ГЛАВА XIX
СРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ

Определение числа электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице

768.] Абсолютные величины электрических единиц в обеих системах зависят от принятых нами единиц длины, времени и массы. Так как их зависимость от этих единиц различна в двух системах, то отношение электрических единиц будет выражаться другим числом сообразно другим единицам длины и времени.

Из приведенной в параграфе 628 таблицы размерностей вытекает, что число электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице изменяется обратно пропорционально величине единицы длины и прямо пропорционально величине единицы времени, которые мы приняли.

Если, следовательно, мы определяем скорость, представленную этим числом, то даже в том случае, если мы примем новые единицы длины и времени, число, представляющее эту скорость, все еще будет числом электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице согласно новой системе измерения.

Эта скорость, указывающая отношение между электростатическими и электромагнитными явлениями, представляет собой поэтому величину определенного чис-

ленного значения, и измерение этого значения является одним из наиболее важных исследований в области электричества. Для того чтобы показать, что искомая нами величина является действительно скоростью, мы можем заметить, что в случае двух параллельных токов притяжение, испытываемое длиной a одного из них, будет согласно параграфу 686 *)

$$F = 2CC' \frac{a}{b},$$

где C, C' являются численными значениями сил токов в электромагнитных единицах, а b—расстояние между ними. Если мы примем $b = 2a$, то

$$F = CC'.$$

Но количество электричества, передаваемого током C за время t, равно Ct в электромагнитных единицах, или nCt в электростатических, если n есть число электростатических единиц в одной электромагнитной единице. Пусть два малых проводника, заряженных количествами электричества, переносимыми двумя токами за время t, помещены на расстоянии r один от другого. Величина отталкивания между ними будет:

$$F' = \frac{CC'n^2t^2}{r^2}.$$

Пусть расстояние r будет выбрано так, что это отталкивание равно притяжению токов. Тогда

$$\frac{CC'n^2t^2}{r^2} = CC'.$$

Отсюда

$$r = nt,$$

или расстояние r должно увеличиваться в n раз быстрее времени t. Отсюда n есть скорость, абсолютная величина которой одинакова, независимо от того, какие единицы мы возьмем.

---

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

769.] Для того чтобы получить физическое представление об этой скорости, вообразим плоскую поверхность, заряженную электричеством до электростатической поверхностной плотности σ и движущуюся в ее собственной плоскости со скоростью v. Эта движущаяся наэлектризованная поверхность будет эквивалентна листу электрического тока при силе тока, протекающего через единицу ширины поверхности, равной σv в электростатических единицах, или $\frac{1}{n}\sigma v$ в электромагнитных единицах, если n есть число электростатических единиц в одной электромагнитной единице. Если другая плоская поверхность, параллельная первой, наэлектризована до поверхностной плотности σ' и движется в том же самом направлении со скоростью v', то она будет эквивалентна второму листу тока.

Электростатическое отталкивание между этими двумя наэлектризованными поверхностями согласно параграфу 124 равняется $2\pi\sigma\sigma'$ на каждую единицу площади противолежащих поверхностей.

Электромагнитное притяжение между двумя листами токов согласно параграфу 653 равно $2\pi uu'$ на каждую единицу площади, причем u и u' являются поверхностными плотностями токов в электромагнитном измерении.

Но $u=\frac{1}{n}\sigma v$ и $u'=\frac{1}{n}\sigma' v'$, так что притяжение будет:

$$2\pi\sigma\sigma'\frac{vv'}{n^2}\ (^{20}).$$

Отношение притяжения к отталкиванию равно отношению vv' к n^2. Поэтому поскольку притяжение и отталкивание являются величинами одного рода, n должно быть величиной того же рода, что и v, т. е. скоростью. Если мы теперь предположим, что скорость каждой из движущихся плоскостей равна n, притяжение будет равно отталкиванию и между ними не будет наблюдаться механического взаимодействия. Отсюда мы можем определить отношение электрических единиц как такую скорость, что две наэлектризованные поверхности, движущиеся в том же самом направлении с этой скоростью, не производят друг на друга никакого взаимного действия. Так как эта скорость порядка 300 000 километров в секунду, то произвести вышеописанный опыт невозможно.

770.] Если электрическую поверхностную плотность и скорость можно было бы сделать столь большими, что магнитная сила могла быть измерена, мы могли бы, по меньшей мере, подтвердить наше предположение, что движущееся наэлектризованное тело эквивалентно электрическому току (21).

Мы можем допустить *), что наэлектризованная поверхность в воздухе начинает разряжаться, испуская искры, когда электрическая сила $2\pi\sigma$ достигает значения 130. Магнитная сила, производимая поверхностным током, есть $2\pi\sigma\frac{v}{n}$. Горизонтальная магнитная сила в Англии приблизительно равна 0,175. Отсюда поверхность, наэлектризованная до высшей возможной степени и движущаяся со скоростью 100 метров в секунду, действовала бы на магнит с силой, равной приблизительно одной четырехтысячной части горизонтальной силы земли, т. е. могущей быть измеренной. Наэлектризованная поверхность может быть поверхностью непроводящего диска, вращающегося в плоскости магнитного меридиана, а магнит может быть помещен поблизости восходящей или нисходящей части диска и быть защищен от его электростатического действия при помощи металлического экрана. Я не знаю, пытались ли до сего времени осуществить такого рода опыт **).

*) W. Thomson, R. S. Proceedings или Reprint, гл. XIX, стр. 247—259.

