О ФАРАДЕЕВЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ

ЧАСТЬ I*) ([1,2])

СТАТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ И СТАЦИОНАРНЫЙ ТОК

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние учения об электричестве представляется особенно неблагоприятным для теоретической разработки. Законы распределения электричества на поверхности проводников были аналитически выведены из опытов. В некоторых своих частях математическая теория магнетизма была установлена, между тем как в других—недостает опытных данных. Теория проводимости гальванического тока и взаимодействия проводников представлена математическими формулами, но еще не связана с остальными отделами науки. Современная теория электричества и магнетизма, охватывающая все относящиеся сюда явления, не только должна уяснить связь между покоящимся электричеством и электричеством текущим, но также между притяжениями и индуктивными действиями в обоих состояниях. Такая теория должна полностью удовлетворять законам, математическое выражение которых уже известно, и, кроме того, давать средства для теоретического вычисления случаев, когда известные формулы неприменимы. Чтобы овладеть существую-

*) Transactions of the Cambridge Philosophical Society, т. X, 1855—1856 гг.

щими теориями, изучающему приходится освоиться со значительным запасом столь сложных математических формул, что уже трудность удержать их в памяти сама по себе является существенным препятствием к дальнейшему прогрессу. Поэтому для успешного развития теории необходимо прежде всего упростить выводы прежних исследований и привести их к форме, наиболее доступной восприятию. Результаты такого упрощения могут быть представлены или чисто математической формулой или же физической гипотезой. В первом случае мы совершенно теряем из виду объясняемые явления и потому не можем притти к более широкому представлению об их внутренней связи, хотя и можем предвычислять следствия из данных законов ([3])

С другой стороны, принимая некоторую физическую гипотезу, мы уже смотрим на явления предубежденно и становимся склонными к той слепоте по отношению к фактам и поспешности в допущениях, которым способствуют частные односторонние объяснения. Мы должны поэтому найти такой метод исследования, который на каждом шагу основывался бы на ясных физических представлениях, не связывая нас в то же время какой-нибудь теорией, из которой заимствованы эти представления, благодаря чему мы не будем отвлечены от предмета преследованием аналитических тонкостей и не отклонимся от истины из-за излюбленной гипотезы [1].

Для составления физических представлений без принятия специальной физической теории следует освоиться с существованием физических аналогий. Под физической аналогией я разумею то частное сходство между законами двух каких-нибудь областей науки, благодаря которому одна является иллюстрацией для другой. В этом смысле все применения математики в науке основаны на соотношениях между законами, которым подчиняются физические величины, и законами математики, так что цель точных наук состоит в том, чтобы свести проблемы естествознания к определению величин при помощи действий над числами. Переходя от наиболее общей из аналогии к специальной, мы находим сходство в математической форме явлений двух различных областей природы, которое послужило, например, основой физической теории света.

Изменение в направлении лучей света при переходе их из одной среды в другую тождественно с отклонениями материальной частицы от прямолинейного пути при прохождении ее через тонкий слой, в котором действуют силы. На этой аналогии, которая распространяется только на направление, а не на скорость движения, основано одно объяснение преломления света, которое долго признавалось за правильное и которое еще теперь, когда мы уже не рискуем более применять его вне области его пригодности, полезно при решении различных задач как искусственный математический прием. Вторая аналогия между светом и колебаниями упругой среды идет много дальше, и хотя ее значение и плодотворность не могут быть переоценены, мы все-таки должны помнить, что она основана лишь на формальном сходстве между законами световых явлений и законами упругих колебаний. Если мы лишим ее физического облика и сведем к теории «поперечных колебаний», то останется лишь система истин, которая хотя и не внесет ничего гипотетического в наблюдаемые факты, но зато, наверное, будет несостоятельной как в наглядности, так и в плодотворности методов. То, что я сказал об этих много раз обсуждавшихся вопросах оптики, должно служить лишь подготовкой к разбору принимаемой почти всеми теории действия на расстоянии.

Мы все уже свыклись с математическим понятием дальнодействия. Опираясь на него, мы можем делать выводы и выражать формулами соответствующие законы, которые имеют вполне определенное математическое значение и находятся в полном согласии с явлениями природы. Во всей прикладной математике нет ни одной формулы, которая лучше согласовалась бы с опытом, чем закон тяготения, и ни одна теория не пустила более глубоких корней в человеческий разум, чем теория действия тел на расстоянии ([4]). Законы

теплопроводности в однородных средах кажутся на первый взгляд в физическом отношении как нельзя более отличными от законов притяжений. Величины, которые мы встречаем в этих новых явлениях, суть *температура, поток тепла, теплопроводность*. Слово *сила* чуждо этой области науки. Несмотря на это, мы находим, что математические законы стационарного движения тепла в однородных средах тождественны по форме с законами притяжений, будучи обратно пропорциональными квадрату расстояния. Заменяя *центр притяжения источником тепла, ускоряющее действие притяжения—тепловым потоком, потенциал—температурой*, мы преобразуем решение задач о притяжении в решение соответствующих задач по теплопроводности. Эта аналогия между формулами учений о теплоте и о притяжении была подчеркнута впервые, как мне кажется, проф. Вильямом Томсоном *).

Хотя предполагается, что тепловой поток связан с действием между смежными частями среды, а сила притяжения есть взаимодействие тел на расстоянии, тем не менее математические формулы, выражающие законы той и другой области явлений, совершенно тождественны.

Конечно, обе теории примут совершенно различный вид, если мы включим в круг наших исследований другие соображения и дополнительные факты, но математическое сходство некоторых законов останется в силе и с успехом может быть использовано в полезных математических приемах.

При помощи аналогии такого рода я попытался представить в удобной форме те математические приемы и формулы, которые необходимы для изучения электрических явлений. Мой метод одинаков с тем, которого придерживался Фарадей **) в своих исследованиях и

*) W. Thomson, Cambr. Math. Journal, т. 3, 1842 г.

**) См. Faraday, «Experimental Researches», серия 28 (имеется русский перевод: Фарадей, «Экспериментальные исследования» по электричеству», изд. АНСССР, т. I, 1947 г., т. II, 1951 г.; издание содержит только серии 1—18), а также Phil. Mag., т. 3, 1852 г.

который, хотя ему и дано уже математическое истолкование проф. Томсоном и др., еще довольно часто считают менее определенным и строгим, чем методы, употребляемые математиками-специалистами. Из моего изложения, надеюсь, будет ясно видно, что я не задаюсь целью установить какую-нибудь физическую теорию в той области науки, в которой я не произвел почти ни одного опыта, а имею намерение только показать, каким образом непосредственным применением идей и методов Фарадея лучше всего могут быть выяснены взаимные отношения различных классов открытых им явлений. Поэтому я буду по возможности избегать всего того, что не служит непосредственной иллюстрацией методов Фарадея, или тех математических заключений, которые с ними связаны. При разработке простейших отделов я буду придерживаться не только идей, но и математических методов Фарадея ([5]). Там, где того потребует сложность предмета, я буду пользоваться аналитическими обозначениями, но при этом всегда буду стараться приспособлять их возможно ближе к ходу мысли этого исследователя.

Прежде всего мне следует выяснить и истолковать понятие «силовая линия».

Если какое-нибудь тело наэлектризовано данным образом, то маленькое заряженное положительным электричеством тельце в любом данном положении вблизи первого тела испытывает действие силы, влекущей его по определенному направлению. Если маленькое тельце в такой же степени наэлектризовано отрицательно, то оно будет испытывать действие силы той же величины, но противоположно направленной.

В совершенно той же зависимости находятся намагниченное тело и северный или южный полюсы маленького магнита. Если северный полюс испытывает действие в одну сторону, то южный—в противоположную.

Таким образом, через каждую точку пространства можно провести линию, которая представляет направление электрической или магнитной силы, т. е. той силы, которая действует на помещенную в этой точке поло-

жительно наэлектризованную частицу или на точечный северный полюс; та же линия представляет и противоположное направление силы, действующей на отрицательно наэлектризованную частицу или на южный полюс. Так как это справедливо для любой точки пространства, то, исходя из любой точки, можно провести линию таким образом, что ее направление в каждой точке будет совпадать с действующей здесь электрической или магнитной силой; такая кривая в каждой своей точке будет указывать направление этой силы и потому может быть названа *силовой линией*. Совершенно таким же образом могут быть проведены и другие силовые линии до тех пор, пока все пространство не заполнится кривыми, которые своим направлением укажут направление силы в любой точке пространства.

Этим путем мы получаем геометрическую модель физических сил, дающую повсюду *направление* силы; но необходимо еще найти метод для выражения *интенсивности* этих сил в каждой точке. Это будет достигнуто, если представлять рассматриваемые кривые не простыми линиями, но трубками с переменным сечением, по которым течет несжимаемая жидкость ([6]). Так как скорость такой жидкости обратно пропорциональна сечению трубки, то, подбирая соответствующим образом сечения, мы можем добиться того, что скорость жидкости будет изменяться по любому заданному закону. Этим приемом мы можем достичь того, что поток жидкости в трубках своей скоростью представит напряженность силы, а своим направлением — ее направление. Метод представления интенсивности силы скоростью воображаемого потока жидкости в трубке применим ко всякой системе сил; но он дает большие упрощения в частном случае сил, обратно пропорциональных квадрату расстояния, что имеет место в электрических или магнитных явлениях. В случае вполне произвольной системы сил будут, вообще говоря, существовать промежутки между трубками, в случае же электрических или магнитных сил эти трубки можно расположить так, чтобы не оставить никаких промежутков. Стенки трубок при этом сводятся к математическим поверхностям, которые определяют направление движения жидкости, непрерывно заполняющей все пространство. До сих пор исследование законов электрических и магнитных сил было принято начинать с допущения, что причиной этих явлений служат притягательные и отталкивательные силы между известными точками. Мы хотим рассмотреть тот же вопрос с другой точки зрения, более подходящей к нашим исследованиям, именно, определяя величину и направление сил, о которых идет речь, при помощи скорости и направления движения несжимаемой жидкости.

