ГЛАВА V

## ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ (4)

553.] В четвертом разделе второй части своей «Аналитической механики» Лагранж дал метод сведения обычных динамических уравнений движения частей системы со связями к числу, равному числу степеней свободы этой системы.

Уравнение движения системы со связями в другой форме были даны Гамильтоном и привели к значительному развитию чистой динамики *).

Поскольку нам необходимо в наших попытках привести электрические явления к области динамики, выразить динамические идеи в форме, пригодной для прямого применения к физическим вопросам, мы посвятим эту главу изложению этих динамических идей с физической точки зрения.

554.] Целью Лагранжа было привести динамику в подчинение анализу. Он начал с выражения элементарных динамических отношений через соответствующие отношения между чисто алгебраическими величинами и от полученных таким образом уравнений вывел свои окончательные уравнения чисто аналитическим путем. Отдельные величины (выражающие реакции между частями системы, обусловленные их физическими связями) фигурируют в уравнениях движения частей, образующих систему, и исследования Лагранжа, с математической точки зрения, представляют собой метод исключения этих величин из окончательных уравнений.

*) См. Cayley, Report on Theoretical Dynamics, Brit. Ass., 1857 и Thomson и Tait, Natural Philosophy.



Следуя этому процессу исключения, мысль упражняется лишь в вычислениях и поэтому должна оставаться свободной от вмешательства каких-либо динамических идей. С другой стороны, нашей целью является как раз совершенствование наших динамических идей. Обращаясь поэтому к работам математиков, мы переводим их результаты с языка анализа на язык динамики, так, чтобы наши слова могли бы вызвать мысленный образ не алгебраического процесса, но какого-либо свойства движущихся тел.

Язык динамики был значительно расширен теми, кто изложил популярно учение о сохранении энергии, и можно видеть, что большая часть последующих утверждений возникла в результате изучения «Натуральной философии» Томсона и Тэта, в частности, метода, начинающего с теории импульсивных сил.

Я применил этот метод для того, чтобы избежать явного рассмотрения движения каких-либо частей системы за исключением координат или переменных, от которых зависит движение целого. Безусловно важно, чтобы изучающий был способен проследить связь движения каждой части системы с изменением переменных, но совершенно нет необходимости делать это в процессе получения окончательных уравнений, которые не зависят от частной формы этих связей.

### Переменные

555.] Число степеней свободы системы есть число величин, которые должны быть известны для того, чтобы полностью определить положение системы. Этим величинам можно придать различные формы, но их число зависит от природы самой системы и не может быть изменено.

Для определенности мы можем рассматривать систему как связанную при помощи соответствующего механизма с некоторым числом движущихся частей, каждая из которых может совершать прямолинейное и только прямолинейное движение. Воображаемый механизм, который соединяет каждую из частей системы, должен предполагаться свободным от трения, не имеющим инерции и не способным быть деформированным в результате действий прилагаемых сил. Впрочем, этот механизм служит главным образом для того, чтобы помогать воображению приписать телу положение, скорость и количество движения, которые в исследовании Лагранжа являются чисто алгебраическими количествами.

Пусть $q$ обозначает положение одной из движущихся частей, определенное как расстояние от фиксированной точки на линии движения.

Мы будем различать значения $q$, соответствующие различным частям системы при помощи значков 1, 2 и т. д.; когда мы будем иметь дело с рядом величин, относящимся только к одной части, мы будем опускать эти значки.

Когда даны значения всех переменных $(q)$, положение каждой из движущихся частей известно, и в силу существования воображаемого механизма этим определяется конфигурация всей системы.

### Скорости

556.] Во время движения системы ее конфигурация изменяется некоторым определенным образом, и так как конфигурация в любой момент полностью определяется значениями переменных $q$, скорость каждой части системы, так же как и ее конфигурация, будет полностью определена, если мы знаем значения переменных $(q)$ вместе с их скоростями $\left(\frac{dq}{dt}\right.$, или согласно обозначению Ньютона $\left.\dot{q}\right)$.