**) {Указанный эффект был открыт в 1876 г. профессором Роуланд (Rowland). О дальнейших опытах этого рода см. Rowland and Hutchinson, Phil. Mag. 27, 445 (1887); Röntgen, Wied. Ann., 40, 93; Himstedt, Wied. Ann., 40, 720.}

I. *Сравнение единиц электричества*

771.] Так как отношение электромагнитных единиц к электростатическим единицам представлено скоростью, мы в дальнейшем будем обозначать его символом v. Первое численное определение этой скорости было сделано Вебером и Кольраушем*).

Их метод основывался на измерении того же самого количества электричества сначала в электростатических, а затем в электромагнитных единицах.

Количеством электричества, которое они измеряли, был заряд лейденской банки. Он измерялся в электростатических единицах как произведение емкости банки на разность потенциалов ее обкладок. Емкость банки определялась путем сравнения с емкостью подвешенной в открытом пространстве и на значительном расстоянии от других тел сферы. Емкость такой сферы выражается в электростатическом измерении ее радиусом. Таким образом, емкость банки могла быть установлена и выражена как некая длина (см. параграф 227).

Разность потенциалов обкладок банки измерялась путем соединения этих обкладок с зажимами электрометра, постоянные которого были тщательно определены, так что разность потенциалов E становилась известной в электростатических единицах. Умножая эту величину на c—емкость банки, получали заряд банки, выраженный в электростатических единицах.

Для того чтобы определить величину заряда в электромагнитном измерении, банку разряжали через катушку гальванометра. Действие мгновенного тока на магнит гальванометра сообщало магниту известную угловую скорость. Магнит получал определенную степень девиации, при которой его скорость полностью нейтрализовалась противодействующим влиянием земного магнетизма.

*) «Elektrodynamische Maassbestimmungen» и Pogg. Ann., XCIX (авг., стр. 10—25, 1856). Имеется русский перевод статьи Вебера и Кольрауша в сб. «Из предистории радио». (*Ред.*)

Наблюдая максимальную девиацию магнита, можно было определить количество электричества при разряде в электромагнитном измерении, как это указывается в параграфе 748, по формуле

$$Q = \frac{H}{G}\frac{T}{\pi} 2\sin\frac{1}{2}\theta,$$

где Q есть количество электричества в электромагнитных единицах.

Мы, следовательно, должны определить следующие количества: H—интенсивность горизонтальной слагающей земного магнетизма (см. параграф 456); G—основную константу гальванометра (см. параграф 700); T—время одного колебания магнита и θ—девиацию, обусловленную мгновенным током.

Величина v, полученная Вебером и Кольраушем, оказалась равной

$$v = 310\,740\,000 \text{ метров в секунду.}$$

Свойство твердых диэлектриков, которое назвали *электрической абсорбцией*, затрудняет точное определение емкости лейденской банки. Приблизительная емкость изменяется в зависимости от времени, которое проходит от момента заряжения или разряда банки до момента измерения потенциала, и чем больше это время, тем больше величина, получаемая для емкости банки.

Отсюда, поскольку время, потребное для отсчитывания показаний электрометра, велико по сравнению со временем, в течение которого происходит разряд через гальванометр, вероятно, что примерная величина разряда в электростатическом измерении завышена и что, следовательно, величина v, выведенная из нее, повидимому, также завышена.

II. *Величина v, выраженная в форме сопротивления*

772.] Два других метода определения величины v приводят к выражению ее величины как функции от сопротивления некоторого проводника, которое в электромагнитной системе также имеет размерность скорости.

В опыте в том виде, какой был придан ему сэром Вильямом Томсоном, постоянный ток пропускался через проволоку, имеющую большое сопротивление. Электродвижущая сила, которая обусловливает ток в проволоке, измерялась в электростатических единицах путем соединения концов проволоки с зажимами абсолютного электрометра (см. параграфы 217, 218). Сила тока в проволоке измерялась в электромагнитных единицах девиацией подвешенной катушки электродинамометра, через которую проходил этот ток (параграф 725). Сопротивление цепи в электромагнитных единицах получалось путем сравнения со стандартной катушкой в один ом. Помножая силу тока на это сопротивление, мы получаем электродвижущую силу в электромагнитном измерении, а из сравнения этой величины с полученной электростатической величиной получается величина v.

Этот метод требует одновременного определения двух сил при помощи, соответственно, электрометра и электродинамометра, а в результате появляется только отношение этих сил.

773.] Другой метод, которым эти силы, вместо того чтобы быть измеренными отдельно, прямо противополагаются одна другой, применялся автором этих строк. Концы катушки, имеющей большое сопротивление, соединяются с двумя параллельными дисками, один из которых может перемещаться. Та же самая разность потенциалов, которая обусловливает ток в катушке большого сопротивления, вызывает притяжение между дисками. Одновременно другой электрический ток, который в произведенном опыте был отличен от первичного тока, проходит через две катушки, из которых одна приложена к задней стороне неподвижного диска, а другая—к задней стороне подвижного диска. Ток течет в противоположных направлениях в этих катушках, так что они отталкивают одна другую. Путем подбора определенного расстояния между двумя дисками

притяжение в точности уравновешивается отталкиванием, при этом другой наблюдатель при помощи дифференциального гальванометра, снабженного шунтами, определяет отношение первичного и вторичного токов.

В этом опыте единственным измерением, которое должно быть отнесено к материальному эталону, является измерение большого сопротивления, которое должно быть определено в абсолютной величине по сравнению с омом. Другие измерения требуются только для определения отношений и поэтому могут быть сделаны как функции любых произвольных единиц.