Итак, прежде всего я займусь описанием метода, который позволит наглядно представить себе движение подобной жидкости; затем я выведу следствия из некоторых выбранных условий движения, применю их к наименее сложным явлениям электричества, магнетизма и гальванизма и покажу, наконец, как с расширением этого метода и с введением другой идеи, которою мы равным образом обязаны Фарадею, можно наглядно представить законы притяжения и индуктивных действий магнитов и токов; при этом я не буду делать никаких предположений о физической природе электричества, которые выходят за пределы фактов, доказанных на опыте.

Сводя все к чисто геометрической идее движения некоторой воображаемой жидкости, я надеюсь достигнуть общности и точности и избежать тех опасностей, которые возникают при попытках с помощью преждевременной теории объяснить причины явлений. Предлагаемые мною здесь рассуждения выполнят свое назначение, если будут полезны физикам-экспериментаторам при классификации и наглядном истолковании найденных ими результатов.

Зрелая теория, в которой физические факты будут физически объяснены, будет построена теми, кто, вопрошая самое природу, сумеет найти единственно верное решение вопросов, поставленных математической теорией.

I. ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(1) Субстанции, о которой здесь идет речь, не должно приписывать ни одного свойства действительных жидкостей, кроме способности к движению и сопротивлению сжатию. На эту субстанцию не следует смотреть также, как на гипотетическую жидкость в смысле, который допускался старыми теориями для объяснения явлений. Она представляет собой исключительно совокупность фиктивных свойств, составленную с целью представить некоторые теоремы чистой математики в форме, более наглядной и с большей легкостью применимой к физическим задачам, чем форма, использующая чисто алгебраические символы. Употребление термина «жидкость» не введет нас в заблуждение, если мы будем помнить, что оно означает только воображаемую субстанцию со следующим свойством.

Любая часть жидкости, занимающая в какой-либо момент времени данный объем, в каждый последующий момент будет занимать такой же объем.

Этот закон выражает несжимаемость жидкости и дает нам удобную меру ее количества, а именно—ее объем. Единицей количества жидкости будет, следовательно, единица объема (7).

(2) Направление движения жидкости в различных точках заполняемого ею пространства будет, вообще говоря, различно, но так как это направление для каждой точки вполне определенно, мы можем представить себе, что в какой-нибудь точке начинается линия и проводится далее таким образом, что каждый ее элемент своим направлением указывает направление движения жидкости в той точке пространства, через которую она проходит. Эти линии, которые проводятся, следовательно, так, что их направление повсюду указывает направление движения жидкости, называются *линиями тока жидкости*.

Если движение жидкости *стационарно*, т. е. если направление и скорость движения в любой, определенной точке пространства не зависят от времени, эти кривые представят собой пути отдельных частиц жидкости; если, напротив, движение не стационарно, то, вообще говоря, такое заключение не будет иметь места [2]. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие случаи, когда движение жидкости стационарно.

(3) Если мы на какой-либо поверхности, пересекающей линии тока, начертим замкнутую кривую и проведем исходящие из всех ее точек линии тока, то все они образуют трубкообразную поверхность, которую мы будем называть *трубкой тока жидкости*. Так как эта поверхность образована линиями, имеющими направление движения жидкости, то ни одна частица жидкости не может пройти через нее, так что эта воображаемая поверхность является для жидкости столь же непроницаемой, как действительная трубка.

(4) Количество жидкости, протекающее в единицу времени через какое-либо поперечное сечение трубки, всегда одно и то же, где бы и как бы это сечение в трубке ни было проведено. Так как жидкость несжимаема и никакая часть ее не может пройти через боковую стенку трубки, то само собой понятно, что количество жидкости, вытекающее из любого последующего поперечного сечения, будет равно количеству жидкости, втекающему в какое-либо предыдущее сечение.

Если трубка такова, что в единицу времени через каждое поперечное сечение ее проходит единица объема жидкости, то мы будем называть ее *единичной трубкой тока жидкости*.

(5) Положив в основание какие-либо единицы из числа различных конечных единиц, с которыми мы впоследствии ознакомимся, мы получим также конечное число единичных трубок или поверхностей, представляющих движение жидкости в терминах упомянутых единиц. Но, для того чтобы определить движение жидкости в любой ее точке, следовало бы провести бесконечное число линий на бесконечно малых друг от друга расстояниях. Так как описание такой системы линий повлекло бы за собой беспрестанное обращение к теории пределов, то я предпочитаю эти расстояния

выбирать сначала в соответствии с принятыми единицами *), а затем уже я могу принять самую единицу сколько угодно малой, приравнивая ее малой дроби какой-либо из стандартных единиц.

(6) Чтобы определить движение жидкости при помощи системы единичных трубок, вообразим какую-нибудь неподвижную поверхность, пересекающую все линии тока; проведем на ней одну систему кривых, не пересекающихся между собой, и другую систему кривых, пересекающих кривые первой системы. Расположение этих кривых должно быть таково, чтобы через каждую четырехстороннюю площадку, образованную взаимным пересечением кривых обеих систем, протекала в единицу времени единица жидкости. Через каждую точку кривой первой системы проведем линию тока; эти линии образуют поверхность, через которую жидкость протекать не может. Подобные же непроницаемые поверхности могут быть проведены и через все остальные кривые первой системы. Таким же образом через кривые второй системы может быть проведена вторая система непроницаемых поверхностей, которая своим пересечением с первой системой образует четырехсторонние трубки; согласно предыдущему обозначению это будут трубки тока. Так как через каждую четырехстороннюю площадку той поверхности, которая пересекает наши трубки, в единицу времени протекает единица количества жидкости, то через любое поперечное сечение любой трубки в единицу времени будет протекать равным образом единица количества жидкости. Движение жидкости в любой части заполняемого ею пространства вполне определено этой системой единичных трубок, так как направление движения в каждой точке есть направление проходящей через нее единичной трубки, а скорость обратно пропорциональна площади поперечного сечения единичной трубки в той же точке.

*) Чтобы через каждую трубку протекала в единицу времени единица количества жидкости. (*Прим. перев.*)

(7) Мы получили, следовательно, геометрическое построение, которое вполне определяет движение жидкости, разделяя заполняемое ею пространство на систему единичных трубок. Теперь рассмотрим, какую пользу оно оказывает при изучении различных видов движения жидкости.

Единичная трубка может быть или замкнутой или начинаться и оканчиваться в различных точках. В последнем случае эти точки могут лежать либо на пограничных поверхностях, либо внутри пространства, в котором происходит исследуемое движение. В первом случае в трубке происходит непрерывная циркуляция жидкости, во втором же случае жидкость на одном конце втекает в трубку, а на другом вытекает из нее. Если концы трубок лежат на пограничных поверхностях, то можно предположить, что жидкость на одной стороне постоянно восполняется из неизвестного источника, а на другой втекает в неизвестный резервуар; если же начало или конец трубки находится внутри рассматриваемого пространства, то мы должны представлять себе, что жидкость непрерывно восполняется *источником*, находящимся внутри рассматриваемого пространства, который в состоянии создавать и испускать в единицу времени единицу жидкости, а затем поглощается *стоком*, который может непрерывно принимать и уничтожать то же самое количество жидкости.

В представлении о наличии источников и стоков, в которых жидкость создается или уничтожается, нет никакого противоречия, так как свойства жидкости вполне зависят от нашего произвола. Как ничто не мешает нам представлять ее себе абсолютно несжимаемой, так ничто не мешает нам предположить, что она в известных местах создается из ничего, в других снова сводится к ничему [3]. Места, где жидкость создается, мы будем называть *источниками*, и их интенсивность будет определяться числом единиц количества жидкости, производимой ими в единицу времени. Те же места, где жидкость уничтожается, мы будем называть *стоками*, и их интенсивность будем определять числом

единиц количества жидкости, поглощаемой в единицу времени. И те и другие места мы будем иногда равным образом называть *источниками*, причем источник будет стоком, если его знак отрицателен ([8]).

(8) Очевидно, что количество жидкости, протекающей через какую-либо неподвижную поверхность, измеряется числом пересекающих ее единичных трубок, а направление течения жидкости определяется направлением трубок. Если поверхность замкнута, то каждая трубка, оба конца которой лежат на одной и той же стороне этой поверхности, должна пересечь ее столько же раз в одном направлении, сколько и в другом; поэтому она должна столько же жидкости вынести из заключенного внутри замкнутой поверхности пространства, сколько и внести в него. Трубка, которая начинается внутри поверхности и оканчивается вне ее, вынесет в единицу времени единицу количества жидкости; если же она, наоборот, входит в поверхность и заканчивается внутри нее, то она внесет ровно такое же количество жидкости. Таким образом, чтобы подсчитать количество жидкости, вытекающей в единицу времени из заключенного внутри поверхности пространства, мы должны вычесть число трубок, оканчивающихся внутри поверхности, из числа тех, которые там начинаются. Если результат отрицателен, жидкость в целом будет втекать внутрь объема.

Если начало единичной трубки мы будем называть единичным источником, а ее конец единичным стоком, то избыток жидкости, создаваемый внутри поверхности, выразится разностью между числом единичных источников и числом единичных стоков, лежащих внутри поверхности. Это количество в силу несжимаемости жидкости должно вытечь из заключенного внутри поверхности пространства.

Когда мы говорим об единичных трубках, источниках и стоках, то мы всегда должны помнить то, что было установлено в (5) относительно величины единицы и относительно того, каким образом, уменьшая размеры и увеличивая число трубок, мы можем располагать их в соответствии с самым сложным законом распределения скоростей.

