по индукции, например, путем наблюдения интегрального тока при внезапном перемещении вторичной цепи из данного положения на бесконечное расстояние или в любое положение, при котором мы знаем, что $M = 0$.

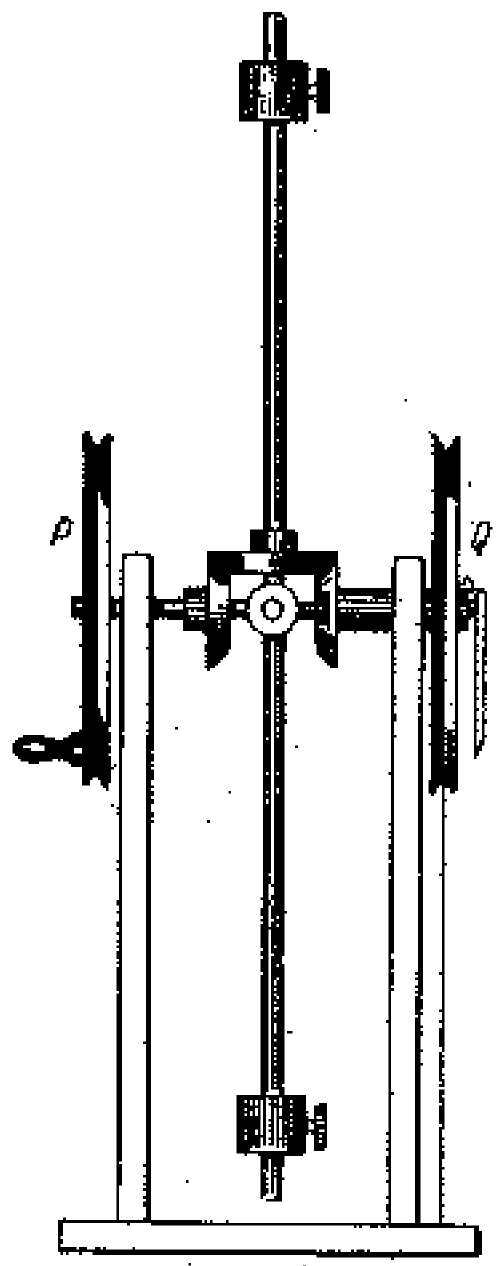

Рис. 12.

Примечание. {В лаборатории Кавендиша (Cavendish) имеется модель, сконструированная Максвеллом, которая весьма ясно иллюстрирует законы индукции токов. Она изображена на рис. 12. P и Q—два диска, вращение P представляет первичный ток, вращение Q—вторичный ток. Эти диски соединены друг с другом дифференциальным приводом. Промежуточная зубчатка вращает маховик, момент инерции которого меняется при изменении положений грузиков, ближе или дальше от центра. Сопротивление вторичной цепи представлено трением канатика, охватывающего диск Q и прижимаемого упругой лентой. При приведении диска P в движение (что изображает начало тока в первичной цепи) диск Q будет вращаться в противоположном направлении (обратный ток при появлении тока в первичной цепи). Когда скорость вращения P становится равномерной, Q остается в покое (во вторичной цепи нет тока, когда первичный ток неизменен); если остановить диск P, то диск Q начинает вращаться в том направлении, в котором до этого вращался P (прямой ток во вторичной цепи при перерыве контакта первичной цепи). Эффект, производимый железным сердечником, в отношении увеличения индукции может иллюстрироваться посредством увеличения момента инерции маховика.}

ГЛАВА VIII

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ВТОРИЧНОЙ ЦЕПИ

585.] В параграфах 582, 583, 584 мы доказали, что электромагнитные взаимодействия между первичной и вторичной цепями зависят от величины, обозначаемой через M, которая является функцией формы и относительного положения обеих цепей.

Хотя эта величина M в действительности то же самое, что и потенциал двух цепей, математическую форму и свойства которого мы вывели в параграфах 423, 492, 521, 539 из магнитных и электромагнитных явлений, мы здесь не будем ссылаться на эти результаты, но начнем заново от новой предпосылки без каких-либо допущений, за исключением допущений динамической теории в том виде, как она изложена в главе VII.

Электрокинетическое количество движения вторичной цепи состоит из двух частей (параграф 578): одна, Mi_1, зависит от первичного тока i_1, в то время как другая, Ni_2, зависит от вторичного тока i_2. Мы займемся сейчас исследованием первой из этих частей, которую мы обозначим через p:

$$p = Mi_1. \tag{1}$$

Мы также предположим, что первичная цепь неподвижна и что первичный ток имеет постоянную величину. Количество p —электрокинетическое количество движения вторичной цепи—в этом случае зависит только от формы и положения вторичной цепи, так что если какая-либо замкнутая кривая принимается за вторичный контур и если избирается направление вдоль этой кривой, которое считается положительным, то величина p для этой замкнутой кривой будет определена. Если в качестве положительного направления возьмем противоположное, то знак величины p должен быть изменен на обратный.

586.] Так как величина p зависит от формы и положения цепи, мы можем предположить, что каждый участок цепи дает свой вклад в значение p и что вклад какого-либо участка цепи зависит от формы и расположения только этого участка, а не от расположения других участков цепи.

Это допущение законно, потому что мы сейчас не рассматриваем *ток*, части которого могут действовать и в действительности действуют одна на другую, а только *контур*, т. е. замкнутую кривую, по которой *может* течь ток, а это есть чисто геометрическая фигура, отдельные части которой не могут рассматриваться каким-либо образом физически действующими друг на друга.

Мы поэтому допускаем, что вклад элемента ds цепи будет $J\,ds$, где J есть величина, зависящая от положения и направления элемента ds. Поэтому значение p может быть выражено как линейный интеграл

$$p = \int J\,ds, \tag{2}$$

в котором интегрирование выполнено однократно вдоль всего контура.