Так, отношение двух сил является отношением равенства.

Отношение двух токов находится путем сравнения сопротивлений, когда не наблюдается отклонения в дифференциальном гальванометре.

Сила притяжения зависит от квадрата отношения диаметра дисков к их расстоянию.

Сила отталкивания зависит от отношения диаметра катушек к их расстоянию.

Величина v будет, следовательно, выражена непосредственно как функция сопротивления большой катушки, которая сама по себе сравнивается с омом. Величина v, найденная по методу Томсона, равнялась 28,2 ома *), по способу Максвелла—28,8 ома **).

III. *Электростатическая емкость в электромагнитном измерении*

774.] Емкость конденсатора может быть установлена в электромагнитном измерении путем сравнения электродвижущей силы, производящей заряд, и количества электричества в разрядном токе. При помощи вольтовой батареи поддерживается ток, проходящий

*) Report of British Association, стр. 434 (1869).

**) Phil. Trans., стр. 643 (1868) и Report of British Ass., стр. 436 (1869).

через цепь, в которую включена катушка большого сопротивления. Конденсатор заряжается путем приведения его зажимов в контакт с зажимами катушки сопротивления. Ток через катушку измеряется отклонением, которое он производит в гальванометре. Пусть φ будет этим отклонением, тогда, согласно параграфу 742, ток будет:

$$\gamma = \frac{H}{G} \operatorname{tg} \varphi,$$

где H есть горизонтальная слагающая земного магнетизма, а G—основная константа гальванометра.

Если R есть сопротивление катушки, через которую проходит ток, разность потенциалов на концах катушки будет:

$$E = R\gamma,$$

и электрический заряд, полученный в конденсаторе, емкость которого в электромагнитном измерении равна C, будет:

$$Q = EC.$$

Пусть теперь зажимы конденсатора, а затем зажимы гальванометра отъединяются от цепи и пусть магнит гальванометра находится в положении равновесия. Соединим тогда зажимы конденсатора с зажимами гальванометра. Через гальванометр пройдет мгновенный ток, который вызовет отклонение магнита до крайнего положения θ. Тогда согласно параграфу 748, если разряд равен заряду:

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin \frac{1}{2} \theta.$$

Мы, таким образом, получаем в качестве величины емкости конденсатора в электромагнитном измерении

$$C = \frac{T}{\pi} \frac{1}{R} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \theta}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Емкость конденсатора, следовательно, определяется значениями следующих величин:

T — времени колебания магнита гальванометра от положения равновесия до положения равновесия,

R — сопротивления катушки,

θ — крайнего предела отклонения, произведенного разрядом,

φ — постоянного отклонения, обусловленного током через катушку.

Этот метод был применен профессором Флемингом Дженкиным (Fleeming Jenkin) для определения емкости конденсаторов в электромагнитном измерении *).

Если c будет емкостью того же самого конденсатора в электростатическом измерении, определенной путем сравнения с конденсатором, емкость которого может быть вычислена из его геометрических данных, то

$$c = v^2 C.$$

Отсюда

$$v^2 = \pi R \frac{c}{T} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2 \sin \frac{1}{2} \theta}.$$

Величина v может, следовательно, быть определена этим путем. Она зависит от определения R в электромагнитном измерении. Но, поскольку в нее входит только корень квадратный из R, ошибка в этом определении не будет оказывать столь большого влияния на величину v, как в методах, описанных в параграфах 772 и 773.

Перемежающийся ток

775.] Если в какой-нибудь точке разъединить провод батарейной цепи и соединить разъединенные концы с зажимами конденсатора, ток будет течь в конденсатор с силой, которая уменьшается по мере увеличения раз-

*) Report of British Association, 1867, стр. 483—488.

ности потенциалов между пластинками конденсатора, так что, когда конденсатор получает полную зарядку, соответствующую электродвижущей силе, течение тока совершенно прекращается.

Если зажимы конденсатора теперь отъединить от концов проволоки и снова соединить с ними в обратном порядке, конденсатор будет сам разряжаться через проволоку, а затем сделается снова заряженным противоположным образом, так что через проволоку будет течь перемежающийся ток, общее количество которого равно двум зарядам конденсатора.

При помощи механизма (обычно называемого *коммутатором* или *качающимся коромыслом*—wippe) операция обращения соединений конденсатора может повторяться через одинаковые промежутки времени, каждый из которых равен T. Если этот промежуток достаточно долог для того, чтобы обеспечить полную разрядку конденсатора, количество электричества, передаваемого проволокой в каждом промежутке, будет равно $2EC$, где E—электродвижущая сила, а C—емкость конденсатора.

Если магнит включенного в цепь гальванометра так намагничен, что он качается достаточно медленно, чтобы большое количество разрядов конденсатора приходилось на время одного свободного колебания, то эти разряды будут действовать на магнит как постоянный ток, сила которого равна $\frac{2EC}{T}$. Если теперь удалить конденсатор и вместо него поставить катушку, сопротивление которой устанавливается так, чтобы постоянный ток, текущий через гальванометр, производил бы то же самое отклонение, как и серия разрядов, и если R—сопротивление всей цепи, то

$$\frac{E}{R}=\frac{2EC}{T}, \tag{1}$$

или

$$R=\frac{T}{2C}. \tag{2}$$

Мы, таким образом, можем сравнивать конденсатор с движущимся коммутатором с проводом определенного электрического сопротивления и можем применить различные методы, описанные в параграфах 345—357 *), с целью определения этого сопротивления.

