицу времени иногда берется год. Более универсальную единицу времени можно было бы установить, взяв период колебаний того самого света, длина волны которого равна единице длины.

Мы будем именовать конкретную единицу времени как $[T]$, а числовую меру времени обозначать через t.

---

[1] Теория размерностей была сформулирована впервые Фурье (Fourier, *Théorie de Chaleur*, § 160).

5. (3) *Масса.* В нашей стране стандартной единицей массы является эталонный коммерческий фунт (avoirdupois pound), хранящийся в Казначейской Палате. Часто используемый в качестве единицы гран (grain) составляет одну 7000-ю долю этого фунта.

В метрической системе единицей массы служит грамм; теоретически это масса кубического сантиметра дистиллированной воды при стандартных значениях температуры и давления, а практически это одна тысячная часть эталонного килограмма, хранящегося в Париже.

Та точность, с которой массы тел можно сравнивать между собой при помощи взвешивания, далеко превышает точности, достигнутые в измерении длин, так что все массы должны по мере возможности сравниваться непосредственно с эталоном, а не вычисляться на основе опытов с водой.

В описательной астрономии за единицу массы иногда берется масса Солнца или Земли, но в теоретической астродинамике единица массы выводится исходя из единиц времени и длины в сочетании с фактом универсальности гравитации. Астрономической единицей массы является такая масса, которая, притягивая другое тело, помещенное от нее на единичном расстоянии, сообщает этому телу единичное ускорение.

Формируя некоторую универсальную систему единиц, мы можем либо вывести единицу массы указанным выше путем из уже определенных ранее единиц длины и времени (а это мы умеем делать в грубом приближении уже при современном состоянии науки), либо, рассчитывая на возможность определения [2] в недалеком будущем массы одной молекулы стандартного вещества, можем подождать этого определения и не устанавливать пока универсального эталона массы.

При рассмотрении размерности других единиц мы будем обозначать конкретную единицу массы символом $[M]$. Единица массы будет взята в качестве одной из трех основных величин. Но если, как это делается во французской системе, определенное вещество, а именно вода, берется в качестве эталона плотности, то единица массы уже перестает быть независимой, а изменяется подобно единице объема, т. е. как $[L^3]$.

Если же, как в астрономической системе, единица массы выражена через силу ее притяжения, то размерность $[M]$ оказывается такой: $[L^3T^{-2}]$.

В самом деле, ускорение, обусловленное притяжением массы m на расстоянии r, согласно закону Ньютона равно m/r^2. Допустим, что это притяжение действует на первоначально покоящееся тело в течение очень короткого промежутка времени t и заставляет его описать пространственное смещение s, тогда по формуле Галилея имеем

$$s=\frac{1}{2}ft^2=\frac{1}{2}\frac{m}{r^2}t^2,$$

откуда $m=2r^2s/t^2$. Так как и r, и s — длины, а t — время, это уравнение не

---

[2] См. Prof. J. Loschmidt, «Zur Grösse der Luftmolecule», *Academy of Vienna*, Oct. 12, 1865; G. J. Stoney on «The Inertial Motion of Gases» *Phil. Mag.*, Aug. 1868 and Sir W. Thomson on «The Size of Atoms», *Nature*, March 31, 1870.

может выполняться, если размерность m не равна $[L^3T^{-2}]$. То же самое можно показать и для любого астрономического уравнения, где масса тела фигурирует в некоторых (но не во всех) членах [3].

Производные Единицы

6. Единица Скорости — это такая скорость, при которой в единицу времени проходится единица длины. Ее размерность равна $[LT^{-1}]$.

Если за единицу длины и времени принять величины, выведенные из колебаний света, то единицей скорости станет скорость света.

Единица Ускорения — это такое ускорение, при котором скорость возрастает на единицу за единицу времени. Ее размерность $[LT^{-2}]$.

Единица Плотности — это плотность вещества, содержащего в единице объема единицу массы. Ее размерность $[ML^{-3}]$.

Единица Импульса (количества движения) — это импульс единицы массы, движущейся с единичной скоростью. Ее размерность $[MLT^{-1}]$.

Единица Силы — это такая сила, которая производит единичный импульс в единицу времени. Ее размерность $[MLT^{-2}]$.

Эта единица силы является абсолютной, и такое ее определение применимо к любому уравнению Динамики. Тем не менее во многих учебниках, где приводятся эти уравнения, принята иная единица силы, а именно вес национальной единицы массы; тогда, для того чтобы удовлетворить уравнениям, приходится отказываться от самой национальной единицы массы, а в качестве динамической единицы принять некоторую искусственную, равную национальной единице, деленной на численное значение интенсивности тяготения в данном месте. При этом обе единицы — и силы, и массы — становятся зависящими от значения интенсивности тяготения, которая изменяется от места к месту, так что утверждения, в которых фигурируют эти величины, оказываются неполными без знания интенсивности тяготения для тех мест, где установлена справедливость этих утверждений.

Упразднение этого метода измерения сил для всех научных целей в основном обусловлено введением Гауссом общей системы наблюдений магнитной силы в странах, где интенсивность тяготения различна. Сейчас все силы такого рода измеряются в соответствии со строго динамическим методом, вытекающим из наших определений, и численные результаты измерений получаются одинаковыми, в какой бы стране эти измерения ни проводились.

Единица Работы — это работа, производимая единичной силой, действующей на единичном пути в направлении этой силы. Ее размерность $[ML^2T^{-2}]$.

Энергия системы, будучи ее способностью к совершению работы, измеряется той работой, которую способна совершать система, израсходовав всю свою энергию.

Определения других величин, а также относящихся к ним единиц, будут даны в тех местах, где они нам потребуются.

Преобразовывая значения физических величин, определенных через одну

[3] Если взять за единицы измерений сантиметр и секунду, то, согласно Бэйли (Baily), повторившему эксперименты Кавендиша, астрономическая единица массы окажется равной примерно $1{,}537 \cdot 10^7$ грамма или 15,37 тонн. Бэйли принял для средней плотности Земли значение 5,6604 как средний результат всех его опытов; это дает с учетом использованных им размеров Земли и силы тяжести на поверхности Земли приведенное выше значение массы, являющееся, таким образом, непосредственным следствием его экспериментов.

физическую единицу, с целью их представления через какие-либо другие однотипные единицы, мы должны помнить, что каждое выражение величины состоит из двух множителей — из единицы измерений и числа, показывающего, сколько раз эта единица должна быть взята. Следовательно, численная часть выражения изменяется обратно пропорционально величине единицы измерений, т. е. обратно пропорционально тем различным степеням основных единиц, которые определяют размерность данной производной единицы.

О физической непрерывности и разрывности

7. Про какую-либо величину говорят как про изменяющуюся непрерывно, если при переходе от одного значения к другому она принимает все промежуточные значения.

К понятию непрерывности мы приходим при рассмотрении непрерывного существования частицы материи во времени и в пространстве. Такая частица не может перейти из одного положения в другое, не описав в пространстве непрерывную линию, и координаты ее положения должны быть непрерывными функциями времени.

В так называемом «уравнении непрерывности» в том виде, как оно приводится в трактатах по Гидродинамике, выражен факт, что вещество не может появиться или исчезнуть из некоторого элемента объема, не проходя внутрь или наружу через его границы.

Величина называется непрерывной функцией своих переменных, если при непрерывном изменении этих переменных она сама изменяется непрерывно.

Таким образом, если u есть функция x и при непрерывном изменении x от x_0 до x_1 u непрерывно переходит от u_0 до u_1, а при изменении x от x_1 до x_2 u переходит от u_1' до u_2', причем u_1' отличается от u_1, то про величину u говорят, что она имеет разрыв относительно изменения x при значении $x=x_1$, потому что она меняется от u_1 до u_1' скачком при непрерывном прохождении x через x_1.

Рассмотрим производную от u по x при значении $x=x_1$ как предел дроби $(u_2-u_0)/(x_2-x_0)$, когда x_2 и x_0 становятся сколь угодно близкими к x_1. Тогда, если x_0 и x_2 все время находятся по разные стороны от x_1, предельное значение числителя станет равным $u_1'-u_1$, а предельное значение знаменателя обратится в нуль. Если u является величиной физически непрерывной, то разрыв может осуществляться только при определенных значениях переменной x. В этом случае мы можем допустить, что величина u имеет бесконечную производную при $x=x_1$. Если же u не является физически непрерывной, она может быть недифференцируема вообще.