587.] Теперь нам надо определить выражение величины J. Прежде всего, если направление ds изменяется на обратное, то J меняет знак. Отсюда, если два контура $ABCE$ и $AECD$ имеют общий отрезок AEC, считаемый в обоих контурах в обратных направлениях, то сумма значений p для двух контуров $ABCE$ и $AECD$ будет равна значению p для контура $ABCD$, составленного из двух контуров.

Действительно, части линейного интеграла, зависящие от отрезка AEC, равны, но противоположны по знаку в обеих цепях, так что они взаимно уничтожаются при суммировании, а остаются только те части линейного интеграла, которые зависят от внешней границы $ABCD$.

Таким же путем мы можем показать, что если поверхность, ограниченная замкнутой кривой, разделяется на любое количество частей и если периметр каждой из этих частей рассматривается в качестве контура, положительное направление которого то же, что и вдоль внешней замыкающей кривой, то значение p для замкнутой кривой равно сумме значений p для всех частичных контуров (см. параграф 483).

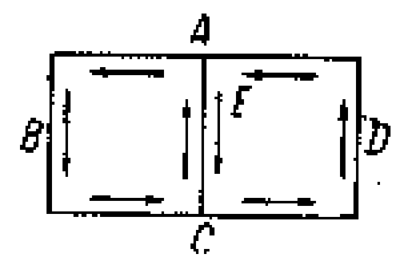

Рис. 13.

588.] Рассмотрим теперь часть поверхности, размеры которой так малы по отношению к главным радиусам кривизны поверхности, что изменение направления нормали в пределах этой части может не приниматься во внимание. Мы также предположим, что если некоторый очень маленький контур перемещается параллельно самому себе от одного участка поверхности к другому, то значение p для малого контура не меняется заметным образом. Это, очевидно, будет иметь место, если размеры участка поверхности достаточно малы по сравнению с ее расстоянием от первичной цепи.

Если на этом участке поверхности будет начерчена некоторая замкнутая кривая, то величина p для этой кривой будет пропорциональна площади, заключенной внутри кривой.

Действительно, площади некоторых двух контуров могут быть разделены на малые элементы одинаковых размеров и имеющих одну и ту же величину p. Площади обоих контуров относятся как числа элементов, которые они содержат, а значения p для этих контуров находятся в том же отношении.

Отсюда значение p для контура, который ограничивает некоторый элемент поверхности dS, имеет вид

$$I\,dS,$$

где I есть величина, зависящая от положения dS и от направления его нормали. Поэтому мы имеем новое выражение для p:

$$p = \iint I\,dS, \tag{3}$$

где двойной интеграл распространен на некоторую поверхность, ограничиваемую контуром.

589.] Пусть $ABCD$ будет контур, в котором AC есть элемент настолько малый, что его можно считать прямолинейным. Пусть APB и CQB будут малые равные площади в той же самой плоскости. Тогда значение p будет одним и тем же для малых контуров APB и CQB, или

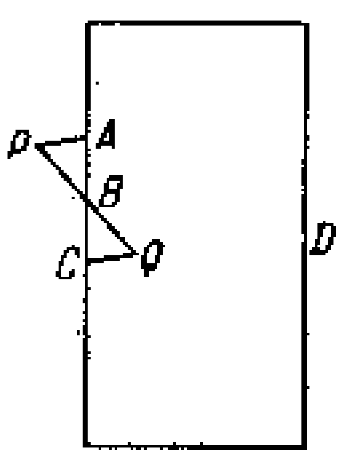

Рис. 14.

$$p(APB) = p(CQB).$$

Отсюда

$$p(APBQCD) = p(ABQCD) + p(APB) = \\ = p(ABQCD) + p(CQB) = p(ABCD),$$

т. е. значение p не меняется вследствие замены ломаной линией $APQC$ прямой линии AC при условии, что площадь контура заметным образом не меняется. Действительно, это есть принцип, установленный вторым опытом Ампера (параграф 506), в котором показывается, что ломаный участок цепи эквивалентен прямолинейному при условии, что ни в одном месте ломаный участок цепи не находится на заметном расстоянии от прямолинейного участка.

Если, следовательно, мы вместо элемента ds представим три малых элемента dx, dy и dz, начерченных последовательно один за другим так, что они образуют непрерывный путь от начала до конца элемента ds, и если $F\,dx$, $G\,dy$ и $H\,dz$ обозначают элементы линейного интеграла, соответственно вдоль dx, dy и dz, то

$$J\,ds = F\,dx + G\,dy + H\,dz. \tag{4}$$

590.] Мы теперь имеем возможность определить, каким образом величина J зависит от направления элемента ds. Согласно (4)

$$J = F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}. \tag{5}$$

Это есть выражение для составляющей в направлении ds вектора, компоненты которого в направлениях осей x, y и z соответственно равны F, G и H.

Если этот вектор мы обозначим через $\mathfrak{A}$ и вектор от начала до некоторой точки контура через ρ, элемент длины будет $d\rho$ и $J\,ds$ в кватернионном выражении будет:

$$-S.\mathfrak{A}\,d\rho\ (^9).$$

Мы теперь можем написать уравнение (2) в форме

$$p = \int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right) ds, \tag{6}$$

или

$$p = -\int S.\mathfrak{A}\,d\rho. \tag{7}$$

Вектор $\mathfrak{A}$ и его составляющие F, G, H зависят от положения в поле, а не от направления, которое имеет ds. Следовательно, они являются функциями координат x, y, z элемента ds, а не направляющих косинусов l, m, n этого элемента.