776.] Для этой цели мы можем подставить вместо какой-нибудь из проволок в методе дифференциального гальванометра (параграф 346) или в методе мостика Уитстона (параграф 347) конденсатор с его коммутатором. Предположим, что и в том и в другом достигнуто нулевое отклонение гальванометра, сначала с конденсатором и коммутатором, а затем с катушкой, имеющей сопротивление R_1, поставленной на их место. Тогда количество $\frac{T}{2C}$ будет измеряться сопротивлением цепи, часть которой образует катушка R_1, а другая часть состоит из батареи и остальных проводников. Отсюда сопротивление R, которое мы должны вычислить, равно R_1—сопротивлению катушки—плюс R_2—сопротивление остальной части цепи (включая батарею), причем концы катушки сопротивления считаются электродами системы.

В случае применения дифференциального гальванометра и мостика Уитстона нет надобности делать второй опыт подстановки катушки сопротивления вместо конденсатора. Величина эквивалентного сопротивления может быть найдена путем вычисления из других известных сопротивлений системы.

Используя обозначения параграфа 347 *), предположим, что конденсатор и его коммутатор вставлены вместо проводника AC мостика Уитстона и гальванометр, включенный в OA, показывает нулевое отклонение. Мы знаем, что сопротивление катушки, которая, будучи подставленной в AC, даст нулевое отклонение, определяется формулой

$$b=\frac{c\gamma}{\beta}=R_1. \tag{3}$$

---

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

Другая часть сопротивления, R_2,—это сопротивление системы проводников AO, OC, AB, BC и OB, причем точки A и C рассматриваются как электроды. Отсюда

$$R_2 = \frac{\beta(c+a)(\gamma+\alpha) + c\alpha(\gamma+a) + \gamma\alpha(c+a)}{(c+\alpha)(\gamma+a) + \beta(c+a+\gamma+\alpha)}. \qquad (4)$$

В этом выражении a обозначает внутреннее сопротивление батареи и ее соединений, величину, которая не может быть точно определена, но если сделать эту величину малой по сравнению с другими сопротивлениями, эта неточность лишь слегка повлияет на величину R_2.

Таким образом, величина емкости конденсатора в электромагнитном измерении определяется формулой *)

$$C = \frac{T}{2(R_1+R_2)}. \qquad (5)$$

*) {Так как этот метод имеет большое значение при измерении емкости конденсатора в электромагнитных единицах, мы присоединяем несколько более полное описание его, приспособленное к тому случаю, когда цилиндр конденсатора имеет предохранительное кольцо.

Используемое при этом измерении приспособление представлено на рисунке. $ABCD$ есть мостик Уитстона, в котором гальванометр помещен в точке G, а батарея между B и C. Ветвь AB разомкнута в точках R и S, которые являются двумя полюсами коммутатора, попеременно вступающими в контакт с пружиной P, соединенной с внутренней пластиной H конденсатора. Пластина без предохранительного кольца присоединена к S. Точки C и B соответственно соединены с L и M двумя полюсами коммутатора, которые попеременно входят в контакт с пружиной, соединенной с предохранительным кольцом конденсатора. Система устроена таким образом, что когда коммутаторы работают, порядок событий является следующим:

I. P на S—конденсатор разряжен, Q на M—предохранительное кольцо разряжено.

II. P на R—конденсатор начинает заряжаться, Q на M.

III. P на R—конденсатор полностью заряжен до потенциала $(A)-(B)$. Q на L—предохранительное кольцо заряжено до потенциала $(C)-(B)$.

IV. P на S—конденсатор начинает разряжаться, Q на L.

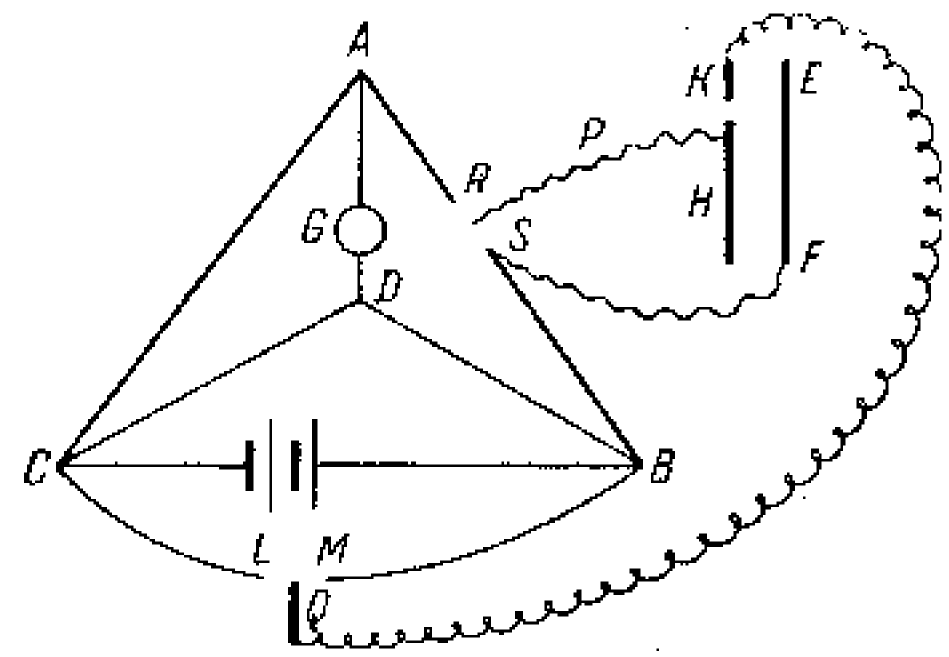
V. P на S—конденсатор разряжен, Q на M—предохранительное кольцо разряжено.

