Равным образом путем прибавления приставки *микро* образуется малая единица — одна миллионная часть первоначальной единицы.

Нижеследующая таблица дает значения этих практических единиц в различных системах, которые были приняты в разное время [18].

Основные единицы	Применяемые на практике системы	Доклад Британской ассоциации, 1863	Томсон	Вебер
Длина	$^1/_4$ *земного меридиана*	*метр*	*сантиметр*	*миллиметр*
Время	*секунда*	*секунда*	*секунда*	*секунда*
Масса	10^{-11} *грамма*	*грамм*	*грамм*	*миллиграмм*
Сопротивление	ом	10^7	10^9	10^{10}
Электродвижущая сила	вольт	10^5	10^8	10^{11}
Емкость	фарада	10^{-7}	10^{-9}	10^{-10}
Количество электричества	фарада (заряженная до 1 вольта)	10^{-2}	10^{-1}	10

ГЛАВА XI

ОБ ЭНЕРГИИ И НАПРЯЖЕНИЯХ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Электростатическая энергия

630.] Энергия всякой системы может быть разделена на *потенциальную* энергию и *кинетическую* энергию. Потенциальная энергия, имеющая своей причиной электризацию, уже рассматривалась в параграфе 85 *). Ее можно представить соотношением

$$W=\frac{1}{2}\sum (e\Psi), \tag{1}$$

где e есть заряд электричества в том месте, где электрический потенциал равен Ψ, а суммирование должно быть распространено на все точки, в которых находятся электрические заряды.

Если f, g, h являются составляющими электрического смещения, количество электричества в элементе объема $dx\,dy\,dz$ будет:

$$e=\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right)dx\,dy\,dz \tag{2}$$

и

$$W=\frac{1}{2}\iiint\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right)\Psi\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

где интегрирование должно быть распространено на все пространство [19].

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

631.] Интегрируя это выражение по частям и вспоминая, что когда расстояние r от данной точки конечной электрической системы становится бесконечным, потенциал Ψ становится бесконечно малой величиной порядка r^{-1}, а f, g, h — бесконечно малыми порядка r^{-2}, получим:

$$W = -\frac{1}{2}\iiint\left(f\frac{d\Psi}{dx} + g\frac{d\Psi}{dy} + h\frac{d\Psi}{dz}\right)dx\,dy\,dz, \quad (4)$$

где интегрирование должно быть распространено на все пространство:

Если мы теперь составляющие электродвижущей напряженности обозначим через P, Q, R вместо $-\frac{d\Psi}{dx}$, $-\frac{d\Psi}{dy}$, $-\frac{d\Psi}{dz}$, то найдем:

$$W = \frac{1}{2}\iiint(Pf + Qg + Rh)\,dx\,dy\,dz\,^{*}). \quad (5)$$

Отсюда видно, что электростатическая энергия всего поля не изменится, если мы предположим, что она находится в каждой точке поля, где существуют электрическая сила и электрическое смещение, а не сосредоточена в местах нахождения свободного электричества.

*) {Это выражение для электростатической энергии было выведено в первом томе, исходя из допущения, что электростатическая сила имеет потенциал. Это допущение не будет справедливым, если часть электродвижущей интенсивности имеет своей причиной электромагнитную индукцию. Если же, однако, мы примем ту точку зрения, что эта часть энергии возникает из поляризованного состояния диэлектрика и на единицу объема равняется $\frac{1}{8\pi K}(f^2+g^2+h^2)$, потенциальная энергия в этом случае будет зависеть только от поляризации диэлектрика, независимо от того, каким образом эта поляризация получена. Поскольку

$$\frac{f}{4\pi K} = P, \quad \frac{g}{4\pi K} = Q, \quad \frac{h}{4\pi K} = R,$$

энергия, следовательно, равна $\frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh)$ на единицу объема.}

Энергия в единице объема равна половине произведения электродвижущей силы и электрического смещения, помноженной на косинус угла, образуемого этими векторами.

На языке кватернионов это будет $-\frac{1}{2}S.\mathfrak{E}\mathfrak{D}$.

