ГЛАВА IX

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

604.] Наше теоретическое исследование электродинамики мы начали с допущения, что система цепей, несущих электрические токи, является динамической системой, в которой токи могут рассматриваться как скорости и в которой координаты, соответствующие этим скоростям, не входят в уравнения движения. Из этого следует, что кинетическая энергия системы, поскольку она зависит от токов, является однородной квадратичной функцией токов, в которой коэффициенты зависят только от формы и относительного положения контуров. Допуская, что эти коэффициенты известны экспериментальным или каким-либо иным путем, мы вывели с помощью чисто динамического рассуждения законы индукции токов и электромагнитного притяжения. В этом исследовании мы ввели понятие электрокинетической энергии системы токов, электромагнитного количества движения контура и взаимного потенциала двух цепей.

Мы затем занялись изучением поля при помощи различных конфигураций вторичной цепи и, таким образом, мы пришли к концепции вектора $\mathfrak{A}$, имеющего определенную величину и направление в любой данной точке поля. Этот вектор мы назвали электромагнитным количеством движения в данной точке. Эту величину можно рассматривать как интеграл по вре-

мени от электродвижущей интенсивности, которая была бы получена в этой точке, если бы из поля были внезапно удалены все токи. Эта величина идентична с величиной, уже исследованной в параграфе 405 *), как вектор-потенциал магнитной индукции. Его составляющие, параллельные x, y и z, суть F, G и H. Электромагнитным количеством движения контура будет линейный интеграл от $\mathfrak{A}$, взятый вдоль контура.

Затем мы преобразовали линейный интеграл $\mathfrak{A}$ в поверхностный интеграл другого вектора $\mathfrak{B}$, составляющими которого являются a, b, c, и нашли, что явления индукции, вызванные движением какого-либо проводника, и явления электромагнитной силы могут быть выражены в зависимости от вектора $\mathfrak{B}$. Вектор $\mathfrak{B}$ мы назвали вектором магнитной индукции, так как его свойства идентичны со свойствами линий магнитной индукции, исследованными Фарадеем.

Мы также установили три системы уравнений: первая система (A) содержит уравнения магнитной индукции, выражающие ее как функцию электромагнитного количества движения. Вторая система (B)—уравнения электродвижущей интенсивности, выражающие ее зависимость от движения проводника через линии магнитной индукции и от скорости изменения электромагнитного количества движения. Третья система (C)—уравнения электромагнитной силы, выражающие ее зависимость от силы тока и магнитной индукции.

Во всех этих случаях ток понимается как действительный ток, который включает не только ток проводимости, но и ток, происходящий вследствие изменения электрического смещения.

Магнитная индукция $\mathfrak{B}$ есть величина, которую мы уже рассматривали в параграфе 400 *). В ненамагниченном теле она идентична с силой, действующей на единицу магнитного полюса; если же тело намагничено как постоянный магнит или вследствие индукции, это есть сила, которая действовала бы на единичный полюс,

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

если бы он был помещен в узкую щель в теле, со стенками, перпендикулярными к направлению намагничения. Составляющими вектора $\mathfrak{B}$ являются a, b, c.

Из уравнений (A), которыми определяются a, b, c, следует, что

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0.$$

В параграфе 403 *) было показано, что это является свойством магнитной индукции.

605.] Мы определили магнитную силу в магните в отличие от магнитной индукции как силу, действующую на единичный полюс, помещенный в узкую щель, вырезанную параллельно направлению намагничения. Эта величина обозначается через $\mathfrak{H}$, а ее слагающие — через α, β, γ.