Таким образом, когда коммутаторы работают, поток элек-

777.] Если конденсатор имеет большую емкость и коммутатор очень быстро действует, может оказаться, что конденсатор не полностью разрядится при каждом обращении коммутатора. Уравнение электрического

тричества через конденсатор обусловливается последовательностью мгновенных токов через гальванометр.

Сопротивления подобраны так, что действие этих мгновенных токов, оказываемое на гальванометр, в точности уравновешивает эффект, производимый постоянным током, и в гальванометре не наблюдается какого-либо отклонения.



Для того чтобы исследовать отношения между сопротивлениями в этом случае, предположим, что, в то время как предохранительное кольцо и конденсатор заряжаются,

$\dot x$ = току через BC,

$\dot y$ = току через AB,

$\dot z$ = току через AD,

$\dot w$ = току через CL.

Таким образом, если a, b, α, β, γ являются сопротивлениями в отрезках BC, AC, AD, BD, CD, соответственно, L—коэффициент самоиндукции гальванометра и E—электродвижущая сила батареи, мы из цепей ADC и BCD, соответственно, получаем:

$$L\ddot z + (b+\gamma+\alpha)\dot z + (b+\gamma)\dot y + \gamma\dot w - \gamma\dot x = 0, \qquad (1)$$

$$(a+\gamma+\beta)\dot x - (\gamma+\beta)\dot y - \gamma\dot z - (\gamma+\beta)\dot w - E = 0. \qquad (2)$$

Теперь очевидно, что токи выражаются уравнениями тока во время разряда

$$Q + R_2 C \frac{dQ}{dt} + EC = 0, \qquad (6)$$

где Q — заряд, C — емкость конденсатора, R_2 — сопротивление остальной части системы между зажимами

следующего рода:

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2,$$

$$\dot{z} = \dot{z}_1 + \dot{z}_2,$$

где $\dot{x}_1$ и $\dot{z}_1$ выражают установившиеся токи, когда никакого электричества не течет в конденсатор, а $\dot{x}_2$, $\dot{z}_2$, имеющие форму $Ae^{-\lambda t}$, $Be^{-\lambda t}$, выражают затухающие части токов, обусловленные заряжением конденсатора; $\dot{y}$ и $\dot{w}$ будут иметь форму $Ce^{-\lambda t}$, $De^{-\lambda t}$; t во всех этих выражениях есть время, протекшее от момента начала зарядки конденсатора.

Уравнения (1) и (2) будут таким образом содержать постоянные члены и члены, помноженные на $e^{-\lambda t}$, а последние должны, каждый в отдельности, исчезнуть, отсюда мы имеем:

$$L\ddot{z}_2 + (b + \gamma + \alpha)\,\dot{z}_2 + (b + \gamma)\,\dot{y} + \gamma\dot{w} - \gamma\dot{x}_2 = 0, \qquad (3)$$

$$(a + \gamma + \beta)\,\dot{x}_2 - (\gamma + \beta)\,\dot{y} - \gamma\dot{z}_2 - (\gamma + \beta)\,\dot{w} = 0. \qquad (4)$$

Пусть Z, X будут количества электричества, которые прошли через гальванометр и батарею соответственно в результате процесса зарядки конденсатора, а Y и W — заряды в конденсаторе и в предохранительном кольце. Тогда, интегрируя уравнения (3) и (4) во времени от момента, когда конденсатор начал заряжаться, до момента, пока он полностью заряжен, и учитывая, что в каждый из этих моментов времени $\dot{z}_2 = 0$, мы получаем:

$$(b + \gamma + \alpha)\,Z + (b + \gamma)\,Y + \gamma W - \gamma X = 0,$$

$$(a + \gamma + \beta)\,X - (\gamma + \beta)\,Y - \gamma Z - (\gamma + \beta)\,W = 0,$$

отсюда, исключая X,

$$Z\left(b + \gamma + \alpha - \frac{\gamma^2}{a + \gamma + \beta}\right) + Y\left(b + \gamma - \frac{\gamma(\gamma + \beta)}{a + \gamma + \beta}\right) + W\frac{a}{a + \gamma + \beta} = 0.$$

На практике сопротивление батареи очень мало по сравнению с β, b или γ, так что третьим членом можно пренебречь

конденсатора и E — электродвижущая сила вследствие соединения с батареей. Отсюда

$$Q = (Q_0 + EC)\,e^{-\frac{t}{R_2 C}} - EC, \qquad (7)$$

где Q_0 есть начальное значение Q.

по сравнению со вторым; пренебрегая сопротивлением батареи, мы получаем:

$$Z = -\frac{b}{b + \gamma + \alpha - \frac{\gamma^2}{\gamma + \beta}}\,Y.$$

Если $\{A\}$, $\{B\}$, $\{D\}$ обозначают потенциалы A, B, D, когда конденсатор полностью заряжен, а C — емкость конденсатора, тогда

$$Y = C\,[\{A\} - \{B\}],$$

но

$$\frac{\{A\} - \{B\}}{\alpha + \beta\frac{(b + \alpha + \gamma)}{\gamma}} = \frac{\{A\} - \{D\}}{\alpha}.$$

Правая сторона этого уравнения, очевидно, является $\dot{z}_1$ — установившимся током через гальванометр, так что

$$Y = C\dot{z}_1\left(\alpha + \beta\frac{(b + \alpha + \gamma)}{\gamma}\right), \qquad (5)$$

$$Z = -\dot{z}_1 bC\frac{\left\{\alpha + \beta\frac{(b + \alpha + \gamma)}{\gamma}\right\}}{b + \gamma + \alpha - \frac{\gamma^2}{\gamma + \beta}}. \qquad (6)$$

Если конденсатор заряжается n раз в секунду, количество электричества, которое в итоге проходит через гальванометр в секунду, есть nZ. Если стрелка гальванометра остается не отклоненной, то количество электричества, которое проходит через гальванометр в единицу времени, должно равняться нулю.