### Силы

557.] Надлежащим выбором закона изменения переменных может быть произведено любое движение системы, согласное с природой связей. Для того чтобы произвести это движение путем перемещения подвижных частей, к этим частям должны быть приложены силы. Силу, которая должна быть приложена к любой переменной $q_r$, мы будем обозначать через $F_r$. Система сил $(F)$ механически эквивалентна (в силу связей системы) реально производящей движение системе сил, какой бы она ни была.

### Количества движения

558.] Если тело движется таким образом, что его конфигурация относительно действующей на него силы остается всегда одной и той же (как, например, в случае силы, действующей на одну единственную частицу по направлению линии ее движения), то движущая сила измеряется степенью изменения количества движения в единицу времени. Если $F$ есть движущая сила и $p$—количество движения, то

$$F=\frac{dp}{dt},$$

откуда

$$p=\int F\,dt.$$

Интеграл по времени от силы называется импульсом силы, так что мы можем утверждать, что количество движения есть импульс силы, который мог бы привести тело из состояния покоя в данное состояние движения. В случае движущейся системы со связями конфигурация системы непрерывно меняется с быстротой, зависящей от скоростей $(\dot{q})$, так что мы не можем более предполагать, что количество движения системы является временным интегралом силы, действующей на нее.

Но приращение $\delta q$ любой переменной не может быть больше, чем $\dot{q}'\,\delta t$, где $\delta t$ есть время, в течение которого происходит приращение, а $\dot{q}'$ есть наибольшее значение скорости в течение этого времени. В случае системы, движущейся из состояния покоя под действием сил неизменного направления, это, очевидно,— конечная скорость.

Если конечная скорость и конфигурация системы даны, мы можем считать, что скорость сообщается системе в очень малый промежуток времени $\delta t$, причем начальная конфигурация отличается от конечной конфигурации на величины $\delta q_1$, $\delta q_2$ и т. д., которые соответственно меньше чем $\dot{q}_1\,\delta t$, $\dot{q}_2\,\delta t$ и т. д.

Чем меньшим мы будем предполагать приращение времени $\delta t$, тем большими должны быть приложенные силы, но интеграл по времени или импульс каждой силы останется конечным. Предельное значение импульса, когда время уменьшается и в пределе становится равным нулю, определяется как *мгновенный импульс*, и количество движения $p$, соответствующее переменной $q$, определяется как импульс, соответствующий этой переменной, который в состоянии мгновенно перевести систему из состояния покоя в рассматриваемое состояние движения.

Эта концепция, что количества движения могут быть произведены мгновенными импульсами, действующими на систему, находящуюся в покое, вводится только как метод определения значений количеств движения, так как последние зависят только от мгновенного состояния движения системы, а не от процесса, при помощи которого это состояние произведено.

В системе со связями количество движения, соответствующее какой-либо переменной, является вообще линейной функцией скоростей всех переменных, вместо того чтобы быть как, например, в динамике частицы просто пропорциональным скорости.

Импульсы, потребные для внезапного изменения скоростей системы от $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ и т. д. до $\dot{q}_1'$, $\dot{q}_2'$ и т. д., очевидно, равны $p_1'-p_1$, $p_2'-p_2$ — изменениям количеств движения различных переменных



### Работа малого импульса

559.] Работа, произведенная силой $F_1$ в течение времени импульса, является пространственным интегралом силы, или

$$W=\int F_1\,dq_1,$$
$$=\int F_1\dot{q}_1\,dt.$$

Если $\dot{q}_1'$ есть наибольшее, а $\dot{q}_1''$ — наименьшее значение скорости $\dot{q}_1$ во время действия силы, $W$ должно быть меньше чем

$$\dot{q}_1'\int F\,dt,\quad \text{или}\quad \dot{q}_1'(p_1'-p_1),$$

и больше чем

$$\dot{q}_1''\int F\,dt,\quad \text{или}\quad \dot{q}_1''(p_1'-p_1).$$

Если мы теперь предположим, что импульс $\int F\,dt$ уменьшается беспредельно, величины $\dot{q}_1'$ и $\dot{q}_1''$ будут сближаться и в конечном счете совпадут с величиной $\dot{q}_1$, и мы сможем написать $p_1'-p_1=\delta p_1$, так что произведенная работа в конечном счете равна

$$\delta W_1=\dot{q}_1\delta p_1.$$

То-есть *работа, произведенная весьма малым импульсом, в конечном счете равна произведению импульса на скорость*.

