Отсюда, комбинируя эти результаты, получаем:

$$-\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial N}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)d\Sigma=-\int\chi\omega\,dS-\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma+$$
$$+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial t}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dS.$$

Это уравнение должно удовлетворяться при любых значениях t. Умножив его на dt, мы можем поэтому проинтегрировать его между произвольными пределами t_1 и t_2, в результате чего получается:

$$\left.\begin{aligned}&-\int_{t_1}^{t_2}dt\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial N}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)d\Sigma=-\int_{t_1}^{t_2}dt\int\chi\omega\,dS-\\&-\int_{t_1}^{t_2}dt\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma+\frac{1}{c^2}\left|\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial t}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dS\right|_{t_1}^{t_2}.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Выбирая соответствующим образом функцию F, которая до сих пор оставалась неопределенной, мы можем получить из этого уравнения решение нашей задачи.

Допустим, что $F(\varepsilon)$ отличается от нуля только для тех значений ε, которые лежат между нулем и некоторой положительной величиной δ, причем эта последняя пусть настолько мала, что мы можем пренебречь изменениями любых других величин, встречающихся в нашей задаче, которые происходят за промежуток времени ε. Что касается самой функции F, мы предположим, что ее значения между $\varepsilon=0$ и $\varepsilon=\delta$ настолько велики, что

$$\int_0^\delta F(\varepsilon)\,d\varepsilon=1.$$

Так как для определенного значения r

$$\int_{t_1}^{t_2}F\left(t+\frac{r}{c}\right)dt=\int_{t_1+\frac{r}{c}}^{t_2+\frac{r}{c}}F(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

то ясно, что из вышеприведенных предположений

$$\left.\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} F\left(t+\frac{r}{c}\right)dt = 1 \\ \text{и} \\ &\int_{t_1}^{t_2} \varkappa F\left(t+\frac{r}{c}\right)dt = \varkappa_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

если под $\varkappa$ понимать одну из функций t, с которыми мы имеем дело, а под t_1 и t_2 — значения t, удовлетворяющие условиям

$$t_1+\frac{r}{c}<0 \quad \text{и} \quad t_2+\frac{r}{c}>\delta.$$

Мы сейчас увидим, что при разборе формулы (7) формула (8) даст нам возможность поступить так, что значения ψ и ω будут соответствовать вполне определенным моментам.

Пусть t_2 имеет определенное положительное значение, а t_1 — определенное отрицательное, настолько большое, что даже для точек, наиболее удаленных от P, $t_1+\frac{r}{c}<0$. Тогда все значения χ, входящие в последний член (7), равны нулю. То же относится и к значениям $\frac{\partial\chi}{\partial t}$, входящим в этот член. В самом деле,

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=\frac{1}{r}F'\left(t+\frac{r}{c}\right);$$

но это выражение пропадает для $t=t_1$ и $t=t_2$, так как $F'(\varepsilon)$, подобно самому $F(\varepsilon)$, пропадает для всех значений ε, лежащих вне интервала $(0, \delta)$. Отсюда видно, что последний член в правой части уравнения (7) равен нулю.

Член, содержащий ω, можно написать так:

$$-\int\frac{1}{r}\,dS\int_{t_1}^{t_2}\omega F\left(t+\frac{r}{c}\right)dt,$$

где

$$\int_{t_1}^{t_2}\omega F\left(t+\frac{r}{c}\right)dt$$

относится к некоторому определенному элементу объема dS, расположенному на расстоянии r от P. Отсюда в силу (8)

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \int \chi\omega\, dS = -\int \frac{1}{r}\,\omega_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\, dS.$$

Путем подобных рассуждений находим, что

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \chi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma = \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} d\sigma.$$

Мы должны, далее, рассмотреть интеграл, содержащий $\frac{\partial\chi}{\partial n}$. Так как эта производная равна

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) F\left(t+\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{rc}\,\frac{\partial r}{\partial n}\, F'\left(t+\frac{r}{c}\right),$$

имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \psi \frac{\partial\chi}{\partial n}\, d\sigma = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\psi F\left(t+\frac{r}{c}\right) d\sigma +$$
$$+\frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\psi F'\left(t+\frac{r}{c}\right) d\sigma.$$

Первый интеграл равен

$$\int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma \int_{t_1}^{t_2} \psi F\left(t+\frac{r}{c}\right) dt = \int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\psi_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\, d\sigma,$$

а второе выражение можно проинтегрировать по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\psi F'\left(t+\frac{r}{c}\right) d\sigma = \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\, d\sigma \int_{t_1}^{t_2} \psi F'\left(t+\frac{r}{c}\right) dt =$$
$$= \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\, d\sigma \left[\psi F\left(t+\frac{r}{c}\right)\right]_{t_1}^{t_2} - \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\, d\sigma \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\psi}{\partial t} F\left(t+\frac{r}{c}\right) dt =$$
$$= -\int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\dot{\psi}_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\, d\sigma,$$

так как и $F\left(t_1+\frac{r}{c}\right)$ и $F\left(t_2+\frac{r}{c}\right)$ равны нулю.

Комбинируя эти результаты, получаем для правой части (7):

$$-\int \frac{1}{r}\omega_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} dS + \int \left\{ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\psi_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} + \frac{1}{cr}\,\frac{\partial r}{\partial n}\dot{\psi}_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} \right\} d\sigma.$$

Предположим теперь, что радиус R сферы Σ стремится к нулю. Вследствие этого первый интеграл в нашем последнем выражении должен быть распространен только на область в самом непосредственном соседстве точки P. Остальные члены остаются без изменения, но для левой части уравнения (7) мы должны принять ее предельное значение при $\lim R = 0$.

Так как интеграл по сфере имеет тот же вид, как только что рассмотренный нами интеграл по поверхности σ, мы можем написать:

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial N} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial N}\right) d\Sigma =$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} - \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right)\psi_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} + \frac{1}{cr}\,\frac{\partial r}{\partial N}\dot{\psi}_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} \right\} d\Sigma,$$

или, ввиду того, что нормаль N имеет направление r и на сфере $r = R$,

$$\int \left\{ \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)} + \frac{1}{R^2}\psi_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)} + \frac{1}{cR}\dot{\psi}_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)} \right\} d\Sigma.$$

Далее, когда R стремится к нулю, интеграл, содержащий $\frac{1}{R}$, пропадает, так что наше выражение сводится к

$$\frac{1}{R^2}\int \psi_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)} d\Sigma. \qquad (9)$$

Пусть ψ_1 и ψ_2 будут экстремальные значения $\psi_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)}$ на поверхности сферы. Тогда (9) заключено в пределах

$$4\pi\psi_1 \quad \text{и} \quad 4\pi\psi_2.$$

Но как ψ_1, так и ψ_2 имеют пределом значение ψ в точке P для момента времени $t=0$; назовем это значение $\psi_{P\,(t=0)}$. Ясно, что пределом (9) является:

$$4\pi\psi_{P\,(t=0)},$$

и уравнение (7) в конце концов получает вид

$$\psi_{P\,(t=0)} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\omega_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\psi_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} + \frac{1}{cr}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\dot{\psi}_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\right\}d\sigma.$$

Этим выражением определяется значение ψ в выбранной точке P в момент времени $t=0$. Но мы свободны в выборе этого момента; поэтому наша формула может служить для вычисления значения ψ_P в любой момент t. Для этого нам достаточно заменить значения ω, ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ и $\dot{\psi}$ в правой части величинами, относящимися к моменту времени $t-\frac{r}{c}$. Обозначая эти последние величины при помощи квадратных скобок и опуская индекс P, получаем:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{[\omega]}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\right] - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)[\psi] + \frac{1}{cr}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,[\dot{\psi}]\right\}d\sigma. \qquad (10)$$

Формула (30), приведенная в тексте, получена в предположении, что поверхность σ удаляется во все стороны на бесконечное расстояние, благодаря чему во многих случаях интеграл по поверхности делается равным нулю. Мы можем, например, допустить, что в удаленных областях пространства функция ψ была равна нулю до некоторого определенного момента времени t_0. Время $t-\frac{r}{c}$, к которому относятся величины $[\psi]$, $\left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]$, $[\dot{\psi}]$, при увеличении r всегда оказывается меньшим t_0, так что в конце концов величины в квадратных скобках превращаются в нуль.

5. (Стр. 43.) Пусть составляющие вектора $\mathbf{A}$ суть непрерывные функции координат (см. § 7) и пусть он сам распределен соленоидально, так что

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0; \qquad (11)$$

мы всегда можем подобрать второй вектор $\boldsymbol{B}$ так, чтобы было:

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}.$$

Для этого будет достаточно положить, что

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}}{r} dS.$$

В самом деле, мы находим отсюда, пользуясь уравнением (*2*) примечания 1 и данным выше уравнением (*11*), что

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}}{r} dS = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta \boldsymbol{A}}{r} dS,$$

а это равно $\boldsymbol{A}$ на основании теоремы Пуассона.