В физических вопросах можно избавиться от идеи разрывности без ощутимых изменений условий рассматриваемой задачи. Если x_0 ничтожно меньше x_1, а x_2 ничтожно больше x_1, то величина u_0 почти равна u_1, а величина u_2 почти равна u_1'. И мы можем теперь предположить, что u изменяется каким-либо произвольным, но непрерывным образом от u_0 до u_2 между пределами x_0 и x_2. Во многих физических вопросах можно, сделав вначале такого рода предположение, исследовать затем полученный результат, приближая, а в пределе и совмещая, значения x_0 и x_2 со значением x_1. Если ответ не зависит от произвола, допущенного нами в способе изменения величины u (внутри ее пределов), мы можем считать его верным также и для разрывных u.

Разрывность функции от более чем одной переменной

8. Если значения всех переменных, кроме x, положить постоянными, то разрыв функции будет происходить при некоторых значениях x, связанных с другими переменными уравнением, которое можно записать так:

$$\varphi=\varphi(x,\ y,\ z,\ldots)=0.$$

Разрыв будет происходить, когда $\varphi=0$. При φ положительных функция будет иметь вид $F_2(x, y, z, \ldots)$, а при φ отрицательных — $F_1(x, y, z, \ldots)$, причем не нужно налагать никаких необходимых связей между F_1 и F_2.

Для того чтобы выразить эту разрывность в математической форме, допустим, что одна из переменных, скажем, переменная x, представлена как функция от φ и от остальных переменных; допустим также, что F_1 и F_2 представлены как функции φ, y, z, ... Тогда мы может описать общий вид этой функции с помощью такой формулы, которая при положительных φ давала бы значения приблизительно равные F_2, а при отрицательных φ — приблизительно равные F_1. Эта формула такова:

$$F=\frac{F_1+e^{n\varphi}F_2}{1+e^{n\varphi}}.$$

До тех пор, пока число n остается конечным (хотя и большим), функция F будет непрерывной, но если сделать n бесконечным, то функция F окажется равной F_2 при положительных φ и F_1 при отрицательных φ.

Разрывность производных от непрерывных функций

Первые производные от непрерывной функции могут быть и разрывными. Пусть значения переменных, для которых происходит разрыв производных, связаны уравнением

$$\varphi=\varphi\,(x,\ y,\ z\ldots)=0,$$

а F_1 и F_2 выражены через φ и через $(n-1)$ остальных переменных, скажем, через $(y, z\ldots)$.

Тогда при φ отрицательных следует брать F_1, а при φ положительных F_2, и так как при $\varphi=0$ функция F сама по себе непрерывна, то $F_1=F_2$.

Следовательно, при значении φ, равном нулю, производные $dF_1/d\varphi$ и $dF_2/d\varphi$ могут быть различными, но производные по любой другой переменной, такие, как dF_1/dy и dF_2/dy, должны быть одинаковыми. Разрывность, таким образом, ограничена только производными по φ, все же другие производные остаются непрерывными.

Периодические и кратные функции

9. Если функция u от x такова, что ее значения при x, $x+a$, $x+na$ одинаковы, как и при всех других значениях x, отличающихся на a, то u называется периодической функцией x, а a — ее периодом.

Если же рассматривать x как функцию u, то для некоторого заданного значения u должен существовать бесконечный ряд значений x, отличающихся друг от друга на величину, кратную a. В этом случае x называется кратной функцией u, а величина a — ее циклической постоянной.

Производная dx/du имеет только конечное число значений, отвечающих данному значению u.

О соотношении между физическими величинами и направлениями в пространстве

10. Характеризуя разновидности физических величин, очень важно знать, как они зависят от направлений тех координатных осей, которые обычно используются для установления местоположения предметов. Введение Декартом координатных осей в геометрию было одним из величайших шагов в развитии математики, ибо это свело методы геометрии к расчетам, совершаемым над численными величинами. Положение точки сделалось зависящим от длин трех линий, проводимых всякий раз в определенных направлениях, а линия, соединяющая две точки, подобным же образом стала рассматриваться как результирующая трех линий.

Однако, в отличие от вычислений, для многих целей физического обоснования желательно избегать явного введения декартовых координат, сосредоточивая внимание сразу же на точке в пространстве, а не на трех ее координатах, или на величине и направлении силы, а не на трех ее составляющих. Такой подход к рассмотрению геометрических и физических величин является более простым и естественным, чем другой, координатный, хотя связанные с ним представления не получили полного развития до тех пор, пока Гамильтон не сделал следующего великого шага в обращении с пространством и не изобрел свое Кватернионное Исчисление.

Поскольку декартовы методы все еще остаются наиболее привычными для исследователей, занимающихся наукой, и они действительно являются наиболее удобными при вычислениях, мы тоже будем выражать все наши результаты в декартовой форме. Я убежден, однако, что введение идей, извлеченных из кватернионных операций и методов, принесет нам огромную пользу при изучении всех разделов нашего курса, особенно электродинамики, где приходится иметь дело с рядом физических величин, соотношения между которыми можно существенно проще представить при помощи нескольких выражений по Гамильтону, чем через обычные уравнения.

11. Одной из наиболее важных особенностей метода Гамильтона является разделение величин на Скаляры и Векторы.

Скалярная величина допускает полное определение при помощи одной-единственной численной характеристики. Ее численное значение никоим образом не зависит от принятого нами направления координатных осей.

Вектор, или Направленная величина, для своего определения требует трех численных характеристик, и проще всего они могут быть поняты как величины, отсчитываемые в направлениях координатных осей.

Скалярные величины не включают в себя никаких направлений. Объем геометрической фигуры, масса и энергия материального тела, гидростатическое давление в какой-либо точке жидкости, потенциал в какой-либо точке пространства — все это примеры скалярных величин.

Векторная величина имеет направление, а также модуль, причем обращение ее направления на противоположное изменяет ее знак. Смещение точки, представляемое прямой линией, проведенной из ее начального положения в конечное, может быть взято в качестве типичной векторной величины, из которой в самом деле и было образовано название Вектор.

Скорость тела, его импульс, сила, действующая на тело, электрический ток, намагниченность частицы железа — все это примеры векторных величин.

Существуют и другого рода физические величины, которые хотя и связаны с направлениями в пространстве, но не являются векторами. Натяжения и деформация в твердых телах служат этому примерами, сюда же относятся некоторые свойства тел, изучаемые в теории упругости и теории двойного лучепреломления. Для определения величин этого класса требуется *девять* численных характеристик. На языке кватернионов они выражаются как линейные и векторные функции от вектора.

Сложение одной векторной величины с другой, однотипной с ней, производится в соответствии с правилом сложения сил в статике. Действительно, доказательство, которое дает Пуассон для «параллелограмма сил», применимо к составлению любых величин, перевертывание (перестановка концов) которых равносильно обращению их знака.

В тех случаях, когда у нас появится желание обозначить векторную величину одним символом и привлечь внимание к тому факту, что она является вектором и что у нее необходимо рассматривать как направление, так и модуль, мы будем прибегать к заглавным готическим буквам, например $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$,...

В кватернионном исчислении положение точки в пространстве определяется вектором, проведенным в эту точку из некоторой фиксированной точки, называемой начальной точкой или началом координат. Если нам нужно изучать какую-либо физическую величину, значение которой зависит от положения точки, то она рассматривается как функция вектора, проведенного из начала координат. Сама эта функция может быть и скаляром, и вектором. Плотность тела, его температура, его гидростатическое давление, потенциал в точке — все это примеры скалярных функций. Результирующая сила в точке, скорость жидкости в точке, скорость вращения элемента жидкости, а также момент пары сил, производящий вращение,— все это примеры векторных функций.

12. Физические векторные величины можно разделить на два класса: в одном из них величина определена относительно линии, в другом — относительно площади.

Так, например, результирующую силу притяжения можно измерить, отыскав работу, которую она произвела бы над телом при его перемещении на малое расстояние в направлении силы, и поделив ее на величину этого малого расстояния. Здесь сила притяжения определена относительно линии.

С другой стороны, поток тепла в каком-либо направлении в какой-либо точке твердого тела может быть определен как количество тепла, которое проходит через маленькую площадку, проведенную перпендикулярно к данному направлению, деленное на величину этой площадки и на время. Здесь поток определен относительно площадки.

Существуют некоторые случаи, в которых одна и та же величина может быть измерена и относительно линии, и относительно площадки.

Так, при рассмотрении смещений в упругих телах мы можем обратить внимание либо на начальное и фактическое положения частицы, и в этом случае ее смещение измеряется линией, проведенной из первого положения во второе; либо мы можем рассматривать маленькую фиксированную в пространстве площадку и определить, какое количество вещества проходит через эту площадку за время смещения.