### Приращение кинетической энергии

560.] Когда расходуется работа для приведения консервативной системы в движение, то ей сообщается энергия и система становится способной производить равное количество работы на преодоление сопротивлений, прежде чем она приходит в состояние покоя.

Энергия, которой система обладает в силу своего движения, называется кинетической энергией и сообщается ей в форме работы, произведенной силами, которые приводят систему в движение.

Если $T$ — кинетическая энергия системы и если эта величина становится равной $T+\delta T$ за счет действия бесконечно малого импульса, составляющими которого являются $\delta p_1$, $\delta p_2$ и т. д., прирост $\delta T$ должен быть суммой количеств работы, совершенных составляющими импульса, или

$$\delta T = \dot{q}_1 \delta p_1 + \dot{q}_2 \delta p_2 + \ldots = \sum (\dot{q} \delta p). \tag{1}$$

Мгновенное состояние системы полностью определяется, если даны переменные и количества движения. Отсюда кинетическая энергия, которая зависит от мгновенного состояния системы, может быть выражена через переменные ($q$) и количества движения ($p$). Это есть способ выражения $T$, введенный Гамильтоном. Когда $T$ выражается таким образом, мы будем отличать его при помощи значка $p$, т. е. $T_p$.

Полная вариация $T_p$ будет:

$$\delta T_p = \sum \left( \frac{dT_p}{dp} \delta p \right) + \sum \left( \frac{dT_p}{dq} \delta q \right). \tag{2}$$

Последний член может быть написан в виде $\sum \left( \frac{dT_p}{dq} \dot{q} \delta t \right)$, он уменьшается с уменьшением $\delta t$ и в конечном счете исчезает, когда импульс становится мгновенным.

Отсюда, приравнивая между собой коэффициенты при $\delta p$ в уравнениях (1) и (2), получаем:

$$\dot{q} = \frac{dT_p}{dp}, \tag{3}$$

или *скорость, соответствующая переменной $q$, есть производная от $T_p$ по соответствующему количеству движения $p$.*



Мы пришли к этому результату при помощи рассмотрения импульсивных сил. Этим методом мы избежали соображений о перемене конфигурации во время действия сил. Но мгновенное состояние системы во всех отношениях одно и то же, была ли эта система приведена из состояния покоя в данное состояние движения при помощи подходящего применения импульсивных сил или же она пришла в это состояние любым другим путем, хотя бы и постепенным.

Другими словами, переменные и соответствующие скорости и количества движения зависят от фактического состояния движения системы в данный момент, а не от ее предыдущей истории.

Отсюда уравнение (3) одинаково справедливо, считаем ли мы, что состояние движения системы произведено импульсивными силами, или же, что оно обусловлено силами, действующими каким-либо другим способом.

Поэтому мы можем теперь оставить в стороне рассмотрение импульсивных сил вместе со всеми ограничениями, налагаемыми на время их действия и на изменение конфигурации в течение их действия.

## Уравнения движения Гамильтона

561.] Мы уже показали, что

$$\frac{dT_p}{dp} = \dot{q}. \tag{4}$$

Пусть система движется каким-нибудь образом, следуя условиям, налагаемым ее связями. Тогда вариации $p$ и $q$ будут:

$$\delta p = \frac{dp}{dt} \delta t, \quad \delta q = \dot{q}\, \delta t. \tag{5}$$

Отсюда

$$\frac{dT_p}{dp} \delta p = \frac{dp}{dt} \dot{q}\, \delta t,$$

$$= \frac{dp}{dt} \delta q, \tag{6}$$

и полная вариация $T_p$ будет:

$$\delta T_p = \sum \left( \frac{dT_p}{dp}\,\delta p + \frac{dT_p}{dq}\,\delta q \right),$$
$$= \sum \left\{ \left( \frac{dp}{dt} + \frac{dT_p}{dq} \right) \delta q \right\}. \tag{7}$$

Но приращение кинетической энергии равно работе, произведенной действующими силами, или

$$\delta T_p = \sum (F\,\delta q). \tag{8}$$

В двух последних выражениях (7) и (8) вариации $\delta q$ все независимы одна от другой, так что мы имеем право приравнять коэффициенты при $\delta q$. Мы, таким образом, получаем:

$$F_r = \frac{dp_r}{dt} + \frac{dT_p}{dq_r}, \tag{9}$$

где количество движения $p_r$ и сила $F_r$ относятся к переменной $q_r$ *).