При этом мы пользовались следующей теоремой: если ω непрерывно, потенциальную функцию вида

$$\int \frac{\omega}{r} dS$$

можно дифференцировать по одной из координат, просто беря производную ω под знаком интеграла по соответствующей координате элемента dS.

Далее, уравнение (18) показывает, что магнитная сила $\boldsymbol{h}$ распределена соленоидально. Поэтому мы всегда можем подобрать вектор $\boldsymbol{a}$ так, чтобы было:

$$\boldsymbol{h} = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}. \qquad (12)$$

После этого мы можем написать уравнение (20) следующим образом:

$$\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{d} + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{a}}\right) = 0;$$

это выражение показывает, что вектор

$$\boldsymbol{d} + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{a}}$$

должен быть градиентом некоторой скалярной функции $-\varphi$, так что

$$\boldsymbol{d} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{a}} - \operatorname{grad} \varphi. \qquad (13)$$

Следует, впрочем, заметить, что вектор $\boldsymbol{a}$ и скалярная функция φ остаются при этом методе вычисления до некоторой степени неопределенными (хотя в каждом отдельном случае $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{d}$

имеют определенные значения). Понимая под a_0 и φ_0 некоторые частные значения их, мы можем представить другие значения, которые тоже будут пригодны в качестве решения, следующим образом:

$$a = a_0 - \operatorname{grad} \chi, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{c} \chi,$$

где χ есть некоторая скалярная функция. Мы определим ее, подчиняя a и φ условию

$$\operatorname{div} a = -\frac{1}{c} \dot{\varphi}, \tag{14}$$

которое всегда может быть выполнено, так как оно ведет к уравнению

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2} \ddot{\chi} = \operatorname{div} a_0 + \frac{1}{c} \dot{\varphi}_0,$$

а последнее может быть удовлетворено соответствующим подбором значения χ.

Дифференциальные уравнения (31) и (32) непосредственно следуют из (17) и (19), если в эти выражения подставить значения (13) и (12). В самом деле, (17) принимает вид

$$-\frac{1}{c} \operatorname{div} \dot{a} - \Delta\varphi = \rho,$$

т. е. в силу (14)

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} = -\rho,$$

а (19) приобретает вид

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} a = -\frac{1}{c^2} \ddot{a} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \dot{\varphi} + \frac{1}{c} \rho v,$$

или (см. примечание 1)

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} a - \Delta a = -\frac{1}{c^2} \ddot{a} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \dot{\varphi} + \frac{1}{c} \rho v,$$

которое в силу (14) можно написать в таком виде:

$$\Delta a - \frac{1}{c^2} \ddot{a} = -\frac{1}{c} \rho v.$$

6. (Стр. 45.) Наше решение не имеет общего характера, так как оно получено в предположении, что интеграл по поверхности в (10) (примечание 4) пропадает, когда поверхность σ отодвигается в бесконечность. Следует, впрочем, заметить, что всякое другое решение можно привести к виду:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{[\omega]}{r} dS + \psi',$$

где ψ' есть некоторая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta\psi' - \frac{1}{c^2}\ddot{\psi}' = 0.$$

На языке той физической задачи, которой мы сейчас занимаемся, это значит, что электромагнитное поле, определяемое уравнениями (33) — (36) (мы можем *приписать* его электронам), не является единственно возможным; мы всегда можем добавить поле, удовлетворяющее во всех точках пространства уравнениям (2) — (5) для свободного эфира. Но добавочные члены такого рода исключаются вследствие допущения, сделанного в тексте.

Конечно, такое состояние, для которого имеют место формулы (2) — (5), может существовать в ограниченной части пространства; хорошим примером является пучок плоско-поляризованного света, представляемый уравнениями (7). Такой пучок, однако, должен быть приписан колебаниям удаленных электронов, и если мы хотим включить источник света, то ясно, что мы должны обратиться к уравнениям, подобным (33) — (36).

7. (Стр. 46.) Пусть центр электрона движется вдоль оси OX. Тогда ясно, что $a_y = 0$, $a_z = 0$ и что φ и a_x можно рассматривать как функции t, x и расстояния r от начала координат. В самом деле, φ и a_x должны иметь постоянное значение по окружности, осью которой является OX.

Полагая

$$\varphi = f_1(t, r, x), \qquad a_x = f_2(t, r, x),$$

получаем:

$$d_x = -\frac{1}{c}\dot{a}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{x}{r}\frac{\partial f_1}{\partial r},$$

$$d_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{y}{r}\frac{\partial f_1}{\partial r}, \qquad d_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{z}{r}\frac{\partial f_1}{\partial r}.$$

Значит, можно рассматривать d, как результирующую двух векторов, из которых один направлен по OX и имеет величину $-\frac{1}{c}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial x}$, а другой — по r и равен $-\frac{\partial f_1}{\partial r}$.

Составляющие магнитной силы равны

$$h_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0,$$

$$h_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = \frac{z}{r}\frac{\partial f_2}{\partial r},$$

$$h_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = -\frac{y}{r}\frac{\partial f_2}{\partial r},$$

так что $\boldsymbol{h}$ направлено под прямым углом как к OX, так и к прямой r.

То, что говорится в тексте про электрические и магнитные линии сил, является непосредственным следствием этих результатов.

8. (Стр. 48.) При выводе уравнения энергии мы будем исходить из формулы (23). Работа силы, с которой эфир действует на заряд элемента dS в течение промежутка времени dt, выражается скалярным произведением силы $\boldsymbol{f}\rho\, dS$ на путь $\boldsymbol{v}\,dt$. Отсюда интеграл

$$A = \int \rho\,(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v})\,dS$$

выражает полную работу, производимую эфиром за единицу времени; эта работа, однако, зависит исключительно от первой части вектора (23), так как вторая часть $\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{h}]$ перпендикулярна скорости $\boldsymbol{v}$. Следовательно,

$$A = \int \rho\,(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v})\,dS = \int \rho\,(\boldsymbol{d}\boldsymbol{v})\,dS = \int (\boldsymbol{d}\rho\boldsymbol{v})\,dS,$$

и, если взять значение $\rho\boldsymbol{v}$ из уравнения (19),

$$A = c\int (\boldsymbol{d}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h})\,dS - \int (\boldsymbol{d}\dot{\boldsymbol{d}})\,dS. \qquad (15)$$

Развертывая первый интеграл и располагая его члены в другом порядке, получаем:

$$\int \Big\{\Big(d_z\frac{\partial h_y}{\partial x} - d_y\frac{\partial h_z}{\partial x}\Big) + \Big(d_x\frac{\partial h_z}{\partial y} - d_z\frac{\partial h_x}{\partial y}\Big) + \Big(d_y\frac{\partial h_x}{\partial z} - d_x\frac{\partial h_y}{\partial z}\Big)\Big\}\,dS; \qquad (16)$$

здесь каждый член можно проинтегрировать по частям. Поэтому, обозначая через α, β, γ углы, которые нормаль n к поверхности σ образует с положительными осями, имеем:

$$\int d_z\frac{\partial h_y}{\partial x}\,dS = \int d_z h_y\cos\alpha\,d\sigma - \int h_y\frac{\partial d_z}{\partial x}\,dS,$$

$$\int d_y\frac{\partial h_z}{\partial x}\,dS = \int d_y h_z\cos\alpha\,d\sigma - \int h_z\frac{\partial d_y}{\partial x}\,dS,$$

$$\int\Big(d_z\frac{\partial h_y}{\partial x} - d_y\frac{\partial h_z}{\partial x}\Big)\,dS = -\int [\boldsymbol{d}\boldsymbol{h}]_x\cos\alpha\,d\sigma + \int\Big(h_z\frac{\partial d_y}{\partial x} - h_y\frac{\partial d_z}{\partial x}\Big)\,dS,$$

где $[\boldsymbol{dh}]_x$ обозначает первую составляющую векторного произведения $[\boldsymbol{dh}]$.