Если $\mathfrak{J}$ есть интенсивность намагничения, а A, B, C — ее составляющие, тогда согласно параграфу 400 *)

$$\left.\begin{aligned} a&=\alpha+4\pi A,\\ b&=\beta+4\pi B,\\ c&=\gamma+4\pi C. \end{aligned}\right\}\ \text{Уравнения намагничения.} \qquad \text{(D)}$$

Мы можем называть эти уравнения уравнениями намагничения, они указывают, что в электромагнитной системе магнитная индукция $\mathfrak{B}$, рассматриваемая как вектор, является суммой (в смысле, придаваемом этому термину Гамильтоном) двух векторов — магнитной силы $\mathfrak{H}$ и намагничения $\mathfrak{J}$, помноженного на 4π, или

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{J}.$$

В некоторых веществах намагничение зависит от магнитной силы, и это выражается системой уравнений индуцированного магнетизма, данных в параграфах 426 и 435 *).

606.] Вплоть до этого момента нашего исследования мы все выводили из чисто динамических соображений без какой-либо ссылки на количественные результаты, полученные из опытов в области электричества или магнетизма.

*) В настоящее издание этот параграф не вошел. (*Ред.*)

Использование наших экспериментальных знаний до сих пор состояло лишь в том, что мы в абстрактных величинах, полученных чисто теоретическим путем, узнавали конкретные величины, известные из опыта; названия, которые мы давали этим величинам, подчеркивали их физический смысл, а не математические связи.

Этим путем мы установили существование электромагнитного количества движения $\mathfrak{A}$ как вектора, направление и величина которого изменяются от одной части пространства к другой, а отсюда мы вывели математическим путем магнитную индукцию $\mathfrak{B}$ как производный вектор. Однако мы не получили каких-либо данных для определения $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$ из распределения токов в поле. Для этой цели мы должны найти математическую связь между этими величинами и токами.

Мы начинаем с допущения существования постоянных магнитов, взаимное действие которых удовлетворяет принципу сохранения энергии. Мы не делаем никаких допущений в отношении законов магнитной силы за исключением тех, которые вытекают из этого принципа, а именно, что сила, действующая на магнитный полюс, является производной от потенциала.

Наблюдая взаимодействие между токами и магнитами, мы находим, что ток действует на магнит внешне так же, как действовал бы другой магнит, если его сила, форма и положение были бы соответственно подобраны, и что магнит действует на ток таким же образом, как действует другой ток. Эти наблюдения не нуждаются в том, чтобы их сопровождали измерениями сил. Их нельзя поэтому рассматривать как могущие дать числовые данные, но они весьма полезны для выяснения вопросов, подлежащих нашему рассмотрению.

Первый вопрос, который вызывают эти наблюдения, состоит в следующем. Поскольку магнитное поле, образованное электрическими токами, во многих отношениях аналогично магнитному полю постоянных магнитов, то походит ли оно на него также и в том отношении, что имеет потенциал?

Очевидность того, что электрическая цепь производит в окружающем пространстве в точности такие же магнитные действия, что и действия магнитного листка, ограниченного контуром цепи, была установлена в параграфах 482—485. Мы знаем, что в случае магнитного листка существует потенциал, который имеет определенное значение для всех точек, находящихся вне вещества самого листка, но что значения потенциала в двух соседних точках на противоположных сторонах листка отличаются на конечную величину.

Если магнитное поле вблизи электрического тока походит на магнитное поле, находящееся вблизи магнитного листка, то магнитный потенциал, найденный при помощи линейного интегрирования магнитной силы, будет одним и тем же для любых двух контуров интегрирования при условии, что один из этих контуров может быть превращен в другой при помощи непрерывного движения без пересечения цепи электрического тока.

Если же, однако, одна линия интегрирования не может быть преобразована в другую без пересечения тока, линейный интеграл магнитной силы вдоль одной линии будет отличаться от линейного интеграла вдоль другой линии на величину, зависящую от силы тока. Магнитный потенциал, производимый действием электрического тока, является, следовательно, функцией, имеющей бесконечный ряд значений с одной и той же разностью, причем каждое частное значение зависит от формы линии интегрирования. Внутри массы проводника не существует никакого магнитного потенциала.

607.] Допуская, что магнитное действие тока имеет магнитный потенциал такого рода, мы попытаемся выразить этот результат математически.