Уравнений такой формы столько, сколько имеется переменных. Эти уравнения были даны Гамильтоном. Они показывают что сила, соответствующая любой переменной, является суммой двух частей. Первая часть есть степень увеличения количества движения этой переменной в единицу времени. Вторая часть есть степень увеличения кинетической энергии на единицу приращения переменной при условии, что все другие переменные и количества движения остаются постоянными.

---

*) {Это доказательство не кажется убедительным, поскольку $\delta q$ предполагается равным $\dot{q}\,\delta t$, т. е. $\frac{dT_p}{dp}\,\delta t$. Таким образом, все, что мы можем законно вывести из (7) и (8), есть

$$\sum \left\{ \left( \frac{dp_r}{dt} + \frac{dT_p}{dq_r} - P_r \right) \frac{dT_p}{dp_r} \right\} = 0.\} \ (^5)$$



## Кинетическая энергия как функция количеств движения и скоростей

562.] Пусть $p_1$, $p_2$ и т. д. будут количества движения, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ и т. д. — скорости в данный момент времени и пусть $\mathrm{p}_1$, $\mathrm{p}_2$ и т. д., $\dot{\mathrm{q}}_1$, $\dot{\mathrm{q}}_2$ и т. д. будет другая система количеств движения и скоростей, так что

$$\mathrm{p}_1 = np_1, \quad \dot{\mathrm{q}}_1 = n\dot{q}_1 \text{ и т. д.} \tag{10}$$

Очевидно, что системы $\mathrm{p}$, $\dot{\mathrm{q}}$ будут совместны со связями, если системы $p$, $\dot{q}$ совместны.

Пусть теперь $n$ изменяется на $\delta n$. Работа, совершенная силой $F_1$, будет:

$$F_1\delta\mathrm{q}_1 = \dot{\mathrm{q}}_1\delta\mathrm{p}_1 = \dot{q}_1 p_1 n\,\delta n. \tag{11}$$

Пусть $n$ увеличивается от нуля до единицы, тогда система переводится из состояния покоя в состояние движения $(\dot{q}, p)$, и вся работа, затраченная на производство этого движения, будет:

$$(\dot{q}_1 p + \dot{q}_2 p_2 + \ldots) \int_0^1 n\,dn, \tag{12}$$

но

$$\int_0^1 n\,dn = \frac{1}{2},$$

а работа, затраченная на производство движения, эквивалентна кинетической энергии. Отсюда

$$T_{p\dot{q}} = \frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \ldots), \tag{13}$$

где $T_{p\dot{q}}$ обозначает кинетическую энергию, выраженную в значениях количеств движения и скоростей. Переменные $q_1$, $q_2$ и т. д. не входят в это выражение.

Поэтому кинетическая энергия равна половине суммы произведений количеств движения на соответствующие скорости.

Когда кинетическая энергия выражается таким путем, мы будем обозначать ее символом $T_{p\dot{q}}$. Она является функцией только количеств движения и скоростей и не заключает самих переменных.

563.] Имеется третий метод для выражения кинетической энергии, который обычно считается основным. Путем решения уравнений (3) мы можем выразить количества движения как функции скоростей и затем, вводя эти значения в формулу (13), будем иметь выражение для $T$, включающее только скорости и переменные; $T$, выраженное в такой форме, мы будем обозначать символом $T_{\dot{q}}$. В этой форме кинетическая энергия фигурирует в уравнениях Лагранжа.