Магнитная энергия

632.]*) Мы можем рассматривать энергию, обусловленную намагничением, тем же путем, которым мы шли в случае электризации (параграф 85). Если A, B, C являются составляющими намагничения, а α, β, γ — составляющими магнитной силы, потенциальная энергия системы магнитов согласно параграфу 369 будет:

$$-\frac{1}{2}\iiint(A\alpha + B\beta + C\gamma)\,dx\,dy\,dz, \quad (6)$$

причем интегрирование распространяется на пространство, занятое намагниченной материей. Эта часть энергии, однако, будет включена в кинетическую энергию в той форме, которую мы сейчас ей придадим.

633]. В случае, если нет электрических токов, мы можем преобразовать указанное выражение следующим образом.

Мы знаем, что

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0. \quad (7)$$

Отсюда согласно параграфу 97, если

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy}, \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}, \quad (8)$$

как это всегда имеет место в магнитных явлениях при отсутствии токов, то

$$\iiint(a\alpha + b\beta + c\gamma)\,dx\,dy\,dz = 0, \quad (9)$$

*) См. приложение I в конце этой главы.

причем интеграл распространяется на все пространство, или

$$\iiint \{(\alpha + 4\pi A)\alpha + (\beta + 4\pi B)\beta + (\gamma + 4\pi C)\gamma\}\, dx\, dy\, dz = 0. \tag{10}$$

Отсюда энергия, относящаяся к магнитной системе, будет:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, dx\, dy\, dz &= \\ = \frac{1}{8\pi}\iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, dx\, dy\, dz, \\ = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{H}^2\, dx\, dy\, dz. \end{aligned} \tag{11}$$

Электрокинетическая энергия

634.] В параграфе 578 мы уже выразили кинетическую энергию системы токов в форме

$$T = \frac{1}{2}\sum (pi), \tag{12}$$

где p есть электромагнитное количество движения цепи, а i есть сила тока, текущего по этой цепи, и суммирование распространено по всей цепи.

Но мы доказали в параграфе 590, что p может быть выражено как линейный интеграл, имеющий форму

$$p = \int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right) ds, \tag{13}$$

где F, G, H являются составляющими электромагнитного количества движения $\mathfrak{A}$ в точке (x, y, z), и интегрирование должно быть распространено вдоль замкнутой цепи s. Мы, следовательно, находим:

$$T = \frac{1}{2}\sum i\int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right) ds. \tag{14}$$

Если u, v, w являются составляющими плотности тока в некоторой точке проводящей цепи и если S

есть поперечное сечение цепи, тогда мы можем написать:

$$i\frac{dx}{ds} = uS, \quad i\frac{dy}{ds} = vS, \quad i\frac{dz}{ds} = wS. \tag{15}$$

Так как объем $S\,ds = dx\,dy\,dz$, то мы находим:

$$T = \frac{1}{2}\iiint (Fu + Gv + Hw)\, dx\, dy\, dz, \tag{16}$$

где интегрирование должно быть распространено на все части пространства, где имеются электрические токи.

635.] Подставим теперь вместо u, v, w их значения, данные уравнениями электрических токов (E) (параграф 607) как функции составляющих α, β, γ магнитной силы. Мы тогда имеем:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{8\pi}\iiint \left\{F\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + G\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) + \right. \\ \left. + H\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right)\right\} dx\, dy\, dz, \end{aligned} \tag{17}$$

где интегрирование распространяется на часть пространства, заключающую все токи.

Если мы проинтегрируем это по частям и будем иметь в виду, что на большом расстоянии r от системы α, β, γ будут порядка r^{-3} {и что на поверхности, разделяющей две среды, F, G, H и тангенциальная магнитная сила непрерывны}, мы найдем, что в том случае, когда интегрирование распространено на все пространство, выражение (17) сведется к

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{8\pi}\iiint \left\{\alpha\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) + \beta\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right) + \right. \\ \left. + \gamma\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)\right\} dx\, dy\, dz. \end{aligned} \tag{18}$$

Согласно уравнениям (A) магнитной индукции параграфа 591 мы можем подставить вместо выражений в круглых скобках составляющие магнитной индукции

a, b, c, так что кинетическая энергия может быть написана в виде

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dx\, dy\, dz, \qquad (19)$$

где интегрирование должно быть распространено на все части пространства, в которых магнитная сила и магнитная индукция имеют значения, отличающиеся от нуля.

Выражение в скобках в этом интеграле является произведением магнитной индукции на составляющую магнитной силы в направлении магнитной индукции.