(9) Представим себе два различных случая течения жидкости. В каждом из них пусть заданы направление и скорость жидкости для любой точки. Вообразим себе теперь еще третий случай, для которого направление и скорость жидкости представляются в каждой точке равнодействующей скоростей в той же точке в двух предшествующих случаях. Тогда количество жидкости, протекающее через данную поверхность в третьем случае, равно алгебраической сумме обоих количеств жидкости, протекающих через ту же поверхность в обоих предыдущих случаях, так как количество жидкости, протекающее через какой-либо элемент поверхности, пропорционально проекции скорости на нормаль к этому элементу поверхности, а проекция равнодействующей равна сумме проекций слагающих.

Поэтому число единичных трубок, выходящих в третьем случае из поверхности, равно алгебраической сумме числа трубок, выходивших из поверхности в обоих предыдущих случаях. Точно так же и число источников в каком-нибудь замкнутом пространстве в третьем случае будет равно алгебраической сумме их чисел в обоих предыдущих случаях. Так как замкнутое пространство может быть принято сколь угодно малым, то ясно, что распределение источников и стоков жидкости в третьем случае мы получим простым наложением распределений в двух первых случаях.

II. ТЕОРИЯ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕВЕСОМОЙ, НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

(10) Мы вводим допущение, что жидкость не обладает инерцией и что ее движению противодействует некоторая сила [4], связанная с сопротивлением среды, в которой движется поток жидкости. Сопротивление это зависит от природы среды и, вообще говоря, также от направления движения жидкости и от ее скорости [5].

Прежде всего мы ограничиваемся только случаем изотропной среды, сопротивление которой во всех направлениях одинаково. В этом случае мы примем такой закон.

Каждая часть жидкости, движущаяся в сопротивляющейся среде, подвержена действию замедляющей силы, пропорциональной ее скорости и направленной против движения ([9]).

Если мы обозначим скорость через v, то сопротивление представит собой силу kv, действующую на единицу объема жидкости в направлении, прямо противоположном направлению движения *). Таким образом, чтобы скорость оставалась постоянной, необходимо, чтобы давление позади каждой части жидкости было больше, чем впереди нее, настолько, чтобы разность давлений противодействовала сопротивлению. Представим себе единичный кубический объем жидкости [который по (5) может быть взят сколь угодно малым], движущийся в направлении, нормальном к двум его граням. Он будет испытывать сопротивление kv, а потому и разность действующих на обе грани давлений будет также kv, так что вдоль каждой линии тока давление будет убывать на протяжении единицы длины на величину kv [6]. На двух концах отрезка линии тока длиной h разность давлений, следовательно, будет равна kvh ([10]).

(11) Так как мы предполагаем, что давление в жидкости изменяется непрерывно, все точки, в которых оно имеет данное значение p, лежат на определенной поверхности, которую мы назовем *поверхностью* (p) *равного давления*. Если мы построим в жидкости ряд таких поверхностей, которые соответствуют давлениям 0, 1, 2, 3 и т. д., то номер поверхности представит соответствующее ей давление и сами эти поверхности могут быть обозначены, как поверхности 0, 1, 2, 3 и т. д. За единицу давления мы принимаем такое, которое

*) k—коэффициент сопротивления рассматриваемой среды. (*Прим. перев.*)

производится единицей силы на единицу поверхности. Поэтому, чтобы уменьшить согласно (5) единицу давления, мы должны соответственно уменьшить единицу силы.

(12) Легко видеть, что рассматриваемые поверхности равного давления должны быть перпендикулярны к линиям тока. В самом деле, если бы жидкость двигалась по любому другому направлению, она испытывала бы сопротивление, которое не могло бы быть уравновешено никакой разностью давлений [7]. (Мы должны помнить, что рассматриваемая здесь жидкость вовсе не обладает инерцией или массой и что она обладает только теми свойствами, которые мы сами ей приписали, так что сопротивления и давления—это ее единственные механические свойства.) Итак, кроме двух систем поверхностей, образующих своим взаимным пересечением систему единичных трубок, мы имеем еще систему поверхностей равного давления, которая пересекает обе предыдущие системы под прямым углом. Пусть h есть расстояние между двумя соседними поверхностями равного давления вдоль линии тока; так как разность давлений равна единице, то

$$kvh = 1,$$

что дает соотношение между v и h, так что одна из этих величин может быть найдена, когда известна другая. Пусть s—площадь поперечного сечения единичной трубки, взятого на какой-нибудь поверхности равного давления; тогда по определению единичной трубки мы имеем:

$$vs = 1$$

и из последнего уравнения находим:

$$s = kh.$$

(13) Поверхности равного давления вырезают из единичных трубок элементы объема длины h и поперечного сечения s. Все эти элементы объема единичных

трубок мы назовем *единичными клетками*. В каждой из них единица объема жидкости переходит в единицу времени от давления p к давлению $p - 1$ и потому преодолевает за это время единицу сопротивления. Работа, израсходованная на это жидкостью за единицу времени для каждой единичной клетки, также равна единице.

(14) Если даны поверхности равного давления, то, пользуясь ими, можно определить направление и величину скорости жидкости в каждой точке, а следовательно, можно построить всю систему единичных трубок, отыскать их начало и конец и отметить расположение источников и стоков, т. е. мест порождения и исчезновения жидкости. Но, для того чтобы доказать обратное положение, т. е. показать, что давление в каждой точке вполне определено, если даны положение и интенсивность всех источников, мы должны рассмотреть несколько вспомогательных теорем.

(15) Пусть в двух различных случаях дано давление жидкости для каждой точки пространства и пусть в третьем случае давление в каждой точке равно сумме давлений, имеющих место в первых двух случаях для той же точки; тогда и скорость жидкости в третьем случае для любой точки будет равнодействующей скоростей, имеющих место в первых двух случаях, и распределение источников в третьем случае представится простым наложением распределений источников в двух первых случаях.

В самом деле, слагающая скорости в любом направлении пропорциональна понижению давления, приходящемуся на единицу длины в том же направлении. Поэтому если мы сложим две системы давлений, то понижения давлений в любом направлении будут также просто суммироваться, а отсюда также и компоненты скорости жидкости в каждом направлении. Таким образом, и общая скорость жидкости в третьем случае будет для каждой точки равнодействующей обеих скоростей, которые имеют место в первых двух случаях для той же точки.

Отсюда по (9) следует, что в третьем случае количество жидкости, протекающее через какую-либо неподвижную поверхность, равно сумме количеств жидкости, протекающих через ту же поверхность в двух первых случаях, и что источники обеих первых систем простым наложением дают источники третьей системы.

Само собой понятно, что если давление в третьей системе равно разности соответствующих давлений в первых двух системах, то распределение источников третьей системы найдем, прибавив все источники второй системы с обратными знаками к источникам первой системы ([11]).

(16) Если в каждой точке замкнутой поверхности давление равно одной и той же величине p и если в пространстве, заключенном внутри нее, нет ни источников, ни стоков, то внутри этой поверхности жидкость находится в покое и давление повсюду постоянно и равно p.

В самом деле, если бы в пространстве, ограниченном нашей поверхностью, происходило какое-либо движение жидкости, то там же должны были бы иметься и трубки тока, которые необходимо либо замыкались бы в самих себе, либо оканчивались или внутри пространства, ограниченного поверхностью, или на ней самой. Но так как жидкость течет от мест большего давления к местам меньшего давления, то поток жидкости не может итти по замкнутому пути; так как далее внутри ограниченного поверхностью пространства нет ни источников, ни стоков, то трубки не могут там ни начинаться, ни оканчиваться; наконец, так как давление во всех точках поверхности одно и то же, жидкость никогда не может течь по такой трубке, оба конца которой лежат на поверхности. Так как во всем заключенном внутри поверхности пространстве не происходит никакого движения жидкости, то не может существовать нигде и разности давлений, ибо она сейчас же вызвала бы потоки жидкости. Таким образом, давление должно быть повсюду равно тому давлению p, которое имеет место на самой пограничной поверхности.

(17) Если заданы давление в каждой точке замкнутой поверхности и распределение источников, лежащих в пространстве, заключенном внутри этой поверхности, то в нем может существовать лишь единственное распределение давлений.

В самом деле, если бы были возможны два различных распределения давлений, удовлетворяющих приведенным условиям, то мы могли бы из них вывести третье распределение, в котором давление для любой точки представлялось бы разностью давлений, имеющих место для той же точки в двух предыдущих случаях. Тогда в этом третьем случае по (15) давление на всей пограничной поверхности было бы нулем, и, с другой стороны, внутри заключенного ею пространства не было бы никаких источников.

Отсюда по (16) в третьем случае давление для любой точки рассматриваемого пространства должно быть нулем; но оно представляется разностью давлений в обоих предыдущих случаях, а так как эта разность повсюду равна нулю, то и не может вообще существовать двух различных распределений давлений.

(18) Рассмотрим теперь неограниченную массу жидкости, в которой имеется лишь единственный единичный источник. Предположим, что на бесконечных расстояниях от источника давление повсюду равно нулю, и определим давление в любой точке жидкости.

Из источника жидкость будет истекать симметрично по всем направлениям, и так как через каждую сферическую поверхность, имеющую центр в источнике, в единицу времени протечет единица количества жидкости, то скорость на расстоянии r от источника будет:

$$v = \frac{1}{4\pi r^2}.$$

Понижение давления на единицу длины в направлении прямой r, т. е. взятая с минусом производная от давления по r, как мы видели, равна

$$kv = \frac{k}{4\pi r^2},$$

и так как при $r \to \infty$ $p \to 0$, то

$$p = \frac{k}{4\pi r}$$

представит величину давления в какой угодно точке. Таким образом, давление обратно пропорционально расстоянию от источника.

Само собой понятно, что единичный сток обусловит равное, но противоположно направленное давление.

Источник, который образован совокупностью S единичных источников и который мы в (7) назвали источником интенсивности S, обусловит давление

$$p = \frac{kS}{4\pi r},$$

так что давление на данном расстоянии пропорционально произведению из коэффициента сопротивления k и интенсивности источника S.