Прежде всего линейный интеграл магнитной силы вдоль некоторой замкнутой кривой равен нулю, если замкнутая кривая не охватывает электрического тока.

Далее, если ток проходит один и только один раз через поверхность, охватываемую замкнутой кривой

в положительном направлении, то линейный интеграл имеет определенное значение, которое может быть принято в качестве меры силы тока, ибо, если замкнутая кривая изменяет свою форму каким-нибудь непрерывным образом, не пересекая тока, линейный интеграл остается неизменным.

В электромагнитных мерах линейный интеграл магнитной силы вдоль замкнутой кривой численно равен току, проходящему через поверхность, охватываемую замкнутой кривой, помноженному на 4π.

Если мы возьмем в качестве замкнутой кривой прямоугольник со сторонами dy и dz, то линейный интеграл магнитной силы вдоль параллелограмма будет:

$$\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)dy\,dz.$$

Если u, v, w являются составляющими потока электричества *), то сила тока, проходящего через параллелограмм, будет:

$$u\,dy\,dz.$$

Умножая на 4π и приравнивая результат линейному интегралу, мы получаем уравнение

$$4\pi u=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}$$

и аналогично уравнения

$$\left.\begin{aligned}4\pi v&=\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},\\ 4\pi w&=\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy},\end{aligned}\right\}\text{Уравнения электрических токов.}\qquad\text{(E)}$$

которые определяют величину и направление электрических токов, когда в каждой точке задана магнитная сила.

Если тока нет, эти уравнения эквивалентны условию, что

$$\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz=-D\Omega$$

*) Плотности тока. (*Ред.*)

или что магнитная сила является производной от магнитного потенциала во всех точках поля, где нет токов.

Дифференцируя уравнения (E) соответственно по x, y и z и складывая результаты, мы получаем уравнение

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

которое указывает, что ток, составляющими которого являются u, v, w, подчиняется условию движения несжимаемой жидкости и что он по необходимости должен протекать по замкнутым контурам.

Это уравнение верно только в том случае, если мы будем рассматривать u, v, w как составляющие электрического потока, который включает также изменения электрического смещения наряду с током проводимости.

Мы не располагаем прямыми экспериментальными доказательствами, относящимися к непосредственному электромагнитному действию токов, обусловленных изменением электрического смещения в диэлектриках, но чрезвычайная трудность согласования законов электромагнетизма с существованием незамкнутых электрических токов является одним из многих оснований, почему мы допускаем наличие мгновенных токов, возникающих в результате изменения смещения. Их важность сделается очевидной, когда мы подойдем к электромагнитной теории света (13).

608.] Мы теперь определили связи основных величин, играющих роль в явлениях, открытых Эрстедом, Ампером и Фарадеем. Для того чтобы увязать их с явлениями, описанными в первых частях этого трактата, необходимы некоторые дополнительные отношения.

Когда электродвижущая интенсивность действует на материальное тело, она вызывает в нем два электрических эффекта, которые Фарадей назвал *индукцией* и *проводимостью*, причем первый более обращает на себя внимание в диэлектриках, а второй—в проводниках.

В этом трактате статическая электрическая индукция измеряется тем, что мы назвали электрическим смещением, направленной величиной, или вектором, который мы обозначили через $\mathfrak{D}$, а его составляющие—через f, g, h.

В изотропных веществах смещение происходит в том же направлении, в котором действует вызывающая его электродвижущая интенсивность, и смещение пропорционально этой интенсивности, по меньшей мере для малых ее значений.

Это может быть выражено уравнением

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{4\pi}K\,\mathfrak{E},\quad \text{Уравнение электрического смещения.}\qquad (F)$$

где K есть диэлектрическая емкость вещества.

В неизотропных веществах составляющие f, g, h электрического смещения $\mathfrak{D}$ являются линейными функциями составляющих P, Q, R электродвижущей интенсивности $\mathfrak{E}$. Форма уравнений электрического смещения для этого случая дана в параграфе 298.

