ЧАСТЬ VII

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Общие методы

(109) Электромагнитные отношения между двумя проводящими цепями A и B зависят от функции M, обусловленной их формой и относительным положением, как было уже показано выше. M может быть вычислено несколькими различными путями, которые, конечно, должны привести к одному и тому же результату.

Первый метод. M — электромагнитное количество движения цепи B, когда по цепи A проходит единица силы тока, или

$$M=\int\left(F\frac{dx}{ds'}+G\frac{dy}{ds'}+H\frac{dz}{ds'}\right)ds',$$

где F, G, H — компоненты электромагнитного количества движения, обусловленного единичным током в A, а ds' — элемент длины B, и интегрирование производится по контуру B. Чтобы определить F, G, H, заметим, что согласно уравнениям (B) и (C) имеем:

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{d^2F}{dz^2}=-4\pi\mu p',$$

и аналогичные уравнения для G и H, причем p', q', r' являются компонентами тока в A. Теперь, если мы

рассмотрим только один элемент ds контура A, мы будем иметь:

$$p'=\frac{dx}{ds}ds,\quad q'=\frac{dy}{ds}ds,\quad r'=\frac{dz}{ds}ds,$$

и решение уравнений даст:

$$F=\frac{\mu}{\rho}\frac{dx}{ds}ds,\quad G=\frac{\mu}{\rho}\frac{dy}{ds}ds,\quad H=\frac{\mu}{\rho}\frac{dz}{ds}ds,$$

где ρ — расстояние некоторой точки от ds.

Отсюда

$$M=\iint\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dz}{ds'}\right)ds\,ds'=$$
$$=\iint\frac{\mu}{\rho}\cos\theta\,ds\,ds',$$

где θ — угол между направлениями двух элементов ds, ds', ρ есть расстояние между ними, а интегрирование производится по обоим контурам. В этом методе мы сосредоточиваем наше внимание в процессе интегрирования только на двух линейных контурах.

(110) Второй метод. M есть число магнитных силовых линий, проходящих сквозь контур B, когда в A течет единичный ток, или

$$M=\sum(\mu\alpha l+\mu\beta m+\mu\gamma n)\,dS',$$

где $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ — компоненты магнитной индукции, обусловленной единичным током в A, S' — поверхность, ограниченная током B, и l, m, n — направляющие косинусы нормалей к поверхности, причем интегрирование распространяется по всей поверхности.

Мы можем представить это в виде

$$M=\mu\sum\frac{1}{\rho^2}\sin\theta\sin\theta'\sin\varphi\,dS'\,ds,$$

где dS' — элемент поверхности, ограниченной контуром B, ds — элемент контура A, ρ — расстояние между ними, θ и θ' — углы между ρ и ds и между ρ

и нормалью к dS' соответственно, а φ — угол между плоскостями, в которых измеряются θ и θ'. Интегрирование производится по контуру A и по поверхности, ограниченной B.

Этот метод наиболее подходит в том случае, когда контуры расположены в одной плоскости, т. е. когда $\sin\theta = 1$ и $\sin\varphi = 1$.

(111) Третий метод. M есть та часть внутренней магнитной энергии всего поля, которая зависит от произведения сил токов в обеих цепях при условии, что каждый ток равен единице.

Пусть α, β, γ — компоненты магнитной напряженности, обусловленной первым контуром в некоторой точке; α', β', γ' — те же величины для второй цепи; тогда внутренняя энергия элемента объема dV поля будет:

$$\frac{\mu}{8\pi}\{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2+(\gamma+\gamma')^2\}\,dV.$$

Часть, зависящая от произведения сил токов, будет:

$$\frac{\mu}{4\pi}(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')\,dV;$$

Отсюда, если мы знаем магнитные напряженности I и I', обусловленные единицей тока в каждой цепи, мы можем получить M путем интегрирования

$$\frac{\mu}{4\pi}\sum \mu II'\cos\theta\,dV$$

по всей поверхности, где θ — угол между направлениями I и I'

Применение к катушке

(112) Определим коэффициент M взаимной индукции между двумя круговыми линейными проводниками в параллельных плоскостях при условии, что расстояние между кругами везде одно и то же и мало по сравнению с радиусами кругов.