Вектор $\mathfrak{A}$ по направлению и величине представляет интеграл по времени от силы, действие которой испытывала бы частица, помещенная в точке (x, y, z), если бы первичный ток был внезапно прерван. Мы поэтому будем называть его *электрокинетическим количеством движения в точке* (x, y, z). Он идентичен с величиной, которую мы исследовали в параграфе 405*) под названием векторного потенциала магнитной индукции.

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

Электрокинетическое количество движения некоторой конечной линии или цепи есть линейный интеграл, распространенный вдоль линии контура, от составляющей электрокинетического количества движения в каждой из точек цепи.

591.] Определим теперь величину p для элементарного прямоугольника $ABCD$, стороны которого равны dy и dz, причем положительное направление есть направление от оси y к оси z.

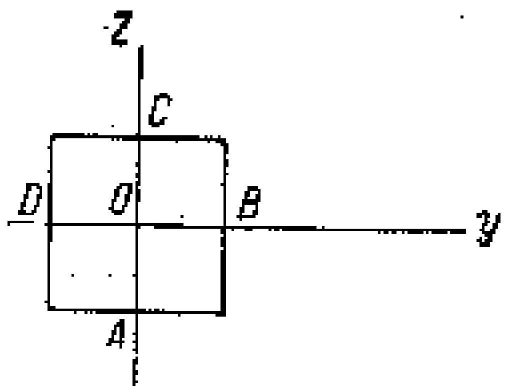

Рис. 15.

Пусть координаты O, центра тяжести элемента, будут x_0, y_0, z_0 и пусть G_0, H_0 будут значения G и H в этой точке.

Координаты A—середины первой стороны прямоугольника—будут y_0 и $z_0-\frac{1}{2}dz$. Соответствующее значение G будет равно:

$$G=G_0-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}dz+\ldots, \qquad (8)$$

и часть величины p, соответствующая стороне A, будет приблизительно равна:

$$G_0\,dy-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}dy\,dz. \qquad (9)$$

Аналогично этому будем иметь:

$$\text{для } B \qquad H_0\,dz+\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}dy\,dz,$$

$$\text{для } C \qquad -G_0\,dy-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}dy\,dz,$$

$$\text{для } D \qquad -H_0\,dz+\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}dy\,dz.$$

Складывая эти четыре величины, мы находим величину p для указанного прямоугольника:

$$p=\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)dy\,dz, \qquad (10)$$

Если мы теперь введем три новые величины a, b, c, так что

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz},\\ b&=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx},\\ c&=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy},\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

и будем рассматривать их как составляющие нового вектора $\mathfrak{B}$, то мы можем выразить линейный интеграл от $\mathfrak{A}$ вдоль некоторого контура через интеграл от $\mathfrak{B}$, взятый по поверхности, ограниченной этим контуром; имеем:

$$p=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds=\iint(la+mb+nc)\,dS, \qquad (11)$$

или

$$p=\int T.\mathfrak{A}\cos\varepsilon\,ds=\iint T.\mathfrak{B}\cos\eta\,dS, \qquad (12)$$

где ε есть угол между $\mathfrak{A}$ и ds, η—угол между $\mathfrak{B}$ и нормалью к dS, направляющими косинусами которой являются l, m, n, а $T.\mathfrak{A}$, $T.\mathfrak{B}$ обозначают численные значения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (10).

При сравнении этого результата с уравнением (3) очевидно, что величина I в этом уравнении равна $\mathfrak{B}\cos\eta$ или составляющей $\mathfrak{B}$ вдоль нормали к dS.

592.] Мы уже видели (в параграфах 490, 541), что согласно теории Фарадея явления электромагнитной силы и индукции в цепи зависят от изменения числа линий магнитной индукции, которые пронизывают цепь. Но число этих линий определяется математически поверхностным интегралом магнитной индукции через некоторую поверхность, ограниченную цепью. Поэтому мы должны рассматривать вектор $\mathfrak{B}$ и его составляющие a, b, c как представляющие то, что нам уже известно под именем магнитной индукции и ее составляющих. В настоящем исследовании мы предполагаем вывести свойства этого вектора из динамических принципов, установленных в последней главе, по возможности не обращаясь к эксперименту. Отождествляя этот вектор, который появился в результате математического исследования, с магнитной индукцией, свойства которой узнали из опытов с магнитами, мы не выходим за пределы экспериментального метода, потому что мы не вводим новых фактов в теорию, мы только даем наименование математической величине, и правомерность этого действия следует оценивать по согласованности свойств математической величины со свойствами физической величины данного наименования.

Вектор 𝔅, поскольку он фигурирует в поверхностном интеграле, очевидно, принадлежит к категории векторных потоков, описанных в параграфе 12*). Вектор 𝔄, с другой стороны, принадлежит к категории сил, так как он фигурирует в линейном интеграле (11).

593.] Мы должны здесь напомнить условия, принятые для обозначения положительных и отрицательных величин и направлений, некоторые соображения о которых были приведены в параграфе 23*). Мы принимаем правостороннюю систему осей, так что если винт с правой нарезкой помещен в направлении оси x и гайка по этому винту поворачивается в положительном направлении вращения, т. е. от направления оси y к направлению оси z, то гайка будет двигаться вдоль винта в положительном направлении x.

Мы также рассматриваем стеклянное электричество и южный магнетизм как положительные. Положительное направление электрического тока или линии электрической индукции есть направление, в котором положительное электричество движется или стремится двигаться, а положительное направление линии магнитной индукции есть направление, в котором указывает компасная стрелка своим северным концом (см. рис. 6, параграф 498 и рис. 7, параграф 501).

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

Изучающему рекомендуется выбрать любой метод, который кажется ему наиболее эффективным, для того чтобы надежно закрепить эти условности в памяти, так как значительно более трудно вспомнить правило, которое определяет, в каком из двух, до этого безразличных, способов следует делать какое-либо утверждение, чем вспомнить правило, которое избирает из многих путей один единственный.