Точно так же можно исследовать и скорость жидкости, принимая во внимание либо действительную скорость отдельных ее частей, либо количество жидкости, протекающей через какую-либо фиксированную площадку.

Однако для применения первого метода в обоих этих случаях наряду со смещением или скоростью требуется независимо знать плотность тела; второй же метод должен применяться всякий раз при попытках построения молекулярной теории.

В случае потока электричества в проводнике мы не знаем ничего ни о его плотности, ни о скорости, нам известна лишь та величина, которая в теории жидкости соответствовала бы произведению плотности на скорость. И поэтому во всех таких случаях следует применять более общий метод измерения потока через площадку.

В науке об электричестве электродвижущая и магнитная напряженности принадлежат к величинам первого класса — они определены относительно линий. При желании отметить это обстоятельство мы можем, ссылаясь на них, именовать их Напряженностями (интенсивностями).

Напротив, электрическая и магнитная индукция, а также электрические токи принадлежат к величинам второго класса — они определены относительно площади. При желании отметить это обстоятельство мы будем, ссылаясь на них, именовать их Потоками.

Можно считать, что каждая из этих напряженностей производит (или стремится произвести) соответствующий ей поток. Так, электродвижущая напряженность создает электрические токи в проводниках и стремится создать их в диэлектриках. Она создает электрическую индукцию в диэлектриках, а возможно, и в проводниках тоже. В этом же смысле магнитная напряженность производит магнитную индукцию.

13. В одних случаях поток оказывается просто пропорциональным напряженности и совпадающим с ней по направлению, в других — мы можем только утверждать, что и его направление, и его величина являются функциями направления и величины напряженности.

Случай, в котором составляющие потока представляют собой *линейные* функции составляющих напряженности, обсуждается в п. 297 главы «Уравнения Проводимости». Связь между напряженностью и потоком определяется, вообще говоря, девятью коэффициентами. Но иногда у нас есть основания полагать, что шесть из них образуют три пары равных между собой величин. Тогда связь между линией, вдоль которой направлена напряженность, и плоскостью, нормальной к потоку, подобна связи между полудиаметром эллипсоида и сопряженной ему диаметральной плоскостью. На кватернионном языке в этом случае говорят, что один из векторов является линейной векторной функцией другого, а когда существует три попарно одинаковых коэффициента, то эту функцию называют самосопряженной.

В случае магнитной индукции в железе поток (намагниченность железа) не является линейной функцией интенсивности намагничивания. Однако во всех случаях произведение напряженности (интенсивности) на поток, спроектированный на направление напряженности, приводит к важному научному результату. И это произведение всегда является скалярной величиной.

14. С этими двумя классами векторов или направленных величин связаны две часто встречающиеся математические операции.

В случае напряженности следует брать интеграл вдоль линии от произведения элемента длины этой линии на составляющую напряженности вдоль этого элемента. Результат такой операции называется Линейным (криволинейным) интегралом от напряженности. Он представляет собой работу, производимую над телом, перемещаемым вдоль этой линии. В некоторых случаях, когда линейный интеграл не зависит от формы линии, а зависит только от положения ее конечных точек, линейный интеграл называется Потенциалом.

В случае потоков следует брать интеграл по поверхности от потока через каждый из ее элементов. Результат этой операции называется Поверхностным интегралом от потока, он представляет собой то количество, которое проходит через поверхность.

Существуют определенные поверхности, потоки через которые равны нулю. Если две из них пересекаются, то линия пересечения является линией потока. В тех случаях, когда поток совпадает по направлению с силой, линии подобного рода называют Линиями Силы. Однако было бы правильнее в электростатике и магнитостатике говорить о них как о линиях индукции, а в электрокинематике— как о Линиях Тока.

15. Существует еще одно различие между двумя разными видами направленных величин, хотя и очень важное с физической точки зрения, однако не настолько необходимое, чтобы его следовало отмечать ради применения математических методов. Речь идет о различии между поступательными (продольными) и вращательными свойствами.

Направление и модуль величины могут зависеть от какого-то действия или эффекта, целиком и полностью происходящего вдоль определенной линии, а могут зависеть от чего-то иного, имеющего характер вращения вокруг этой линии, принимаемой за ось. Законы сложения направленных величин, и поступательных (продольных), и вращательных, одинаковы, так что при математическом рассмотрении между величинами этих двух классов нет никаких различий, однако могут существовать некие физические обстоятельства, указывающие, к какому из классов мы обязаны отнести данное частное явление. Так, электролиз состоит в переносе некоторых веществ вдоль линии в одном направлении и некоторых других веществ в противоположном направлении; он представляет собой, очевидно, явление поступательное (продольное), в нем нет никаких признаков эффекта вращения вокруг направления силы.

Отсюда мы делаем вывод, что и электрический ток, который вызывает или сопровождает электролиз, относится к поступательным (продольным), а не к вращательным явлениям.

С другой стороны, северный и южный полюса магнита разделяются не так, как кислород и водород, которые в процессе электролиза появляются на противоположных местах, поэтому у нас нет свидетельства в пользу того, что магнетизм относится к продольным явлениям; в то же время действие магнетизма при вращении плоскости поляризации плоско поляризованного света отчетливо показывает, что магнетизм относится к явлениям вращательным.

О линейных интегралах

16. Операция интегрирования проекции векторной величины вдоль линии имеет важное значение в физике, и потому ее следовало бы ясно понимать.

Пусть x, y, z — координаты точки P, расположенной на некоторой кривой, длина которой, измеряемая от определенной точки A, равна s. Эти координаты будут функциями только одной переменной s.

Обозначим через R численное значение векторной величины в точке P, и пусть касательная к кривой в этой точке образует с направлением R угол ε. Тогда величина $R\cos\varepsilon$ представляет собой составляющую R вдоль кривой, а интеграл

$$L=\int_0^s R\cos\varepsilon\, ds$$

называется линейным интегралом от R вдоль s.

Это выражение может быть записано так:

$$L=\int_0^s \left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

де X, Y, Z — составляющие R, параллельные осям x, y, z соответственно.

В общем случае этот интеграл для различных линий, проведенных между A и P, различен. Но когда внутри некоторой области величина

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=-D\Psi$$

является полным дифференциалом, то интеграл L становится равным $L=\Psi_A-\Psi_P$. при этом он одинаков для любых двух путей произвольной формы между точками A и P при условии, что форма одного пути может быть преобразована в форму другого посредством непрерывного перемещения без выхода за пределы данной области.

О потенциалах

Величина Ψ есть скалярная функция положения точки, и поэтому она не зависит от направлений отсчета. Ее называют Потенциальной Функцией; а про векторную величину с компонентами X, Y, Z говорят, что она имеет потенциал Ψ, если

$$X=-\left(\frac{d\Psi}{dx}\right),\qquad Y=-\left(\frac{d\Psi}{dy}\right),\qquad Z=-\left(\frac{d\Psi}{dz}\right).$$

Если потенциальная функция существует, то поверхности, на которых потенциал постоянен, называются Эквипотенциальными. В любой точке такой поверхности направление R совпадает с нормалью к ней; если обозначить через n нормаль в точке P, то $R=-(d\Psi/dn)$.

Метод представления составляющих вектора через первые производные по координатам от некоторой функции этих координат был предложен Лапласом [4] при разработке теории притяжений. Само название «Потенциал» впервые было дано этой функции Грином [5], который положил ее в основу своегоподхода к изучению электричества. Эта работа Грина осталась незамеченной математиками вплоть до 1846 года, а к тому времени большая часть содержащихся в ней важных теорем была уже переоткрыта Гауссом, Шалем (Chasles), Штурмом и Томсоном [6].

В теории тяготения потенциал берется со знаком, противоположным тому, который используется здесь, и результирующая сила в каком-либо направлении тогда измеряется скоростью *возрастания* потенциальной функции в этом направлении. При изучении электричества и магнетизма потенциал определяется так, что результирующая сила в каком-либо направлении измеряется скоростью *убывания* потенциала в этом направлении. Такой способ использования выражения для потенциала приводит его в соответствие (по знаку) с потенциальной энергией, которая всегда убывает при перемещении тел в направлении действующих на них сил.

17. Геометрическая природа связи потенциала с вектором, вычисляемым через потенциал указанным способом, значительно проясняется благодаря открытию Гамильтоном выражения для оператора, при помощи которого вектор вычисляется из потенциала.

Как мы видели, составляющая вектора в каком-либо направлении равна взятой с обратным знаком первой производной от потенциала по координате в этом направлении.