Если r — расстояние между контурами и a — радиус каждого круга, то, если r мало по сравнению с a, мы найдем при помощи второго метода в качестве первого приближения

$$M = 4\pi a\left(\ln\frac{8a}{r}-2\right).$$

Чтобы получить более точное значение M, допустим, что a и a_1 — радиусы кругов, а b — расстояние между их плоскостями; тогда

$$r^2 = (a-a_1)^2+b^2.$$

Мы найдем M, рассматривая следующие условия.

Во-первых, M должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2M}{da^2}+\frac{d^2M}{db^2}+\frac{1}{a}\frac{dM}{da}=0.$$

Это уравнение, будучи верным для любого магнитного поля, симметричного относительно общей оси окружностей, не может само по себе привести к определению M как функции a, a_1 и b. Мы воспользуемся поэтому другими условиями.

Во-вторых, значение M должно остаться тем же самым, если a и a_1 взаимно заменятся.

В-третьих, первые два члена M должны быть такими же, как указано выше.

Таким образом, M должно иметь форму следующего ряда:

$$\begin{aligned}M = 4\pi a\ln\frac{8a}{r}\Big\{1+\frac{1}{2}\frac{a-a_1}{a}+{}&\\ +\frac{1}{16}\frac{3b^2+(a_1-a)^2}{a^2}-\frac{1}{32}\frac{(3b^2+(a-a_1)^2)(a-a_1)}{a^3}-\ldots\Big\}-{}&\\ -4\pi a\Big\{2+\frac{1}{2}\frac{a-a_1}{a}+\frac{1}{16}\frac{b^2-3(a-a_1^2)}{a^2}-{}&\\ -\frac{1}{48}\frac{(6b^2-(a-a_1)^2)(a-a_1)}{a^3}+\ldots\Big\}.&\end{aligned}$$

(113) Мы можем приложить этот результат к нахождению коэффициента самоиндукции L круглой катушки, сечение которой невелико по сравнению с радиусом круга.

Пусть сечение катушки — прямоугольник, ширина которого в плоскости круга равна c, а глубина, перпендикулярная к плоскости круга, равна b.

Пусть средний радиус катушки будет a, а число витков равно n; тогда, интегрируя, мы найдем:

$$L = \frac{n^2}{b^2c^2} \iiiint M\,(x,\,y;\,x',\,y')\,dx\,dy\,dx'\,dy',$$

где $M\,(x,\,y;\,x',\,y')$ представляет значение M для двух витков, координаты которых соответственно равны x, y и x', y', а интегрирование производится сначала по x и y по прямоугольному сечению, а затем по x' и y' по той же самой площади.

$$\begin{aligned} L = 4\pi n^2 a \Big\{ \ln\frac{8a}{r} + \frac{1}{12} - \frac{4}{3}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg} 2\theta - \frac{\pi}{3}\cos 2\theta - \\ - \frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2\theta \ln\cos\theta - \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\theta\ln\sin\theta \Big\} + \\ + \frac{\pi n^2 r^2}{24a}\Big\{ \ln\frac{8a}{r}\,(2\sin^2\theta + 1) + \\ + 3{,}45 + 27{,}475\cos^2\theta - 3{,}2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} + \\ + \frac{1}{5}\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\ln\cos\theta + \frac{13}{3}\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\ln\sin\theta \Big\} + \ldots \end{aligned}$$

Здесь a равно среднему радиусу катушки, r — диагонали прямоугольного сечения, равной $\sqrt{b^2+c^2}$, θ — углу между r и плоскостью круга, n — числу витков. Логарифмы неперовы, а углы измерены в радианах. В опытах, проведенных Комитетом Британской ассоциации по определению стандарта электрического сопротивления, применялась двойная катушка, состоящая из двух приблизительно одинаковых катушек прямоугольного сечения, помещенных параллельно друг другу с небольшим промежутком между ними.

Значение L для этой катушки было найдено следующим путем.

Величина L была рассчитана по предыдущей формуле для шести различных случаев, в которых рассматриваемые прямоугольные сечения имели всегда ту же самую ширину, в то время как глубина была A, B, C, $A+B$, $B+C$, $A+B+C$ и $n=1$ в каждом случае.