594.] Теперь мы должны вывести из динамических принципов выражение для электромагнитной силы, действующей на проводник, по которому проходит электрический ток и который движется в магнитном поле, и выражение для электродвижущей силы, действующей на электричество, заключенное в движущемся в магнитном поле теле. Математический метод, который мы употребим для этого, может быть сравнен с экспериментальным методом Фарадея *) при исследовании им поля с помощью проволоки, подробности которого уже приведены нами в параграфе 490. Сейчас мы должны определить изменение значения p, электрокинетического количества движения вторичной цепи, обусловленное изменением формы этой цепи.

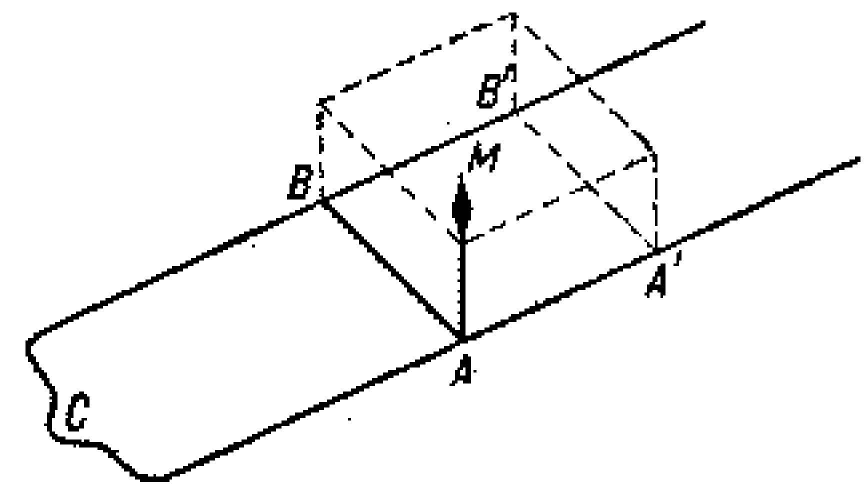

Рис. 16.

Пусть AA', BB' будут два параллельных прямолинейных проводника, соединенных проводящей дугой C, которая может иметь любую форму, и прямоли-

*) Exp. Res., (3082, 3087, 3113).

нейным проводником AB, который может скользить параллельно самому себе вдоль направляющих рельс AA' и BB'.

Пусть таким образом образованная цепь рассматривается как вторичная цепь и пусть направление ABC считается положительным направлением обхода контура.

Пусть подвижная часть перемещается параллельно самой себе из положения AB в положение $A'B'$. Нам следует определить изменение p, электрокинетического количества движения цепи, обусловленное этим перемещением скользящей части. Вторичная цепь ABC становится $A'B'C'$, отсюда согласно параграфу 587

$$p(A'B'C') - p(ABC) = p(AA'B'B). \qquad (13)$$

Мы, следовательно, должны определить величину p для параллелограмма $AA'B'B$. Если этот параллелограмм так мал, что мы можем не принимать во внимание изменение направления и величины магнитной индукции в различных точках его плоскости, значение p будет согласно параграфу 591 $\mathfrak{B}\cos\eta \cdot AA'B'B$, где $\mathfrak{B}$ есть магнитная индукция, а η—угол, который она образует с положительным направлением нормали к параллелограмму $AA'B'B$.

Мы можем представить этот результат геометрически в виде объема параллелепипеда, основанием которого является параллелограмм $AA'B'B$ и одно из ребер которого есть линия AM, представляющая по направлению и величине магнитную индукцию $\mathfrak{B}$. Если параллелограмм расположен в плоскости страницы и если AM имеет направление снизу вверх от этой плоскости, объем параллелепипеда должен считаться положительным. Вообще говоря, он должен считаться положительным, если направления цепи AB, магнитной индукции AM и смещения AA', взятые в циклическом порядке, образуют правостороннюю систему координат.

Объем этого параллелепипеда представляет приращение значения p для вторичной цепи, соответствующее смещению скользящей части от AB к $A'B'$.

Электродвижущая сила, действующая на скользящую часть

595.] Электродвижущая сила, возникающая во вторичной цепи в результате движения скользящей части, согласно параграфу 579 будет равна:

$$E = -\frac{dp}{dt}. \qquad (14)$$

Если мы предположим, что AA' будет смещением в единицу времени, тогда AA' представит скорость, параллелепипед будет представлять $\frac{dp}{dt}$ и, следовательно, по уравнению (14)—электродвижущую силу в отрицательном направлении BA.

Отсюда электродвижущая сила, действующая на скользящую часть AB, вследствие ее движения через магнитное поле будет представлена объемом параллелепипеда, ребра которого по направлению и величине представляют скорость, магнитную индукцию и саму скользящую часть; электродвижущая сила будет положительной, если эти три направления расположены в правостороннем циклическом порядке.

Электромагнитная сила, действующая на скользящую часть

596.] Пусть i_2 обозначает ток во вторичной цепи в положительном направлении ABC, тогда работа, совершенная электромагнитной силой, действующей на AB во время перемещения из положения AB в положение $A'B'$, будет $(M'-M)i_1i_2$, где M и M' будут значениями M_{12} в начальном и конечном положениях AB. Но $(M'-M)i_1$ равно $p'-p$, а эта величина представлена объемом параллелепипеда, построенного на AB, AM и AA'. Отсюда, если мы, чтобы представить величину $AB \cdot i_2$, проведем линию, параллельную AB, тогда параллелепипед, ограниченный этой линией, AM—магнитной индукцией и AA'—перемещением, будет представлять работу, произведенную при этом перемещении.