Преобразуя остальные члены (*16*) подобным же образом, получаем для первого интеграла (*15*) выражение

$$\int (\boldsymbol{d}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h})\,dS =$$

$$= -\int \left\{[\boldsymbol{dh}]_x \cos\alpha + [\boldsymbol{dh}]_y \cos\beta + [\boldsymbol{dh}]_z \cos\gamma\right\} d\sigma +$$

$$+ \int (\boldsymbol{h}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{d})\,dS = -\int [\boldsymbol{dh}]_n\,d\sigma + \int (\boldsymbol{h}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{d})\,dS. \qquad (17)$$

Формулу (37) теперь легко можно получить, если принять во внимание:

а) что в силу (20) последний член (*17*) можно заменить выражением

$$-\frac{1}{c}\int (\boldsymbol{h}\dot{\boldsymbol{h}})\,dS;$$

б) что

$$(\boldsymbol{d}\dot{\boldsymbol{d}}) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,(\boldsymbol{d}^2)}{\partial t}, \quad (\boldsymbol{h}\dot{\boldsymbol{h}}) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,(\boldsymbol{h}^2)}{\partial t}.$$

Мы можем заметить, между прочим, что уравнение (*17*) выражает общую теорему. Обозначая через $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ любые два вектора и через σ поверхность, ограничивающую объем S, мы всегда имеем:

$$\int (\boldsymbol{A}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})\,dS = -\int [\boldsymbol{AB}]_n\,d\sigma + \int (\boldsymbol{B}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\,dS.$$

9. (Стр. 53). Вывод формулы для $\boldsymbol{F}$ во многом напоминает вывод уравнения энергии. Вместо (43) мы можем написать:

$$\boldsymbol{F} = \int \left\{\rho\boldsymbol{d} + \frac{1}{c}\,[\rho\boldsymbol{vh}]\right\} dS;$$

здесь в силу (17) и (19) мы можем заменить ρ через $\mathrm{div}\,\boldsymbol{d}$ и $\rho\boldsymbol{v}$ через $c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h} - \dot{\boldsymbol{d}}$. Отсюда

$$\boldsymbol{F} = \int \left\{\mathrm{div}\,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d} + [\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}] - \frac{1}{c}\,[\dot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{h}]\right\} dS.$$

Но

$$[\dot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{h}] = \frac{\partial}{\partial t}\,[\boldsymbol{dh}] - [\boldsymbol{d}\dot{\boldsymbol{h}}] = \frac{\partial}{\partial t}\,[\boldsymbol{dh}] - c\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}),$$

так что, если мы определим часть F_2 результирующей силы посредством формулы

$$F_2 = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int [dh]\,dS = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int s\,dS = -\frac{1}{c^2}\int \dot{s}\,dS,$$

для остающейся части мы получим выражение

$$F_1 = \int \{\operatorname{div} d \cdot d + [\operatorname{rot} h \cdot h] + [\operatorname{rot} d \cdot d]\}\,dS.$$

Оставляя временно без рассмотрения член, зависящий от магнитной силы, получим для составляющей силы F_1 по оси OX

$$\int \left\{\left(\frac{\partial d_x}{\partial x} + \frac{\partial d_y}{\partial y} + \frac{\partial d_z}{\partial z}\right) d_x + \left(\frac{\partial d_x}{\partial z} - \frac{\partial d_z}{\partial x}\right) d_z - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} - \frac{\partial d_x}{\partial y}\right) d_y \right\} dS = \int \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(d_x^2 - d_y^2 - d_z^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}(d_x d_y) + \frac{\partial}{\partial z}(d_x d_z)\right\} dS = \int \left\{\frac{1}{2}(d_x^2 - d_y^2 - d_z^2)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + d_x d_y \cos\beta + d_x d_z \cos\gamma \right\} d\sigma = \int \frac{1}{2}\{2d_x d_n - d^2\cos\alpha\}\,d\sigma.$$

Другая часть силы F_1, которая зависит от h, приводит к результату такого же вида; причина заключается в том, что F_1 становится симметричным по отношению к d и h при добавлении члена $\operatorname{div} h\, h$, который в силу (18) равен нулю.

10. (Стр. 57.) Напряжение, которое действует в элементе поверхности, имеющем любое направление и любое положение в пространстве, можно вычислить при помощи формул (48); если взять среднее значение за долгий промежуток времени, окажется, что это напряжение направлено под прямым углом к элементу. Другими словами, если мы направим ось x нормально к элементу и обозначим через $(\overline{d_x^2})$ и т. д. рассматриваемые средние значения, получим нормальное давление величиной

$$p = \frac{1}{2}\left\{(\overline{d_y^2}) + (\overline{d_z^2}) - (\overline{d_x^2})\right\} + \frac{1}{2}\left\{(\overline{h_y^2}) + (\overline{h_z^2}) - (\overline{h_x^2})\right\}. \quad (18)$$

Применим теперь к двум частным случаям результат, полученный в § 19. Во-первых, мы можем принять за σ замкнутую поверхность, полностью лежащую внутри оболочки. Так как (см. § 20, б) $F = 0$ и в среднем $F_2 = 0$, то давления p, действующие на поверхности, должны друг друга уничтожать. Отсюда вытекает как следствие, что p должно быть постоянно во всем эфире.

Далее, рассматривая плоскую цилиндрическую коробку, содержащую элемент стенки (рис. 1, стр. 56), мы можем показать, что p действительно есть давление, испытываемое стенками.

Так как давление p одинаково во всех точках, мы можем с полным правом заменить его средним из тех значений, которые выражение *(18)* принимает при определенных направлениях OX, OY, OZ в различных точках пространства. Отсюда, если эти средние значения обозначать при помощи горизонтальной черточки, получаем:

$$p = \frac{1}{2}\left\{(\overline{\overline{d_y^2}}) + (\overline{\overline{d_z^2}}) - (\overline{\overline{d_x^2}})\right\} + \frac{1}{2}\left\{(\overline{\overline{h_y^2}}) + (\overline{\overline{h_z^2}}) - (\overline{\overline{h_x^2}})\right\}.$$

Легко видеть, однако, что порядок обеих операций по вычислению средних значений — по времени и по пространству — можно переставить местами и что в рассматриваемом нами стационарном состоянии средние значения, которые мы обозначали $\overline{\overline{d_x^2}}$ и т. д., от времени не зависят, так что, вычислив их, нам уже не нужно брать средние значения по времени. Поэтому наша формула получает вид

$$p = \frac{1}{2}(\overline{\overline{d_y^2}} + \overline{\overline{d_z^2}} - \overline{\overline{d_x^2}}) + \frac{1}{2}(\overline{\overline{h_y^2}} + \overline{\overline{h_z^2}} - \overline{\overline{h_x^2}}).$$

11. (Стр. 58.) Формулу (51) можно получить, если в преобразованиях примечания **9** опустить все члены, содержащие ρ. Мы можем, однако, поступать также и следующим образом.

Результирующая сила в направлении x, поскольку она вызывается электрическим полем, дается интегралом по поверхности

$$\frac{1}{2}\int\left\{2d_x d_n - d^2\cos\alpha\right\} d\sigma,$$

вместо которого мы можем написать (см. конец примечания **9**) составляющую по оси OX выражения

$$\int\left\{\operatorname{div} \boldsymbol{d}\, \boldsymbol{d} + [\operatorname{rot} \boldsymbol{d}\, \boldsymbol{d}]\right\} dS;$$

к нему мы должны добавить подобное же выражение, зависящее от магнитного поля. Но так как $\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0$ и, по принятому нами допущению, $\operatorname{div} \boldsymbol{d} = 0$, то мы имеем отсюда:

$$\boldsymbol{F}_1 = \int \{[\operatorname{rot} \boldsymbol{h}\, \boldsymbol{h}] + [\operatorname{rot} \boldsymbol{d}\, \boldsymbol{d}]\}\, dS,$$

или, если мы воспользуемся уравнениями (4) и (5),

$$F_1 = \frac{1}{c}\int \{[\dot{d}h] - [\dot{h}d]\}\, dS = \frac{1}{c}\int \{[\dot{d}h] + [d\dot{h}]\}\, dS =$$

$$= \frac{1}{c}\int \frac{\partial}{\partial t}[dh]\, dS = \frac{1}{c^2}\int \dot{s}\, dS.$$

12. (Стр. 60.) Пусть u, v, w будут составляющие скорости эфира в точке (x, y, z) в момент времени t. Тогда, по известной теореме, ускорение в направлении x дается выражением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

так что, если μ есть плотность, а X — сила, действующая на элемент dS в направлении x, получим:

$$X = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) dS.$$

При весьма малых u, v, w мы можем пренебречь членами $u\frac{\partial u}{\partial x}$ и т. д. и прибавить член $u\frac{\partial \mu}{\partial t}$ тоже второго порядка малости, потому что в случае медленного движения изменение плотности в единицу времени весьма мало. Следовательно,

$$X = \frac{\partial}{\partial t}(\mu u\, dS),$$

что является математическим выражением положения, приведенного в тексте.

