Эквипотенциальные поверхности уже не будут непрерывными замкнутыми поверхностями, некоторые из них будут ограниченными листами, причем электрический контур будет их общим краем или границей. Число таких поверхностей будет равно величине работы, соответствующей единичному полюсу при его обходе вокруг тока, и по обычному измерению равно $4\pi\gamma$, где γ—значение силы тока.

Эти поверхности, следовательно, связаны с электрическим током, как мыльные пузыри соединены с кольцом в опытах Плато. Любой ток γ имеет $4\pi\gamma$ поверхностей, связанных с ним. Эти поверхности имеют контур токов в качестве общей границы и связаны с ним под равными углами между собой. Форма эквипотенциальных поверхностей в других частях поля зависит как от присутствия других токов или магнитов, так и от внешней формы контура тока, к которому они относятся.

ЧАСТЬ III

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

(53) Введем три взаимно перпендикулярные направления в пространстве в качестве координатных осей x, y и z и допустим, что все направленные величины выражаются их составляющими по этим трем направлениям.

Электрические токи (p, q, r)

(54) Электрический ток заключается в передаче электричества от одной части тела к другой. Пусть количество электричества, проходящее в единицу времени через единицу площади, перпендикулярную к оси x, будет обозначено через p; тогда p является составляющей тока в данной точке по направлению x.

Мы будем пользоваться обозначениями p, q, r для выражения составляющих тока через единицу площади по направлениям x, y, z.

Электрические смещения (f, g, h)

(55) Электрическое смещение заключается в противоположной электризации сторон молекулы или частицы тела, которая может сопровождаться или не сопровождаться прохождением [электричества] через тело. Пусть количество электричества, которое обнаружится на грани $dy\,dz$ элемента $dx\,dy\,dz$, выделенного в теле,

будет равно $f\,dy\,dz$; тогда f является составляющей электрического смещения, параллельной x. Мы будем пользоваться обозначениями f, g, h для выражения электрических смещений, соответственно параллельных x, y, z.

Изменения электрического смещения должны быть прибавлены к токам p, q, r, чтобы получить общее движение электричества, которое мы будем обозначать через p', q', r', так что [24]

$$\left.\begin{aligned} p' &= p + \frac{df}{dt}, \\ q' &= q + \frac{dg}{dt}, \\ r' &= r + \frac{dh}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Электродвижущая сила (P, Q, R)

(56) Пусть P, Q, R обозначают составляющие электродвижущей силы в некоторой точке [25]. Тогда P представляет разность потенциалов на единицу длины проводника, помещенного в направлении x в данной точке. Мы можем представить себе бесконечно короткую проволоку, помещенную праллельно x в данной точке, до которой во время действия электродвижущей силы P дотронулись два маленьких проводника, которые затем изолируются и удаляются за пределы действия электродвижущей силы. Значение P может тогда быть установлено путем измерения величин зарядов этих проводников.

Таким образом, если l—длина проволоки, разность потенциалов на ее концах будет равна Pl, и если C—емкость каждого из маленьких проводников, то заряд на каждом из них будет $^1/_2\,CPl$. Так как емкости умеренной величины проводников, измеренные в электромагнитной системе единиц, весьма малы, то обычные электродвижущие силы, возникающие от электромагнитных действий, едва ли можно было бы измерить указанным способом. На практике подобные измерения всегда выполняются длинными проводниками, образующими замкнутые или почти замкнутые цепи.

Электромагнитное количество движения (F, G, H)

(57) Пусть F, G, H обозначают составляющие электромагнитного количества движения в некоторой точке поля, обусловленного некоторой системой магнитов или токов.

Тогда F является общим импульсом электродвижущей силы в направлении x, которая получилась бы при удалении магнитов или токов из поля, т. е. если P является электродвижущей силой, образующейся в некоторый момент во время удаления системы магнитов или токов, то

$$F = \int P\,dt.$$

Отсюда часть электродвижущей силы, зависящая от движения магнитов или токов в поле или от изменения их интенсивности, дается соотношениями:

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt}. \qquad (29)$$

Электромагнитное количество движения контура [26]

(58) Пусть s будет длина контура, тогда, если мы проинтегрируем

$$\int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds \qquad (30)$$

вдоль контура, то получим полное электромагнитное количество движения контура или число магнитных силовых линий, им охватываемых; изменения этого числа дают полную электродвижущую силу в контуре. Это электромагнитное количество движения является тем же самым понятием, которое профессор Фарадей называл электротоническим состоянием. Если контур ограничивает элементарную площадку $dy\,dz$, то электромагнитное количество движения будет:

$$\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)dy\,dz,$$

а это есть число магнитных силовых линий, проходящих через площадку $dy\,dz$.