Зная результаты $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$ и т. д., мы вычисляем коэффициент взаимной индукции $M\,(AC)$ обеих катушек следующим образом:

$$\begin{aligned} 2ACM\,(AC) = (A+B+C)^2 L\,(A+B+C) - \\ - (A+B)^2 L\,(A+B) - (B+C)^2 L\,(B+C) + B^2 L\,(B). \end{aligned}$$

Отсюда, если n_1 — число витков в катушке A и n_2 — в катушке B, коэффициент самоиндукции обеих катушек вместе будет:

$$L = n_1^2 L\,(A) + 2n_1 n_2 M\,(AC) + n_2^2 L\,(C).$$

(114). Эти значения L рассчитаны в предположении, что витки проволоки равномерно расположены так, что они заполняют в точности все сечение. Однако обычно этого не бывает, поскольку проволока чаще всего имеет круглое сечение и покрыта изолирующим материалом.

Поэтому ток в проволоке более концентрирован, чем это было бы, если бы он был распространен равномерно по сечению, и токи в близлежащих проволоках не действуют на него в точности так, как действовал бы равномерный ток.

Поправки, возникающие из этих соображений, могут быть выражены как цифровые величины, на которые мы должны помножить длину проволоки, причем они будут одинаковыми, какова бы ни была форма катушки.

Пусть расстояние между каждой проволокой и следующей за ней в предположении, что они расположены в квадратном порядке, будет равно D и пусть диаметр проволоки будет d. Тогда поправка на диаметр проволоки будет:

$$+2\left(\ln\frac{D}{d}+\frac{4}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3}-\frac{11}{6}\right).$$

Поправка для восьми ближайших проволок будет $+0{,}0236$; для 16 проволок в следующем ряду $+0{,}00083$. Эти поправки, будучи помножены на длину проволоки и прибавлены к предыдущему результату, дадут истинное значение L, рассматриваемое как мера потенциала катушки на саму себя для единицы тока в проволоке, когда этот ток устанавливается в течение некоторого времени и равномерно распределен по сечению проволоки.

(115) Но в момент возникновения тока и во время его изменения ток не будет равномерным во всем сечении проволоки из-за индуктивного действия между различными частями тока, стремящегося сделать ток в одной части сечения больше, чем в другой. Когда равномерная электродвижущая сила P, возникающая от любой причины, действует на цилиндрическую проволоку с удельным сопротивлением ρ, мы имеем:

$$p\rho=P-\frac{dF}{dt},$$

где F удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}=-4\pi\mu p,$$

причем r — расстояние от оси цилиндра.

Пусть один из членов величины F будет иметь вид Tr^n, где T — функция времени, тогда член p, соответствующий произведению Tr^n, имеет вид

$$-\frac{1}{4\pi\mu}n^2Tr^{n-2}.$$

Отсюда имеем:

$$F=T+\frac{\mu\pi}{\rho}\left(-P+\frac{dT}{dt}\right)r^2+\left(\frac{\mu\pi}{\rho}\right)^2\frac{1}{1^2\cdot 2^2}\frac{d^2T}{dt^2}r^4+\ldots,$$

$$p\rho=\left(P+\frac{dT}{dt}\right)-\frac{\mu\pi}{\rho}\frac{d^2T}{dt^2}r^2-\left(\frac{\mu\pi}{\rho}\right)^2\frac{1}{1^2\cdot 2^2}\frac{d^3T}{dt^3}r^4-\ldots$$

Общий контрток самоиндукции в какой-либо точке будет:

$$\int\left(\frac{P}{\rho}-p\right)dt=\frac{1}{\rho}T+\frac{\mu\pi}{\rho^2}\frac{dT}{dt}r^2+\frac{\mu^2\pi^2}{\rho^3}\frac{1}{1^2\cdot 2^2}\frac{d^2T}{dt^2}r^4+\ldots$$

от $t=0$ до $t=\infty$.

Если $t=0$, $p=0$, то $\left(\frac{dT}{dt}\right)_0=P$, $\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_0=0$, ...