13. (Стр. 65.) Значение скалярного потенциала в точке эфира x, y, z в момент времени t пусть равно φ; такое же значение он будет иметь в момент времени $t + dt$ в точке с координатами $x + w\,dt$, y, z. Так как потенциал для этих новых значений независимых переменных может быть представлен выражением

$$\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}w\,dt,$$

получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}w\,dt = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -w\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Рассуждая подобным же образом по отношению к функции $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, получаем:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -w\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = w^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}.$$

14. (Стр. 67.) Пусть S' будет система, находящаяся в покое; возьмем две точки, которые назовем соответственными; одна из них пусть относится к движущейся системе S и имеет координаты x, y, z, а другая — к системе S' и имеет координаты x', y, z, причем x и x', конечно, связаны друг с другом соотношением (58). Тогда соответствующие элементы объема dS и dS' относятся друг к другу, как x и x', так что

$$dS' = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}dS,$$

и если они обладают одинаковыми зарядами, плотность ρ' в dS' должна быть связана с плотностью ρ в dS следующим соотношением:

$$\rho' = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\rho.$$

Уравнение Пуассона, которое определяет скалярный потенциал φ' в неподвижной системе, может быть поэтому написано так:

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2} = -\rho' = -(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\rho;$$

сравнивая его с (59), мы видим, что в соответствующих точках

$$\varphi' = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\varphi, \quad \varphi = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\varphi'. \qquad (19)$$

Величины, относящиеся к движущейся системе S, можно теперь выразить как функции от величин, относящихся к S'.

Прежде всего, мы имеем в силу (58) и (19):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (1-\beta^2)^{-1}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}.$$

Далее, на основании (33) и (34) и так как

$$a_x=\beta\varphi,\qquad a_y=0,\qquad a_z=0,$$

$$\dot{a}_x=-w\frac{\partial a_x}{\partial x}=-\beta^2 c\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

имеем.

$$d_x=-\frac{1}{c}\dot{a}_x-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-(1-\beta^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$d_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad d_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$h_x=0,\qquad h_y=\frac{\partial a_x}{\partial z}=\beta\frac{\partial\varphi}{\partial z},\qquad h_z=-\frac{\partial a_x}{\partial y}=-\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Электрическая энергия дается поэтому выражением

$$U=\frac{1}{2}\int\left\{(1-\beta^2)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dS=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left\{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2+(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right]\right\}dS', \tag{20}$$

а для магнитной энергии имеем:

$$T=\frac{1}{2}\beta^2\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dS=$$

$$=\frac{1}{2}\beta^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right\}dS'. \tag{21}$$

Наконец, для составляющих потока энергии получаем:

$$s_x=c\,(d_y h_z-d_z h_y)=c\beta\,(1-\beta^2)^{-1}\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right\},$$

$$s_y=c\,(d_z h_x-d_x h_z)=-c\beta\,(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\frac{\partial\varphi'}{\partial y},$$

$$s_z=c\,(d_x h_y-d_y h_x)=-c\beta\,(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\frac{\partial\varphi'}{\partial z},$$

а для составляющих электромагнитного количества движения:

$$\left.\begin{aligned} G_x &= \frac{1}{c}\beta(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right\}dS', \\ G_y &= -\frac{1}{c}\beta\int\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\,dS', \\ G_z &= -\frac{1}{c}\beta\int\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\,dS'. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

15. (Стр. 68.) Заряд, равномерно распределенный по поверхности шара, можно рассматривать как предельный случай заряда объемной плотности, равномерно распределенного по бесконечно тонкому сферическому слою постоянной толщины. Когда движущаяся система S является таким шаром, неподвижная система S', о которой мы говорили в предыдущем примечании, представляет собой удлиненный эллипсоид вращения, полуось которого a и экваториальный радиус b имеют значения

$$a=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}R, \qquad b=R; \qquad (23)$$

этот эллипсоид несет на себе заряд, равномерно распределенный по бесконечно тонкому слою, ограниченному этим эллипсоидом и другим, который ему подобен и подобно ему расположен относительно центра. Полный заряд следует принять равным e, заряду шара, так как мы предположили, что соответствующие элементы объема в S и S' несут одинаковые заряды.

Поместим начало координат в центр эллипсоида; пусть OX' совпадает с осью вращения и пусть x', y, z будут координаты некоторой внешней точки P. Если под λ мы будем понимать положительный корень уравнения

$$\frac{x'^2}{p^2+\lambda}+\frac{y^2+z^2}{\lambda}=1, \qquad (24)$$

где

$$p^2=a^2-b^2,$$

то потенциал в точке P равен

$$\varphi'=\frac{e}{8\pi p}\log\frac{\sqrt{p^2+\lambda}+p}{\sqrt{p^2+\lambda}-p}.$$

Следует заметить, что для данного значения λ уравнение (24) является уравнением эллипсоида вращения, конфокального с данным; поэтому эквипотенциальные поверхности являются именно такими эллипсоидами. Сама заряженная поверхность характеризуется значением $\lambda=b^2$; λ растет от этого значения до ∞

при перемещении наружу. На заряженной поверхности потенциал равен

$$\varphi_0' = \frac{e}{8\pi p} \log \frac{a+p}{a-p}$$

и имеет то же значение во всех внутренних точках. Интегралы, которые мы получили в предыдущем примечании, нужно поэтому распространять только на внешнюю часть пространства.

При наших вычислениях мы воспользуемся теоремой, что интеграл

$$\frac{1}{2}\int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right)^2 \right\} dS'$$

равен электрической энергии $\frac{1}{2} e\varphi_0'$ заряженного эллипсоида. Отсюда, полагая

$$J_1 = \int \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}\right)^2 dS', \qquad J_2 = \int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right)^2 \right\} dS',$$

получаем:

$$J_1 + J_2 = \frac{e^2}{8\pi p} \log \frac{a+p}{a-p}. \tag{25}$$

Чтобы найти интеграл J_1, мы разделим плоскость $X'OY$ на бесконечно малые участки, проведя систему эллипсов

$$\frac{x'^2}{p^2+\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1 \tag{26}$$

и систему гипербол

$$\frac{x'^2}{p^2-\mu} - \frac{y^2}{\mu} = 1, \tag{27}$$

где μ имеет значения от нуля до p^2. Ограничиваясь той частью плоскости, где x' и y имеют положительные значения, получаем для координат точки пересечения эллипсов и гипербол (26)—(27)

$$x' = \frac{1}{p}\sqrt{(p^2+\lambda)(p^2-\mu)}, \qquad y = \frac{1}{p}\sqrt{\lambda\mu}; \tag{28}$$

площадь элемента, ограниченного эллипсами λ, $\lambda + d\lambda$ и гиперболами μ, $\mu + d\mu$, при этом оказывается равной

$$d\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \lambda}, & \frac{\partial x'}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda}, & \frac{\partial y}{\partial \mu} \end{vmatrix} d\lambda\, d\mu = \frac{1}{4} \frac{\lambda+\mu}{\sqrt{\lambda\mu(p^2+\lambda)(p^2-\mu)}} d\lambda\, d\mu.$$

Примем теперь за величину dS' в нашем интеграле элемент того тороида, который получается при вращении этого элемента плоскости вокруг OX', так что

$$dS' = 2\pi y\, d\sigma = \frac{\pi(\lambda+\mu)}{2p\sqrt{(p^2+\lambda)(p^2-\mu)}}\, d\lambda\, d\mu.$$

Так как φ' зависит только от λ, имеем:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} = \frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x'};$$

величина последнего множителя в этом выражении имеет для всех частей тороида значение, выводимое из (*26*) при постоянном y:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x'} = \frac{2\lambda^2(p^2+\lambda)\,x'}{\lambda^2 x'^2 + (p^2+\lambda)^2 y^2},$$

или в силу (*28*):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x'} = \frac{2\lambda}{(\lambda+\mu)\,p}\sqrt{(p^2+\lambda)(p^2-\mu)}.$$

Из этих результатов следует, что для нахождения J_1 мы должны проинтегрировать выражение

$$\frac{2\pi\lambda^2}{p^3(\lambda+\mu)}\sqrt{(p^2+\lambda)(p^2-\mu)}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda}\right)^2 d\lambda\, d\mu.$$

Если мы примем за пределы μ величины нуль и p^2, а b^2 и ∞ — за пределы λ, мы найдем ту часть J_1, которая вызывается полем в положительной части плоскости yz; мы должны поэтому этот результат удвоить.