Мы можем сказать, что в изотропных телах K является скалярной величиной, а в других телах она является линейной векторной функцией, действующей на вектор $\mathfrak{E}$ *).

609.] Другой эффект электродвижущей интенсивности есть проводимость. Законы проводимости как результата электродвижущей интенсивности были установлены Омом и объяснены во второй части этого трактата (параграф 241). Они могут быть резюмированы уравнением

$$\mathfrak{K}=C\mathfrak{E},\qquad \text{Уравнение проводимости.}\qquad (G)$$

где $\mathfrak{E}$ есть электродвижущая интенсивность в данной точке, $\mathfrak{K}$ есть плотность тока проводимости, составляющими которого являются p, q, r, а C есть проводимость, которая в случае изотропных субстанций

*) Иначе говоря, величина K представляет собой в этом случае тензор. (*Ред.*)

является простой скалярной величиной, но в других случаях становится линейной векторной функцией. Форма этой функции в декартовых координатах приведена в параграфе 298.

610.] Одна из главных особенностей этого трактата состоит в принятии концепции, согласно которой истинный электрический ток $\mathfrak{C}$, тот, от которого зависят электромагнитные явления, нельзя отождествить с током проводимости, но что должно быть принято во внимание при исчислении общего движения электричества изменение во времени электрического смещения $\mathfrak{D}$, так что мы должны написать:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}, \quad \text{Уравнение истинных токов.} \tag{H}$$

или более подробно

$$\left.\begin{aligned} u &= p + \frac{df}{dt}, \\ v &= q + \frac{dg}{dt}, \\ w &= r + \frac{dh}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{H*}$$

611.] Так как обе величины $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{D}$ зависят от электродвижущей интенсивности $\mathfrak{E}$, мы можем выразить истинный ток $\mathfrak{C}$ как функцию электродвижущей интенсивности, именно:

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt}\right) \mathfrak{E} \tag{I}$$

или в случае, когда C и K — постоянные:

$$\left.\begin{aligned} u &= CP + \frac{1}{4\pi} K \frac{dP}{dt}, \\ v &= CQ + \frac{1}{4\pi} K \frac{dQ}{dt}, \\ w &= CR + \frac{1}{4\pi} K \frac{dR}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{I*}$$

612.] Объемная плотность свободного электричества в некоторой точке получается из составляющих

электрического смещения при посредстве уравнения

$$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}. \tag{J}$$

613.] Поверхностная плотность электричества будет:

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h', \tag{K}$$

где l, m, n являются направляющими косинусами нормали, проведенной от поверхности в среду, в которой f, g, h являются составляющими смещения, а l', m', n' являются направляющими косинусами нормали, проведенной от поверхности в среду, в которой составляющие смещения соответственно равны f', g', h'.

614.] Когда намагничение среды полностью обусловлено действием магнитной силы на нее, мы можем написать уравнение индуктированного намагничения:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \tag{L}$$

где μ есть коэффициент магнитной проницаемости, который может рассматриваться или как скалярная величина или же как линейная и векторная функция, действующая на вектор $\mathfrak{H}$, в зависимости от того, является среда изотропной или нет.

615.] Вышеприведенные отношения могут считаться основными для тех величин, которые мы рассматривали, они могут быть скомбинированы так, чтобы исключить некоторые из этих величин, но нашей задачей в данный момент не является достижение компактности в математических формулах, так как мы стремимся выразить любое отношение, о котором мы что-либо знаем. В этой стадии нашего исследования устранение величины, выражающей полезную идею, скорее было бы потерей, чем выигрышем.

Однако есть один результат, который мы можем получить путем комбинирования уравнений (A) и (E) и который имеет очень большое значение.

Если предположить, что в поле нет магнитов, за исключением электрических цепей, то различие, которое мы делали до сих пор между магнитной силой и магнитной индукцией, исчезает, так как эти величины отличаются одна от другой только в намагниченном веществе.