Магнитная сила (α, β, γ)

(59) Пусть α, β, γ представляют составляющие по направлениям x, y и z силы, действующей на единицу магнетизма в данной точке [напряженности магнитного поля] ([27]).

Коэффициент магнитной индукции (μ)

(60) Пусть μ будет отношение магнитной индукции в данной среде к магнитной индукции в воздухе при равной намагничивающей силе [магнитная проницаемость]. Тогда число силовых линий, проходящих через единицу площади, перпендикулярной к x, будет равно $\mu\alpha$, где μ—величина, зависящая от природы среды, ее температуры, величины уже произведенного намагничения, а в кристаллических телах изменяющаяся в зависимости от направления.

(61) Выражая в приведенных обозначениях электромагнитное количество движения элементарных контуров, перпендикулярных к трем осям, мы получаем следующие

Уравнения магнитной силы

$$\left.\begin{aligned}\mu\alpha &= \frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\,,\\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\,,\\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(B)$$

Уравнения токов

(62) Как известно из опыта, движение магнитного полюса в электромагнитном поле по замкнутому пути не может порождать работы, если только путь, описываемый полюсом, не охватывает электрического тока. Следовательно, всюду, исключая пространство, занимаемое электрическими токами,

$$\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz=d\varphi \qquad (31)$$

есть полный дифференциал φ магнитного потенциала. Величина φ может допускать бесконечное множество различных значений в зависимости от числа обходов электрических токов движущейся точкой на ее пути [многозначная функция], причем разность между последовательными значениями φ, соответствующая однократному охвату линии тока, равна $4\pi c$, где c—сила тока.

Отсюда в том случае, если нет электрических токов:

$$\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=0.$$

Но если имеется ток p', то

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=4\pi p',\\ &\text{и аналогично:}\\ &\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}=4\pi q',\\ &\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}=4\pi r'.\end{aligned}\right\}\qquad(C)$$

Мы будем называть эти уравнения *уравнениями токов* ([28]).

Электродвижущая сила в контуре

(63) Пусть ξ будет электродвижущая сила, действующая в контуре A, тогда

$$\xi=\int\left(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds}\right)ds, \qquad (32)$$

где ds является элементом длины, а интегрирование производится по контуру тока.

Пусть силы в поле обусловлены контурами A и B. Тогда электромагнитное количество движения контура A будет:

$$\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds=Lu+Mv, \qquad (33)$$

где u и v — токи в A и B, и

$$\xi = -\frac{d}{dt}(Lu + Mv). \tag{34}$$

Отсюда, если цепь A неподвижна,

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \\ Q &= -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy}, \\ R &= -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

где ψ является функцией от x, y, z и t, которая остается неопределенной, поскольку это относится к решению вышеуказанных уравнений, так как члены, зависящие от нее, исчезают при интегрировании по всему контуру тока. Однако величина ψ может быть всегда определена в любом частном случае, если мы знаем фактические условия. Физическая интерпретация ψ состоит в том, что эта функция представляет собой *электрический потенциал* в каждой точке пространства.

Электродвижущая сила в движущемся проводнике

(64) Пусть короткий прямой проводник длиной a, параллельный оси x, движется со скоростью, составляющие которой равны $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, и пусть его концы скользят вдоль двух параллельных проводников со скоростью $\frac{ds}{dt}$. Найдем изменение электромагнитного количества движения контура, частью которого является вышеописанное приспособление. В единицу времени движущийся проводник пройдет расстояния

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$$

вдоль направлений трех координатных осей, и в то же самое время длины параллельных проводников, входящих в цепь, увеличиваются каждая на $\frac{ds}{dt}$.

Следовательно, величина

$$\int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds$$

получит следующие приращения:

$$a\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dt}\right)$$

вследствие движения проводника,

$$-a\frac{ds}{dt}\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dx}\frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dx}\frac{dz}{ds}\right)$$

вследствие удлинения контура. Общий прирост отсюда будет:

$$a\left(\frac{dF}{dy} - \frac{dG}{dx}\right)\frac{dy}{dt} - a\left(\frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz}\right)\frac{dz}{dt},$$

или согласно уравнениям магнитной силы (В)

$$-a\left(\mu\gamma\frac{dy}{dt} - \mu\beta\frac{dz}{dt}\right).$$

Если P — электродвижущая сила в движущемся проводнике, параллельном x, отнесенная к единице длины, то действующая электродвижущая сила будет Pa, и так как она измеряется уменьшением электромагнитного количества движения контура, то электродвижущая сила, обусловленная движением, будет:

$$P = \mu\gamma\frac{dy}{dt} - \mu\beta\frac{dz}{dt}. \tag{36}$$

(65) Полные уравнения электродвижущей силы в движущемся проводнике могут быть теперь написаны следующим образом:

Уравнения электродвижущей силы

$$\left.\begin{aligned} P &= \mu\left(\gamma\frac{dy}{dt} - \beta\frac{dz}{dt}\right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \\ Q &= \mu\left(\alpha\frac{dz}{dt} - \gamma\frac{dx}{dt}\right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy}, \\ R &= \mu\left(\beta\frac{dx}{dt} - \alpha\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}. \end{aligned}\right\} \tag{D}$$

Первый член в правой стороне каждого уравнения представляет собой электродвижущую силу, возникающую от движения самого проводника. Эта электродвижущая сила перпендикулярна к направлению движения и к магнитным силовым линиям. Если начертить параллелограмм, стороны которого по направлению и величине изображают скорость проводника и магнитную индукцию в этой точке поля, то площадь параллелограмма будет изображать электродвижущую силу, обусловленную движением проводника, и направление этой силы перпендикулярно к плоскости параллелограмма.

Второй член в каждом уравнении указывает действие изменений в положении или в силе магнитов или токов в поле.

Третий член показывает действие электрического потенциала ψ. Последний не вызывает тока, циркулирующего в замкнутой цепи. Он указывает лишь на существование силы, которая проталкивает электричество по направлению к некоторым определенным точкам в поле (29).

Электрическая упругость

(66) Когда электродвижущая сила действует на диэлектрик, она приводит каждую часть диэлектрика в поляризованное состояние, при котором его противоположные стороны электризуются противоположным образом. Величина этой электризации зависит от величины электродвижущей силы, от природы вещества и в твердых телах, имеющих структуру, определенную осями, от направления электродвижущей силы по отношению к этим осям. Для изотропных веществ, если через k обозначить отношение электродвижущей силы к диэлектрическому смещению, мы можем написать:

Уравнения электрической упругости (30)

$$\left.\begin{aligned} P &= kf, \\ Q &= kg, \\ R &= kh. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(E)}$$

Электрическое сопротивление

(67) Когда электродвижущая сила действует на проводник, она производит электрический ток. Этот эффект является дополнительным к уже рассмотренному нами диэлектрическому смещению.

В твердых телах сложной структуры отношение между электродвижущей силой и током зависит от их направления в теле. В изотропных веществах, которые мы здесь только и будем рассматривать, если ρ является удельным сопротивлением, относящимся к единице объема, мы можем написать:

Уравнения электрического сопротивления (31)

$$\left.\begin{aligned} P &= -\rho p, \\ Q &= -\rho q, \\ R &= -\rho r. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(F)}$$

Количество электричества

(68) Пусть e представляет количество свободного положительного электричества, содержащегося в единице объема в любой части поля, тогда, поскольку оно является результатом электризации различных частей поля, не нейтрализующих друг друга, мы можем написать:

Уравнение свободного электричества (32)

$$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0. \qquad \text{(G)}$$

(69) Если среда проводит электричество, то мы будем иметь другое условие (используя термин гидродинамики):

Уравнение непрерывности

$$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0. \qquad \text{(H)}$$

(70) В эти уравнения электромагнитного поля входят 20 переменных величин, а именно [33]:

для электромагнитного количества движения	F, G, H;
для магнитной интенсивности [напряженности]	α, β, γ;
для электродвижущей силы	P, Q, R;
для тока, обусловленного (истинной) проводимостью	p, q, r;
для электрического смещения	f, g, h;
для полного тока (включая изменения смещения)	p', q', r';
для количества свободного электричества	e;
для электрического потенциала	ψ.

Между этими 20 переменными величинами мы нашли 20 уравнений, а именно:

три уравнения магнитной силы	(B);
» » электрических токов	(C);
» » электродвижущей силы . . .	(D);
» » электрической упругости . . .	(E);
» » электрического сопротивления	(F);
» » полных токов	(A);
одно уравнение свободного электричества . .	(G);
» » непрерывности	(H).

Эти уравнения, следовательно, достаточны, чтобы определить все величины, встречающиеся в них, если только мы знаем условия задачи. Во многих вопросах, однако, требуются только некоторые из этих уравнений [34].