На основании того, что

$$\int \frac{\sqrt{p^2-\mu}}{\lambda+\mu}\, d\mu = 2\sqrt{p^2-\mu} - \sqrt{p^2+\lambda}\,\log\frac{\sqrt{p^2+\lambda}+\sqrt{p^2-\mu}}{\sqrt{p^2+\lambda}-\sqrt{p^2-\mu}},$$

$$\int\limits_0^{p^2} \frac{\sqrt{p^2-\mu}}{\lambda+\mu}\, d\mu = -2p + \sqrt{p^2+\lambda}\,\log\frac{\sqrt{p^2+\lambda}+p}{\sqrt{p^2+\lambda}-p},$$

и

$$\left(\frac{\partial\varphi'}{d\lambda}\right)^2 = \frac{e^2}{64\pi^2\lambda^2(p^2+\lambda)},$$

окончательный результат может быть представлен так:

$$J_1 = \frac{e^2}{16\pi p^3}\int\limits_{b^2}^{\infty}\left\{\log\frac{\sqrt{p^2+\lambda}+p}{\sqrt{p^2+\lambda}-p} - \frac{2p}{\sqrt{p^2+\lambda}}\right\} d\lambda.$$

Неопределенный интеграл равен

$$\lambda \log \frac{\sqrt{p^2+\lambda}+p}{\sqrt{p^2+\lambda}-p} - 2p\sqrt{p^2+\lambda},$$

и так как это выражение для $\lambda=\infty$ пропадает, а для $\lambda=b^2$ равно

$$b^2 \log \frac{a+p}{a-p} - 2ap,$$

интеграл J_1 получает значение

$$J_1 = \frac{e^2}{16\pi p^3}\left\{2ap - b^2 \log \frac{a+p}{a-p}\right\}.$$

В рассматриваемой задаче a и b даются (*23*), так что

$$p = R\beta(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$J_1 = \frac{e^2}{16\pi R\beta^3}(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}\left[2\beta(1-\beta^2)^{-1} - \log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right],$$

$$J_2 = \frac{e^2}{16\pi R\beta^3}(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\left[-2\beta + (1+\beta^2)\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right].$$

Подставляя эти величины в формулы (*20*), (*21*) и (*22*), получаем уравнения (61), (62) и (63).

16. (Стр. 70.) Так как электромагнитное количество движения $\boldsymbol{G}$ и скорость $\boldsymbol{w}$ имеют одинаковое направление, мы можем написать

$$\boldsymbol{G} = \alpha \boldsymbol{w},$$

где α есть отношение между значениями $|\boldsymbol{G}|$ и $|\boldsymbol{w}|$. Это отношение есть функция $|\boldsymbol{w}|$.

Дифференцируя по t, получаем:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = -\alpha\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{w} = -\alpha\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} - \frac{d\alpha}{d|\boldsymbol{w}|}\frac{d|\boldsymbol{w}|}{dt}\boldsymbol{w}.$$

Но

$$\boldsymbol{w}\frac{d|\boldsymbol{w}|}{dt} = |\boldsymbol{w}|\boldsymbol{j}', \qquad \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \boldsymbol{j}' + \boldsymbol{j}'',$$

так что

$$\boldsymbol{F} = -\alpha(\boldsymbol{j}'+\boldsymbol{j}'') - |\boldsymbol{w}|\frac{d\alpha}{d|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{j}' = -\frac{d}{d|\boldsymbol{w}|}\{\alpha|\boldsymbol{w}|\}\boldsymbol{j}' - \alpha\boldsymbol{j}'' =$$

$$= -\frac{d|\boldsymbol{G}|}{d|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{j}' - \frac{|\boldsymbol{G}|}{|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{j}'' = -m'\boldsymbol{j}' - m''\boldsymbol{j}'',$$

16.* (Стр. 78.) [1915] В последнее время были проделаны весьма интересные опыты, в особенности Эренгафтом [1]) и Милликеном [2]); благодаря этим опытам оказалось возможным измерить малые электрические заряды на мельчайших металлических частичках или каплях жидкости.

Известно, что скорость v, которую приобретает небольшое тело при своем падении через газ, определяется тем правилом, что сопротивление движению в конце концов становится равным весу частички G. Для медленного движения сопротивление пропорционально скорости, так что мы можем написать:

$$G = \mu v,$$

где μ есть коэффициент, который для сферической частички может быть выражен через ее радиус и коэффициент вязкости окружающего газа.

Подобное же уравнение имеет место, когда на частичку действует вертикальная электрическая сила E. Пусть e — заряд частички и пусть сила E имеет положительное значение, когда она направлена вниз. Тогда скорость падения будет определена выражением

$$G + eE = \mu v'.$$

Если eE отрицательно, эта скорость может быть сделана много меньше, чем v.

Ясно, что, измеряя v и v', мы можем определить отношение между eE и G; отсюда можно узнать e, если известны E и G.

Милликен получил для e такие значения, которые можно рассматривать как кратные некоторого «элементарного» заряда. Эренгафт, напротив, пришел к заключению, что в некоторых случаях заряды не являются кратными какого-либо элементарного заряда и могут даже быть меньше его.

Этот вопрос нельзя считать разъясненным окончательно [30].

17. (Стр. 84.) Возьмем простой случай бесконечно длинного круглого металлического цилиндра радиуса a_1, окруженного коаксиальной трубой с внутренним радиусом a_2. Когда ток i проходит вдоль внутреннего стержня и возвращается по наружной трубе, магнитная энергия, поскольку она содержится в пространстве между двумя проводниками, равна

$$\frac{i^2}{4\pi c^2} \log \frac{a_2}{a_1}$$

---

[1]) F. Ehrenhaft, Wiener Sitzungsber. (IIa), **123** (1914), стр. 53.

[2]) R. A. Millikan, Phys. Zeitschr. **11** (1910), стр. 1097.

на единицу длины; это выражение — порядка величины

$$\frac{i^2}{4\pi c^2}, \tag{29}$$

если $\frac{a_2}{a_1}$ — не слишком большое число.

С другой стороны, если эти два проводника содержат на единицу длины N_1 и N_2 электронов, движущихся со скоростями v_1 и v_2, сумма тех количеств энергии, которые соответствовали бы движению каждого из них в отдельности, будет:

$$\frac{1}{2}m(N_1v_1^2+N_2v_2^2)=\frac{e^2}{12\pi Rc^2}(N_1v_1^2+N_2v_2^2),$$

если допустить, что массы частичек имеют исключительно электромагнитное происхождение.

Так как ток равен

$$i=eN_1v_1=eN_2v_2,$$

мы можем наше последнее выражение написать так:

$$\frac{i^2}{12\pi Rc^3}\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}\right). \tag{30}$$

В опытах по самоиндукции никогда не было обнаружено эффекта, которого нельзя было бы объяснить обычными формулами. Поэтому в обычных случаях значение (*30*) должно быть много меньше, чем (*29*), откуда можно заключить, что N_1R и N_2R являются большими числами.

18. (Стр. 85.) В нижеследующем доказательстве формулы (76) мы ограничимся случаем электрона, который имеет прямолинейное поступательное движение параллельно OX с переменной скоростью v. Пусть Q будет определенная точка этого электрона и P — точка эфира, находящаяся внутри объема, занятого частичкой в тот момент времени t, для которого мы хотим вычислить силу. Пусть x', y', z' будут координаты точки P и x, y, z — координаты точки Q в момент времени t.

Среди ряда последовательных положений, занимаемых Q, есть одно такое Q_e, что действие, исходящее из него в тот момент, как Q пришло в эту точку, и распространяющееся наружу со скоростью света c, придет в точку P в момент времени t. Если мы обозначим через $t-\tau$ время, в которое достигается это «эффективное» положение, как мы его можем назвать, мы получим для координат Q_e:

$$x_e=x-v\tau+\frac{1}{2}\dot{v}\tau^2-\frac{1}{6}\ddot{v}\tau^3+\ldots, \tag{31}$$

$$y_e=y,\quad z_e=z,$$

и, так как Q_eP должно быть равно $c\tau$,

$$(x_e - x')^2 + (y_e - y')^2 + (z_e - z')^2 = c^2\tau^2. \tag{32}$$

При помощи этих соотношений x_e и τ могут быть выражены через x, y, z. Полагая, что $QP = r$, так что

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

и считая v, $\dot{v}$, $\ddot{v}$, ... настолько малыми, что можно пренебречь членами, содержащими квадраты этих величин, мы можем подставить в (31) $\tau = \frac{r}{c}$, вследствие чего получаем:

$$x_e = x - \frac{v}{c} r + \frac{\dot{v}}{2c^2} r^2 - \frac{\ddot{v}}{6c^3} r^3 + \dots \tag{33}$$

Подставляя это значение в (32), имеем:

$$\tau = \frac{r}{c} - \frac{v}{c^2}(x - x') + \frac{\dot{v}}{2c^3}(x - x')r - \frac{\ddot{v}}{6c^4}(x - x')r^2 - \dots$$

Из (33) следует, что точки Q, которые в момент времени t расположены в элементе $dx\,dy\,dz$, имеют эффективное положение в элементе $dx_e\,dy\,dz$, где

$$dx_e = \left\{1 - \frac{v}{c}\frac{x - x'}{r} + \frac{\dot{v}}{c^2}(x - x') - \frac{\ddot{v}}{2c^3}(x - x')r + \dots\right\} dx.$$

Следовательно, каждому элементу dS электрона в том положении, которое он занимает в момент времени t, соответствует элемент объема

$$dS_e = \left\{1 - \frac{v}{c}\frac{x - x'}{r} + \frac{\dot{v}}{c^2}(x - x') - \frac{\ddot{v}}{2c^3}(x - x')r + \dots\right\} dS,$$