Согласно гипотезе Ампера, которая будет объяснена в параграфе 833, свойства того, что мы называем намагниченным веществом, связаны с молекулярными электрическими токами, так что наша теория намагничения применима только тогда, когда мы рассматриваем вещество в больших массах. Если же наши математические методы предположить способными учитывать то, что происходит внутри индивидуальных молекул, они не откроют ничего кроме электрических цепей, и мы найдем, что магнитная сила и магнитная индукция повсюду совпадают (14). Однако, для того чтобы мы имели возможность использовать по нашему желанию электростатическую или электромагнитную систему, мы сохраним коэффициент μ, помня, что его значение в электромагнитной системе равно единице.

616.] Согласно уравнениям (A) параграфа 591 составляющие магнитной индукции будут:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}. \end{aligned}\right\}$$

Согласно уравнениям (E) параграфа 607 составляющие электрического тока даны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}. \end{aligned}\right\}$$

Согласно нашей гипотезе a, b, c идентичны с $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ соответственно. Отсюда мы получаем {когда μ

постоянно}

$$4\pi\mu u = \frac{d^2G}{dx\,dy} - \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{d^2H}{dz\,dx}. \tag{1}$$

Если положить:

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \tag{2}$$

и *)

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right), \tag{3}$$

мы можем написать уравнение (1):

$$4\pi\mu u = \frac{dJ}{dx} + \nabla^2 F$$

и аналогично:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\mu v &= \frac{dJ}{dy} + \nabla^2 G, \\ 4\pi\mu w &= \frac{dJ}{dz} + \nabla^2 H. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если мы положим:

$$\left.\begin{aligned} F' &= \mu \iiint \frac{u}{r}\,dx\,dy\,dz, \\ G' &= \mu \iiint \frac{v}{r}\,dx\,dy\,dz, \\ H' &= \mu \iiint \frac{w}{r}\,dx\,dy\,dz, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{J}{r}\,dx\,dy\,dz, \tag{6}$$

где r есть расстояние данной точки от элемента (x, y, z), и интегрирования распространены по всему

*) Отрицательный знак поставлен здесь для того, чтобы сделать наши уравнения соответствующими тем, в которых применяются кватернионы.

пространству, то

$$\left.\begin{aligned} F &= F' - \frac{d\chi}{dx}, \\ G &= G' - \frac{d\chi}{dy}, \\ H &= H' - \frac{d\chi}{dz}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Величина χ исчезает из уравнений (A) и не соответствует никакому физическому явлению. Если мы предположим, что она повсюду равна нулю, то J тоже везде будет равно нулю, и уравнения (5) (опуская штрихи) дадут истинные значения составляющих вектора $\mathfrak{A}$.

617.] Мы поэтому можем принять в качестве определения вектора $\mathfrak{A}$, что это есть вектор-потенциал электрического тока, находящийся в том же самом отношении к электрическому току, в каком скалярный потенциал находится к материи, потенциалом которой он является, и получающийся подобным же процессом интегрирования, который может быть описан следующим образом.

Пусть от данной точки проведен вектор, представляющий по величине и направлению данный элемент электрического тока, разделенный на численное значение расстояния элемента от данной точки. Пусть это будет сделано по отношению к каждому элементу электрического тока. Результирующая всех таким образом найденных векторов есть потенциал всего тока. Так как ток есть векторная величина, его потенциал также является вектором.

Если распределение электрических токов дано, имеется одно и только одно распределение значений $\mathfrak{A}$, такое, при котором $\mathfrak{A}$ повсюду является конечным и непрерывным и удовлетворяет уравнениям

$$\nabla^2\mathfrak{A} = 4\pi\mu\mathfrak{C},$$
$$S\,.\,\nabla^2\mathfrak{A} = 0$$

и исчезает на бесконечном расстоянии от электриче-

ской системы. Величина $\mathfrak{A}$ дается уравнениями (5), которые могут быть написаны в кватернионной форме [15]:

$$\mathfrak{A} = \mu \iiint \frac{\mathfrak{C}}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

Кватернионные выражения электромагнитных уравнений

618.] В этом трактате мы старались избегать операций, требующих от читателя знания исчисления кватернионов. В то же самое время мы не колебались ввести понятие вектора, когда это было необходимо сделать.