Но это количество равно $nZ + \dot{z}_1$, так что

$$nZ + \dot{z}_1 = 0.$$

Если τ есть продолжительность контакта в течение каждого разряда, количество электричества в каждом разряде будет:

$$Q = 2EC\frac{1-e^{-\frac{\tau}{R_2C}}}{1+e^{-\frac{\tau}{R_2C}}}. \qquad (8)$$

Если c и γ в уравнении (4) велики по сравнению с β, a или α, время, представленное R_2C, может быть сделано столь малым по сравнению с τ, что, вычисляя величину показательного члена в уравнении (8), мы можем использовать значение C из уравнения (5). Мы, таким образом, находим:

$$\frac{\tau}{R_2C} = 2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}, \qquad (9)$$

где R_1 есть сопротивление, которое должно быть подставлено вместо конденсатора, для того чтобы произвести эквивалентный эффект; R_2 есть сопротивление остальной части системы; T — интервал между началами двух последовательных разрядов и τ — продолжительность контакта для каждого разряда. Таким образом, для уточненного значения C в электромагнитном измерении мы получаем:

$$C = \frac{1}{2}\frac{T}{R_1+R_2}\frac{1+e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}{1-e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}. \qquad (10)$$

Подставляя это отношение в уравнение (6), мы получаем,

$$C = \frac{1}{n}\frac{\gamma}{b\beta}\frac{\left\{1-\frac{\gamma^2}{(\gamma+\beta)(b+\alpha+\gamma)}\right\}}{1+\frac{\gamma\alpha}{(b+\alpha+\gamma)\beta}}. \qquad (7)$$

Из этого уравнения мы можем вычислить емкость, если мы знаем сопротивления и частоту.

См. J. J. Thomson and Searle, Phil. Trans., 1890, A, стр. 583.}

IV. *Сравнение электростатической емкости конденсатора с электромагнитной емкостью самоиндукции катушки*

778.] Если соединить с зажимами конденсатора емкости C две точки проводящей цепи, между которыми помещено сопротивление R, то в том случае, если электродвижущая сила действует на цепь, часть тока, вместо того чтобы пройти через сопротивление R, будет использована на зарядку конденсатора. Ток через R, следовательно, постепенно увеличивается от нуля до его конечного значения. Из математической теории вытекает, что процесс, в результате которого ток через R увеличивается от нуля до его конечного значения, выражается формулой в точности того же рода, как и формула, показывающая изменение величины тока, обусловленного постоянной электродвижущей силой, действующей на катушку электромагнита. Поэтому мы можем поместить конденсатор и электромагнит в две противоположные ветви мостика Уитстона таким образом, что ток через гальванометр всегда равен нулю, даже в моменты замыкания или размыкания цепи батареи.

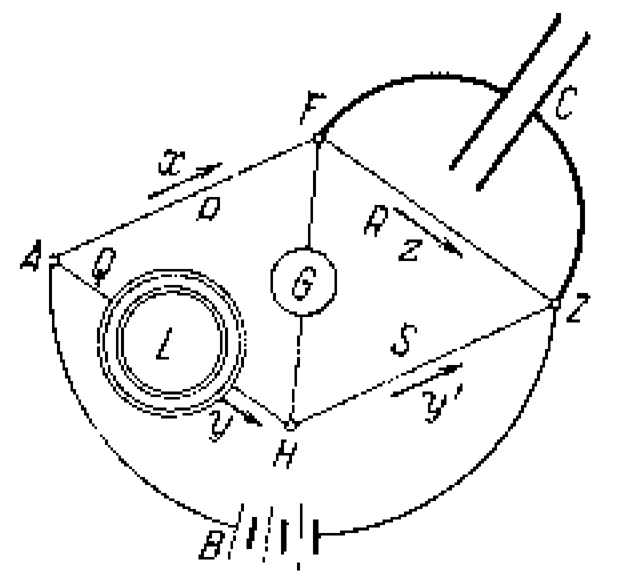


Рис. 17.

На приводимом рисунке пусть P, Q, R, S будут, соответственно, сопротивления четырех ветвей мостика Уитстона. Пусть катушка, имеющая коэффициент самоиндукции L, будет частью ветви AH, сопротивление которой равно Q, и пусть зажимы конденсатора, емкость которого равна C, соединены проводами, имеющими малое сопротивление, с точками F и Z. Для простоты допустим, что в гальванометре G, зажимы которого соединены с F и H, тока нет. Мы, следовательно, должны установить условие, при котором потенциал в точке F равен потенциалу в точке H. И лишь в том случае, если захотим оценить степень точности метода, нам потребуется вычислить ток через гальванометр, когда это условие не выполнено.

Пусть x будет полное количество электричества, которое прошло через AF, и z — то количество электричества, которое прошло через FZ в промежуток времени t. Тогда $x-z$ будет зарядом конденсатора.