564.] Очевидно, что поскольку $T_p$, $T_{\dot{q}}$ и $T_{p\dot{q}}$ являются тремя различными выражениями одной и той же величины, то

$$T_p+T_{\dot{q}}-2T_{p\dot{q}}=0,$$

или

$$T_p+T_{\dot{q}}-p_1\dot{q}_1-p_2\dot{q}_2-\ldots=0. \qquad (14)$$

Отсюда, если мы будем варьировать величины $p$, $q$ и $\dot{q}_1$, то получим:

$$\left(\frac{dT_p}{dp_1}-\dot{q}_1\right)\delta p_1+\left(\frac{dT_p}{dp_2}-\dot{q}_2\right)\delta p_1+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1}-p_1\right)\delta\dot{q}_1+\left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2}-p_2\right)\delta\dot{q}_2+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{dT_p}{dq_1}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}\right)\delta q_1+\left(\frac{dT_p}{dq_2}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_2}\right)\delta q_2+\ldots=0. \qquad (15)$$

Вариации $\delta p$ независимы от вариаций $\delta q$ и $\delta\dot{q}$, так что мы не можем сразу же утверждать, что коэффициент при каждой из этих вариаций в этом уравнении равен нулю.



Но из уравнений (3) мы знаем, что

$$\frac{dT_p}{dp_1}-\dot{q}_1=0 \quad \text{и т. д.}, \qquad (16)$$

так что члены, содержащие вариации $\delta p$, сами тождественно равны нулю.

Остальные вариации $\delta\dot{q}$ и $\delta q$ теперь все независимы друг от друга, так что мы находим, приравнивая к нулю коэффициент при $\delta\dot{q}_1$ и т. д.,

$$p_1=\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1}, \quad p_2=\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} \quad \text{и т. д.} \qquad (17)$$

То-есть *составляющие количества движения равны производным от $T_{\dot{q}}$ по соответствующим скоростям.*

Далее, приравнивая нулю коэффициенты при $\delta q_1$ и т. д., получаем:

$$\frac{dT_p}{dq_1}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}=0, \qquad (18)$$

т. е. *производная кинетической энергии, выраженной как функция скорости по какой-либо переменной $q_1$, равна по величине и обратна по знаку производной энергии $T$, выраженной как функция количеств движения.*

В силу уравнения (18) мы можем написать уравнение движения (9):

$$F_1=\frac{dp_1}{dt}-\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}, \qquad (19)$$

или

$$F_1=\frac{d}{dt}\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1}-\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}; \qquad (20)$$

в этой форме уравнения движения были даны Лагранжем.

565.] В предыдущем исследовании мы избегали рассмотрения вида функции скоростей или количеств движения, выражающей кинетическую энергию. Единственная форма, которую мы приняли для нее, есть

$$T_{p\dot{q}} = \frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \ldots), \qquad (21)$$

в которой кинетическая энергия выражена как половина суммы произведений количеств движения на соответствующие скорости.

Мы можем выразить скорости в виде производных от $T$ по количествам движения как в уравнении (3):

$$T_p = \frac{1}{2}\left(p_1 \frac{dT_p}{dp_1} + p_2 \frac{dT_p}{dp_2} + \ldots\right). \qquad (22)$$

Это выражение показывает, что $T_p$ является однородной функцией второй степени от количеств движения $p_1$, $p_2$ и т. д.

Мы можем также выразить количества движения как функцию от $T_{\dot{q}}$. Тогда

$$T_{\dot{q}} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1 \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} + \ldots\right), \qquad (23)$$

что показывает, что $T_{\dot{q}}$ является однородной функцией второй степени от скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ и т. д.

Если мы напишем:

$$P_{11} = \frac{d^2 T_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2^2}, \quad P_{12} = \frac{d^2 T_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1 d\dot{q}_2} \text{ и т. д.}$$

или

$$Q_{11} = \frac{d^2 T_p}{dp_1^2}, \quad Q_{12} = \frac{d^2 T_p}{dp_1 dp_2} \text{ и т. д.},$$

тогда, поскольку $T_{\dot{q}}$ и $T_p$ являются функциями второй степени соответственно от $\dot{q}$ и $p$, то $P$ и $Q$ будут функциями только переменных $q$ и будут независимы от скоростей и количеств движения.