Если $t=\infty$, $p=\frac{P}{\rho}$, то $\left(\frac{dT}{dt}\right)_\infty=0$, $\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_\infty=0$, ...,

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^r 2\pi\left(\frac{P}{\rho}-p\right)r\,dr\,dt=\frac{1}{\rho}T\pi r^2+\frac{1}{2}\frac{\mu\pi^2}{\rho^2}\frac{dT}{dt}r^4+$$
$$+\frac{\mu^2\pi^3}{\rho^3}\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\frac{d^2T}{dt^2}r^6+\ldots$$

от $t=0$ до $t=\infty$.

Если $t=0$, $p=0$ по всему сечению, то

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_0=P,\quad\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_0=0,\ \ldots$$

Если $t=\infty$, $p=0$ повсюду, то

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_\infty=0,\quad\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_\infty=0,\ \ldots$$

Если l — длина проволоки и R — ее сопротивление, то

$$R=\frac{\rho l}{\pi r^2}.$$

Если C — величина установившегося в проволоке тока:

$$C=\frac{Pl}{R},$$

то полный контрток может быть записан в виде

$$\frac{l}{R}(T_\infty-T_0)-\frac{1}{2}\mu\frac{l}{R}C=-\frac{LC}{R},$$

согласно (35).

Если ток, вместо того чтобы меняться от центра к окружности сечения проволоки, был бы во всем сечении одинаков, то значение F было бы

$$F = T + \mu\gamma\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right),$$

где γ — ток в проволоке в некоторый момент, а весь контрток был бы

$$\int_0^\infty \int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{dF}{dt}\, 2\pi r\, dr = \frac{l}{R}(T_\infty - T_0) - \frac{3}{4}\mu\frac{l}{R}C = -\frac{L'C}{R}.$$

Отсюда

$$L = L' - \frac{1}{4}\mu l,$$

т. е. значение L, которое должно быть использовано при вычислении самоиндукции проволоки для переменных токов, меньше, чем то, которое выводится из предположения, что ток одинаков по всему сечению проволоки, на $\frac{1}{4}\mu l$, где l — длина проволоки, а μ — коэффициент магнитной индукции вещества проволоки.

(116) Размеры катушки, примененной Комитетом Британской ассоциации в экспериментах в Королевском колледже в 1864 г., были следующие (в метрах):

Средний радиус	$a = 0{,}158194$.
Глубина каждой катушки	$b = 0{,}01608$.
Ширина каждой катушки	$c = 0{,}01841$.
Расстояние между катушками	0,02010.
Количество витков	$n = 313$.
Диаметр проволоки	0,00126.

Значение L, полученное из первого члена выражения, равно 437 440 метров.

Поправка, зависящая от радиуса, не являющегося бесконечно большим по сравнению с сечением катушки, как оно было найдено из второго члена, оказалась равной — 7345 метров.

Поправка, зависящая от диаметра проволоки, на единицу длины	0,44997
Поправка на восемь соседних проволок	0,0236
На 16 соседних проволок	0,0008
Поправка на вариацию тока в различных частях сечения	—0,2500
Общая поправка на единицу длины	0,22437
Длина	311,236 метра
Сумма поправок этого рода	70 »
Окончательное значение L, найденное из вычислений	430 165 »

Это значение L было использовано для внесения изменений в наблюдения согласно методу, объясненному в отчете Комитета *). Поправка, зависящая от L, изменяется как квадрат скорости. Результаты 16 экспериментов, к которым эта поправка была применена и в которых скорость изменялась от 100 оборотов в 17 секунд до 100 оборотов в 77 секунд, были сравнены при помощи метода наименьших квадратов для определения того, какая дальнейшая поправка, зависящая от квадрата скорости, должна быть применена для того, чтобы сделать минимальными возможные ошибки

Результат этого изучения показал, что вычисленная величина L должна быть помножена на 1,0618, для того чтобы получить величину L, которая дает наиболее правильный результат.

Таким образом, мы имеем L согласно вычислению	430 165 метров
Вероятная величина L методом наименьших квадратов	456 748 »
Результат неточных опытов с электрическими весами (см. параграф 46)	410 000 »

Величина L, рассчитанная из размеров катушки, повидимому, значительно более точна, чем любая из определенных другим способом.

*) British Association Reports, стр. 169, 1863.