Пусть i, j, k — три единичных вектора, образующих между собой прямые углы, а X, Y, Z — параллельные им составляющие вектора $\mathfrak{F}$; тогда

$$\mathfrak{F}=iX+jY+kZ. \tag{1}$$

Согласно сказанному выше, если Ψ является потенциалом, то

$$\mathfrak{F}=-\left(i\frac{d\Psi}{dx}+j\frac{d\Psi}{dy}+k\frac{d\Psi}{dz}\right). \tag{2}$$

Используем теперь запись ∇ для оператора

$$i\frac{d}{dx}+j\frac{d}{dy}+k\frac{d}{dz}, \tag{3}$$

тогда

$$\mathfrak{F}=-\nabla\Psi. \tag{4}$$

Значок ∇ можно понимать как указание измерить скорость увеличения Ψ в каждом из трех направлений прямоугольной системы координат и затем, считая найденные величины векторами, объединить их в единый вектор. Это и есть как раз то, что предписывается делать в соответствии с выражением (3). Но мы можем

---

[4] *Méc. Céleste*, liv. III.

[5] Essay on the Application of Mathematical Analisys to the Theories of Electricity and Magnetism, 1828. Reprinted in *Crelle's Journal* and in Mr. Ferrers' edition of Green's Works.

[6] Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, § 483.

считать также, что это заставляет нас отыскать сначала направление наибыстрейшего увеличения Ψ, а затем построить в этом направлении некоторый вектор, представляющий скорость такого возрастания.

Ламе в своем «Трактате об обратных функциях» (M. Lame, *Traité des Fonctions Inverses*) для выражения величины этой наибольшей скорости роста пользовался термином «дифференциальный параметр», однако ни сам этот термин, ни принятый Ламе способ употребления его не свидетельствуют о том, что данная величина характеризуется как направлением, так и модулем. В тех редких случаях, когда я должен буду обращаться к этому соотношению как к чисто геометрическому, я буду называть вектор $\mathfrak{F}$ пространственной вариацией скалярной функции Ψ, используя эти слова для того, чтобы отметить и направление, и величину наиболее быстрого убывания Ψ.

18. Есть, однако, такие случаи, когда условия

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=0, \qquad \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}=0, \qquad \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}=0,$$

являющиеся условиями того, что выражение $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ образует полный дифференциал, выполняются внутри некоторой области пространства, и, несмотря на это, линейный интеграл от A до P может быть различен для двух кривых, каждая из которых целиком лежит внутри данной области. Это может произойти в том случае, когда область имеет форму кольца, а две линии, соединяющие A с P, проходят по противоположным сегментам этого кольца. В этом случае нельзя преобразовать непрерывным изменением один путь в другой без выхода за пределы этой области.

Здесь мы пришли к представлениям, относящимся к Геометрии Положения, топологии, предмет которой изучен еще мало, хотя важность его была отмечена Лейбницем и наглядно пояснена Гауссом. Наиболее полное его рассмотрение дано Дж. Б. Листингом [7].

Пусть в пространстве имеется p точек и проведено l линий произвольной формы, соединяющих эти точки, причем никакие две линии не пересекаются друг с другом и ни одна точка не остается изолированной. Фигуру, составленную из линий таким способом, мы будем называть Диаграммой (графом). Для того чтобы образовать связанную систему, достаточно для соединения p точек взять $p-1$ таких линий. Каждая новая линия завершит петлю или замкнутый путь, или, как мы будем называть его, Цикл. Таким образом, число независимых циклов в диаграмме равно $\varkappa=l-p+1$.

Любой замкнутый путь, проведенный по линиям диаграммы, оказывается составленным из этих независимых циклов, каждый из которых берется любое число раз в любом направлении.

Сам факт существования циклов называется Цикличностью (циклозисом — cyclosis), а число циклов в диаграмме — Индексом Цикличности (или цикломатическим числом — cyclomatic number).

[7] *Der Census Raümlicher Complexe*, Gött. Abh., Bd. X, S. 97 (1861).

Цикличность на поверхностях и в пространственных областях

Поверхности бывают либо полными, либо ограниченными. Полные поверхности либо бесконечны, либо замкнуты. Ограниченные поверхности ограничены одной или несколькими замкнутыми линиями, которые в предельных случаях вырождаются в сдвоенные конечные линии или в точки.

Конечная область пространства ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями. Одна из них является внешней поверхностью, остальные же, содержащиеся внутри нее, но не включающие в себя друг друга, называются внутренними поверхностями.

Если область имеет только одну ограничивающую поверхность, то можно считать, что она допускает сжатие вовнутрь без нарушения непрерывности или самопересечений. Если область обладает простой непрерывностью, как, например, сфера, то процесс сжатия может продолжаться до тех пор, пока область не стянется в точку; если область подобна кольцу, то в результате получится замкнутая кривая; если же область является многосвязной, то результатом ее сжатия будет диаграмма линий, индекс цикличности которой равен индексу цикличности рассматриваемой области. Пространство вне рассматриваемой области характеризуется тем же индексом цикличности, что и сама эта область. Следовательно, если область ограничена наряду с внешней и внутренними поверхностями, ее индекс цикличности равен сумме индексов, характеризующих все эти поверхности.

Когда некоторая область содержит внутри себя другие области, она называется многограничной, или Перифрактической (Periphractic region).

Число внутренних ограничивающих поверхностей у области называется порядком ее перифрактичности. Замкнутая поверхность тоже является многограничной, ее порядок перифрактичности равен единице.

Индекс цикличности замкнутой поверхности равен удвоенному индексу цикличности любой из областей, ограничиваемых ею. Для того чтобы найти индекс цикличности ограниченной поверхности, допустим, что все границы сжимаются вовнутрь без нарушения непрерывности до тех пор, пока не встретятся друг с другом. Тогда поверхность стянется либо в точку в случае ациклической поверхности, либо в линейный граф в случае циклических поверхностей. Индекс цикличности графа совпадает с индексом цикличности поверхности.

19. Т е о р е м а I. *Если в некоторой ациклической области справедливо соотношение*

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=-D\Psi,$$

то значение линейного интеграла, взятого от точки A до точки P, будет одинаковым для любого пути внутри этой области.

Покажем сначала, что линейный интеграл, взятый по любому замкнутому пути в пределах области, равен нулю.

Пусть нанесены эквипотенциальные поверхности. Они либо замкнуты, либо полностью ограничены поверхностью области, так что замкнутая линия внутри этой области, если она пересекает какую-то из этих поверхностей на одном из участков своего пути, должна пересечь ту же самую поверхность в противоположном направлении на каком-то другом участке своего пути; поскольку соответствующие вклады в линейный интеграл окажутся одинаковыми по величине и противоположными по знаку, то полное его значение будет равно нулю.

Следовательно, если считать, что AQP и $AQ'P$ — два пути из A в P, то линейный интеграл вдоль $AQ'P$ равен сумме интеграла вдоль AQP и интеграла по замкнутому пути $AQ'PQA$. Но интеграл по замкнутому пути равен нулю, и поэтому интегралы по двум путям AQP и $AQ'P$ равны между собой.

Таким образом, если задать потенциал в какой-либо одной точке, принадлежащей этой области, то тем самым он будет определен и для любой другой точки.

20. Теорема II. *Если всюду внутри циклической области справедливо уравнение*

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=-D\Psi,$$

то линейный интеграл из точки A в точку P, взятый вдоль линии, проведенной в пределах этой области, вообще говоря, не определен до тех пор, пока не установлен канал, по которому происходит связь между A и P.

Пусть N есть индекс цикличности области, тогда при помощи поверхностей (которые мы будем называть Диафрагмами) можно осуществить N сечений области, запирающих N каналов связи и сводящих тем самым данную область, не разрушая ее непрерывности, к области, удовлетворяющей условию ацикличности.

Согласно последней теореме, линейный интеграл от A до произвольной точки P, взятый вдоль линии, не пересекающей ни одну из этих диафрагм, будет иметь вполне определенное значение.

Возьмем теперь точки A и P, сколь угодно близко расположенные друг к другу, но находящиеся на противоположных сторонах диафрагмы, и обозначим через K линейный интеграл от A до P.

Пусть A' и P' будут двумя другими точками, сколь угодно близкими друг к другу, расположенными на противоположных сторонах той же самой диафрагмы, а K' — линейный интеграл от A' до P'. Тогда $K'=K$.

Действительно, если мы проведем две почти совпадающие линии AA' и PP', расположенные по разные стороны от диафрагмы, то линейные интегралы вдоль них будут равны между собой. Пусть каждый из этих интегралов есть L, тогда линейный интеграл K', взятый вдоль $A'P'$, окажется равным линейному интегралу, взятому вдоль $A'A+AP+PP'=-L+K+L=K$, т. е. линейному интегралу вдоль AP.