При необходимости обозначить вектор при помощи символа мы применяли буквы готического алфавита, так как число различных векторов столь велико, что принятые Гамильтоном символы были бы сразу исчерпаны. Следовательно, в тех случаях, когда используется буква готического алфавита, она обозначает вектор Гамильтона и указывает не только величину вектора, но и его направление. Составляющие вектора обозначаются латинскими или греческими буквами.

Основными векторами, которые мы должны рассмотреть, являются:

	Символ вектора	Составляющие
Радиус-вектор точки	ρ	x, y, z
Электромагнитное количество движения в точке	$\mathfrak{A}$	F, G, H
Магнитная индукция	$\mathfrak{B}$	a, b, c
Полный электрический ток . . .	$\mathfrak{C}$	u, v, w
Электрическое смещение	$\mathfrak{D}$	f, g, h
Электродвижущая интенсивность	$\mathfrak{E}$	P, Q, R
Механическая сила	F	X, Y, Z
Скорость точки	$\mathfrak{G}$ или $\dot\rho$	$\dot x, \dot y, \dot z$
Магнитная сила	$\mathfrak{H}$	α, β, γ
Интенсивность намагничения . .	$\mathfrak{J}$	A, B, C
Ток проводимости	$\mathfrak{K}$	p, q, r

Мы также имеем следующие скалярные функции:

Электрический потенциал	Ψ
Магнитный потенциал (там где он существует)	Ω
Электрическая плотность	e
Плотность «магнитного вещества»	m

Кроме того, мы имеем следующие величины, указывающие на физические свойства среды в каждой точке:

C — проводимость электрических токов,

K — диэлектрическая индуктивная емкость,

μ — магнитная индуктивная емкость.

В изотропных средах эти величины являются просто скалярными функциями от ρ, но, вообще говоря, они являются линейными и векторными операторами векторных функций, к которым применяются; K и μ, повидимому, всегда являются самосопряженными функциями, а C, вероятно, также.

619.] Уравнения (A) магнитной индукции, из которых первое

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$

могут быть теперь написаны в форме

$$\mathfrak{B} = V.\nabla\mathfrak{A},$$

где ∇ есть оператор

$$i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz},$$

а V указывает, что должна быть взята векторная часть результата этой операции. Так как $\mathfrak{A}$ подчиняется условию $S.\nabla\mathfrak{A} = 0$, $\nabla\mathfrak{A}$ является чистым вектором и символ V не нужен.

Уравнения (B) электродвижущей силы, из которых первое

$$P = c\dot{y} - b\dot{z} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx},$$

становятся:

$$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi.$$

Уравнения (C) механической силы, из которых первое

$$x = cv - bw - eP - m\frac{d\Omega}{dx},$$

будут:

$$\mathfrak{F} = V.\mathfrak{C}\mathfrak{B} + e\mathfrak{E} - m\nabla\Omega.$$

Уравнения (D) намагничения, из которых первое

$$a = \alpha + 4\pi A,$$

становятся:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}.$$

Уравнения (E) электрических токов, из которых первое

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$

примут форму:

$$4\pi\mathfrak{C} = V.\nabla\mathfrak{H}.$$

Уравнение тока проводимости согласно закону Ома будет:

$$\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}.$$

Уравнение электрического смещения

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}K\mathfrak{E}.$$

Уравнение полного тока, обусловленного как изменением электрического смещения, так и проводимостью, будет иметь вид