На языке кватернионов это может быть написано более просто $-S.\mathfrak{B}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ есть магнитная индукция, составляющими которой являются a, b, c, а $\mathfrak{H}$ есть магнитная сила, составляющими которой являются α, β, γ.

636.] Электрокинетическая энергия системы может быть выражена или как интеграл, взятый по расположению электрических токов, или же как интеграл, распространенный на все части поля, в которых существует магнитная сила. Первый интеграл, однако, является естественным выражением теории, предполагающей, что токи непосредственно влияют один на другой на расстоянии, в то время как второй относится к теории, которая пытается объяснить действие между токами при помощи какого-то промежуточного действия в пространстве между ними. Так как в этом трактате мы приняли последний метод исследования, мы, естественно, принимаем, что второе выражение кинетической энергии имеет больший смысл.

Согласно нашей гипотезе мы допускаем, что кинетическая энергия существует везде, где есть магнитная сила, т. е., вообще говоря, в любой части поля. Количество этой энергии на единицу объема есть $-\frac{1}{8\pi}S.\mathfrak{B}\mathfrak{H}$, и эта энергия существует в форме какого-то движения материи в любой части пространства.

Когда мы приступим к рассмотрению открытия Фарадея, касающегося действия магнетизма на поляризованный свет, мы приведем соображения, дающие основание предполагать, что там, где имеются магнитные силовые линии, имеется вращательное движение материи около этих линий (см. параграф 821).

Сравнение магнитной и электрокинетической энергий

637.] В параграфе 423 *) мы нашли, что взаимная потенциальная энергия двух магнитных листков, имеющих силы φ и φ' и ограниченных соответственно замкнутыми кривыми s и s', равна:

$$-\varphi\varphi' \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

где ε есть угол между направлениями ds и ds', а r есть расстояние между ними. Мы также нашли в параграфе 521 *), что взаимная энергия двух цепей s и s', по которым текут токи i и i', равна

$$ii' \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds'.$$

Если i и i' равны, соответственно, φ и φ', механическое действие между магнитными листками равно механическому действию между соответствующими электрическими токами и имеет то же самое направление. В случае магнитных листков сила стремится уменьшить их взаимную потенциальную энергию, в случае токов она стремится увеличить их взаимную энергию, потому что энергия эта—кинетическая.

Ни при каком расположении намагниченной материи нельзя создать систему, соответствующую во всех отношениях электрической цепи, так как потенциал магнитной системы однозначен в любой точке пространства, в то время как потенциал в электрической системе многозначен. Но всегда возможно при помощи соответствующего расположения бесконечно малых электрических цепей создать систему, во всех отношениях соответствующую любой магнитной системе, при условии,

*) Этот параграф в настоящее издание не вошел. (*Ред.*)

что линия интегрирования, которой мы следуем при исчислении потенциала, ни в коем случае не проходит через какую-либо из этих малых цепей. Более подробно это будет изложено в параграфе 833.

Действие магнитов на расстоянии совершенно идентично с действием электрических токов. Мы поэтому попытаемся вывести оба явления от одной и той же причины, и так как мы не можем объяснить электрические токи при помощи магнитов, мы должны принять другую альтернативу и объяснить магниты при помощи молекулярных электрических токов.

638.] В нашем исследовании магнитных явлений в части III *) этого трактата мы не делали попыток объяснять магнитное действие на расстоянии, а рассматривали это действие как фундаментальный факт, установленный опытом. Мы, следовательно, допускали, что энергия магнитной системы является потенциальной энергией и что эта энергия *уменьшается*, когда части системы подвергаются действию магнитных сил.

Если, однако, магнитные свойства тел считать происходящими от электрических токов, циркулирующих в их молекулах, то энергия магнитов будет кинетической, а сила, действующая между ними, будет стремиться двигать их в направлении, в котором кинетическая энергия *увеличивается*, если силы токов поддерживаются постоянными.

Этот способ объяснения магнетизма требует, чтобы мы отбросили также метод, которому следовали в части III, где мы рассматривали магнит как непрерывное и однородное тело, мельчайшие части которого имеют те же магнитные свойства, что и целое.

Мы должны сейчас рассматривать магнит, как содержащий конечное, хотя и весьма большое число электрических токов, так что он имеет существенно молекулярное—отличное от непрерывного—строение.