Следовательно, линейный интеграл по замкнутой кривой, проходящей сквозь одну диафрагму в определенном заданном направлении, равен некоторой постоянной величине K, называемой Циклической константой данного цикла.

Пусть внутри этой области проведена произвольная замкнутая кривая, пересекающая диафрагму первого цикла p раз в положительном направлении и p' раз в отрицательном направлении, причем $p-p'=n_1$. Тогда линейный интеграл вдоль этой замкнутой кривой будет равен n_1K_1.

Аналогично линейный интеграл, взятый вдоль произвольной замкнутой кривой, будет равен

$$n_1K_1+n_2K_2+\ldots+n_sK_s,$$

где n_s представляет собой превышение числа положительных прохождений кривой через диафрагму S-го цикла над числом отрицательных.

Если две кривые таковы, что одна из них может быть преобразована в другую путем ее непрерывного изменения без прохождения в какой бы то ни было момент времени любой части пространства, в котором условия существования потенциала не выполнены, то эти две кривые называются совместимыми. Те кривые, для которых это преобразование не может быть произведено, называются несовместимыми [8].

Условие, состоящее в том, что выражение $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ является полным дифференциалом некоторой функции Ψ во всех точках внутри определенной области, возникает в целом ряде физических задач, где направленная величина и потенциал имеют различные физические истолкования.

В чисто кинематических задачах мы можем положить величины X, Y, Z составляющими смещения точки сплошного тела, начальные координаты которой равны x, y, z; тогда данное условие выражает тот факт, что эти смещения составляют *невращательные деформации* [9].

Если X, Y, Z представляют собой составляющие скорости жидкости в точке x, y, z, то данное условие означает, что движение жидкости невращательное.

Если X, Y, Z представляют собой составляющие силы в точке x, y, z, то это условие означает, что работа, совершаемая над частицей при прохождении ее из одной точки в другую, равна разности потенциалов в этих точках и что значение этой разности одинаково для всех совместимых путей между этими двумя точками.

О поверхностных интегралах

21. Пусть dS есть элемент поверхности, а ε — угол между нормалью к поверхности, проведенной в направлении положительной стороны поверхности, и направлением векторной величины R, тогда величина $\iint R\cos\varepsilon\,dS$ называется *поверхностным интегралом от R по поверхности S*.

Теорема III. *Поверхностный интеграл от потока (плотности потока), втекающего внутрь замкнутой поверхности, может быть выражен через объемный интеграл от его конвергенции, взятый по области, расположенной внутри этой поверхности* (см. п. 25).

Пусть X, Y, Z будут составляющие R, а l, m, n — направляющие косинусы нормали к поверхности, отсчитываемой наружу. Тогда поверхностный интеграл от R по S равен

$$\iint R\cos\varepsilon\,dS=\iint Xl\,dS+\iint Ym\,dS+\iint Zn\,dS, \tag{1}$$

где X, Y, Z — это значения, взятые в точке на поверхности, а интегрирования распространены на всю поверхность.

Если поверхность замкнутая, то при заданных y и z координата x должна иметь четное количество значений, так как линия, параллельная x, должна входить в замкнутое пространство и выходить из него одинаковое число раз при условии, что она вообще пересекает поверхность.

[8] См. сэр У. Томсон «О вихревом движении», *Trans. R. S. Edin.*, 1867—8. (Sir W. Thomson «On Vortex Motion»).

[9] Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, § 190(I).

При каждом входе $l dS = -dy\,dz$, а при каждом выходе $l\,dS = dy\,dz$.

Пусть некоторая точка, движущаяся из $x = -\infty$ в $x = +\infty$, первый раз входит в это пространство при $x = x_1$, а затем покидает его при $x = x_2$ и так далее; при этом значения X в этих точках соответственно равны $X_1, X_2, \ldots$; тогда

$$\iint Xl\,dS = -\iint \{(X_1 - X_2) + (X_3 - X_4) + \ldots + (X_{2n-1} - X_{2n})\}\,dy\,dz. \qquad (2)$$

Если X является величиной непрерывной и не принимающей в интервале между x_1 и x_2 бесконечных значений, то

$$X_2 - X_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dX}{dx}\,dx, \qquad (3)$$

где интегрирование производится от первого до второго пересечения, а именно в пределах первого отрезка x, находящегося внутри замкнутой поверхности. Учитывая все отрезки, лежащие в пределах замкнутой поверхности, находим

$$\iint Xl\,dS = \iiint \frac{dX}{dx}\,dx\,dy\,dz, \qquad (4)$$

где двойное интегрирование ограничивается замкнутой поверхностью, а тройное интегрирование распространяется на все охватываемое ею пространство. Следовательно, если X, Y, Z непрерывны и конечны внутри замкнутой поверхности S, то полный поверхностный интеграл от R, взятый по этой поверхности, будет равен

$$\iint R\cos\varepsilon\,dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) dx\,dy\,dz, \qquad (5)$$

где тройное интегрирование распространено на все пространство внутри S.

Предположим теперь, что величины X, Y, Z не являются непрерывными в пространстве, охватываемом замкнутой поверхностью, а на некоторой поверхности $F\,(x, y, z) = 0$ изменяются скачком от значений X, Y, Z на отрицательной стороне этой поверхности до значений X', Y', Z' на ее положительной стороне.

Если этот разрыв происходит, скажем, между x_1 и x_2, то значение $X_2 - X_1$ окажется равным

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dX}{dx}\,dx + (X' - X), \qquad (6)$$

здесь в подынтегральном выражении следует рассматривать только конечные значения производной от X.

Таким образом, в этом случае полный поверхностный интеграл от R по замкнутой поверхности будет представляться выражением

$$\iint R\cos\varepsilon\,dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) dx\,dy\,dz + \iint (X' - X)\,dy\,dz +$$
$$+ \iint (Y' - Y)\,dz\,dx + \iint (Z' - Z)\,dx\,dy, \qquad (7)$$

или, если через l', m', n' обозначить направляющие косинусы нормали к поверхности разрыва, а через dS' — элемент этой поверхности,

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right) dx\,dy\,dz + \\ + \iint \{l'(X'-X)+m'(Y'-Y)+n'(Z'-Z)\}\, dS', \tag{8}$$

где интегрирование в последнем члене производится по поверхности разрыва.

Если в каждой точке, где X, Y, Z непрерывны, справедливо уравнение

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0, \tag{9}$$

а на каждой поверхности, где они разрывны,—

$$l'X'+m'Y'+n'Z'=l'X+m'Y+n'Z, \tag{10}$$

то поверхностный интеграл по любой замкнутой поверхности равен нулю и про распределение векторной величины говорят, что оно является Соленоидальным.

Мы будем ссылаться на уравнение (9) как на Общее условие соленоидальности, а на уравнение (10) — как на условие соленоидальности на поверхности.

22. Рассмотрим теперь случай, когда уравнение

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0 \tag{11}$$

выполнено в каждой точке внутри поверхности S. Отсюда следует, что поверхностный интеграл по замкнутой поверхности равен нулю.

Пусть теперь замкнутая поверхность S состоит из трех частей S_1, S_0 и S_2, причем S_1 — это поверхность произвольной формы, ограниченная замкнутой кривой L_1, а S_0 — поверхность, образованная линиями, проведенными из каждой точки кривой L_1, всегда совпадающими по направлению с R. Если l, m, n — направляющие косинусы нормали в произвольной точке поверхности S_0, то мы имеем

$$R\cos\varepsilon=Xl+Ym+Zn=0. \tag{12}$$

Следовательно, эта часть поверхности не дает никакого вклада в значение поверхностного интеграла.

Пусть S_2 будет другой поверхностью произвольной формы, ограниченной замкнутой кривой L_2, по которой она пересекается с поверхностью S_0.

Обозначим через Q_1, Q_0, Q_2 поверхностные интегралы, взятые по поверхностям S_1, S_0 и S_2, а через Q — поверхностный интеграл по замкнутой поверхности S; тогда

$$Q=Q_1+Q_0+Q_2=0, \tag{13}$$

но мы знаем, что

$$Q_0=0, \tag{14}$$

поэтому

$$Q_2=-Q_1, \tag{15}$$

иными словами, поверхностный интеграл по поверхности S_2 равен по величине и противоположен по знаку поверхностному интегралу по S_1 независимо от формы и расположения S_2 при условии, что промежуточная поверхность S_0 является поверхностью, к которой направленная величина R всегда тангенциальна.