Мы, таким образом, получаем выражения для $T$:

$$2T_{\dot{q}} = P_{11}\dot{q}_1^2 + 2P_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots \qquad (24)$$

$$2T_p = Q_{11}p_1^2 + 2Q_{12}p_1p_2 + \ldots \qquad (25)$$

Количества движения выражаются как функции скоростей линейными уравнениями

$$p_1 = P_{11}\dot{q}_1 + P_{12}\dot{q}_2 + \ldots, \qquad (26)$$

а скорости выражаются как функции от количеств движения линейными уравнениями

$$\dot{q}_1 = Q_{11}p_1 + Q_{12}p_2 + \ldots \qquad (27)$$

В трактатах по динамике твердого тела коэффициенты $P_{11}$, у которых оба значка одинаковы, называются *моментами инерции*, а коэффициенты $P_{12}$, у которых значки разные, называются *произведениями инерции*. Эти названия мы можем распространить на более общую проблему, которая в настоящее время стоит перед нами и в которой эти количества не являются, как в случае твердых тел, абсолютно постоянными, но являются функциями переменных $q_1$, $q_2$ и т. д.

Подобным же образом мы можем назвать коэффициенты вида $Q_{11}$ *моментами подвижности* и коэффициенты вида $Q_{12}$ *произведениями подвижности*. Однако мы очень редко будем иметь случай говорить о коэффициентах подвижности.

566.] Кинетическая энергия системы есть величина существенно положительная или равная нулю. Отсюда, будет ли она выражена как функция скоростей или как функция количеств движения, коэффициенты должны быть такими, чтобы никакие действительные значения переменных не могли бы сделать $T$ отрицательным.

Таким образом, имеется целый ряд необходимых условий, которым должны удовлетворять коэффициенты $P$. Эти условия следующие.

Величины $P_{11}$, $P_{12}$ и т. д. все должны быть положительны; все $n-1$ детерминантов, образуемые последовательно из детерминанта

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} & P_{2n} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{3n} \\ P_{1n} & P_{2n} & P_{3n} & P_{nn} \end{vmatrix}$$

путем устранения членов со значком 1, затем членов со значками 1 или 2 и т. д., должны быть положительны.

Число условий для $n$ переменных, следовательно, равно $2n-1$.

Коэффициенты $Q$ подчиняются условиям того же самого рода.

567.] В этом наброске основных принципов динамики системы со связями мы отвлеклись от механизма, при помощи которого части системы соединены друг с другом. Мы даже не написали уравнений для того, чтобы показать, как движение какой-нибудь части системы зависит от изменений переменных величин. Мы все наше внимание обратили на переменные, их скорости, количества движения и силы, которые действуют на части механизма, соответствующие переменным. Наши единственные допущения состоят в том, что время явно не содержится в уравнениях, определяющих связи, и что принцип сохранения энергии применим к системе. Такое изложение методов чистой динамики не бесполезно, потому что Лагранж и большинство его последователей, которым мы обязаны этими методами, в основном посвятили себя доказательству их и с целью сосредоточить свое внимание на символах, фигурирующих в уравнениях, постарались изгнать все понятия за исключением понятия чистой величины, так что они не только отказались от диаграмм, но даже исключили понятия скорости, количества движения и энергии, после того как эти величины раз навсегда были заменены



символами в первоначальных уравнениях. Для того чтобы иметь возможность опираться на результаты этого анализа, употребляя обычный язык динамики, мы постарались снова перевести основные уравнения этого метода на тот язык, который мог бы быть понятным без применения символов.

Именно развитие идей и методов чистой математики сделало возможным разработку математической теории динамики и тем самым способствовало пролитию света на целый ряд истин, которые не могли быть открыты без математического исследования. Поэтому, если перед нами стоит задача разработать динамические теории других областей науки, мы должны пропитать наши мысли этими динамическими истинами в той же мере, как и математическими методами.

Формируя идеи и язык, относящиеся к какой-нибудь науке, которая подобно науке об электричестве имеет дело с силами и их действиями, мы должны постоянно иметь в виду идеи, присущие динамике, с тем чтобы в процессе дальнейшей разработки теории избежать расхождения с тем, что уже установлено. Кроме того, когда наши воззрения сделаются более ясными, усвоенный нами язык должен быть для нас помощью, а не препятствием.