Если мы предположим, что наш математический аппарат настолько груб, что наша линия интегрирования не может пронизать молекулярной цепи и что в нашем элементе объема заключено громадное количество магнитных молекул, мы придем к результатам, похожим на результаты части III. Однако, если считать наш аппарат имеющим более тонкое строение и способным исследовать все, что происходит внутри молекул, мы должны отказаться от старой теории магнетизма и принять теорию Ампера, которая не допускает существования других магнитов, кроме тех, которые состоят из электрических токов.

*) Эта часть в настоящее издание не вошла. (*Ред.*)

Мы, следовательно, должны рассматривать как магнитную, так и электромагнитную энергии как кинетические энергии и должны приписывать им надлежащие знаки, как это сделано в параграфе 635.

Хотя и в последующем мы можем при случае, как это имеет место в параграфе 639 и других, пытаться развивать старую теорию магнетизма, мы все же находим, что идеально последовательную систему мы получаем, только отказавшись от этой теории и принимая теорию Ампера о молекулярных токах, как в параграфе 644.

Энергия поля, следовательно, состоит только из двух частей: электростатической, или потенциальной, энергии

$$W = \frac{1}{2} \iint (Pf + Qg + Rh)\, dx\, dy\, dz$$

и электромагнитной, или кинетической, энергии

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dx\, dy\, dz$$

О силах, действующих на элемент тела, помещенного в электромагнитном поле

Силы, действующие на магнитный элемент

639.] *) Потенциальная энергия элемента $dx\,dy\,dz$ тела, намагниченного с интенсивностью, составляющими которой являются A, B, C, и помещенного в поле

*) См. приложение II в конце этой главы.

магнитной силы, составляющими которой являются α, β, γ, равна:

$$-(A\alpha+B\beta+C\gamma)\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда, если сила, заставляющая элемент двигаться без вращения в направлении x, есть $X_1 dx\,dy\,dz$,

$$X_1=A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx}, \tag{1}$$

и если момент пары сил, стремящихся вращать элемент около оси x от y по направлению к z, есть $L\,dx\,dy\,dz$,

$$L=B\gamma-C\beta. \tag{2}$$

Силы и моменты, соответствующие осям y и z, могут быть написаны при помощи соответствующих подстановок.

640.] Если через намагниченное тело проходит электрический ток, составляющие которого суть u, v, w, тогда согласно уравнениям (С) параграфа 603 будет действовать дополнительная электромагнитная сила, составляющие которой равны X_2, Y_2, Z_2, причем

$$X_2=vc-wb. \tag{3}$$

Отсюда полная сила X, обусловленная как магнетизмом молекулы, так и проходящим через нее током, будет:

$$X=A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx}+vc-wb. \tag{4}$$

Величины a, b, c являются составляющими магнитной индукции, связанными с α, β, γ, составляющими магнитной силы, при помощи уравнений, данных в параграфе 400:

$$\left.\begin{aligned} a&=\alpha+4\pi A,\\ b&=\beta+4\pi B,\\ c&=\gamma+4\pi C.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Составляющие силы тока u, v, w могут быть выражены через α, β, γ при помощи уравнений параграфа 607:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u&=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz},\\ 4\pi v&=\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},\\ 4\pi w&=\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} X=\frac{1}{4\pi}\Big\{(a-\alpha)\frac{d\alpha}{dx}+(b-\beta)\frac{d\beta}{dx}+(c-\gamma)\frac{d\gamma}{dx}+\\ b\left(\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}\right)+c\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)\Big\}=\\ =\frac{1}{4\pi}\left\{a\frac{d\alpha}{dx}+b\frac{d\alpha}{dy}+c\frac{d\alpha}{dz}-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Согласно параграфу 403

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0. \tag{8}$$

Умножив это уравнение (8) на α, разделив его на 4π и прибавив результат к (7), найдем:

$$X=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx}\left[a\alpha-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right]+\frac{d}{dy}[b\alpha]+\frac{d}{dz}[c\alpha]\right\}, \tag{9}$$

а также согласно (2)

$$L=\frac{1}{4\pi}((b-\beta)\gamma-(c-\gamma)\beta)= \tag{10}$$

$$=\frac{1}{4\pi}(b\gamma-c\beta), \tag{11}$$

где сила X есть сила, отнесенная к единице объема, в направлении x, а L — момент сил (на единицу объема) относительно этой оси.