Электродвижущая сила, действующая между обкладками конденсатора, будет по закону Ома $R\frac{dz}{dt}$, так что если емкость конденсатора равна C:

$$x-z=RC\frac{dz}{dt}. \qquad (1)$$

Пусть y — полное количество электричества, которое прошло через ветвь AH. Электродвижущая сила между A и H должна быть равна электродвижущей силе между A и F, или

$$Q\frac{dy}{dt}+L\frac{d^2y}{dt^2}=P\frac{dx}{dt}. \qquad (2)$$

Так как через гальванометр не проходит никакого тока, количество, которое прошло через HZ, должно также равняться y, и мы находим:

$$S\frac{dy}{dt}=R\frac{dz}{dt}. \qquad (3)$$

Подставляя в уравнение (2) значение x из уравнения (1) и сравнивая с уравнением (3), мы в качестве условия, при котором через гальванометр не проходит никакого тока, находим:

$$RQ\left(1+\frac{L}{Q}\frac{d}{dt}\right)z=SP\left(1+RC\frac{d}{dt}\right)z. \qquad (4)$$

Условием отсутствия тока в гальванометре при установившемся режиме будет, как и при обычной форме мостика Уитстона:

$$QR=SP. \qquad (5)$$

Дополнительным условием отсутствия тока при замыкании и размыкании соединения с батареей будет:

$$\frac{L}{Q}=RC. \qquad (6)$$

Здесь $\frac{L}{Q}$ и RC являются так называемыми временными константами соответственно ветвей Q и R. Если путем изменения Q и R мы можем так подобрать ветви мостика Уитстона, что гальванометр не будет показывать никакого тока, будь то при замыкании или размыкании цепи или при установившемся токе в ветвях, тогда мы знаем, что временная константа катушки равна временной константе конденсатора.

Коэффициент самоиндукции L может быть определен в электромагнитном измерении путем сравнения с коэффициентом взаимной индукции двух цепей, геометрические данные которых известны (параграф 756). Эта величина имеет размерность длины.

Емкость конденсатора может быть определена в электростатическом измерении путем сравнения с конденсатором определенной геометрической структуры (параграф 229). Эта величина также имеет размерность длины c.

Емкость в электромагнитном измерении будет:

$$C=\frac{c}{v^2}. \qquad (7)$$

Подставляя это значение в уравнение (6), мы для значения v^2 получаем:

$$v^2=\frac{c}{L}QR, \qquad (8)$$

где c есть емкость конденсатора в электростатическом измерении, L — коэффициент самоиндукции катушки в электромагнитном измерении, Q и R — сопротивления в электромагнитном измерении.

Значение v, определенное этим методом, зависит, как и в случае второго метода, от определения единицы сопротивления (см. параграфы 772, 773).

V. *Сочетание электростатической емкости конденсатора с электромагнитной емкостью самоиндукции катушки*

779.] Пусть C будет емкостью конденсатора, обкладки которого соединены проводом сопротивления R. Пусть в этот провод включены катушки L и L' и пусть L обозначает сумму их емкостей самоиндукции. Катушка L' подвешена на двух нитях и состоит из двух параллельных катушек в вертикальных плоскостях, между которыми проходит вертикальная ось с укрепленным на ней магнитом M, ось которого вращается в горизонтальной плоскости между катушками L, L'. Катушка L имеет большой коэффициент самоиндукции и неподвижна, подвешенная катушка L' защищена от токов воздуха, образующихся вследствие вращения магнита, путем помещения движущихся частей в полый ящик. Движение магнита вызывает образование наведенных токов в катушке, которые взаимодействуют с магнитом, так что плоскость подвешенной катушки отклоняется в направлении вращения магнита. Определим силу наведенных токов и величину отклонения подвешенной катушки.

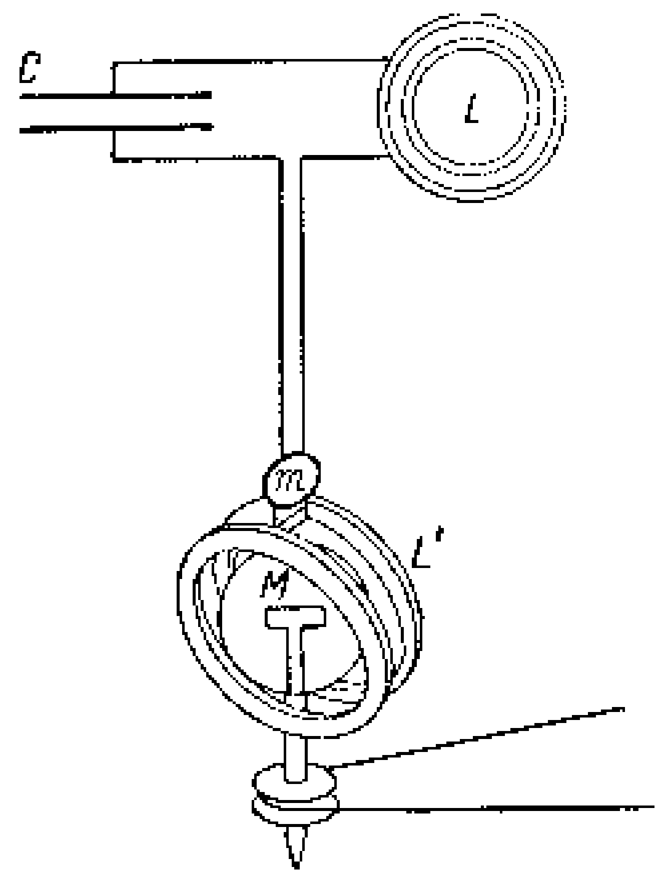


Рис. 18.