Для данного перемещения работа будет наибольшей, если AA' перпендикулярно к параллелограмму, стороны которого суть AB и AM. Электромагнитная сила поэтому представляется площадью параллелограмма, построенного на AB и AM и помноженного на i_2, а по направлению совпадает с направлением нормали к этому параллелограмму, проведенной так, что AB, AM и нормаль составляют правосторонний циклический порядок.

Четыре определения линии магнитной индукции

597.] Если направление AA', по которому имеет место движение скользящей части, совпадает с AM— направлением магнитной индукции, движение скользящей части не вызовет появления электродвижущей силы, каково бы ни было направление AB, а если по AB проходит электрический ток, то не будет наблюдаться перемещения вдоль AA'.

Далее, если AB, скользящая часть, совпадает по направлению с AM—направлением магнитной индукции, то при движении AB не будет наведенной электродвижущей силы, как бы AB ни двигалось; на проводник AB не будет также действовать механическая сила при прохождении по нему тока.

Поэтому мы можем определить линию магнитной индукции четырьмя различными способами. Это— такая линия, что:

(1) Если проводник будет двигаться вдоль этой линии параллельно самому себе, он не будет испытывать действия какой-либо электродвижущей силы.

(2) Если проводник, несущий ток, будет иметь возможность свободно двигаться вдоль линии магнитной индукции, он не будет испытывать тенденции к такому движению.

(3) Если линейный проводник совпадает по направлению с линией магнитной индукции и будет двигаться параллельно самому себе в любом направлении, он не будет испытывать действия какой-либо электродвижущей силы в направлении своей длины.

(4) Если линейный проводник, несущий электрический ток, совпадает по направлению с линией магнитной индукции, он не будет испытывать действия какой-либо механической силы.

Общие уравнения электродвижущей интенсивности *)

598.] Мы видели, что E—электродвижущая сила, возникающая в результате индукции, действующей на вторичную цепь,—равна $-\frac{dp}{dt}$, где

$$p=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds. \tag{1}$$

Для определения величины E дифференцируем по t выражение, стоящее под знаком интеграла, помня о том, что, если вторичная цепь находится в движении, x, y и z являются функциями времени. Мы получаем:

$$\begin{aligned} E= &-\int\left(\frac{dF}{dt}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dt}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dt}\frac{dz}{ds}\right)ds-\\ &-\int\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dx}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dx}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds-\\ &-\int\left(\frac{dF}{dy}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dy}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dy}{dt}ds-\\ &-\int\left(\frac{dF}{dz}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dz}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz}{dt}ds-\\ &-\int\left(F\frac{d^2x}{ds\,dt}+G\frac{d^2y}{ds\,dt}+H\frac{d^2z}{ds\,dt}\right)ds. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь второй член выражения (2) и подставим в него из уравнений (A) параграфа 591 зна-

*) То-есть напряженности электрического поля. (*Ред.*)

чения $\frac{dG}{dx}$ и $\frac{dH}{dx}$. Тогда этот член примет вид

$$-\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds,$$

что можно написать в виде

$$-\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds.$$

Производя то же самое с третьим и четвертым членами, собирая значения с $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$ и помня, что

$$\int\left(\frac{dF}{ds}\frac{dx}{dt}+F\frac{d^2x}{ds\,dt}\right)ds=F\frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

следовательно, что интеграл, будучи взят вдоль замкнутой кривой, исчезает, получим:

$$\begin{aligned}E=&\int\left(c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}\right)\frac{dx}{ds}ds+\\&+\int\left(a\frac{dz}{dt}-c\frac{dx}{dt}-\frac{dG}{dt}\right)\frac{dy}{ds}ds+\\&+\int\left(b\frac{dx}{dt}-a\frac{dy}{dt}-\frac{dH}{dt}\right)\frac{dz}{ds}ds.\end{aligned} \tag{4}$$

Это выражение мы можем написать в форме

$$E=\int\left(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned}P&=c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx},\\Q&=a\frac{dz}{dt}-c\frac{dx}{dt}-\frac{dG}{dt}-\frac{d\Psi}{dy},\\R&=b\frac{dx}{dt}-a\frac{dy}{dt}-\frac{dH}{dt}-\frac{d\Psi}{dz}.\end{aligned}\right\}\ \text{Уравнения электродвижущей интенсивности [напряженности электрического поля.—Ред.]} \tag{B}$$

Члены, включающие новую величину Ψ, вводятся с целью обобщения выражений для P, Q, R. Они исчезают из интеграла, если он взят вдоль замкнутой цепи. Величина Ψ поэтому неопределенна, по крайней мере поскольку это относится к стоящей перед нами задаче, в которой должна быть определена электродвижущая сила, действующая в цепи. Мы, однако, увидим, что если мы знаем все условия задачи, мы можем приписать Ψ некоторое определенное значение, которое согласно известному определению представляет собой *электрический потенциал* в точке (x, y, z).

Величина, находящаяся под знаком интеграла в уравнении (5), представляет электродвижущую интенсивность, действующую в элементе ds цепи.

Если мы обозначим через $T.\mathfrak{E}$ числовое значение результирующей от P, Q и R, а через ε—угол между направлением этой результирующей и направлением элемента ds, мы можем написать уравнение (5) в виде

$$E=\int T.\mathfrak{E}\cos\varepsilon\,ds. \tag{6}$$

Вектор $\mathfrak{E}$ есть электродвижущая интенсивность [напряженность электрического поля.—*Ред.*] в движущемся элементе ds. Ее направление и величина зависят от положения и движения ds и от изменения магнитного поля, но не от изменения направления ds. Поэтому мы можем не обращать внимания на то обстоятельство, что ds составляет часть цепи, и рассматривать его просто как часть движущегося тела, на которую действует электродвижущая интенсивность $\mathfrak{E}$. Электродвижущая интенсивность в точке уже была определена в параграфе 68. Ее также называют результирующей электрической силой, так как это— сила, действие которой испытывала бы единица положительного электричества, помещенная в этой точке. Мы теперь получили наиболее общее выражение этой величины в случае тела, движущегося в магнитном поле, образованном изменяющейся электрической системой.