Если предположить, что L_1 есть замкнутая кривая, ограничивающая небольшую площадь, то S_0 окажется трубчатой поверхностью, обладающей тем свойством, что поверхностный интеграл по любому полному сечению этой трубки одинаков.

Так как все пространство может быть разделено на такого рода трубки, то при выполнении условия

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0 \tag{16}$$

распределение векторной величины, удовлетворяющей этому уравнению, называется Соленоидальным Распределением.

О трубках и линиях тока

Если пространство разделено на трубки таким образом, что поверхностный интеграл для каждой из них равен единице, то такие трубки называются единичными, а поверхностный интеграл по любой конечной поверхности S, ограниченной некоторой замкнутой кривой L, равен *числу* единичных трубок, проходящих сквозь S в положительном направлении, или, что то же самое, числу единичных трубок, проходящих внутри замкнутой кривой L.

Следовательно, поверхностный интеграл по поверхности S зависит только от формы ее границы L, но не от формы самой поверхности в пределах той же ее границы.

О многограничных областях

Если во всей области, ограниченной одной замкнутой поверхностью S, выполнено условие соленоидальности

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0,$$

то поверхностный интеграл, взятый по любой замкнутой поверхности, проведенной внутри этой области, будет равен нулю, а поверхностный интеграл, взятый по ограниченной поверхности внутри этой области, будет зависеть только от формы той замкнутой кривой, которая образует границу этой поверхности.

В общем случае, однако, неправильно утверждать, что те же результаты сохраняются, если область, внутри которой удовлетворяется условие соленоидальности, ограничена иначе, нежели одной поверхностью.

Действительно, если она ограничена более чем одной непрерывной поверхностью, то одна из них является внешней, а остальные — внутренними, и область внутри поверхности S оказывается многограничной, содержащей внутри себя другие области, полностью охватываемые S.

Предположим, что условие соленоидальности не удовлетворяется внутри одной из этих охватываемых областей, скажем, внутри области, ограниченной поверхностью S_1, и поверхностный интеграл по поверхности, охватывающей эту область, равен $Q_1=\iint R\cos\varepsilon\, dS_1$, пусть $Q_2, Q_3, \ldots$ являются соответствующими величинами для других областей, охватываемых поверхностями S_2, $S_3, \ldots$.

Тогда, если внутри области S провести некоторую замкнутую поверхность S', то значение поверхностного интеграла на ней будет равно нулю только в том случае, когда эта поверхность не содержит внутри себя ни одну из областей, охватываемых поверхностями S_2, $S_3, \ldots$. Если же она включает какие-то из них, то соответствующий поверхностный интеграл равен сумме поверхностных интегралов по поверхностям различных охватываемых областей, лежащих внутри S'.

По этой же самой причине поверхностный интеграл, взятый по поверхности, ограниченной замкнутой кривой, будет иметь одинаковое значение только для таких поверхностей (ограниченных той же замкнутой кривой), которые допускают совмещение с данной поверхностью путем непрерывного изменения поверхности в пределах области, охватываемой S.

Если нам предстоит работать с многограничной областью, то первым делом следует свести ее к одноограничной путем проведения линий L_1, $L_2, \ldots$, соединяющих внутренние поверхности S_1, $S_2, \ldots$ с внешней поверхностью S. Каждая из этих линий при условии, что она соединяет поверхности, ранее не связанные непрерывным соединением, сокращает порядок перифрактичности на единицу, так что полное число линий, которые необходимо нанести для устранения многограничности, равно порядку перифрактичности, или числу внутренних поверхностей. При нанесении этих линий мы обязаны помнить, что любая линия, соединяющая ранее уже соединенные поверхности, не уменьшает перифрактичности, а вводит цикличность. Когда эти линии проведены, можно утверждать, что при удовлетворении условия соленоидальности внутри S поверхностный интеграл, взятый по любой замкнутой поверхности, лежащей внутри S, но не пересекающей ни одной из этих линий, равен нулю. Если же она пересекает какую-то линию, скажем, L_1, один или нечетное число раз, то она охватывает поверхность S_1, и соответствующий поверхностный интеграл равен Q_1.

Наиболее знакомым примером многограничной области, где удовлетворяются условия соленоидальности, является область, окружающая массу, которая притягивает или отталкивает с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

В этом случае мы имеем

$$X=m\frac{x}{r^3}, \qquad Y=m\frac{y}{r^3}, \qquad Z=m\frac{z}{r^3},$$

где масса m предполагается расположенной в начале координат.

В любой точке, где расстояние r конечно,

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0,$$

но в начале координат эти величины становятся бесконечными. Для любой замкнутой поверхности, не содержащей внутри себя начала координат, поверхностный интеграл равен нулю. Если же она содержит внутри начало координат, то поверхностный интеграл по ней равен $4\pi m$.

Если по какой-то причине мы захотим рассматривать область вокруг m не как многограничную, то тогда должны провести линию из m до бесконечности и при взятии поверхностного интеграла помнить, что нужно прибавлять $4\pi m$ всякий раз, когда эта линия пересекает поверхность от ее отрицательной стороны к положительной.

О правовинтовых и левовинтовых соотношениях в пространстве

23. В настоящем трактате поступательное движение вдоль какой-либо оси и вращательное движение вокруг этой же оси будут считаться движениями одного и того же знака при условии, что их направления соответствуют направлениям поступательного перемещения и вращения обычного, т. е. правого винта [10].

Так, например, если принять действительное вращение Земли с запада на восток за положительное, то и направление земной оси с юга на север также будет взято за положительное; и если человек идет вперед в положительном направлении, то положительное вращение происходит в таком порядке: голова, правая рука, ноги, левая рука.

Если мы поместим себя на положительную сторону некоторой поверхности, то положительное направление вдоль ограничивающей эту поверхность кривой окажется противоположным движению стрелок часов, циферблат которых обращен к нам.

Это и есть та самая правая (правосторонняя) система отсчета, которая принята Томсоном и Тэтом в их книге «*Натуральная философия*» (*Natural Philosophy*), а также в книге Тэта «*Кватернионы*» (*Quaternions*). Противоположная ей левая (левосторонняя) система отсчета принята в гамильтоновых «*Кватернионах*» (*Lectures*, p. 76, and *Elements*, p. 108, and p. 117 note). Операция перехода от одной системы к другой названа Листингом *Перверсией* — обращением, зеркальным отражением.

Отражение какого-либо предмета в зеркале является его обращенным изображением.

Используя Декартовы оси координат x, y, z, мы будем изображать их так, чтобы общепринятая договоренность о циклическом порядке расположения символов приводила к правой системе отсчета направлений в пространстве. Так, если ось x проведена смотрящей на восток, а ось y — на север, то ось z должна быть проведена вертикально вверх.

---

[10] Совместное действие мышц руки, когда мы, поворачивая тыльной стороной правую ладонь наружу, одновременно проталкиваем руку вперед, оставляет в памяти более прочный отпечаток характера правовинтового движения, чем какое-либо словесное определение. Обычно употребляемый пробочный штопор тоже может служить материальным образом этих же самых соотношений.

Профессор У. Х. Миллер (W. H. Miller) подсказал мне, что усики у виноградной лозы закручиваются по правому винту, а у хмеля — по левому; таким образом, системы соотношений в пространстве могли бы быть названы соответственно системой виноградных соотношений и хмелевых соотношений.

Принимаемая нами виноградная система — это система Линнея (Linnaeus); ею пользуются изготовители винтов во всех цивилизованных странах, кроме Японии. Де Кандолле был первым, назвавшим хмелевую лозу правосторонней, в этом ему последовали Листинг и большинство авторов, писавших о круговой поляризации света. Винты, подобные усикам хмелевой лозы, применяются для сцепления железнодорожных вагонов, а также для прикрепления колес с левой стороны обычных экипажей, и они всегда называются левыми винтами всеми, кто ими пользуется.

Площади поверхностей будут браться с положительным знаком в том случае, когда порядок интегрирования совпадает с циклическим порядком расстановки символов. Так, площадь на плоскости xy, расположенная внутри некоторой замкнутой кривой, может быть записана либо $\int x\,dy$, либо $-\int y\,dx$; в первом выражении порядок интегрирования есть x, y, во втором — y, x.

Это соотношение между двумя произведениями $dx\,dy$ и $dy\,dx$ можно сравнить с правилом умножения двух перпендикулярных векторов в теории кватернионов, где знак произведения определяется порядком умножения; его можно сравнить также с изменением знака детерминанта, происходящим при перестановке местами соседних строчек или столбцов.