(19) Если в жидкости одновременно существует несколько источников и стоков, то для определения результирующего давления нам придется только сложить все давления, вызываемые отдельными источниками и стоками. Действительно, по (15) это представит собой решение нашей задачи, которое по (17) есть единственно возможное. Таким образом, мы можем определить давление, когда дано распределение источников, а указанным в (14) методом мы можем, наоборот, определить распределение источников по данному распределению давлений [8].

(20) Представим себе теперь в пространстве какую-нибудь неподвижную поверхность, пересекающую линии тока, и докажем, что течение жидкости по одну сторону всегда может быть рассматриваемо, как обусловленное источниками, распределенными на самой поверхности, причем движение жидкости по другую сторону поверхности остается без изменения.

В самом деле, если мы построим систему единичных трубок, представляющую рассматриваемое движение, повсюду, где единичная трубка входит в поверх-

ность, поместим единичный источник, а где выходит— единичный сток, и притом сделаем нашу поверхность непроницаемой для жидкости, то движение жидкости в трубках останется таким же, как и прежде.

(21) Если в какой-либо среде, коэффициент сопротивления которой есть k, известно распределение источников, которое вызывает данную систему давлений, то, чтобы определить источники, которые произвели бы такую же систему давлений в среде, коэффициент сопротивления которой равен единице, нужно помножить только количество жидкости, производимое каждым источником, т. е. его интенсивность, на k. В самом деле, так как давление, вызываемое всяким источником, пропорционально произведению его интенсивности на коэффициент сопротивления, то, для того чтобы давление оставалось неизменным, нужно интенсивность источников увеличить в таком же отношении, в каком уменьшается коэффициент сопротивления ([12]).

(22) *Условия, которые должны быть выполнены для поверхности раздела двух сред с различными коэффициентами сопротивления* (k *и* k'). Эти условия обнаруживаются из тех соображений, что то количество жидкости, которое в какой-нибудь промежуток времени вытекает через элемент поверхности раздела из одной среды, должно в продолжение того же промежутка времени и через тот же элемент поверхности войти в другую среду и что давление на поверхности раздела не должно нигде претерпевать разрыва. Из первого условия следует, что в каждой точке поверхности раздела нормальная к этой поверхности составляющая скорости для обеих сред одна и та же, и потому производные от давления, взятые в направлении нормали к поверхности раздела по обе стороны ее, относятся между собой, как коэффициенты сопротивления. Так как далее изменение давления должно быть непрерывным, то производная от давления, взятая в любом направлении параллельно поверхности раздела, должна иметь одинаковое значение на обеих сторонах этой поверхности. Таким образом,

направление трубок тока и поверхностей равного давления испытывает на поверхности раздела прерывное изменение, определяемое следующими законами: направление каждой преломленной трубки остается в плоскости, содержащей первоначальное направление трубки и нормаль к поверхности раздела, тангенсы же углов падения и преломления относятся, как коэффициенты k и k' [9].

(23) Пусть пространство внутри данной замкнутой поверхности заполнено средой, которая отлична от окружающей среды, и пусть в каждой точке этой сложной системы дано давление, которое вызывается данным распределением источников внутри и вне рассматриваемой поверхности. Будем разыскивать такое распределение источников, которое в каждой точке однородной среды с коэффициентом сопротивления, равным единице, вызвало бы то же распределение давлений.

Построим трубки тока и повсюду, где единичная трубка вступает в ту или другую среду, поместим единичный источник, а где покидает ее—единичный сток. Если мы сделаем затем поверхность раздела непроницаемой для жидкости, весь ход явлений останется прежним.

Пусть коэффициент сопротивления внешней среды есть k, а внутренней k'; умножим интенсивность всех источников, лежащих во внешней среде (включая сюда и лежащие у поверхности раздела в этой среде), на величину k, а коэффициент сопротивления положим равным единице: при этом распределение давлений во внешней среде останется неизменным; то же самое будет справедливо и по отношению к внутренней среде, если положить ее коэффициент сопротивления равным единице, а интенсивность всех лежащих в ней источников, включая и лежащие при поверхности раздела, помножить на k' [10] ([13]).

Так как давление в каждой точке поверхности раздела по обе ее стороны одинаково, мы можем сделать эту поверхность снова проницаемой для жидкости, не изменяя этим ни потока, ни распределения давлений.

Таким образом, то распределение давлений, которое первоначально имело место в сложной среде, мы воспроизвели в однородной среде путем наложения трех систем источников. Первая из них тождественна с системой источников, лежащих вне поверхности раздела; вторая тождественна с системой источников, лежащих внутри нее, с той лишь разницей, что интенсивность каждого из первых источников оказывается помноженной на k, а каждого из вторых—на k'; третья же система источников есть та, которая лежит на самой поверхности раздела. В первоначально данном случае каждому единичному источнику на внешней стороне поверхности раздела соответствовал единичный сток на ее внутренней стороне. Но так как интенсивность каждого источника множится на k, а интенсивность стока на k', то в результате вместо единичного источника на внешней стороне поверхности раздела получается источник на поверхности раздела интенсивности $k-k'$. При помощи указанных трех систем источников данное первоначально распределение давлений может быть воспроизведено в однородной среде с коэффициентом сопротивления, равным единице.

(24) Если внутри замкнутой поверхности помещается среда без сопротивления, т. е. $k'=0$, то давление внутри поверхности, а потому и на ней самой будет постоянным; пусть оно равно p. Если в случае, когда среда внутри замкнутой поверхности такова же, как и вне ее, мы, допуская наряду с данным распределением внешних и внутренних источников еще некоторое распределение пар источников-стоков внутри поверхности, можем показать, что давление на всей пограничной поверхности будет постоянно, то получающееся таким образом распределение давления во внешней среде в соединении с равномерностью давления внутри поверхности является истинным и единственно возможным в рассматриваемом случае распределением давлений [11].

В самом деле, если бы допущением во внутренней среде различных воображаемых пар источников-стоков было бы возможно найти два различных распределения давлений, удовлетворяющих поставленным выше условиям, то, взяв разности этих давлений, мы могли бы получить третье распределение давлений, в котором давление на пограничной поверхности было бы постоянным, а внутри нее было бы столько же единичных источников, сколько и соответствующих им стоков, так что каждому количеству жидкости, притекающему к данному месту поверхности, должно было бы соответствовать равное количество, вытекающее из другого места.

При образовании третьей системы распределения источники во внешней среде взаимно уничтожаются, и мы получаем беспредельную среду без источников, окружающую внутреннюю среду. Давление в бесконечности равно нулю, а на поверхности раздела оно постоянно. Если при этом оно положительно, то движение жидкости из каждой точки поверхности раздела должно направляться во внешнее пространство; если же, напротив, отрицательно, жидкость повсюду будет устремляться внутрь замкнутой поверхности. Но мы доказали, что ни один из этих случаев невозможен, что, напротив, столько же жидкости должно выйти из замкнутой поверхности, сколько и войти в нее; поэтому давление внутри замкнутой поверхности при третьем распределении давлений должно быть нулем.

Таким образом, в третьем случае во всех точках поверхности, ограничивающей внешнюю среду, давление равно нулю, а так как во внешней среде нет совсем источников, то по (16) давление в ней повсюду равно нулю.

Затем, так как на пограничной поверхности внутренней среды давление также равно нулю и внутри нее не существует сопротивления, то и во внутренней среде давление повсюду будет нулем; но давление в третьем случае равно разности давлений в обоих данных случаях, поэтому эти давления равны между собой; следовательно, возможно лишь единственное распределе-

ние давлений, а именно то, которое обусловливается воображаемым распределением источников и стоков.

(25) Если сопротивление во внутренней среде бесконечно велико, то жидкость не будет ни втекать в нее, ни вытекать из нее. Поэтому пограничную поверхность можно рассматривать как непроницаемую для жидкости, и трубки тока будут обходить эту поверхность, не пересекая ее.

Распределение давлений во внешней среде найдется тогда следующим образом: положим коэффициент сопротивления внутренней среды равным коэффициенту сопротивления внешней среды и прибавим (что всегда возможно) к данным источникам во внешней среде новые источники во внутренней с таким расчетом, чтобы через поверхность раздела жидкость нигде не протекала. Действительно, в силу этого последнего обстоятельства трубки тока внутри поверхности являются совершенно независимыми от внешних и могут быть изъяты без нарушения внешнего движения.

(26) Если пространство, занимаемое внутренней средой, весьма мало и разность коэффициентов сопротивления обеих сред также мала, то расположение единичных трубок мало отлично от того, которое имело бы место в том случае, если бы внешняя среда заполняла все пространство.

При этом допущении мы легко можем вычислить то изменение, которое вносится небольшим различием между внутренней средой и внешней (мы вычислим сначала поток, который был бы вызван данными источниками, если бы коэффициент сопротивления повсюду был равен k). Там, где какая-либо единичная трубка вступает во внутреннюю среду, мы предполагаем еще один источник интенсивности

$$\frac{k'-k}{k};$$

там же, где подобная трубка выходит из внутренней среды, мы воображаем себе еще один сток той же интенсивности. Если затем мы вычислим распределение

давлений таким образом, как если бы коэффициент сопротивления в обеих средах имел одно и то же значение, равное k, то получим с большим приближением к истине распределение давлений; если к вновь полученному потоку мы еще раз приложим тот же прием вычисления, то получим вторую степень приближения, и т. д.

(27) В том случае, когда величина коэффициента сопротивления, вместо того, чтобы изменяться скачком от одной точки к другой, изменяется непрерывно, мы можем оперировать с нашей средой так, как если бы она состояла из тонких слоев, из которых каждый имеет свой постоянный коэффициент сопротивления. Распределяя соответственным образом на поверхности раздела этих слоев источники, мы можем свести настоящую задачу, как и в (23), к тому случаю, когда коэффициент сопротивления повсюду равен единице. Источники распределятся тогда непрерывно по всей среде, и там, где жидкость будет течь от места с меньшим коэффициентом сопротивления к месту с бо́льшим коэффициентом, окажутся источники; стоки же будут там, где имеется течение противоположного направления.