Если тело является проводником, электродвижущая интенсивность вызывает образование тока; если это— диэлектрик, электродвижущая интенсивность произведет только электрическое смещение.

Электродвижущая интенсивность или сила, действующая на частицу, должна быть тщательно отличаема от электродвижущей силы вдоль дуги кривой, последняя величина является линейным интегралом первого.

599.] Электродвижущая интенсивность, составляющие которой определяются уравнениями (B), зависит от трех обстоятельств. Первое из них — это движение частицы через магнитное поле. Часть силы, зависящая от этого движения, выражается двумя первыми членами правой стороны каждого уравнения. Она зависит от скорости частицы, перпендикулярной к линиям магнитной индукции. Если $\mathfrak{G}$ есть вектор, представляющий скорость, а $\mathfrak{B}$ — другой вектор, представляющий магнитную индукцию, то если $\mathfrak{E}_1$ есть часть электродвижущей интенсивности, зависящей от движения:

$$\mathfrak{E}_1 = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B}, \tag{7}$$

или электродвижущая интенсивность $\mathfrak{E}$ есть векторное произведение магнитной индукции на скорость, иначе говоря, величина электродвижущей интенсивности $\mathfrak{E}$ представляется площадью параллелограмма, стороны которого образованы векторами скорости и магнитной индукции, а направление $\mathfrak{E}$ нормально к этому параллелограмму, начерченному так, что скорость, магнитная индукция и электродвижущая интенсивность расположены в правостороннем циклическом порядке.

Третий член в каждом из уравнений (B) зависит от изменения магнитного поля во времени. Оно может происходить или вследствие изменения во времени электрического тока в первичной цепи или от движения первичной цепи. Пусть $\mathfrak{E}_2$ будет часть электродвижущей напряженности, зависящая от этих членов. Ее составляющие суть:

$$-\frac{dF}{dt}, \quad -\frac{dG}{dt} \quad \text{и} \quad -\frac{dH}{dt}.$$

Это — составляющие вектора $-\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$, или $\dot{\mathfrak{A}}$, следовательно,

$$\mathfrak{E}_2 = -\dot{\mathfrak{A}}. \tag{8}$$

Последний член каждого уравнения (B) относится к изменению функции Ψ в различных частях поля. Мы можем написать третью часть электродвижущей интенсивности, которая вызывается этой причиной, в форме:

$$\mathfrak{E}_3 = -\nabla\Psi. \tag{9}$$

Электродвижущая интенсивность в том виде, как она определена уравнениями (B), может быть, следовательно, написана в обозначениях теории кватернионов следующим образом:

$$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi. \tag{10}$$

Об изменении уравнений электродвижущей интенсивности в случае, когда оси, к которым они относятся, движутся в пространстве

600.] Пусть x', y', z' будут координаты точки, относящиеся к системе прямоугольных осей, движущихся в пространстве, и пусть x, y, z будут координаты этой же самой точки, относящиеся к неподвижным осям.

Пусть составляющие скорости начала движущейся системы координат будут u, v, w; составляющие ее угловой скорости по отношению к неподвижным осям будут ω_1, ω_2, ω_3, и пусть мы так выберем неподвижные оси, чтобы они в данный момент совпадали с подвижными осями. Тогда только те величины будут различными для двух систем осей, которые содержат дифференцирование по времени. Если $\frac{\delta x}{\delta t}$ обозначает составляющую скорости точки, неизменно связанной с движущимися осями, а $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dx'}{dt}$ — составляющие скорости любой движущейся точки, имеющей то же самое мгновенное положение, соответственно относящиеся к неподвижным и подвижным осям, то

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dx'}{dt}, \qquad (1)$$

и такие же уравнения для других составляющих.

Согласно теории движения твердого тела неизменной формы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta x}{\delta t}&=u+\omega_2 z-\omega_3 y,\\ \frac{\delta y}{\delta t}&=v+\omega_3 x-\omega_1 z,\\ \frac{\delta z}{\delta t}&=w+\omega_1 y-\omega_2 x.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Поскольку F есть составляющая некоторой векторной величины, параллельная x, если $\frac{dF'}{dt}$ есть значение $\frac{dF}{dt}$ по отношению к движущимся осям, то может быть показано, что

$$\frac{dF'}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dF}{dy}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{dF}{dz}\frac{\delta z}{\delta t}+G\omega_3-H\omega_2+\frac{dF}{dt}: \qquad (3)$$

Подставляя вместо $\frac{dF}{dy}$ и $\frac{dF}{dz}$ их значения в том виде, в каком они даны в уравнении (A) магнитной индукции, и вспоминая, что согласно (2)

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}=0, \quad \frac{d}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}=\omega_3, \quad \frac{d}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}=-\omega_2, \qquad (4)$$

мы находим:

$$\frac{dF'}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+F\frac{d}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dG}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}+G\frac{d}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{dH}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}+$$
$$+H\frac{d}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}-c\frac{\delta y}{\delta t}+b\frac{\delta z}{\delta t}+\frac{dF}{dt}. \qquad (5)$$

Если мы теперь положим:

$$-\Psi'=F\frac{\delta x}{\delta t}+G\frac{\delta y}{\delta t}+H\frac{\delta z}{\delta t}, \qquad (6)$$

$$\frac{dF'}{dt}=-\frac{d\Psi'}{dx}-c\frac{\delta y}{\delta t}+b\frac{\delta z}{\delta t}+\frac{dF}{dt}. \qquad (7)$$

Уравнение для P, составляющей электродвижущей интенсивности вдоль x, отнесенное к неподвижным осям, будет согласно (B)

$$P=c\frac{\delta y}{\delta t}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx}. \qquad (8)$$

Представляя значения величин, отнесенных к подвижным осям, получим:

$$P'=c\frac{\delta y'}{dt}-b\frac{dz'}{dt}-\frac{dF'}{dt}-\frac{d(\Psi+\Psi')}{dx} \qquad (9)$$

для значения P', отнесенного к подвижным осям.