в котором плотность ρ в момент времени $t - \tau$ была равна той плотности, которая существовала в элементе dS в момент t, причем скорость этого заряда

$$v - \dot{v}\tau + \frac{1}{2}\ddot{v}\tau^2 - \dots,$$

или, с достаточной степенью приближения,

$$v - \frac{\dot{v}}{c} r + \frac{\ddot{v}}{2c^2} r^2 - \dots \tag{34}$$

Расстояние элемента dS_e от точки P дается выражением

$$c\tau = r\left\{1 - \frac{v}{c}\frac{x - x'}{r} + \frac{\dot{v}}{2c^2}(x - x') - \frac{\ddot{v}}{6c^3}(x - x')r + \dots\right\},$$

так что частное $\frac{dS}{r}$ в уравнении (35) нужно заменить через

$$\frac{dS_e}{c\tau}=\left[1+\frac{\dot{v}}{2c^2}(x-x')-\frac{\ddot{v}}{3c^3}(x-x')r+\ldots\right]\frac{dS}{r}.$$

Множитель в квадратных скобках можно опустить в выражении для первой составляющей вектор-потенциала; здесь, впрочем, мы должны заменить v выражением (*34*). Таким путем находим:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\int\rho\left[1+\frac{\dot{v}}{2c^2}(x-x')-\frac{\ddot{v}}{3c^3}(x-x')r+\ldots\right]\frac{dS}{r},$$

$$a_x=\frac{1}{4\pi c}\int\rho\left(v-\frac{\dot{v}}{c}r+\frac{\ddot{v}}{2c^2}r^2-\ldots\right)\frac{dS}{r},$$

причем интегрирование производится по всему объему, занимаемому электроном в момент времени t.

Перейдем теперь к вычислению электрической силы $\boldsymbol{f}$ в точке P. Следует прежде всего заметить, что мы можем обойтись без рассмотрения члена $\frac{1}{c}[\boldsymbol{vh}]$ в (23), так как магнитная сила $\boldsymbol{h}$ сама пропорциональна v. Отсюда, по (33), составляющая $\boldsymbol{f}$ по оси x, которой мы можем ограничиться, равна

$$f_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x'}-\frac{1}{c}\dot{a}_x.$$

Так как дифференцирование может быть произведено под знаком интеграла, получаем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}=\frac{1}{4\pi}\int\rho\frac{x-x'}{r^3}dS+\frac{\dot{v}}{8\pi c^2}\int\rho\left\{-\frac{1}{r}+\frac{(x-x')^2}{r^3}\right\}dS+$$
$$+\frac{\ddot{v}}{12\pi c^3}\int\rho\,dS+\ldots,$$

$$\dot{a}_x=\frac{\dot{v}}{4\pi c}\int\frac{\rho}{r}dS-\frac{\ddot{v}}{4\pi c^2}\int\rho\,dS+\ldots,$$

и, так как $\int\rho\,dS=e$,

$$f_x=\frac{1}{4\pi}\int\rho\frac{x'-x}{r^3}dS-\frac{\dot{v}}{8\pi c^2}\int\rho\left\{\frac{1}{r}+\frac{(x-x')^2}{r^3}\right\}dS+\frac{\ddot{v}}{6\pi c^3}e. \quad (35)$$

Чтобы найти результирующую силу, мы должны умножить это выражение на $\rho'\,dS'$, где dS' есть элемент объема в точке P, и ρ' — плотность в этой точке; далее, мы должны проинтегрировать это выражение по dS'. Первый член в (*35*) нам дает нуль, а последний

$$\frac{e^2\ddot{v}}{6\pi c^3}$$

в согласии с выражением (76); эти результаты не зависят от формы электрона и от распределения его заряда. Что касается среднего члена в (*35*), он приводит к выражению для силы

$$-\frac{\dot{v}}{8\pi c^2}\int \rho'\, dS' \int \rho\left\{\frac{1}{r}+\frac{(x-x')^2}{r^3}\right\} dS.$$

В случае сферического электрона, заряд которого распределен симметрично вокруг центра, мы можем вместо $(x-x')^2$ написать $\frac{1}{3}r^2$ и таким образом получим:

$$-\frac{\dot{v}}{6\pi c^2}\int \rho'\, dS' \int \frac{\rho}{r}\, dS. \qquad (36)$$

Если заряд распределен по поверхности, интеграл $\int \frac{\rho}{r}\, dS$ имеет значение $\frac{e}{R}$ во всех точках, где плотность ρ' отлична от нуля. Поэтому (*36*) превращается в

$$-\frac{e\dot{v}}{6\pi R c^2}\int \rho'\, dS' = -\frac{e^2\dot{v}}{6\pi R c^2}$$

в согласии с выражением (*72*).

Вышеприведенные выкладки подтверждают также и то, что было сказано в § 37 про выражение результирующей силы в виде ряда, каждый член которого по отношению к предыдущему имеет порядок величины $\frac{R}{c\tau}$.

19. (Стр. *87*.) Сосредоточим наше внимание на эффективном положении M (см. примечание **18**) определенной точки электрона, например его центра. Если M достигает этого положения в некоторый момент времени t_0, предшествующий моменту времени t, для которого мы хотим вычислить значение потенциала в отдаленной точке P, и если расстояние MP обозначить через r, мы имеем:

$$r = c\,(t - t_0). \qquad (37)$$

Помещая M в начале координат, будем под x_P, y_P, z_P понимать координаты точки P.

Будем теперь искать эффективное положение (x_e, y_e, z_e) точки электрона, координаты которой в момент времени t_0 равны x, y, z. Это эффективное положение M' будет достигнуто в момент времени t_e, слегка отличающийся от t_0; если мы положим:

$$t_e = t_0 + \tau,$$

интервал τ будет весьма мал. Координаты x, y, z тоже малы; мы достигнем достаточного приближения, если в наших формулах будем пренебрегать всеми членами второго порядка малости по отношению к этим четырем величинам.

Условие, чтобы M' было эффективным положением рассматриваемой точки, выражается так:

$$M'P = c\,(t - t_e) = c\,(t - t_0 - \tau). \tag{38}$$

Но, если $\boldsymbol{v}$ есть скорость электрона в момент времени t_0, мы можем написать для координат точки M':

$$x_e = x + v_x\tau,\quad y_e = y + v_y\tau,\quad z_e = z + v_z\tau, \tag{39}$$

так что для (38) получаем:

$$(x_P - x - v_x\tau)^2 + (y_P - y - v_y\tau)^2 + (z_P - z - v_z\tau)^2 = c^2\,(t - t_0 - \tau)^2,$$

или в силу (37) и по той причине, что

$$\frac{x_P v_x + y_P v_y + z_P v_z}{r}$$

есть составляющая v_r вектора $\boldsymbol{v}$ по направлению MP.

$$2\,(x_P x + y_P y + z_P z) + 2v_r r\tau = 2cr\tau,$$

откуда

$$\tau = \frac{x_P x + y_P y + z_P z}{(c - v_r)\,r}. \tag{40}$$

Эффективные положения точек электрона, которые в момент времени t_0 лежат в элементе dS, находятся внутри элемента объема dS_e, величина которого равна произведению dS на функциональный определитель величин (39) по x, y, z. Этот определитель равен

$$1 + v_x\frac{\partial\tau}{\partial x} + v_y\frac{\partial\tau}{\partial y} + v_z\frac{\partial\tau}{\partial z},$$

или в силу (40)

$$1 + \frac{v_x x_P + v_y y_P + v_z z_P}{(c - v_r)\,r} = 1 + \frac{v_r}{c - v_r} = \frac{c}{c - v_r}.$$

Что касается расстояния r в знаменателях (35) и (36), мы можем для него принять длину MP; в последних двух формулах мы можем понимать под $\boldsymbol{v}$ скорость электрона в момент времени t_0. Вследствие этого общие уравнения приобретают вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi r}\int \rho\, dS_e, \quad \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v}}{4\pi c r}\int \rho\, dS_e;$$

это эквивалентно (79), так как

$$\int \rho\, dS_e = \frac{c}{c - \boldsymbol{v}_r}\int \rho\, dS = \frac{ce}{c - \boldsymbol{v}_r},$$

причем ρ есть значение плотности в момент времени t_0 в элементе dS.

20. (Стр. 88.) Так как поле определяется производными потенциалов, мы должны сначала определить эти потенциалы. При этом мы обозначим через x, y, z координаты удаленной точки P, для которой мы хотим знать значения $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$.

Если мы изменим на dt время t, для которого мы ищем φ и $\boldsymbol{a}$, оставляя x, y, z постоянными, эффективным положением электрона придется называть уже другое положение. Наряду с этим новое эффективное положение будет достигнуто в момент времени, слегка отличный от t_0; оно будет находиться от P на расстоянии, ином, чем r, причем эти два изменения связаны друг с другом формулой

$$dr = -\boldsymbol{v}_r\, dt_0;$$

смысл $\boldsymbol{v}_r$ был разъяснен в § 38.