Пусть x будет заряд электричества на верхней пластине конденсатора C, тогда, если E есть электродвижущая сила, производящая этот заряд, мы по теории конденсаторов имеем:

$$x = CE. \tag{1}$$

По теории электрических токов мы также имеем:

$$R\dot{x} + \frac{d}{dt}(L\dot{x} + M\cos\theta) + E = 0, \tag{2}$$

где M есть электромагнитное количество движения цепи L', когда ось магнита расположена перпендикулярно к плоскости катушки, и θ есть угол между осью магнита и нормалью к этой плоскости.

Уравнение для определения x, следовательно, будет:

$$CL\frac{d^2x}{dt^2} + CR\frac{dx}{dt} + x = CM\sin\theta\frac{d\theta}{dt}. \tag{3}$$

Если катушка находится в положении равновесия и если вращение магнита равномерно, а угловая скорость равна n, то

$$\theta = nt. \tag{4}$$

Выражение для тока состоит из двух частей, одна из которых независима от правой стороны уравнения и уменьшается как показательная функция времени. Другая часть, которая может быть названа вынужденным током, зависит исключительно от члена с θ и может быть представлена в форме

$$x = A\sin\theta + B\cos\theta. \tag{5}$$

Находя величины A и B путем подстановки в уравнение (3), мы получаем:

$$x = -MCn\frac{RCn\cos\theta - (1 - CLn^2)\sin\theta}{R^2C^2n^2 + (1 - CLn^2)^2}. \tag{6}$$

Момент силы, с которой магнит действует на катушку L', по которой течет ток x, является обратным тому, который действовал бы на магнит, если бы катушка была неподвижна; он дается следующим выражением:

$$\Theta = -\dot{x}\frac{d}{d\theta}(M\cos\theta) = M\sin\theta\frac{dx}{dt}. \tag{7}$$

Интегрируя это выражение по t для одного оборота и деля на время, мы находим для среднего значения Θ:

$$\Theta = \frac{1}{2}\frac{M^2RC^2n^3}{R^2C^2n^2 + (1 - CLn^2)^2}. \tag{8}$$

Если катушка имеет значительный момент инерции, ее вынужденные колебания будут очень малы, а среднее отклонение будет пропорционально Θ.

Пусть D_1, D_2, D_3 будут наблюдаемые отклонения, соответствующие угловым скоростям n_1, n_2, n_3 магнита, тогда вообще

$$P\frac{n}{D} = \left(\frac{1}{n} - CLn\right)^2 + R^2C^2, \tag{9}$$

где P есть константа.

Исключая P и R из трех уравнений этой формы, мы находим:

$$C^2L^2 = \frac{1}{n_1^2 n_2^2 n_3^2}\,\frac{\frac{n_1^3}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\frac{n_2^3}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\frac{n_3^3}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}{\frac{n_1}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\frac{n_2}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\frac{n_3}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}. \tag{10}$$

Если n_2 таково, что $CLn_2^2 = 1$, величина $\frac{n}{D}$ будет минимумом для этой величины n. Должны быть взяты другие значения n, одно — большее, а другое — меньшее n_2.

Величина CL, определенная из уравнения (10), имеет размерность квадрата времени. Назовем ее τ^2.

Если C_s будет электростатически измеренной емкостью конденсатора и L_m электромагнитно измеренной самоиндукцией катушки, то C_s и L_m имеют размерности длины, и произведение

$$C_sL_m = v^2C_sL_s = v^2C_mL_m = v^2\tau^2 \tag{11}$$

и

$$v^2 = \frac{C_sL_m}{\tau^2}, \tag{12}$$

где τ^2 есть значение C^2L^2, определенное экспериментально.

Предложенный здесь опыт в качестве метода определения имеет тот же характер, что и опыт, описанный сэром У. Р. Гров (W. R. Grove, Phil. Mag., стр. 360—363, март 1868 г.). Смотри также примечание по поводу этого опыта, сделанное автором настоящей работы, в майском номере указанного журнала 1868 г., стр. 360—363.

VI. *Электростатическое измерение сопротивления* (см. параграф 355)

780.] Пусть конденсатор емкости C будет разряжен через проводник сопротивления R. Тогда, если x есть заряд в некоторый момент,

$$\frac{x}{C} + R\frac{dx}{dt} = 0, \tag{1}$$

откуда

$$x = x_0e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{2}$$

Если каким-нибудь способом мы можем осуществить кратковременный контакт, промежуток времени которого в точности известен, так что мы позволяем току течь через проводник в течение времени t, то, если E_0 и E_1 являются показаниями электрометра, соединенного с конденсатором, до и после этой операции:

$$RC(\ln E_0 - \ln E_1) = t. \tag{3}$$

Если C известно в электростатическом измерении как линейная величина, R может быть найдено из этого уравнения в электростатическом измерении как обратная величина некоторой скорости.

Если R_s есть численное значение сопротивления, определенное таким образом, и R_m — численное значение сопротивления в электромагнитном измерении, то

$$v^2 = \frac{R_m}{R_s}. \tag{4}$$

Так как для этого опыта необходимо, чтобы R было очень велико, и так как, с другой стороны, R должно быть мало в электромагнитных опытах, описанных в параграфе 763 и дальше, опыты должны быть выполнены на различных проводниках и сопротивления этих проводников сравнены обычными методами.