По таким же причинам объемный интеграл должен считаться положительным, когда порядок интегрирования совпадает с циклической расстановкой переменных x, y, z, и отрицательным при обращенном порядке цикличности.

Перейдем теперь к доказательству теоремы, полезной для установления связи между поверхностным интегралом, взятым по некоторой конечной поверхности, и линейным интегралом, взятым вдоль ее границы.

24. Т е о р е м а IV. *Линейный интеграл, взятый вдоль замкнутой кривой, может быть выражен через поверхностный интеграл, взятый по поверхности, ограниченной этой кривой.*

Пусть X, Y, Z будут составляющие той векторной величины $\mathfrak{A}$, линейный интеграл от которой должен быть взят по замкнутой кривой s.

Пусть произвольная непрерывная поверхность S целиком ограничена замкнутой кривой s, а составляющие ξ, η, ζ другой векторной величины $\mathfrak{B}$ связаны с составляющими X, Y, Z уравнениями

$$\xi=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}, \qquad \eta=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}, \qquad \zeta=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}. \tag{1}$$

Тогда поверхностный интеграл от $\mathfrak{B}$, взятый по поверхности S, равен линейному интегралу от $\mathfrak{A}$, взятому вдоль кривой s. Очевидно, что сами составляющие ξ, η, ζ удовлетворяют условию соленоидальности.

Пусть l, m, n будут направляющими косинусами нормали к элементу поверхности dS, отсчитываемой в положительном направлении. Тогда величина поверхностного интеграла от $\mathfrak{B}$ может быть записана так:

$$\iint(l\xi+m\eta+n\zeta)\,dS. \tag{2}$$

Для того чтобы придать элементу dS определенный смысл, предположим, что в каждой точке поверхности значения координат x, y, z заданы как функции двух независимых переменных α и β. Если β постоянна, а α изменяется, точка (x, y, z) будет описывать некоторую кривую на поверхности, и если перебрать целый ряд значений β, то будет прочерчена серия таких кривых, полностью лежащих на поверхности S. Подобным же образом, перебирая последовательность постоянных α, можно нанести вторую серию кривых, пересекающихся с кривыми первой серии и разделяющих всю поверхность на элементарные участки, любой из которых может быть взят за элемент dS.

Проекция этого элемента на плоскость yz, согласно обычным формулам, равна

$$l\,dS=\left(\frac{dy}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}-\frac{dy}{d\beta}\frac{dz}{d\alpha}\right)d\beta\,d\alpha. \qquad (3)$$

Выражения для mdS и ndS получаются отсюда путем перестановки x, y, z в циклическом порядке.

Поверхностный интеграл, который мы должны найти, есть

$$\iint(l\xi+m\eta+n\zeta)\,dS, \qquad (4)$$

или, выражая ξ, η, ζ через X, Y, Z,

$$\iint\left(m\frac{dX}{dz}-n\frac{dX}{dy}+n\frac{dY}{dx}-l\frac{dY}{dz}+l\frac{dZ}{dy}-m\frac{dZ}{dx}\right)dS. \qquad (5)$$

Часть этого интеграла, зависящая от X, может быть записана так:

$$\iint\left\{\frac{dX}{dz}\left(\frac{dz}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}-\frac{dz}{d\beta}\frac{dx}{d\alpha}\right)-\frac{dX}{dy}\left(\frac{dx}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}-\frac{dx}{d\beta}\frac{dy}{d\alpha}\right)\right\}d\beta\,d\alpha. \qquad (6)$$

После добавления и вычитания величины $\frac{dX}{dx}\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}$ это выражение становится таким:

$$\iint\left\{\frac{dx}{d\beta}\left(\frac{dX}{dx}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dX}{dy}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{dX}{dz}\frac{dz}{d\alpha}\right)-\frac{dx}{d\alpha}\left(\frac{dX}{dx}\frac{dx}{d\beta}+\frac{dX}{dy}\frac{dy}{d\beta}+\frac{dX}{dz}\frac{dz}{d\beta}\right)\right\}d\beta\,d\alpha; \qquad (7)$$

$$=\iint\left(\frac{dX}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}-\frac{dX}{d\beta}\frac{dx}{d\alpha}\right)d\beta\,d\alpha. \qquad (8)$$

Предположим теперь, что кривые постоянных α образуют семейство замкнутых кривых, окружающих некоторую точку на поверхности, в которой α принимает свое минимальное значение, равное α_0; пусть последняя кривая этого семейства, для которой $\alpha=\alpha_1$, совпадает с замкнутой кривой s.

Предположим также, что кривые постоянных β образуют семейство линий, проведенных от точки, где $\alpha=\alpha_0$, до замкнутой кривой s, причем первая линия, соответствующая значению β_0, совпадает с последней линией β_1.

При интегрировании (8) по частям (первый член интегрируется по α, а второй — по β) двойные интегралы взаимно уничтожаются и выражение принимает вид

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1}\left(X\frac{dx}{d\beta}\right)_{\alpha=\alpha_1}d\beta-\int_{\beta_0}^{\beta}\left(X\frac{dx}{d\beta}\right)_{\alpha=\alpha_0}d\beta-\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(X\frac{dx}{d\alpha}\right)_{\beta=\beta_1}d\alpha+\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(X\frac{dx}{d\alpha}\right)_{\beta=\beta_0}d\alpha. \qquad (9)$$

Так как точка $(\alpha,\ \beta_1)$ совпадает с точкой $(\alpha,\ \beta_0)$, то третий и четвертый члены уничтожают друг друга, и поскольку в точке, где $\alpha=\alpha_0$, существует только одно значение x, то второй член обращается в нуль и выражение сводится к первому члену.

Так как кривая $\alpha=\alpha_1$ совпадает с замкнутой кривой s, мы можем написать это выражение в виде

$$\int X\frac{dx}{ds}ds, \qquad (10)$$

где интегрирование выполняется вдоль кривой s. Аналогично можно поступить и с теми частями поверхностного интеграла, которые зависят от Y и Z, так что окончательно получаем

$$\iint (l\xi + m\eta + n\zeta)\, dS = \int \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} \right) ds, \tag{11}$$

где первый интеграл распространен на поверхности S, а второй берется вдоль ограничивающей ее кривой s[11].

О действии оператора ∇ на векторную функцию

25. Мы видели, что оператор, обозначенный как ∇, — это такой оператор, при помощи которого векторная величина вычисляется из ее потенциала. Тот же самый оператор, однако, примененный к векторной функции, дает результаты, входящие в две только что доказанные нами теоремы (III и IV). Профессору Тэту[12] мы обязаны обобщением этого оператора применительно к векторным смещениям, а также большей части последующих усовершенствований.

Пусть σ будет векторной функцией вектора переменной точки ρ. Как обычно, предположим, что

$$\rho = ix + jy + kz \quad \text{и} \quad \sigma = iX + jY + kZ,$$

где X, Y, Z — составляющие σ в направлениях осей.

Мы должны совершить над σ операцию

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}.$$

Выполняя эту операцию и помня правило перемножения i, j, k, мы находим, что $\nabla\sigma$ состоит из двух частей: одной — скалярной и другой — векторной.

Скалярная часть

$$S\nabla\sigma = -\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right), \qquad \text{(см. Теорему III)}$$

а векторная часть

$$V\nabla\sigma = i\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) + j\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + k\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right).$$

Если связь между X, Y, Z и ξ, η, ζ задается уравнением (1) предыдущей теоремы, то мы можем записать

$$V\nabla\sigma = i\xi + j\eta + k\zeta. \qquad \text{(см. Теорему IV)}$$

Таким образом, оказывается, что функции от X, Y, Z, фигурирующие в двух теоремах, получаются в результате действия оператора ∇ на вектор, компоненты

---

[11] Эта теорема была дана профессором Стоксом (*Smith's Prize Examination*, 1854, question 8). Она доказана в книге Томсона и Тэта *Natural Philosophy*, § 190 (II).

[12] См. *Proc. R. S. Edin.*, April 28, 1862. «On Green's and other allied Theorems», *Trans. R. S. Edin.*, 1869—70 — очень ценная статья, и «On some Quaternion Integrals», *Proc. R. S. Edin.*, 1870—71.

которого суть X, Y, Z. А сами эти теоремы могут быть записаны так:

$$\iiint S\nabla\sigma\, dv = \iint S\sigma U_{\nu}\, ds \tag{III}$$

и

$$\int S\sigma\, d\rho = -\iint S\,\nabla\sigma U_{\nu}\, ds, \tag{IV}$$

где dv есть элемент объема, ds — элемент поверхности, $d\rho$ — элемент кривой, $U\nu$ — единичный вектор в направлении нормали.