Объяснение этих сил гипотезой среды, находящейся в состоянии напряжения

641.] Обозначим напряжение любого рода, относящееся к единице площади, символом, имеющим форму P_{hk}. Первый значок h указывает, что нормаль к поверхности, на которую предполагается действующим напряжение, параллельна оси h. Второй значок k указывает, что направление напряжения, с которым часть тела, находящаяся на положительной стороне поверхности, действует на часть, находящуюся на отрицательной стороне, параллельно оси k.

Направления h и k могут быть одинаковыми, в этом случае напряжение является нормальным напряжением; они могут располагаться под углом друг к другу, в этом случае напряжение является косоугольным; они могут быть перпендикулярны друг к другу, в этом случае напряжение является тангенциальным.

Условие, которое устанавливает, что напряжения не производят вращения элементарных объемов тела, есть:

$$P_{hk}=P_{kh}.$$

В случае намагниченного тела, однако, такая тенденция к вращению имеется, так что это условие, которое осуществляется в обычной теории напряжения, в этом случае не выполняется.

Рассмотрим действие напряжений на шесть сторон элементарного объема тела $dx\,dy\,dz$, считая началом координат его центр тяжести.

На положительной стороне $dy\,dz$, на которой значение x равно $\frac{1}{2}dx$, действующие силы будут:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{параллельно } x, \left(P_{xx}+\frac{1}{2}\frac{dP_{xx}}{dx}dx\right)dy\,dz=X_{+x},\\
&\text{параллельно } y, \left(P_{xy}+\frac{1}{2}\frac{dP_{xy}}{dx}dx\right)dy\,dz=Y_{+x},\\
&\text{параллельно } z, \left(P_{xz}+\frac{1}{2}\frac{dP_{xz}}{dx}dx\right)dy\,dz=Z_{+x}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Силы, действующие на обратной стороне $(-X_{-x}, -Y_{-y}$ и $-Z_{-z})$, могут быть найдены изменением знака dx. Мы можем тем же самым способом выразить системы трех сил, действующих на каждую из других сторон элемента; направление силы в этом случае указывается прописной буквой, а сторона, на которую она действует, значком.

Если $X\,dx\,dy\,dz$ есть полная сила, параллельная x, действующая на элемент объема, то

$$\begin{aligned}X\,dx\,dy\,dz&=X_{+x}+X_{+y}+X_{+z}+X_{-x}+X_{-y}+X_{-z},\\
&=\left(\frac{dP_{xx}}{dx}+\frac{dP_{yx}}{dy}+\frac{dP_{zx}}{dz}\right)dx\,dy\,dz,\end{aligned}$$

откуда

$$X=\frac{d}{dx}P_{xx}+\frac{d}{dy}P_{yx}+\frac{d}{dz}P_{zx}. \qquad (13)$$

Если $L\,dx\,dy\,dz$ есть момент силы относительно оси x, стремящейся повернуть элемент объема в направлении от y к z,

$$\begin{aligned}L\,dx\,dy\,dz&=\frac{1}{2}dy\,(Z_{+y}-Z_{-y})-\frac{1}{2}dz\,(Y_{+z}-Y_{-z})=\\
&=(P_{yz}-P_{zy})\,dx\,dy\,dz,\end{aligned}$$

откуда

$$L=P_{yz}-P_{zy}. \qquad (14)$$

Сравним значения X и L, данные уравнениями (9) и (11), с теми, которые даются в (13) и (14). Если мы положим:

$$\left.\begin{aligned}
&P_{xx}=\frac{1}{4\pi}\left\{a\alpha-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\},\\
&P_{yy}=\frac{1}{4\pi}\left\{b\beta-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\},\\
&P_{zz}=\frac{1}{4\pi}\left\{c\gamma-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\},\\
&P_{yz}=\frac{1}{4\pi}b\gamma,\quad P_{zy}=\frac{1}{4\pi}c\beta,\\
&P_{zx}=\frac{1}{4\pi}c\alpha,\quad P_{xz}=\frac{1}{4\pi}a\gamma,\\
&P_{xy}=\frac{1}{4\pi}a\beta,\quad P_{yx}=\frac{1}{4\pi}b\alpha,
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

то найдем, что со статической точки зрения сила, возникающая из системы напряжений, составляющими которой являются вышеуказанные выражения, будет эквивалентна в своих действиях на каждый элемент объема силам, возникающим от намагничения и электрических токов.