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}.$$

Если намагничение возникает в результате магнитной индукции, то

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}.$$

Мы также имеем для определения электрической объемной плотности соотношение

$$e = S.\nabla\mathfrak{D}.$$

Для определения магнитной объемной плотности:

$$\mathfrak{m} = S.\nabla\mathfrak{J}.$$

Когда магнитная сила имеет потенциал

$$\mathfrak{H} = -\nabla\Omega \ ([16]).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ IX

{Выражения (5) не всегда являются точными, если электромагнитное поле содержит вещества с различными магнитными проницаемостями, так как в этом случае на поверхности раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями, вообще говоря, будет свободный магнетизм, это добавит некоторые члены к выражению векторного потенциала. Граничные условия на поверхности, разделяющей две среды, обладающие магнитными проницаемостями μ_1, μ_2, где F_1, G_1, H_1 и F_2, G_2, H_2 обозначают составляющие векторного потенциала на двух сторонах поверхности раздела, l, m, n — направляющие косинусы нормали к этой поверхности, суть:

1) вследствие непрерывности нормальной составляющей индукции

$$l\left(\frac{dH_1}{dy}-\frac{dG_1}{dz}\right)+m\left(\frac{dF_1}{dz}-\frac{dH_1}{dx}\right)+n\left(\frac{dG_1}{dx}-\frac{dF_1}{dy}\right)=$$
$$=l\left(\frac{dH_2}{dy}-\frac{dG_2}{dz}\right)+m\left(\frac{dF_2}{dz}-\frac{dH_2}{dx}\right)+n\left(\frac{dG_2}{dx}-\frac{dF_2}{dy}\right);$$

2) вследствие непрерывности составляющей магнитной силы вдоль поверхности раздела

$$\frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{dH_1}{dy}-\frac{dG_1}{dz}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{dH_2}{dy}-\frac{dG_2}{dz}\right)}{l}=$$
$$=\frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{dF_1}{dz}-\frac{dH_1}{dx}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{dF_2}{dz}-\frac{dH_2}{dx}\right)}{m}=$$
$$=\frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{dG_1}{dx}-\frac{dF_1}{dy}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{dG_2}{dx}-\frac{dF_2}{dy}\right)}{n}$$

Выражения (5), вообще говоря, не удовлетворяют обоим этим условиям на поверхности.

Поэтому лучше рассматривать F, G, H как данные уравнениями

$$\nabla^2 F=4\pi\mu u,$$
$$\nabla^2 G=4\pi\mu v,$$
$$\nabla^2 H=4\pi\mu w$$

и предыдущими предельными условиями}.

Повидимому, не кажется обоснованным допущение того, что Ψ в уравнениях (B) представляет электростатический потенциал, когда проводники движутся, так как, выводя эти уравнения, Максвелл опускает член

$$-\frac{d}{ds}\left(F\frac{dx}{dt}+G\frac{dy}{dt}+H\frac{dz}{dt}\right),$$

исчезающий при интегрировании вдоль замкнутой цепи. Если мы вставим этот член, тогда Ψ более уже не является электростатическим потенциалом, но является суммой этого потенциала и

$$F\frac{dx}{dt}+G\frac{dy}{dt}+H\frac{dz}{dt}.$$

Это имеет важное применение в проблеме, которая привлекла много внимания, а именно к проблеме сферы, вращающейся с угловой скоростью ω около вертикальной оси в равномерном магнитном поле, где магнитная сила вертикальна и равна c. Уравнения (B) в этом случае становятся, предполагая, что сфера находится в установившемся состоянии,

$$P=c\omega x-\frac{d\Psi}{dx},$$
$$Q=c\omega y-\frac{d\Psi}{dy},$$
$$R=\qquad-\frac{d\Psi}{dz}.$$

Так как сфера является проводником и находится в установившемся состоянии и так как $\frac{P}{\sigma}$, $\frac{Q}{\sigma}$, $\frac{R}{\sigma}$ являются составляющими тока,

$$\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}=0,$$

откуда

$$2c\omega=\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}.$$

Это уравнение обычно интерпретировалось как выражающее, что в сфере существует распределение электричества, объемная плотность которого равна $-c\omega/2\pi$, но это допустимо только в том случае, если считать, что Ψ есть электростатический потенциал.