(28) До сих пор мы предполагали, что коэффициент сопротивления в данном месте среды не зависит от направления потока, но мы могли бы вообразить себе и такой случай, когда коэффициент сопротивления в различных направлениях различен. В таких случаях линии тока не будут, вообще говоря, перпендикулярны к поверхностям равного давления. Пусть a, b, c будут слагающие скорости потока в какой-нибудь точке, α, β, γ — составляющие сопротивления в той же точке. Тогда между этими шестью величинами будет существовать следующая система трех линейных уравнений, которые для удобства назовем «*уравнениями проводимости*»:

$$a = P_1\alpha + Q_3\beta + R_2\gamma,$$
$$b = P_2\beta + Q_1\gamma + R_3\alpha,$$
$$c = P_3\gamma + Q_2\alpha + R_1\beta.$$

В эти уравнения входят девять независимых коэффициентов, определяющих проводимость. Для упрощения уравнений положим:

$$Q_1+R_1=2S_1, \quad Q_1-R_1=2lT, \ldots,$$

где

$$4T^2=(Q_1-R_1)^2+(Q_2-R_2)^2+(Q_3-R_3)^2,$$

и l, m, n суть направляющие косинусы какого-либо фиксированного в пространстве направления. Тогда наши уравнения проводимости переходят в такие:

$$a=P_1\alpha+S_3\beta+S_2\gamma+(n\beta-m\gamma)\,T,$$
$$b=P_2\beta+S_1\gamma+S_3\alpha+(l\gamma-n\alpha)\,T,$$
$$c=P_3\gamma+S_2\alpha+S_1\beta+(m\alpha-l\beta)\,T.$$

При помощи известного преобразования координат мы можем исключить коэффициенты S и получим [12]:

$$a=P'_1\alpha+(n'\beta-m'\gamma)\,T,$$
$$b=P'_2\beta+(l'\gamma-n'\alpha)\,T,$$
$$c=P'_3\gamma+(m'\alpha-l'\beta)\,T,$$

где l', m', n' суть направляющие косинусы выбранного фиксированного направления относительно новых осей координат. Если мы положим:

$$\alpha=\frac{dp}{dx}, \quad \beta=\frac{dp}{dy}, \quad \gamma=\frac{dp}{dz}\ [13],$$

то уравнение непрерывности

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0$$

переходит в

$$P'_1\frac{d^2p}{dx^2}+P'_2\frac{d^2p}{dy^2}+P'_3\frac{d^2p}{dz^2}=0,$$

и если еще положим:

$$x=\xi\sqrt{P'_1}, \quad y=\eta\sqrt{P'_2}, \quad z=\zeta\sqrt{P'_3},$$

то получаем обычное уравнение проводимости:

$$\frac{d^2p}{d\xi^2}+\frac{d^2p}{d\eta^2}+\frac{d^2p}{d\zeta^2}=0.$$

Отсюда ясно, что распределение давления не меняется с введением коэффициента T [14]. Проф. Томсон показал, как следует представлять себе субстанцию, для которой коэффициент T выражает свойство, связанное с некоторой осью, которая в отличие от осей P'_1, P'_2, P'_3 диполярна (т. е. ее отрицательное направление не тождественно положительному направлению)

Ближайшие исследования этих уравнений проводимости можно найти в работе проф. Стокса «О теплопроводности кристаллов» *) и, кроме того, в работе проф. Томсона «О динамической теории теплоты», ч. V **).

Все, что было доказано в (14), (15), (16), (17) относительно наложения различных распределений давлений, а также единственности распределения давлений при заданном распределении источников, очевидно, остается в силе и в том случае, когда сопротивление изменяется непрерывно и различно по разным направлениям. Действительно, более внимательное рассмотрение приведенного доказательства показывает, что сила доказательства нисколько не изменяется от вводимых при этом обобщений.

(29) Мы можем теперь приступить к доказательству некоторых теорем, справедливых для самого общего случая, когда коэффициент сопротивления среды в различных направлениях различен и изменяется от одной точки к другой. Если распределение давлений известно, то при помощи данного в (28) метода мы можем построить поверхности равного давления, трубки тока, источники и стоки. Так как в каждой из клеток, на которые разбиваются единичные трубки поверхностями

*) Cambr. and Dubl. Math. Journ., ноябрь 1851 г., а также Math. and Phys. Pap. II.

**) Transactions of Royal Society of Edinbourgh, т. XXI, часть I, см. также Math. and Phys. Pap. I, стр. 274.

равного давления, в единицу времени единица количества жидкости переходит от давления p к давлению $p-1$, то очевидно, что в каждой клетке в единицу времени на преодоление сопротивления тратится единица работы.

Число клеток в каждой единичной трубке определяется числом пересекающих ее поверхностей равного давления. Если давление в начале единичной трубки равно p, а в конце p', то число клеток в ней есть $p-p'$. Таким образом, если бы трубка простиралась от источника до места, где давление равно нулю, то число клеток в этом случае было бы p, если же, наоборот, она простиралась бы от стока (где давление равно $-p'$) до места, где давление равно нулю, то число клеток было бы p', и истинное число клеток выразилось бы разностью $p-p'$.

Если поэтому давление в каком-нибудь источнике интенсивности S, из которого, следовательно, выходит S единичных трубок, равно p, то число клеток, обусловливаемых этим источником, равно Sp. Но если S' единичных трубок оканчивается в стоке, в котором существует давление p', то надо из полученного раньше числа вычесть $S'p'$. Так как теперь всякий сток мы можем рассматривать как отрицательный источник, то условимся характеризовать место возникновения S единичных трубок числом S, а место поглощения S' единичных трубок числом $-S'$, тогда число клеток системы вообще выразится через $\sum Sp$, причем сумма распространяется на все числа, характеризующие все наши источники [15].

(30) К тому же выводу можно притти, принимая во внимание, что в каждой клетке в единицу времени совершается единица работы. Из каждого источника интенсивности S за единицу времени в заполненное жидкостью пространство будет против давления p вгоняться S единиц жидкости, так что работа, совершенная жидкостью для преодоления сопротивления, будет равна Sp. В каждом стоке, где оканчиваются S' единичных трубок, в единицу времени под давлением p' уничтожается S' единиц жидкости, так что работа, сообщенная давлением жидкости, будет $S'p'$. Таким образом, полная работа, совершенная жидкостью, будет:

$$W=\sum Sp-\sum S'p',$$

или, так как мы условились стоки рассматривать как отрицательные источники [16],

$$W=\sum (Sp).$$

(31) Пусть S есть интенсивность источника, расположенного в какой-нибудь среде, и p — давление, вызываемое этим источником в какой-нибудь точке; если мы наложим на этот источник другой, равный ему, то давление повсюду удвоится, и таким образом мы найдем последовательным наложением, что источник nS обусловливает давление np, или общая величина давления, вызываемого каким-нибудь источником в каком-нибудь месте, пропорциональна интенсивности этого источника. Мы выразим это уравнением

$$p=RS,$$

где R — коэффициент, зависящий от природы среды, от положения как источника, так и той точки, для которой ищется давление. В случае безграничной однородной изотропной среды, коэффициент сопротивления которой есть k, мы имеем:

$$p=\frac{kS}{4\pi r}.$$

Следовательно,

$$R=\frac{k}{4\pi r}.$$

Величина R может быть названа полным коэффициентом сопротивления между источником и данной точкой. В случае произвольного числа источников мы имеем вообще

$$p=\sum RS.$$

(32) Пусть в какой-нибудь однородной изотропной среде давление, вызываемое в какой-либо точке P источником S, есть

$$p = \frac{kS}{4\pi r}.$$

Если в той же точке P находится второй источник S', то

$$S'p = \frac{kSS'}{4\pi r} = Sp',$$

причем p' представляет собой давление, вызываемое источником S' в том месте пространства, где находится S. Таким образом, если имеются две системы источников $\sum S$ и $\sum S'$ и давление, вызываемое первой системой, есть p, а второй p', то

$$\sum (S'p) = \sum (Sp'),$$

так как каждому члену $S'p$ первой суммы соответствует равный член Sp' второй.

(33) Если в однородной изотропной среде поток жидкости повсюду параллелен какой-нибудь неизменной плоскости, то поверхности равного давления будут расположены перпендикулярно к ней. Если мы представим себе две параллельные плоскости на расстоянии k одна от другой, то пространство, заключающееся между ними, можно разделить перпендикулярными к ним цилиндрическими поверхностями на единичные трубки и они вместе с поверхностями равного давления разделят это пространство на единичные клетки, одинаковые в длину и ширину. В самом деле, если h есть расстояние между двумя последовательными поверхностями равного давления и s есть площадь поперечного сечения единичной трубки, то по (12) $s = kh$.

Но s представляет собой произведение ширины на глубину, а последняя есть k, следовательно, первая равна h, т. е. равна длине.

Если две системы плоских кривых взаимно пересекаются под прямым углом, так что разделяют плоскость на малые квадраты, то, воображая себе вторую плоскость на расстоянии k от первой и строя перпендикулярные к ней цилиндрические поверхности, основаниями которых будут наши плоские кривые, мы образуем систему клеток, одинаково удовлетворяющую условиям нашей задачи, будет ли жидкость течь вдоль первой системы пересекающихся плоских кривых или вдоль второй *).

Применение понятия силовых линий

Теперь я должен показать, какие изменения следует внести в описанное выше представление о линиях тока, чтобы применить его к теории статического электричества, постоянного магнетизма, магнитной индукции и стационарного электрического тока; законы электромагнетизма я рассмотрю отдельно.