642.] Природа напряжения, составляющими которого являются вышеуказанные выражения, может быть легко найдена следующим путем. Возьмем ось x так, чтобы она была биссектрисой угла между направлениями магнитной силы и магнитной индукции, а ось y расположим в плоскости этих векторов, направленной в сторону магнитной силы.

Если мы обозначим численное значение магнитной силы через $\mathfrak{H}$, численную величину магнитной индукции — через $\mathfrak{B}$, а через 2ε — угол между их направлениями, то

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \mathfrak{H}\cos\varepsilon, \quad \beta = -\mathfrak{H}\sin\varepsilon, \quad \gamma = 0,\\ &a = \mathfrak{B}\cos\varepsilon, \quad b = -\mathfrak{B}\sin\varepsilon, \quad c = 0;\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &P_{xx} = \frac{1}{4\pi}\left(+\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right),\\ &P_{yy} = \frac{1}{4\pi}\left(-\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right),\\ &P_{zz} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right),\\ &P_{yz} = P_{zx} = P_{zy} = P_{xz} = 0,\\ &P_{xy} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon,\\ &P_{yx} = -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Поэтому состояние напряжения может быть рассматриваемо как образованное из:

(1) равного во всех направлениях давления $= \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$,

(2) натяжения вдоль линии, делящей пополам угол между направлениями магнитной силы и магнитной индукции,

$$= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon,$$

(3) давления вдоль линии, делящей пополам наружный угол между этими направлениями,

$$= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon,$$

(4) пары сил, стремящихся повернуть каждый элемент объема вещества в плоскости двух направлений — от направления магнитной индукции к направлению магнитной силы,

$$= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin 2\varepsilon.$$

Когда магнитная индукция имеет то же самое направление, что и магнитная сила, как это всегда бывает в жидкостях и в немагнитных твердых телах, тогда $\varepsilon = 0$. При совпадении оси x с направлением магнитной силы будем иметь:

$$P_{xx} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{B}\mathfrak{H} - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \quad P_{yy} = P_{zz} = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2, \tag{18}$$

а тангенциальные напряжения исчезают.

Следовательно, в этом случае напряжение является гидростатическим давлением $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, сочетающимся с продольным натяжением $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}$ вдоль силовых линий.

643.] В тех случаях, когда намагничения нет, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$. В этих случаях напряжение еще больше упрощается, становясь натяжением вдоль силовых линий, равным $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, в сочетании с давлением по всем направлениям под прямыми углами к силовым линиям, численно равным также $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$. Составляющими напряжения в этом важном случае являются:

$$\left.\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{8\pi}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2), \\ P_{yy} &= \frac{1}{8\pi}(\beta^2-\gamma^2-\alpha^2), \\ P_{zz} &= \frac{1}{8\pi}(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2), \\ P_{yz} &= P_{zy} = \frac{1}{4\pi}\beta\gamma, \\ P_{zx} &= P_{xz} = \frac{1}{4\pi}\gamma\alpha, \\ P_{xy} &= P_{yx} = \frac{1}{4\pi}\alpha\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Составляющая по оси x силы, обусловленной этими напряжениями и действующей на элемент объема среды, будет на единицу объема:

$$X = \frac{d}{dx}P_{xx} + \frac{d}{dy}P_{yx} + \frac{d}{dz}P_{zx} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\alpha}{dx} - \beta\frac{d\beta}{dx} - \gamma\frac{d\gamma}{dx}\right\} + \frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\beta}{dy} + \beta\frac{d\alpha}{dy}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\gamma}{dz} + \gamma\frac{d\alpha}{dz}\right\} = \frac{1}{4\pi}\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\gamma\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) - \frac{1}{4\pi}\beta\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right).$$

Но

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 4\pi\mathfrak{m},$$

$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v,$$

$$\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w,$$

где $\mathfrak{m}$ есть плотность южной магнитной материи в единице среды и где v и w суть составляющие плотности электрических токов относительно осей y и z соответственно. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha\mathfrak{m} + v\gamma - w\beta, \\ Y &= \beta\mathfrak{m} + w\alpha - u\gamma, \\ Z &= \gamma\mathfrak{m} + u\beta - v\alpha. \end{aligned}\right\} \text{Уравнения электромагнитной силы.} \qquad (20)$$