Для того чтобы понять смысл этих функций вектора, предположим, что σ_0 есть значение σ в точке P, и будем изучать величину $\sigma - \sigma_0$ в окрестности P. Если построить вокруг P некоторую замкнутую поверхность, то при направленном

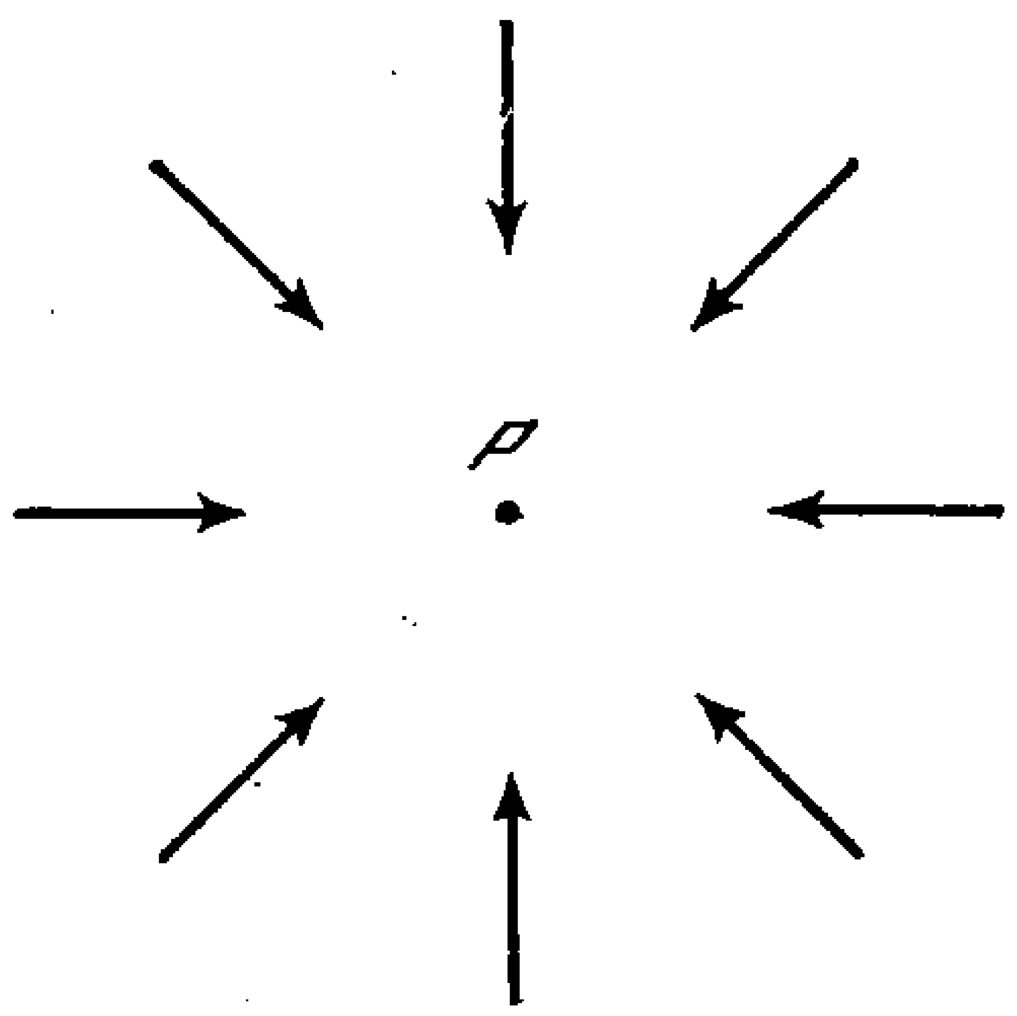

Рис 1

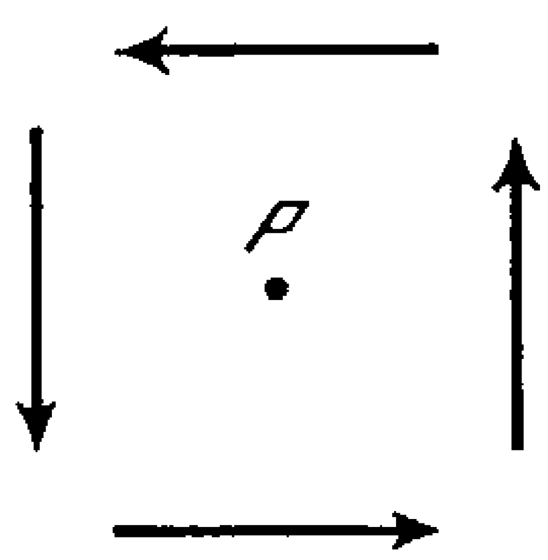

Рис. 2

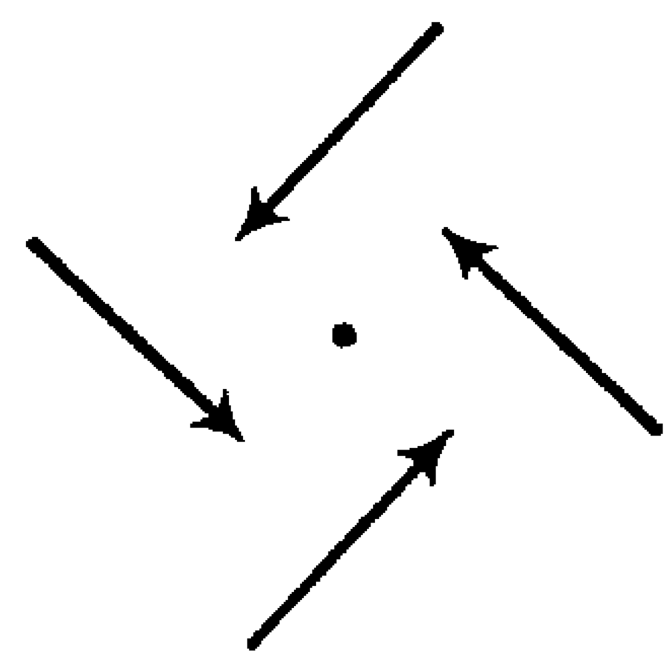

Рис. 3

внутрь поверхностном интеграле от σ, взятом по этой поверхности, величина $S\nabla\sigma$ будет положительной и вектор $\sigma - \sigma_0$ около точки P в целом будет направлен в сторону P, как это показано на рис. 1.

В связи с этим я предлагаю скалярную часть от $\nabla\sigma$ называть *конвергенцией* σ в точке P.

Для интерпретации векторной части $\nabla\sigma$ предположим, что вектор, имеющий компоненты ξ, η, ζ, направлен под прямым углом к плоскости листа вверх, и будем изучать вектор $\sigma - \sigma_0$ вблизи точки P. При этом окажется (см. рис. 2), что этот вектор в целом расположен тангенциально и направлен противоположно движению часовых стрелок.

Я предлагаю (с большой неуверенностью, однако) называть векторную часть $\nabla\sigma$ *ротацией* (ротором) σ в точке P.

На рис. 3 проиллюстрировано сочетание ротации и конвергенции.

Рассмотрим теперь смысл уравнения $V\nabla\sigma = 0$.

Это уравнение означает, что либо величина $\nabla\sigma$ является скаляром, либо вектор σ есть пространственная вариация от некоторой скалярной функции Ψ.

26. Одно из наиболее замечательных свойств оператора ∇ состоит в том, что при повторном применении он превращается в оператор

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right),$$

который встречается во всех разделах Физики и который мы можем называть Оператором Лапласа.

Сам по себе этот оператор существенно скалярный. Когда он действует на скалярную функцию, получается скаляр, а когда он действует на векторную функцию, получается вектор.

Если провести небольшую сферу радиуса r с центром в точке P и считать, что q_0 есть значение величины q в ее центре, а $\bar{q}$ есть значение q среднее по всем точкам внутри сферы, то

$$q_0-\bar{q}=\frac{1}{10}r^2\nabla^2 q,$$

так что значение в центре либо превышает, либо слегка не достигает этого среднего значения в зависимости от того, является ли величина $\nabla^2 q$ положительной или отрицательной.

Я предлагаю поэтому называть величину $\nabla^2 q$ *концентрацией* (сгущением) q в точке P, потому что она характеризует превышение величины q в этой точке над ее средним значением в окрестности данной точки.

Если q — скалярная функция, то метод отыскания ее среднего значения хорошо известен. Если же это векторная функция, то нам следует отыскивать ее среднее значение, руководствуясь правилами интегрирования векторных функций. В результате, конечно, получится вектор.