Я предполагаю, что обычное допущение о взаимодействии двух противоположных электрических субстанций представляет собой описание явлений статического электричества. Если мы назовем одну из этих субстанций положительным, а другую отрицательным электричеством, то каждые две частицы электричества отталкивают друг друга с силой, которая измеряется произведением масс этих частиц, разделенным на квадрат расстояния между ними.

В (18) мы нашли, что скорость нашей воображаемой жидкости, вызываемая источником S на расстоянии r от него, обратно пропорциональна величине r^2. Посмотрим теперь, что произойдет, если мы заменим каждую частицу положительного электричества подобным источником. Скорость, вызываемая каждым источником, будет пропорциональна действию замещенной электрической частицы, и результирующая скорость

*) См. W. Thomson, Cambr. and Dubl. Math. Journ., т. III, стр. 286, май 1843 г. или Math. and Phys. Pap. I, стр. 22.

потока, обусловленная в каком-нибудь месте всеми источниками, будет пропорциональна результирующему действию всех электрических частиц. Далее мы найдем результирующее давление, складывая давления, вызываемые данными источниками; поэтому слагающая результирующей скорости потока по данному направлению пропорциональна отрицательной производной от давления, взятой по этому направлению; та же слагающая пропорциональна слагающей результирующего действия электрических частиц по тому же направлению.

Так как слагающая силы по какому-нибудь направлению в электрической задаче пропорциональна отрицательной производной от давления по этому направлению в нашей воображаемой задаче и значения постоянных в воображаемой задаче могут быть выбраны произвольно, то может быть достигнуто числовое равенство слагающей силы по какому угодно направлению и отрицательной производной от давления, взятой по тому же направлению, или

$$X = -\frac{dp}{dx}.$$

Отсюда, если V есть электрический потенциал, то

$$dV = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -dp,$$

а так как при бесконечном удалении $V = p = 0$, то $V = -p$.

В электрической задаче (если мы обозначим через dm одну из действующих электрических масс) мы имеем:

$$V = -\sum\left(\frac{dm}{r}\right),$$

в нашей жидкости

$$p = \sum \frac{kS}{4\pi r},$$

следовательно,

$$S = \frac{4\pi}{k}\,dm.$$

Если мы предположим, что k очень велико, то количество жидкости, которое должно быть доставляемо каждым источником для поддержания давления, очень мало.

Потенциал действия какой-либо системы электрических масс на самое себя представляется в виде

$$\sum p\,dm = \frac{k}{4\pi}\sum pS = \frac{k}{4\pi}W.$$

Если $\sum dm$ и $\sum dm'$ — две системы электрических масс, а p и p' — соответствующие им потенциалы, то по (32)

$$\sum (p\,dm') = \frac{k}{4\pi}\sum (pS') = \frac{k}{4\pi}\sum (p'S) = \sum (p'dm),$$

т. е. потенциал первой системы на вторую равен потенциалу второй на первую. Таким образом, аналогия между задачами электростатики и течения жидкостей может быть выражена следующими уравнениями:

$$V = -p,$$
$$X = -\frac{dp}{dx} = ku,$$
$$dm = \frac{k}{4\pi}S.$$

Полный электрический потенциал есть

$$-\sum V\,dm = \frac{kW}{4\pi},$$

где W есть работа, совершаемая жидкостью при преодолении сопротивления.

Силовые линии суть единичные трубки потока жидкости, и они могут быть численно определены при помощи этих трубок [17].

Теория диэлектриков

Электрическое влияние, действующее на какой-нибудь отдаленный проводник, зависит не только от распределения электричества на оказывающих влияние телах и от формы и положения подверженного влия-

нию проводника, но и от природы промежуточной среды, или диэлектрика. В одиннадцатой серии своих «Экспериментальных исследований» Фарадей отмечает это обстоятельство, говоря, что различные вещества обладают *различной индуктивной способностью* или что они проводят линии электрического влияния в различной степени. В принятой нами аналогии с жидкость , движущейся в среде, которая оказывает этому движению в различных местах различное сопротивление, мы имеем образ диэлектрика, который тем лучше проводит фарадеевские силовые линии (линии индукции), а следовательно, имеет тем большую диэлектрическую постоянную, чем меньше оказываемое сопротивление.

Из (23) ясно, что в этом случае на поверхности диэлектрика всегда будет существовать некоторое кажущееся распределение электричества, а именно, отрицательного там, где силовые линии входят, и положительного, где они выходят. В случае движения жидкости мы не имеем на поверхности действительных источников, но мы их вводим только как вспомогательное средство для вычисления. Поверхность диэлектрика в действительности, быть может, также не заряжена свободным электричеством, и только прерывность свойств среды на границе выражается кажущимся присутствием такого заряда.

Если бы диэлектрик проводил силовые линии хуже, чем окружающая его среда, то мы получили бы прямо противоположный эффект, именно: положительное электричество там, где входят силовые линии, а отрицательное там, где они выходят.

Если проводимость диэлектрика совершенная или для малых количеств электричества, с которыми нам приходится иметь дело, почти совершенная, то мы имеем случай, рассмотренный в (24). В этом случае диэлектрик можно рассматривать как проводник, его поверхность как эквипотенциальную поверхность, а результирующую электрическую силу непосредственно у этой поверхности нормальной к ней [18].

Теория постоянных магнитов

Можно представить себе, что каждый магнит состоит из большого числа элементарных намагниченных частиц, из которых каждая имеет свой собственный северный и южный полюсы. Взаимодействие двух полюсов магнита должно происходить по тем же законам, как и взаимодействие двух частиц электричества. Поэтому представление о силовых линиях может быть применено также и к магнетизму, и его теория точно так же, как электростатика, может быть иллюстрирована при помощи движущейся жидкости. Здесь, однако, исследованию предстоит решение вопроса, каким образом единичные клетки в движении жидкости могут представить полярность элементарных магнитов. Единица количества жидкости втекает через одну сторону каждой клетки и вытекает через противоположную; таким образом, относительно всей остальной массы жидкости первая сторона клетки представляет собой сток единицы жидкости, вторая—источник. Итак, каждая клетка соответствует элементарному магниту, стороны которого покрыты соответственно равными количествами северного и южного магнетизма. Если каждая клетка представляет собой часть непрерывной системы клеток, то жидкость, вытекающая из одной клетки, будет втекать в последующую и т. д., так что наши источники можно будет переместить с концов клеток на концы единичных трубок.

Если все единичные трубки начинаются и оканчиваются на поверхности системы клеток, то источники будут лежать только на этой поверхности; поэтому для магнита, в котором распределение магнетизма есть так называемое соленоидальное, или трубчатое [19], весь свободный магнетизм лежит на поверхности *).

---

*) См. «Математическую теорию магнетизма» проф. В. Томсона, гл. III и V, Phil. Trans. (1851). См. также Royal Soc. Proc., 20 июня 1850 г. и Pap. on Electric. and Magn., 1, стр. 378.

Теория парамагнитной и диамагнитной индукции

Фарадей*) показал, что поведение парамагнитных и диамагнитных тел в магнитном поле можно объяснить, принимая, что парамагнитные тела проводят силовые линии [линии индукции] лучше, а диамагнитные хуже, чем окружающая среда. Применяя указанные в (23) и (26) положения, мы будем допускать, что источники представляют собой северный магнетизм, а стоки—южный. В таком случае, если парамагнитное тело находится вблизи северного полюса, то силовые линии в местах входа их внутрь этого тела произведут кажущееся накопление южного магнетизма, а в местах выхода из него—такое же накопление северного магнетизма. Так как количества противоположных магнетизмов равны, но южный магнетизм расположен к северному полюсу ближе, чем магнетизм северный, то результирующей силой будет притяжение. Если, наоборот, тело диамагнитно, т. е. проводит силовые линии хуже, чем окружающая среда, то северный магнетизм нужно считать там, где силовые линии входят в более плохой проводник, а южный там, где они выходят, так что в результате произойдет отталкивание.

Мы можем получить более общий закон, принимая во внимание, что потенциал всей системы пропорционален работе, совершаемой жидкостью при преодолении сопротивления. Введение второй среды увеличивает или уменьшает совершаемую работу, смотря по тому, оказывает ли она большее или меньшее сопротивление сравнительно с первой средой. Это увеличение или уменьшение пропорционально квадрату скорости потока жидкости.

Но по теории потенциала движущая сила, действующая в каком-либо направлении, пропорциональна отрицательной производной потенциала системы по этому направлению. Если поэтому сопротивление k' во второй среде больше сопротивления k в окружающей

*) «Exp. Res.» (3292).

среде, то действует сила, направленная от мест большей результирующей силы v [напряженности поля] к местам меньшей силы, так что диамагнитные тела движутся от мест большей результирующей магнитной силы к местам меньшей *).

В парамагнитных телах $k<k'$, поэтому сила направлена от мест меньшей результирующей магнитной силы [напряженности поля] к местам большей. Так как эти результаты зависят только от отношения величин k и k', то ясно, что изменением окружающей среды можно по произволу парамагнитное тело обратить в диамагнитное.

Ясно, что мы пришли бы к тем же результатам путем вычисления, если бы предположили, что магнитная сила обладает способностью возбуждать в телах магнитную поляризацию, направление которой в парамагнитных телах *совпадает* с направлением магнитной силы, а в диамагнитных ей противоположно **). В действительности мы еще нигде не наталкивались на такие факты, которые были бы решающими для исключительного утверждения одной из трех теорий: теории силовых линий, фиктивной магнитной субстанции и индуцированной полярности. Так как теория силовых линий исходит из наиболее точных чисто теоретических положений и притом в наименьшем числе, то в последующем мы будем ее придерживаться.

Теория магнитно-кристаллической индукции

Мы переходим к развитию фарадеевской теории поведения кристаллов в магнитном поле ***). Некоторые кристаллы и вещества проводят не одинаково

*) Faraday, «Exp. Res.», (2797), (2798). См. также Thomson, Cambr. and Dubl. Math. Journ., т. II, стр. 320, май 1847 г., Pap. I, стр. 80.