601.] Отсюда вытекает, что электродвижущая интенсивность выражается формулой того же самого типа, будут ли движения проводников отнесены к неподвижным осям или к осям, движущимся в пространстве. Единственным различием между этими формулами будет то, что в случае подвижных осей электрический потенциал Ψ должен быть заменен на $\Psi+\Psi'$.

Во всех случаях, в которых ток возникает в проводящей цепи, электродвижущая сила есть взятый вдоль контура цепи линейный интеграл

$$E=\int\left(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds}\right)ds. \qquad (10)$$

Значение Ψ исчезает из этого интеграла, так что введение Ψ' не имеет влияния на это значение. Следовательно, во всех явлениях, относящихся к замкнутым цепям и к токам в них, безразлично, будут ли оси, к которым мы относим систему, в покое или в движении.

Об электромагнитной силе, действующей на движущийся в магнитном поле проводник с током

602.] В общем исследовании (параграф 583) мы видели, что если x_1 есть одна из переменных, которая определяет положение и форму вторичной цепи, и если X_1 есть сила, действующая на вторичную цепь, стремящаяся увеличивать эту переменную, то

$$X_1 = \frac{dM}{dx_1} i_1 i_2. \qquad (1)$$

Так как i_1 не зависит от x_1, мы можем написать:

$$M i_1 = p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds, \qquad (2)$$

и мы имеем для значения X_1

$$X_1 = i_2 \frac{d}{dx_1} \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds. \qquad (3)$$

Теперь предположим, что смещение состоит в движении каждой точки цепи на расстояние δx в направлении x, причем δx есть некоторая непрерывная функция от s, так что различные части цепи движутся независимо одна от другой, в то время как цепь остается непрерывной и замкнутой.

Кроме того, пусть X будет полной силой в направлении x, действующей на часть цепи от $s = 0$ до $s = s$; тогда часть, соответствующая элементу ds, будет $\frac{dX}{ds} ds$. Мы тогда получим следующее выражение для работы, совершенной силой в течение смещения:

$$\int \frac{dX}{ds} \delta x \, ds = i_2 \int \frac{d}{d\delta x} \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) \delta x \, ds, \qquad (4)$$

где интегрирование должно быть распространено по замкнутой кривой, имея при этом в виду, что δx есть произвольная функция от s. Мы можем, следовательно, произвести дифференцирование по δx аналогично дифференцированию по t в параграфе 598, помня, что

$$\frac{dx}{d\delta x} = 1, \quad \frac{dy}{d\delta x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dz}{d\delta x} = 0. \qquad (5)$$

Мы, таким образом, находим:

$$\int \frac{dX}{ds} \delta x \, ds = i_2 \int \left(c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds} \right) \delta x \, ds + i_2 \int \frac{d}{ds} (F \delta x) \, ds. \qquad (6)$$

Последний член исчезает, когда интегрирование производится вдоль замкнутой кривой, а поскольку уравнение должно быть действительным для всех форм функций δx, мы должны иметь:

$$\frac{dX}{ds} = i_2 \left(c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds} \right) \qquad (7)$$

— уравнение, которое дает составляющую, параллельную оси x, силы, действующей в элементе ds на единицу длины цепи. Составляющие, параллельные осям y и z, будут:

$$\frac{dY}{ds} = i_2 \left(a \frac{dz}{ds} - c \frac{dx}{ds} \right), \qquad (8)$$

$$\frac{dZ}{ds} = i_2 \left(b \frac{dx}{ds} - a \frac{dy}{ds} \right). \qquad (9)$$

Результирующая сила на элемент выражена по направлению и величине в кватернионном обозначении через $i_2 V . d\rho \mathfrak{B}$, где i_2 есть числовая мера тока, а $d\rho$ и $\mathfrak{B}$ — векторы, представляющие элемент цепи и магнитную индукцию; умножение должно быть понято в смысле, указанном Гамильтоном.

603.] Если проводник рассматривается не как линия, но как тело, следует выразить силу на элемент длины и ток через полное сечение, через силу на единицу объема и ток на единицу площади.

Пусть X, Y, Z представляют составляющие силы, относящиеся к единице объема, u, v, w — составляющие тока, отнесенные к единице площади, тогда, если S есть сечение проводника, которое мы будем предполагать малым, объем элемента ds будет $S \, ds$ и $u = \frac{i_2}{S} \frac{dx}{ds}$.

Поэтому уравнение (7) будет:

$$\frac{XS\,ds}{ds} = S\,(vc - wb), \qquad (10)$$

или

$$\left.\begin{aligned} X &= vc - wb, \\ Y &= wa - uc \\ Z &= ub - va. \end{aligned}\right\} \text{Уравнения электромагнитной силы.} \qquad (C)$$

аналогично:

и

Здесь X, Y, Z являются составляющими электромагнитной силы, действующей на элемент проводника, деленными на объем этого элемента; u, v, w являются составляющими электрического тока через элемент, отнесенные к единице площади, и a, b, c — составляющие магнитной индукции в элементе, которые также отнесены к единице площади.