Внутренняя энергия электромагнитного поля

(71) Мы уже видели (33), что внутренняя энергия любой системы токов находится умножением половины силы тока в каждом контуре на его электромагнитное количество движения. Это эквивалентно нахождению интеграла

$$E=\frac{1}{2}\sum (Fp'+Gq'+Hr')\,dV \tag{37}$$

по всему пространству, занимаемому токами, где p', q', r' — компоненты токов, а F, G, H — компоненты электромагнитного количества движения. Подставляя значения p', q', r' из уравнений токов (C), получим:

$$\frac{1}{8\pi}\sum\left\{F\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+G\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+H\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}dV.$$

Интегрируя по частям и вспоминая, что α, β, γ исчезают в бесконечности, получаем выражение

$$\frac{1}{8\pi}\sum\left\{\alpha\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)+\beta\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)+\gamma\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)\right\}dV,$$

где интегрирование должно быть распространено на все пространство. Принимая во внимание уравнения магнитной силы (B), будем иметь [35]:

$$E=\frac{1}{8\pi}\sum\left\{\alpha\mu\alpha+\beta\mu\beta+\gamma\mu\gamma\right\}dV, \tag{38}$$

где α, β, γ являются составляющими магнитной напряженности или силы, действующей на единицу магнитного полюса, а $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$ — компоненты величины магнитной индукции или числа силовых линий на единицу площади.

В изотропных средах величина μ одинакова во всех направлениях, и мы можем выразить результат более просто, говоря, что внутренняя энергия любой части магнитного поля, обусловленная его намагничением, равна:

$$\frac{\mu}{8\pi}I^2$$

на единицу объема, где I — величина магнитной напряженности.

(72) Энергия может быть записана в поле различными способами, например действием электродвижущей силы, вызывающей электрическое смещение. Работа, произведенная переменной электродвижущей силой P, дающей переменное смещение f, получается

интегрированием

$$\int P\,df$$

от $P=0$ до данного значения P.

Так как $P=kf$ (см. уравнение (E)), то

$$\int kf\,df=\frac{1}{2}kf^2=\frac{1}{2}Pf.$$

Отсюда внутренняя энергия каждой части поля, существующая в форме электрического смещения, равна:

$$\frac{1}{2}\sum(Pf+Qg+Rh)\,dV.$$

Полная энергия в поле, следовательно, будет:

$$E=\sum\left\{\frac{1}{8\pi}(\alpha\mu\alpha+\beta\mu\beta+\gamma\mu\gamma)+\frac{1}{2}(Pf+Qg+Rh)\right\}dV. \quad (I)$$

Первый член этого выражения зависит от намагничивания поля и объясняется в нашей теории актуальным движением какого-то рода. Второй член зависит от электрической поляризации и объясняется по нашей теории напряжением какого-то рода в упругой среде.

(73) Я имел уже прежде случай *) попытаться описать особый вид движения и особый вид напряжения, приспособленных для объяснения этих явлений. В настоящем докладе я избегаю какой-либо гипотезы такого рода и, пользуясь такими словами, как электромагнитное количество движения и электрическая упругость в отношении известных явлений индукции токов и поляризации диэлектриков, я хочу только направить мысль читателя на механические явления, которые могут помочь ему понять электрические явления. Все подобные выражения в настоящей статье должны рассматриваться как иллюстративные, а не как объясняющие.

*) См. «О физических силовых линиях» (стр. 107 настоящего издания.—*Ред.*).

(74) Однако, говоря об энергии поля, я хочу быть понятым буквально. Всякая энергия есть то же, что механическая энергия, существует ли она в форме обычного движения или в форме упругости, или в какой-нибудь другой форме. Энергия в электромагнитных явлениях—это механическая энергия. Единственный вопрос заключается в том, где она находится?(36)

Согласно старым теориям она находится в наэлектризованных телах, проводящих цепях и магнитах в форме неизвестного качества, называемого потенциальной энергией или способностью производить определенные действия на расстоянии. По нашей теории она находится в электромагнитном поле, в пространстве, окружающем наэлектризованные и намагниченные тела, а также и в самых этих телах и проявляется в двух различных формах, которые могут быть описаны без гипотез как магнитная поляризация и электрическая поляризация, или согласно весьма вероятной гипотезе как движение и напряжение одной и той же среды.

(75) Заключения, к которым мы пришли в настоящем докладе, независимы от этой гипотезы, так как они выведены из экспериментальных фактов троякого рода:

1) индукция электрических токов путем увеличения или уменьшения силы соседних токов сообразно изменениям в силовых линиях, пронизывающих контур,

2) распределение магнитной напряженности сообразно изменениям магнитного потенциала,

3) индукция (или влияние) статического электричества через диэлектрики.

Теперь, исходя из этих принципов, мы можем приступить к доказательству существования и нахождению законов механических сил, действующих на электрические токи, магниты и наэлектризованные тела, помещенные в электромагнитное поле.