644.] Если мы примем теории Ампера и Вебера, относящиеся к природе магнитных и диамагнитных тел, и будем считать, что магнитная и диамагнитная полярности обусловлены молекулярными электрическими токами, мы освобождаемся от воображаемой магнитной материи и будем иметь повсюду $\mathfrak{m} = 0$,

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0, \qquad (21)$$

так что уравнения электромагнитной силы становятся:

$$\left.\begin{aligned} X &= v\gamma - w\beta, \\ Y &= w\alpha - u\gamma, \\ Z &= u\beta - v\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Таковы составляющие механической силы, отнесенной к единице объема вещества. Составляющие магнитной силы: α, β, γ, а составляющие плотности электрического тока: u, v, w. Эти уравнения идентичны тем, которые уже были выведены (уравнения (С) параграфа 603).

645.] Объясняя электромагнитную силу при помощи состояния напряжения в среде, мы только следуем концепции Фарадея *), что магнитные силовые линии стремятся укорачиваться и отталкивают друг друга, будучи помещены рядом. Мы только выразили на математическом языке величину натяжения вдоль линий и давлений под прямыми углами к ним и доказали, что допущение такого состояния напряжения в среде будет действительно производить силы, обнаруживаемые на проводниках, по которым проходят электрические токи.

*) Exp. Res., (3266, 3267, 3268).

Мы пока ничего не утверждали по поводу того, каким образом это состояние напряжения вызывается и поддерживается в среде. Мы только показали, что можно рассматривать взаимодействие электрических токов, как зависящее от особого рода напряжений в окружающей среде, вместо того чтобы считать его прямым и мгновенным действием на расстоянии.

Всякое дальнейшее объяснение состояния напряжения при помощи движения среды или каким-либо другим образом должно рассматриваться как отдельная независимая часть теории, которая может быть сохранена или отброшена без изменения полученных нами результатов (см. параграф 832).

В первой части этого трактата (параграф 108) мы показали, что наблюдаемые электростатические силы могут рассматриваться как результат действия некоторого напряжения в окружающей среде. Мы сейчас сделали то же самое для электромагнитных сил и нам остается рассмотреть, является ли концепция среды, способной поддерживать эти состояния напряжения, совпадающей с другими известными явлениями или мы должны ее устранить как неплодотворную.

В поле, в котором происходят одновременно электростатическое и электромагнитное действия, мы должны предположить электростатическое напряжение, описанное в части I, наложенным на электромагнитное напряжение, которое мы только что рассмотрели.

646.] Если мы предположим, что полная сила земного магнетизма равна 10 британским единицам (гран, фут, секунда), какова его приблизительная величина в Англии, тогда натяжение вдоль силовой линии будет равно 0,128 грана на кв. фут. Наибольшее магнитное натяжение, полученное Джоулем *) при помощи электромагнитов, равнялось примерно 140 фунтам на кв. дюйм.

*) Sturgeon's «Annals of Electricity», т. V, стр. 187 (1840) или «Philosophical Magazine», декабрь 1851 г.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ XI

Приложение I

[Нижеследующее примечание, заимствованное из письма профессора Клерка Максвелла к профессору Кристал (Chrystal), имеет существенную важность в связи с параграфами 389 и 632.

В параграфе 389 энергия, обусловленная присутствием магнита, составляющие намагничения которого соответственно равны A_1, B_1, C_1, в поле, составляющие магнитной силы которого суть α_2, β_2, γ_2, была равна:

$$-\iiint (A_1\alpha_2 + B_1\beta_2 + C_1\gamma_2)\,dx\,dy\,dz,$$

где интегрирование ограничивается магнитом вследствие того, что A_1, B_1, C_1, равны нулю в любом другом месте.

Но полная энергия имеет форму

$$-\frac{1}{2}\iiint \{(A_1 + A_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + \ldots\}\,dx\,dy\,dz,$$

причем интегрирование распространяется на всякую часть пространства, где есть намагниченные тела, а A_2, B_2, C_2 обозначают составляющие намагничения в точке, внешней по отношению к магниту.