**) Faraday, «Exp. Res.» (2429), (3320) См. также Weber, Pogg. Ann., т. 87, стр. 145 (1852); Tyndall, Phil. Trans., стр. 237 (1856); Phil. Mag., 4, 12, стр. 161 (1856).

***) Faraday, «Exp. Res.» (2836) и т. д.

хорошо силовые линии в различных направлениях. Поэтому такие тела, помещенные в постоянное магнитное поле, поворачиваются или стремятся повернуться в такое положение, чтобы силовые линии проходили через него с наименьшим сопротивлением. Пользуясь принципами, изложенными в (28), нетрудно вывести законы этих действий и даже, пользуясь формулами, найти в известных случаях их численную величину. Принципы индуктивной полярности и магнитных жидкостей в данном случае не так легко приводят к цели, между тем как теория силовых линий необыкновенно легко применяется к этому классу явлений.

Теория проводимости электрического тока

Развитая нами теория движения жидкости непосредственно применяется к нахождению законов стационарного электрического тока. Кроме исследования Ома сюда относятся исследования Кирхгофа *) и Квинке **) о проводимости электричества в пластинках ([14]). Здесь в согласии с обычным воззрением мы имеем дело с стационарными течениями электрической жидкости по проводящим путям, представляющим ей сопротивление, преодолеваемое электродвижущими силами, приложенными в определенных местах этих путей. Благодаря этому сопротивлению давление в различных местах пути различно. Это давление, обыкновенно называемое электрическим напряжением, оказалось физически тождественным с *потенциалом* статического электричества, чем и устанавливается связующее звено между этими двумя областями явлений. Если бы удалось произвести точное электростатическое измерение количества электричества, протекающего в том токе,

*) Kirchhoff, Pogg. Ann., т. 64, стр. 497; т. 67, стр. 344 (1845). В тексте Максвелла указаны Ann. de Chimie, XLI, 496.

**) Quincke, Pogg. Ann., т. 97, стр. 382 (1856). В тексте Максвелла указаны Ann. de Chimie, XLVII, 203.

который мы принимаем за единичный ток (измеренный электромагнитным или химическим путем), то отыскание связи между статическим и текущим электричеством было бы завершено *). До сих пор это измерение удавалось выполнить лишь приблизительно, но тем не менее мы можем утверждать, что проводимости различных веществ лишь количественно различны и что стекло и металл качественно относятся к электричеству совершенно одинаково и несходство их вытекает лишь из чрезвычайного различия их проводимостей ([15]). Таким образом, аналогия между статическим электричеством и движением жидкости выступает еще яснее, так как электрическая индукция в диэлектрике точно так же, как и в проводнике, связана с электрическим током, но в первом случае ток этот незаметен вследствие громадного сопротивления диэлектрика **).

Об электродвижущих силах

Когда стационарный ток течет по замкнутой цепи, то ясно, что кроме давления должны действовать еще какие-нибудь иные силы. В самом деле, если бы этот ток вызывался разностью давлений, то он должен был бы течь от точки наибольшего давления в обе стороны к точке наименьшего давления, между тем как на самом деле он постоянно течет в одном и том же направлении. Поэтому мы должны допустить присутствие некоторых сил, которые способны поддерживать постоянный ток в замкнутой цепи. Главнейшая из них вызывается химическим действием. Гальванический элемент или лучше поверхность раздела жидкости и цинка представляет собой место действия электродвижущей силы, которая в состоянии поддерживать ток, несмотря на сопротивление цепи. Говоря языком обыкновенной теории электричества, мы скажем, что

*) Faraday, «Exp. Res.», (371).

**) Faraday, «Exp. Res», т. III.

положительный ток течет из жидкости элемента через платину, через цепь, замыкающую элемент, через цинк и затем опять возвращается в жидкость. Если электродвижущая сила действует только у поверхности раздела между жидкостью и цинком, то напряжение электричества в жидкости должно превышать напряжение в цинке на величину, которая зависит от природы и длины цепи и от силы тока в проводнике.

Чтобы поддержать разность давлений, должна действовать электродвижущая сила, величина которой измеряется этой разностью. Если F означает электродвижущую силу, I—количество [силу] тока, или доставляемое в единицу времени количество электрических единиц, и K—величину, зависящую от длины и удельного сопротивления цепи, то

$$F = IK = p - p',$$

где p есть электрическое напряжение в жидкости, а p'—в цинке [20].

Если разомкнуть цепь в каком-либо месте, то часть ее, которая находится в соприкосновении с платиной, сохранит напряжение p, а другая—напряжение p', потому что теперь нет больше никакого тока. Таким образом, $p - p'$, или F, дает меру для напряженности тока [электродвижущей силы]. Подобное различие между количеством и напряженностью (интенсивностью) очень полезно *) и при правильном его понимании надо разуметь следующее: количество [сила] электрического тока есть то количество электричества, которое проходит в единицу времени через каждое поперечное сечение цепи; измеряется оно числом I единичных трубок, содержащихся в этом сечении. Напряженность тока [электрическая сила во всей цепи] есть его способность преодолевать сопротивление; она измеряется через F или IK, где K—полное сопротивление цепи.

*) Faraday, «Exp. Res.», т. III.

Ту же мысль о количестве и напряженности можно приложить и к случаю магнетизма *). Количество намагничения в каком-либо поперечном сечении магнита [сумма произведений всех элементов поверхности сечения на перпендикулярную к ним магнитную индукцию] измеряется числом проходящих через него силовых линий; напряженность же намагничения в том же поперечном сечении зависит как от силы сопротивления в этом сечении, так и от числа проходящих через него силовых линий. Если k—сопротивление вещества, S—площадь поперечного сечения и I—число проходящих через него силовых линий, то полная напряженность проходящего через поперечное сечение намагничения есть

$$F = I\frac{k}{S}.$$

Если намагничение вызвано только влиянием других магнитов, то, обозначив через p магнитное напряжение в какой-нибудь точке [магнитный потенциал], мы получим для всего магнитного соленоида [21]

$$F = I\int\frac{k}{S}\,dx = IK = p - p'.$$

Если соленоидально намагниченный круг замкнут, то намагничение не может быть вызвано только разностью магнитных напряжений, но должна существовать еще иная намагничивающая сила напряженности F.

Если i есть количество намагничения в какой-нибудь точке [магнитный момент единицы объема, магнитная индукция], т. е. число силовых линий, проходящих через единицу площади какого-либо проведенного через эту точку поперечного сечения соленоида, то полное количество намагничения магнитной цепи, т. е. число силовых линий, проходящих через какое-либо поперечное сечение, будет:

$$I = \sum i\,dy\,dz,$$

*) Faraday, «Exp. Res.», (2870), (3293).

где $dy\,dz$ представляет элемент поперечного сечения, и суммирование распространяется на все элементы сечения.

Напряженность намагничения в какой-нибудь точке или сила, потребная для поддержания этого намагничения [сила, действующая на единицу количества магнетизма], измеряется произведением $ki=f$, и общая напряженность намагничения магнитной цепи измеряется суммой напряженностей всех линейных элементов вдоль цепи; она равна, следовательно:

$$F=\sum(f\,dx),$$

где dx представляет линейный элемент цепи, и суммирование распространяется вдоль всей цепи.

В той же цепи мы имеем всегда $F=IK$, где K представляет собой общее сопротивление цепи, зависящее как от формы ее, так и от вещества. [При этом надо или отвлечься от рассеяния силовых линий или же включить окружающий воздух в магнитную цепь.] [22] (16).

О действии замкнутых токов на расстоянии

Математические законы притяжения и отталкивания проводников были развиты Ампером в высшей степени искусными приемами, и его выводы оправдались всеми последующими опытами.

Исходя из единственного допущения, что действие элемента одного тока на элемент другого направлено по линии их соединения и что в этом случае справедлив закон равенства действия противодействию, он вывел из простейших опытов математическое выражение рассматриваемого взаимодействия и придал ему различные крайне изящные и полезные формы. Однако следует помнить, что мы не имеем возможности производить опыты над отдельными элементами тока, а производим их всегда только с замкнутыми токами в твердых или в жидких проводниках; следовательно, из

таких опытов мы можем выводить законы взаимодействий лишь замкнутых токов. Из того факта, что формула Ампера в применении к замкнутым токам дает правильные результаты, ее пригодность для элементов тока может быть доказана лишь в том случае, если мы примем, что взаимодействие двух таких элементов происходит по линии их соединения. Хотя это допущение при современном состоянии науки весьма правдоподобно и теоретически обосновано, но, оберегая свободу исследования, мы постараемся обойтись без него и примем за исходную точку закон взаимодействия замкнутых токов как первоначально данный опытный факт.

Ампер показал, что если сложить элементы тока по правилу параллелограмма сил, то сила, исходящая от результирующего элемента тока, будет равнодействующей сил, исходящих от ее компонент, и что равные и противоположные токи производят равные и противоположные силы, так что два равных и противоположных тока взаимно нейтрализуются по своим действиям.

Он показал далее, что замкнутый ток какой угодно формы не имеет стремления поворачивать подвижный проводник, имеющий форму дуги круга, около оси, проходящей через центр этого круга и перпендикулярной к ее плоскости. Отсюда следует, что для сил, обусловливаемых замкнутой цепью, выражение $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ есть полный дифференциал.

Наконец, Ампер показал еще, что в подобных и подобно расположенных системах, обтекаемых электрическими токами одинаковой силы, результирующая сила не зависит от абсолютных размеров системы. Это доказывает, что при прочих равных условиях силы обратно пропорциональны квадрату расстояния.