Если вектор $\mathfrak{F}$ представляет по величине и направлению силу, действующую на единицу объема проводника, и если $\mathfrak{C}$ представляет электрический ток, текущий через него, то (12)

$$\mathfrak{F} = V.\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}. \qquad (11)$$

[Уравнения (B) параграфа 598 могут быть доказаны следующим методом, изложенным в мемуаре профессора Максвелла: «Динамическая теория электромагнитного поля», Phil. Trans., 1865 *).

Производная по времени от $-p$ может быть разделена на две части, одна из которых зависит, а другая не зависит от движения цепи. Последняя часть, очевидно, будет:

$$-\int\left(\frac{dF}{dt}\,dx + \frac{dG}{dt}\,dy + \frac{dH}{dt}\,dz\right).$$

Для того чтобы найти первую часть, рассмотрим дугу ds, образующую часть цепи, и вообразим, что эта дуга движется вдоль рельсов, которые будем считать параллельными; составляющие скорости этого движения v пусть будут: $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$; остальную часть цепи, кроме дуги δs, будем предполагать неподвижной. Тогда мы можем считать, что движущаяся дуга

*) См. стр. 251 настоящего издания.

описывает маленький параллелограмм, направляющие косинусы нормали к которому будут:

$$\lambda,\ \mu,\ \nu = \frac{n\dot{y} - m\dot{z}}{v\sin\theta},\quad \frac{l\dot{z} - n\dot{x}}{v\sin\theta},\quad \frac{m\dot{x} - l\dot{y}}{v\sin\theta},$$

где l, m, n являются направляющими косинусами для δs, а θ есть угол между v и δs.

Для того чтобы проверить знаки λ, μ, ν, мы можем положить $m = -1$, $\dot{x} = v$, тогда λ, μ, ν становятся равными соответственно 0, 0, -1, каковыми они и должны были быть при правосторонней системе осей.

Пусть теперь a, b, c будут составляющие магнитной индукции, обусловленной движением δs в течение времени δt:

$$\delta p = (a\lambda + b\mu + c\nu)\ v\,\delta t\,\delta s \sin\theta.$$

Если мы предположим, что каждая часть цепи движется подобным же образом, то результирующим эффектом будет движение всей цепи как целого и токи в рельсах будут всякий раз компенсироваться в случае двух прилегающих дуг. Производная по времени от $-p$, обусловленная движением цепи, следовательно, будет:

$$-\int\{a\,(n\dot{y} - m\dot{z}) + \text{два аналогичных члена}\}\,ds,$$

где интеграл берется вдоль всей цепи, или

$$\int(c\dot{y} - b\dot{z})\,dx + \text{два аналогичных интеграла}.$$

Результаты параграфа 602 для составляющих электромагнитной силы могут быть выведены из вышеуказанного выражения для δp. Действительно, пусть дуга δs смещается на расстояние $\delta s'$ в направлении l', m', n', тогда

$$\delta p = \{l'\,(cm - bn) + \text{два аналогичных члена}\}\,\delta s\,\delta s'.$$

Теперь пусть X будет составляющей по оси x силы, действующей на дугу s. Тогда для единицы тока мы согласно параграфу 596 найдем:

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dp}{dx} = cm - bn.]$$

Уравнения электромагнитного поля

(Если предположить, что электрические токи всегда текут вдоль замкнутых цепей, мы без введения векторного потенциала можем вывести уравнения, которые будут определять состояние электромагнитного поля.

Так, пусть i будет сила тока в некоторой цепи, которую мы будем предполагать находящейся в покое. Электрокинетическая энергия T, относящаяся к этому току, будет:

$$i\iint(la+mb+nc)\,dS,$$

где dS есть элемент поверхности, ограниченной током.

Отсюда $-\frac{d}{dt}\frac{dT}{di}$ — полная электродвижущая сила в цепи, стремящаяся увеличивать i, — будет равна:

$$-\iint\left(l\frac{da}{dt}+m\frac{db}{dt}+n\frac{dc}{dt}\right)dS;$$

следовательно, если X, Y, Z являются составляющими электродвижущей интенсивности, то

$$\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=-\iint\left(l\frac{da}{dt}+m\frac{db}{dt}+n\frac{dc}{dt}\right)dS. \quad (1)$$

Но, согласно теореме Стокса, левая часть этого уравнения равна:

$$\iint\left\{l\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+m\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+n\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\right\}dS.$$

Сравнивая этот интеграл с правой частью уравнения (1), мы получаем, поскольку поверхность, охватываемая током, является совершенно произвольной:

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=-\frac{da}{dt},$$
$$\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}=-\frac{db}{dt},$$
$$\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}=-\frac{dc}{dt}.$$

Кроме того, мы имеем еще отношения:

$$4\pi u=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz},$$
$$4\pi v=\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},$$
$$4\pi w=\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy},$$
$$u=\frac{X}{\sigma},\qquad v=\frac{Y}{\sigma},\qquad w=\frac{Z}{\sigma}$$

ля проводника, удельное сопротивление которого равно σ, или

$$u=\frac{K}{4\pi}\frac{dX}{dt},\qquad v=\frac{K}{4\pi}\frac{dY}{dt},\qquad w=\frac{K}{4\pi}\frac{dZ}{dt}$$

ля изолятора, удельная индуктивная способность которого авна K; приведенные уравнения являются достаточными для пределения состояния электромагнитного поля. Граничные словия на какой-нибудь поверхности состоят в том, что магитная индукция, нормальная к поверхности, должна быть епрерывной и что магнитная сила, параллельная поверхности, олжна также быть непрерывной.

Этот метод исследования электромагнитного поля имеет реимущество простоты. Его особенно защищал Хэвисайд. Одако он уступает в общности методу, указанному в тексте, оторый может быть применен даже в тех случаях, когда токи екут не в замкнутых цепях.}