Таким образом, полная энергия состоит из четырех частей:

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_1\alpha_1 + \ldots)\,dx\,dy\,dz, \tag{1}$$

часть, которая представляет собой постоянную, если намагничение магнита постоянно;

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_2\alpha_1 + \ldots)\,dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

что согласно теореме Грина равно:

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_1\alpha_2 + \ldots)\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

и

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_2\alpha_2 + \ldots)\,dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

что можно считать обусловленным постоянным намагничением и, следовательно, постоянной величиной.

Отсюда изменяющаяся часть энергии движущегося магнита с постоянным намагничением является суммой выражений

(2) и (3), а именно:

$$-\iiint (A_1\alpha_2+B_1\beta_2+C_1\gamma_2)\,dx\,dy\,dz.$$

Помня, что перемещение магнита изменяет величины $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, но не величины A_1, B_1, C_1, мы находим для составляющей силы, действующей на магнит в некотором направлении φ:

$$\iiint \left(A_1\frac{d\alpha_2}{d\varphi}+B_1\frac{d\beta_2}{d\varphi}+C_1\frac{d\gamma_2}{d\varphi}\right)dx\,dy\,dz.$$

Если вместо постоянного магнита мы имеем тело, намагниченное путем индукции, выражение для силы должно быть тем же самым, и, полагая $A_1=k\alpha$ и т. д., получаем:

$$\iiint k\left(\alpha\frac{d\alpha_2}{d\varphi}+\beta\frac{d\beta_2}{d\varphi}+\gamma\frac{d\gamma_2}{d\varphi}\right)dx\,dy\,dz.$$

В этом выражении α стоит вместо $\alpha_1+\alpha_2$ и т. д., но если намагниченное тело невелико или мала величина α_1, мы можем пренебречь α_1 по сравнению с α_2, и выражение для силы, как в параграфе 440, будет иметь вид

$$\frac{d}{d\varphi}\,\frac{1}{2}\iiint k(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Таким образом, работа, произведенная магнитными силами, в то время как тело с малой индуктивной емкостью и индуктивно намагниченное удаляется в бесконечность, равняется только половине работы, которая была бы совершена, если бы тело было постоянно намагниченным до той же степени с самого начала, так как по мере удаления индуктированного магнита он теряет свою силу.]

Приложение II

[Содержащееся в параграфе 639 выражение для потенциальной энергии, обусловленной магнитными силами в единице объема среды, встретило возражение по той причине, что при выводе этого выражения в параграфе 389 мы допускали, что составляющие α, β, γ имеют потенциал, в то время как в параграфах 639, 640 это не имеет места. Это возражение распространяется также на выражение для силы X, которое представляет собой пространственную вариацию энергии. Задачей настоящего примечания является приведение некоторых соображений, которые направлены на подтверждение точности текста.]

[Сила, действующая на кусок магнитного вещества, по которому проходит ток, может быть для удобства вычисления разделена на две части: (1) силу, действующую на элемент объема вследствие присутствия тока, и (2) силу, обусловленную магнетизмом элемента. Первая часть будет той же, что и сила, действующая на элемент немагнитной субстанции, составляющие которой соответственно будут:

$$\left.\begin{aligned}&\gamma v-\beta w,\\&\alpha w-\gamma u,\\&\beta u-\alpha v.\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&u,\ v,\ w \text{ являются составляющими плотности тока,}\\&\text{а } \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ — составляющими магнитной силы.}\end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить вторую силу, представьте длинный узкий цилиндр, вырезанный в магнитном веществе, так, что ось цилиндра параллельна направлению намагничения.

Если I есть интенсивность намагничения, то сила, параллельная x, действующая в магните на единицу объема, есть

$$I\frac{d\alpha}{ds},$$

или, если A, B, C — составляющие I, то

$$A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\alpha}{dy}+C\frac{d\alpha}{dz},$$

или

$$A\frac{d\alpha}{dx}+B\left(\frac{d\beta}{dx}-4\pi w\right)+C\left(\frac{d\gamma}{dx}+4\pi v\right).$$

Полная, параллельная x сила, действующая на элемент, будет, следовательно,

$$\gamma v-\beta w+A\frac{d\alpha}{dx}+B\left(\frac{d\beta}{dx}-4\pi w\right)+C\left(\frac{d\gamma}{dx}+4\pi v\right),$$

или

$$v(\gamma+4\pi C)-w(\beta+4\pi B)+A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx},$$

т. е.

$$vc-wb+A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx},$$

что соответствует выражению, приведенному в тексте книги.]