Дифференцируя уравнение (37), получаем:

$$-\boldsymbol{v}_r\, dt_0 = c\,(dt - dt_0),$$

$$dt_0 = \frac{c}{c - \boldsymbol{v}_r}\, dt.$$

Отсюда видно, что при этом изменении переменных значение некоторой величины ψ, соответствующей моменту времени t_0, изменяется на

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] dt_0 = \frac{c}{c - \boldsymbol{v}_r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] dt,$$

так что мы можем написать:

$$\frac{d\,[\psi]}{dt} = \frac{c}{c - \boldsymbol{v}_r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right],$$

причем квадратные скобки имеют тот смысл, который был им придан раньше.

Применяя эти формулы к выражениям (79), мы предположим, что расстояние $r = MR$ значительно больше размеров электрона, так что в окончательных формулах для d и h мы можем пренебречь всеми членами порядка $\frac{1}{r^2}$. Поэтому мы можем принять за постоянные величины три косинуса в уравнении

$$v_r = v_x \cos(r, x) + v_y \cos(r, y) + v_z \cos(r, z);$$

в самом деле, их производные — порядка $\frac{1}{r}$, а в φ уже входит множитель $\frac{1}{r}$. Следовательно,

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = j_x \cos(r, x) + j_y \cos(r, y) + j_z \cos(r, z) = j_r,$$

и, так как множитель $\frac{1}{r}$ в φ можно принять за постоянную,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{e}{4\pi c\left[r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)^2\right]} \frac{d[v_r]}{dt} = \frac{e}{4\pi c\left[r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)^2\right]} [j_r].$$

Если, наконец, мы отбросим все члены второго порядка малости по отношению к скорости и ускорению электрона, мы придем к дальнейшему упрощению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{e}{4\pi c r} [j_r].$$

Подобным же образом можно найти из второго уравнения (79)

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{e}{4\pi c r} [j].$$

Нам предстоит теперь вычислить производные по координатам. Рассмотрим сначала бесконечно малое перемещение P в некотором направлении h под прямым углом к MP. Так как расстояние MP при этом не изменяется, а t все время остается постоянным, то как момент времени t_0, так и эффективное положение M тоже остаются неизменными. Так как мы опять можем пренебречь изменением направления r, мы приходим к заключению, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial h} = 0.$$

Производные по направлению r легко найти следующим способом. Если P смещается на отрезок dr вдоль продолженного направления MP, t увеличивается в то же самое время на величину $dt = \frac{dr}{c}$, причем эффективное положение электрона и время t_0 остаются без изменения, а так как при этом знаменатель r не подлежит дифференцированию, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dr + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\frac{dr}{c} = 0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad \frac{\partial a}{\partial r} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial a}{\partial t}.$$

Комбинируя этот результат с предыдущим, получаем для любого направления k, как для скалярного, так и для векторного потенциала,

$$\frac{\partial}{\partial k} = \cos(r, k)\,\frac{\partial}{\partial r}$$

и, в частности,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(r, x)\,\frac{\partial}{\partial r},\quad \frac{\partial}{\partial y} = \cos(r, y)\,\frac{\partial}{\partial r},\quad \frac{\partial}{\partial z} = \cos(r, z)\,\frac{\partial}{\partial r}.$$

При помощи этих соотношений можно без труда получить формулы (80) и (81).

21. (Стр. 88.) В формулах (80) каждая составляющая $\boldsymbol{d}$ представлена как разность двух членов. Члены с отрицательным знаком можно рассматривать как составляющие вектора

$$-\frac{e}{4\pi c^2 r}\,\dot{j},$$

а члены с положительным знаком — как составляющие вектора

$$\frac{e}{4\pi c^2 r}\,(\dot{j}_r);$$

мы пользуемся здесь скобками для обозначения того, что составляющая $\dot{j}_r$ сама должна быть рассматриваема как вектор. Придавая такой же смысл $(\dot{j}_p)$, так что

$$\dot{j} = (\dot{j}_r) + (\dot{j}_p),$$

получаем:

$$\boldsymbol{d} = \frac{e}{4\pi c^2 r}\,\{-\dot{j} + (\dot{j}_r)\} = -\frac{e}{4\pi c^2 r}\,(\dot{j}_p),$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{e}{4\pi c^2 r}\,[\dot{j}\boldsymbol{k}] = -[\boldsymbol{dk}].$$

Магнитная сила поэтому оказывается перпендикулярной как $\boldsymbol{d}$, так и $\boldsymbol{k}$, а направление ее таково, что поток энергии $c\,[\boldsymbol{dh}]$ направлен вдоль по $\boldsymbol{k}$ от электрона. Интенсивность потока равна $c\,|\boldsymbol{d}|\,|\boldsymbol{h}| = cd^2$.

21*. (Стр. 89.) [1915] Опыты по диффракции рентгеновых лучей в кристаллах, впервые произведенные Лауэ, Книппингом и Фридрихом [1]) и после У. Г. и У. Л. Брэггами [2]), показали, что эти лучи по свойствам гораздо ближе к световым лучам, чем это принималось раньше, и единственное различие заключается в длине волны, которая для рентгеновых лучей — порядка 10^{-9} *см*. Часть рентгеновского излучения состоит из однородных лучей, характеризующих металл антикатода. Другая часть распределена равномерно по некоторому интервалу частот, и ее можно сравнить с белым светом [31].

22. (Стр. 91.) Интересным применением формулы сопротивления является вычисление затухания колебаний электрона, к которому мы сейчас и перейдем. Предположим, что на частичку действует упругая сила $-fq$, где q есть смещение из положения равновесия, а f — положительная постоянная. Движение в направлении OX определяется уравнением

$$m\ddot{q}_x = -fq_x + \frac{e^2}{6\pi c^3}\dddot{q}_x,$$

частное решение которого можно найти, взяв для q_x действительную часть

$$\varepsilon^{\alpha t},$$

где ε есть основание натуральных логарифмов, а α — комплексная постоянная, определяемая условием

$$m\alpha^2 = -f + \frac{e^2}{6\pi c^3}\alpha^3. \qquad (41)$$

Если этот последний член оказывает только очень малое влияние, мы можем заменить в нем α значением, получаемым из уравнения

$$m\alpha^2 = -f.$$

Отсюда, полагая

$$\frac{f}{m} = n^2,$$

имеем:

$$\alpha = in - \frac{e^2n^2}{12\pi mc^3},$$

и, вводя две постоянные a и p,

$$q_x = a\varepsilon^{-\frac{e^2n^2}{12\pi mc^3}t}\cos(nt + p).$$

---

1) Friedrich, Knipping u. Laue, Ann. Phys. **41** (1913), стр. 971.

2) W. H. and W. L. Bragg, *X*-Rays and crystal structure, London, 1915.

Эта формула показывает, что за промежуток времени, равный

$$\tau = \frac{12\pi mc^3}{e^2 n^2},$$

амплитуда падает до $\frac{1}{e}$ своего первоначального значения.

Принимая за m значение (72) и обозначая через T период колебаний $\frac{2\pi}{n}$, а через λ — длину волны, получим:

$$\tau = \frac{\lambda}{2\pi^2 R} T.$$

Если мы подставим для R значение из § 35, получим для желтого света ($\lambda = 0{,}00006$ *см*):

$$\tau = 2 \cdot 10^7 T,$$

откуда видно, что затухание весьма мало и что мы были правы, когда говорили о малой величине последнего члена в (*41*).

Этот вопрос о затухании колебаний представляется важным потому, что чем меньше затухание, тем ближе свойства излучения к свойствам действительно однородного света. Мы можем составить себе представление о степени однородности, производя опыты над видимостью интерференционных полос для разных значений разности фаз; в самом деле, если эта разность постепенно возрастает, полосы могут оставаться видимыми в течение долгого времени только в том случае, если свет обладает высокой степенью однородности. Таким образом, малое затухание оказывается связанным с хорошей видимостью полос; это заключение легко понять, если принять во внимание, что интерференция становится нечеткой при большой разнице в интенсивности двух интерферирующих лучей. Это должно иметь место во всех тех случаях, когда амплитуда колебаний источника света заметно уменьшается за промежуток времени между моментами испускания интерферирующих лучей.

Вышеприведенные результаты удовлетворительно согласуются с опытами Луммера и Герке, которые получали при благоприятных условиях интерференцию при разности фаз до двух миллионов периодов. Подобные же результаты были получены также Бюиссоном и Фабри, которые изучали излучение гелия, криптона и неона в вакуумных трубках.