Если в соответствии с соображениями, при посредстве которых были выведены уравнения (B), мы допустим, что Φ есть электростатический потенциал, то

$$\Psi=\Phi+F\frac{dx}{dt}+G\frac{dy}{dt}+H\frac{dz}{dt},$$

или в рассматриваемом случае

$$\Psi=\Phi+\omega(Gx-Fy).$$

Тогда, поскольку

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)(Gx-Fy)=2\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)=2c$$

и

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}=2c\omega,$$

имеем

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\frac{d^2\Phi}{dy^2}+\frac{d^2\Phi}{dz^2}=0,$$

т. е. в объеме сферы не существует распределения свободного электричества.

Поэтому в уравнениях электромагнитного поля нет ничего, что могло бы нас привести к предположению, что вращающаяся сфера содержит свободное электричество.

Уравнения электромагнитного поля, выраженные в полярных и цилиндрических координатах

Если F, G, H являются составляющими некоторого потенциала соответственно вдоль радиуса-вектора, меридиана и широтной параллели, a, b, c — составляющие магнитной индукции, α, β, γ — составляющие магнитной силы, u, v, w — составляющие силы тока в этих направлениях, тогда мы можем легко доказать, что

$$a=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta H)-\frac{d}{d\varphi}(rG)\right\},$$

$$b=\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{dF}{d\varphi}-\frac{d}{dr}(r\sin\theta H)\right\},$$

$$c=\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}(rG)-\frac{dF}{d\theta}\right\};$$

$$4\pi u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta\gamma)-\frac{d}{d\varphi}(r\beta)\right\},$$

$$4\pi v=\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{d\alpha}{d\varphi}-\frac{d}{dr}(r\sin\theta\gamma)\right\},$$

$$4\pi w=\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}(r\beta)-\frac{d\alpha}{d\theta}\right\}.$$

Если P, Q, R являются составляющими электродвижущей напряженности вдоль радиуса-вектора, меридиана и широтной параллели, то

$$\frac{da}{dt}=-\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta R)\frac{d}{d\varphi}(rQ)\right\},$$

$$\frac{db}{dt}=-\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{dP}{d\varphi}-\frac{d}{r}(r\sin\theta R)\right\},$$

$$\frac{dc}{dt}=-\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}(rQ)-\frac{dP}{d\theta}\right\}.$$

Если цилиндрические координаты будут ρ, θ, z и если F, G, H являются составляющими вектора-потенциала, a, b, c — составляющие магнитной индукции; α, β, γ — составляющие магнитной силы и u, v, w — составляющие тока в этих направлениях, то

$$a=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{dH}{d\theta}-\frac{d}{dz}(\rho,G)\right\}, \qquad 4\pi u=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{d\gamma}{d\theta}-\frac{d}{dz}(\rho\beta)\right\},$$

$$b=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{d\rho}, \qquad 4\pi v=\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{d\rho},$$

$$c=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{d}{d\rho}(\rho G)-\frac{dF}{d\theta}\right\}; \qquad 4\pi w=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{d}{d\rho}(\rho\beta)-\frac{d\alpha}{d\theta}\right\}.$$

Если P, Q, R — составляющие электродвижущей напряженности, параллельные ρ, θ, z, то

$$\frac{da}{dt}=-\frac{1}{\rho}\left\{\frac{dR}{d\theta}-\frac{d}{dz}(\rho Q)\right\},$$

$$\frac{db}{dt}=-\left\{\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{d\rho}\right\},$$

$$\frac{dc}{dt}=-\frac{1}{\rho}\left\{\frac{d}{d\rho}(\rho Q)-\frac{dP}{d\theta}\right\}.$$