Все эти выводы приводят к заключению, что взаимодействие двух замкнутых токов, из которых каждый обтекает очень малую площадку, будет таким же, как и взаимодействие двух элементарных магнитов, намагниченных перпендикулярно к плоскостям этих токов,

Направление намагничения этих эквивалентных магнитов определяется тем правилом, что ток, который должен быть эквивалентен действительному намагничению Земли, должен течь с востока на запад в направлении кажущегося движения Солнца и в обратном направлении, чтобы быть эквивалентным помещенной на Земле, свободно движущейся магнитной стрелке [течет с запада над верхней стороной стрелки к востоку].

Если некоторое число замкнутых единичных токов лежит на поверхности настолько близко друг к другу, что не остается ни одного элемента поверхности, который не обтекался бы одним из этих единичных токов, то на поверхности каждые два равных и противоположно направленных элементарных тока взаимно нейтрализуются; токи же, лежащие на границе поверхности, слагаются в один ток, обтекающий поверхность. Получается, таким образом, результат, что один замкнутый единичный ток эквивалентен покрытой маленькими замкнутыми единичными токами поверхности, ограниченной длинным контуром тока.

Отсюда следует, что действие листка, равномерно намагниченного в направлении, перпендикулярном к его поверхности, в точках, вне его лежащих, будет таким же, как и действие тока, обтекающего контур этого листка, так как каждый из элементарных токов в рассмотренном выше случае оказывает то же действие, как и ограниченный им элемент магнитного листка.

Если мы будем исследовать силовые линии [линии индукции], порождаемые замкнутым током, то найдем, что они имеют форму замкнутых кривых, которые *охватывают* ток [как одно звено цепи другое], и что полная напряженность намагничивающей силы вдоль каждой замкнутой силовой линии [ср. примечание 21] зависит только от количества электрического тока [общей силы тока, пронизывающего контур силовой линии]. Число единичных линий *) магнитной силы, порождаемых

*) Faraday, «Exp. Res.», (3122); см. также параграф 6 этой работы.

замкнутым током, зависит как от формы, так и от количества тока; число же единичных клеток [ср. (13)] в каждой замкнутой силовой линии дается числом единичных токов, которые она охватывает. В этом случае единичные клетки суть части пространства, в которых единица магнитного количества [общий магнитный момент] производится единицей намагничивающей силы. Таким образом, длина клетки обратно пропорциональна напряженности намагничивающей силы, а поперечное сечение ее обратно пропорционально количеству магнитной индукции в данной точке [магнитному моменту единицы объема] [23].

Полное число производимых данным током клеток пропорционально произведению напряженности тока на число пронизывающих его силовых линий. Если каким-нибудь изменением формы проводника число клеток может быть увеличено, то появится сила, стремящаяся произвести это изменение формы. Поэтому всегда действует сила, влекущая проводник в направлении, нормальном к силовым линиям, вследствие чего должно возрасти число силовых линий, пронизывающих контур замкнутой цепи, часть которой составляет рассматриваемый проводник.

Число клеток, производимых двумя данными токами, получается помножением числа линий магнитной индукции [24], пронизывающих каждый из контуров тока, на количество [силу] соответствующего тока. Но по (9) число линий, пронизывающих контур первого тока, представляется суммой линий, порождаемых им самим, и тех, которые пронизывали бы его контур под влиянием второго, если бы второй один был в действии. Следовательно, общее число клеток увеличивается всяким движением, увеличивающим число силовых линий, пронизывающих контур тока; сообщать же такое движение стремятся электродинамические силы. Работа сил при этом движении измеряется числом вновь возникших клеток. Из этого принципа могут быть выведены все взаимодействия замкнутых токов [25].

Электрические токи, вызываемые действием индукции

Фарадей показал *), что если проводник перемещается перпендикулярно к магнитным силовым линиям, то в нем возникает электродвижущая сила, стремящаяся возбудить электрический ток. Смотря по тому, замкнут ли проводник или разомкнут, образуется или непрерывный ток, или только напряжение. Если замкнутый проводник перемещается перпендикуля но к линиям магнитной индукции, то до тех пор, пока число силовых линий, пронизывающих контур проводника, при этом перемещении не изменяется, электродвижущие силы находятся в равновесии, и тока нет.

Таким образом, электродвижущие силы зависят от силовых линий, пересекаемых проводником при своем перемещении. Если при этом перемещении число силовых линий, пронизывающих контур проводника, возрастает, то появляется электродвижущая сила, пропорциональная этому приросту и возбуждающая ток, направленный противоположно тому току, который произвел бы эти прибавившиеся силовые линии. Если число линий магнитной индукции, пронизывающих контур проводника, при рассматриваемом перемещении возрастает, оно понижается наведенным током; если же это число при перемещении убывает, то наведенный ток его увеличивает.

Это правило вполне и точно выражает закон индукции токов: это вытекает из того обстоятельства, что электродвижущий эффект остается одинаковым, каковы бы ни были причины возрастания числа линий магнитной индукции, пронизывающих контур тока: движение ли самого проводника, других токов или каких-нибудь магнитов, или изменение силы других токов, намагничение или размагничение тел, расположенных вблизи и способных к намагничению, или, наконец, изменение силы самого тока.

*) Faraday, «Exp. Res.», (3077).

Во всех этих случаях электродвижущая сила зависит только от изменения числа линий индукции, пронизывающих контур тока *).

Напрашивается допущение, что подобная сила, зависящая от изменения числа силовых линий, обусловливается изменением некоторого состояния, которое измеряется этим числом. Можно принять, что расположенный в магнитном поле замкнутый проводник находится в известном состоянии, зависящем от действия магнитных сил. Пока состояние это остается неизменным, не происходит никакого индуктивного действия. Но как только это состояние изменяется, возникает

*) Электромагнитные силы, производящие перемещение проводника, следует строго отличать от электродвижущих сил, стремящихся вызвать электрические токи. Допустим, что в металлической массе произвольной формы течет ток, причем плотность тока внутри металла определяется законами электропроводности. Другой постоянный ток течет через второй вблизи расположенный проводник. Если оба тока одинаково направлены, то оба проводника притягиваются и приближаются один к другому, если тому не препятствуют внешние силы. Несмотря на то, что вещество проводников и притягивается, токи, течение которых внутри металла может совершаться по любому направлению, не перемещаются внутри металла, напротив того, их распределение в металлической массе остается неизменным, и ни один из проводников не возбуждает в другом электродвижущих сил, которые изменяли бы в них распределение токов.

В этом случае мы имеем дело с электромагнитными силами, действующими на массу проводников; электродвижущие же силы, которые могли бы вызвать изменение текущих в них токов, отсутствуют.

Как второй пример рассмотрим линейный проводник, который не образует замкнутой цепи, и заставим его пересекать магнитные силовые линии, или перемещая его, или изменяя магнитное поле. В этом случае в направлении проводника разовьется электродвижущая сила, которая, так как цепь не замкнута, вызовет только напряжение на ее концах, но не электрический ток. Поэтому не будет существовать никакого электромагнитного действия на массу проводника, так как такое действие без существования тока в проводнике невозможно, а возникновению тока препятствует разомкнутость цепи. Здесь мы имеем противоположный случай электродвижущей силы, действующей на электричество проводника и не сопровождаемой силой, действующей на его массу [26].

электродвижущая сила, величина и направление которой зависят только от изменения рассматриваемого состояния. В пояснение этой мысли всего лучше дословно цитировать одно место, взятое из первой серии «Экспериментальных исследований» Фарадея (параграф 60). Оно гласит: «Пока провод подвержен действию вольта-электрической или магнитно-электрической индукции, он, повидимому, находится в каком-то особом состоянии, так как сопротивляется возникновению в нем электрического тока, между тем как такой ток должен бы возникнуть, если бы проводник находился в своем обычном состоянии. С прекращением влияния провод приобретает способность порождать ток, которой при обыкновенных условиях он не обладает. Такое электрическое состояние вещества до сих пор не обращало на себя внимания, но, вероятно, оно имеет очень важное влияние на многие, чтобы не сказать на бо́льшую часть явлений, вызываемых электрическими токами. По причинам, которые скоро выяснятся, я позволил себе, посоветовавшись с различными учеными друзьями, назвать это состояние *электротоническим*».

Во второй серии своих «Экспериментальных исследований» Фарадей отверг эту идею как ненужную, находя, что все явления можно объяснить иначе, не вводя такого состояния вещества; но в своих последних исследованиях (3172, 3269) он, повидимому, все еще склоняется к тому, что в его догадке об этом новом состоянии тел кроется некоторая физическая истина.

Такая догадка ученого, столь глубоко освоившегося с природой, может иногда иметь больше значения, чем наилучшим образом обоснованный экспериментальный закон, и хотя существование рассматриваемого состояния мы не можем принимать за точно установленную физическую истину, тем не менее мы должны высоко ценить значение этой новой идеи Фарадея, способной иллюстрировать наши математические понятия.

В этом очерке я имею в виду представить фарадеевскую теорию электричества с математической точки зрения и ограничиваю свою задачу развитием тех методов, при помощи которых, по моему мнению, всего лучше можно охватить электрические явления и сделать их доступными подсчету. Я старался ввиду этого представить математические идеи в наглядной форме, пользуясь системами линий или поверхностей, а не употребляя только символы, которые и не особенно пригодны для изложения взглядов Фарадея и не вполне соответствуют природе объясняемых явлений. До сих пор мне не удалось еще разработать идею об электротоническом состоянии настолько, чтобы можно было ясно представить его природу и свойства, не прибегая к символам; поэтому в дальнейшем изложении я буду широко пользоваться алгебраическими символами и общеизвестными математическими действиями ([17]). Но я сохраняю надежду при внимательном изучении свойств упругих тел и движения вязких жидкостей найти такой метод, который позволил бы дать и для электротонического состояния некоторый механический образ, способный вести к общим заключениям *) [27].

*) Ср. проф. Вильям Томсон, «О механическом представлении электрических, магнитных и гальванических сил», Cambr. and Dubl. Math. Journ., январь 1847 г., а также Math. and Phys. Pap. I, стр. 76.