23. (Стр. 95.) При каждом последовательном дифференцировании по одной из координат выражения для $\frac{[p_x]}{r}$ мы должны дифференцировать как тригонометрическую функцию, так и стоящий перед ней множитель. Эти операции вводят множитель порядка $\frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ (если λ обозначает длину волны) и $\frac{1}{r}$. Но, так как r много больше, чем λ, мы можем ограничиться дифференцированием тригонометрической функции.

Так, например,

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\frac{[p_x]}{r} = -\frac{nb}{4\pi c r}\cdot\frac{x}{r}\sin\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\},$$

$$a_x = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{[p_x]}{r} = -\frac{nb}{4\pi c r}\sin\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\},$$

$$d_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial a_x}{\partial t} = \frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\left(-\frac{x^2}{r^2}+1\right)\cos\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\}.$$

Легко проверить при помощи выражений (95), что d и h направлены под прямым углом как друг к другу, так и к прямой r и что амплитуды их одинаковы. Формулы представляют систему плоско-поляризованных волн, амплитуда которых изменяется обратно пропорционально расстоянию r при передвижении вдоль прямой, проведенной из излучающей частички. Поток энергии изменяется пропорционально $\frac{1}{r^2}$.

24. (Стр. 98.) Рассматривая любую из зависимых переменных, например ψ, сначала как функцию x, y, z, t, а затем как функцию x', y', z', t', получаем следующие соотношения, вытекающие из (96) и из выражения

$$t' = t - \frac{1}{c^2}(w_x x + w_y y + w_z z),$$

которым можно заменить (97), если пренебречь квадратом $\frac{w}{c}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x'} - \frac{w_x}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y'} - \frac{w_y}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t'}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial z'} - \frac{w_z}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial t'} - w_x\frac{\partial\psi}{\partial x'} - w_y\frac{\partial\psi}{\partial y'} - w_z\frac{\partial\psi}{\partial z'}.$$

Благодаря этому уравнение (17) принимает вид

$$\frac{\partial d_x}{\partial x'} + \frac{\partial d_y}{\partial y'} + \frac{\partial d_z}{\partial z'} - \frac{1}{c^2}\left[w_x\frac{\partial d_x}{\partial t'} + w_y\frac{\partial d_y}{\partial t'} + w_z\frac{\partial d_z}{\partial t'}\right] = \rho.$$

В членах с множителями w_x, w_y, w_z нам не нужно различать между производными по t', x', y', z' и по t, x, y, z, Отсюда в силу (19) мы можем написать для членов, заключённых в квадратные скобки:

$$c w_x\left(\frac{\partial h_z}{\partial y'}-\frac{\partial h_y}{\partial z'}\right)+c w_y\left(\frac{\partial h_x}{\partial z'}-\frac{\partial h_z}{\partial x'}\right)+c w_z\left(\frac{\partial h_y}{\partial x'}-\frac{\partial h_x}{\partial y'}\right)-(w v)\,\rho.$$

В последнем члене v можно заменить через u, так как мы все время пренебрегаем квадратом w; мы сразу придем к уравнению (100), если будем помнить, что

$$d_x+\frac{1}{c}(w_y h_z-w_z h_y)=d'_x \text{ и т. д.}$$

Преобразуем теперь первое из трех уравнений, на которые распадается (19), а именно:

$$\frac{\partial h_z}{\partial y}-\frac{\partial h_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\left(\rho v_x+\frac{\partial d_x}{\partial t}\right).$$

Оно принимает вид

$$\frac{\partial h_z}{\partial y'}-\frac{w_y}{c^2}\frac{\partial h_z}{\partial t'}-\frac{\partial h_y}{\partial z'}+\frac{w_z}{c^2}\frac{\partial h_y}{\partial t'}=$$
$$=\frac{1}{c}\left(\rho w_x+\rho u_x+\frac{\partial d_x}{\partial t'}-w_x\frac{\partial d_x}{\partial x'}-w_y\frac{\partial d_x}{\partial y'}-w_z\frac{\partial d_x}{\partial z'}\right),$$

или, если ρw_x заменить через

$$w_x\left(\frac{\partial d_x}{\partial x'}+\frac{\partial d_y}{\partial y'}+\frac{\partial d_z}{\partial z'}\right)$$

и переставить члены в другом порядке:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left\{h_z-\frac{1}{c}(w_x d_y-w_y d_x)\right\}-\frac{\partial}{\partial z'}\left\{h_y-\frac{1}{c}(w_z d_x-w_x d_z)\right\}=$$
$$=\frac{1}{c}\rho u_x+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\left\{d_x+\frac{1}{c}(w_y h_z-w_z d_y)\right\}.$$

Это — первое из уравнений, заключающихся в (102).

25. (Стр. 98.) Заметим прежде всего, что потенциалы φ' и a' удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\varphi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2}=-\rho, \tag{42}$$

$$\Delta a'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a'}{\partial t'^2}=-\frac{1}{c}\rho u \tag{43}$$

(см. примечание 4), где Δ является теперь сокращенным обозначением для

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2};$$

потенциалы связаны друг с другом соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{a}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t'}+\frac{1}{c^2}(\mathbf{w}\dot{\mathbf{a}}'). \tag{44}$$

Чтобы доказать последнюю формулу, мы будем исходить из выведенного в примечании 2 уравнения (*5*), которое можно выразить в новых переменных следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'}-\mathbf{w}_x\frac{\partial \rho}{\partial x'}-\mathbf{w}_y\frac{\partial \rho}{\partial y'}-\mathbf{w}_z\frac{\partial \rho}{\partial z'}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})-\frac{1}{c^2}\left(\mathbf{w}\,\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t'}\right)=0,$$

или, если опять пренебречь квадратом $\mathbf{w}$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})-\frac{1}{c^2}\left(\mathbf{w}\,\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t'}\right)=0. \tag{45}$$

Если в интеграле вида (104) или (105) множитель, на который умножается $\frac{1}{r}$, есть непрерывная функция местного времени t' и координат x', y', z' элемента dS, частные производные интеграла по t' или по координатам той точки, для которой он вычисляется, можно найти простым дифференцированием упомянутого множителя по t' или по x', y', z', причем производная опять берется для значения местного времени $t'-\frac{r}{c}$.

Согласно этому правилу

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t'}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t'}\right]dS,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a}'=\frac{1}{4\pi c}\int\frac{1}{r}\left[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\right]dS,$$

$$\dot{\mathbf{a}}'=\frac{1}{4\pi c}\int\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t'}\right]dS,$$

откуда заключаем, что

$$(\mathbf{w}\dot{\mathbf{a}}')=\frac{1}{4\pi c}\int\frac{1}{r}\left[\left(\mathbf{w}\,\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t'}\right)\right]dS.$$

В силу (*45*) эти выражения являются подтверждением уравнения (*44*); прямой подстановкой можно далее найти, что основные уравнения (100) — (103) удовлетворяются подстановкой (106) — (107) (см., впрочем, примечание **6**). Так, например, мы имеем:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d}' = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{a}}' - \Delta\varphi' + \frac{1}{c} \Delta(\boldsymbol{w}\boldsymbol{a}').$$

Но по (*44*)

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{a}}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} + \frac{1}{c^2} (\boldsymbol{w}\ddot{\boldsymbol{a}}'),$$

так что предшествующее уравнение принимает вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} - \Delta\varphi' - \frac{1}{c^3} (\boldsymbol{w}\ddot{\boldsymbol{a}}') + \frac{1}{c} \Delta(\boldsymbol{w}\boldsymbol{a}').$$

Два члена, содержащие $\boldsymbol{a}'$, равны

$$\frac{1}{c}\left(\boldsymbol{w}\left\{\Delta\boldsymbol{a}' - \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{a}}'\right\}\right),$$

и в силу (*42*) и (*43*) правая часть уравнения становится тождественной с уравнением (100).

Не составляет никакого труда проверить уравнения (101) и (103). Что касается уравнения (102), мы получаем из (107) (см. примечание **1**):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h}' = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a}' = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a}' - \Delta\boldsymbol{a}',$$

и, если воспользоваться уравнениями (*42*), (*43*) и (106),

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h}' = -\frac{1}{c} \operatorname{grad} \dot{\varphi}' + \frac{1}{c^2} \operatorname{grad} (\boldsymbol{w}\dot{\boldsymbol{a}}') + \frac{1}{c} \rho\boldsymbol{u} -$$
$$- \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{a}}' = \frac{1}{c} (\dot{\boldsymbol{d}}' + \rho\boldsymbol{u}).$$

26. (Стр. 99). Задачу можно свести к задаче определения поля уединенного движущегося электрона (см. §§ 38, 41, 42 и примечание **19**). Пусть P будет удаленная точка, для которой мы должны вычислить потенциалы φ' и $\boldsymbol{a}'$ в момент t' местного времени, а M — определенная точка электрона, например его центр, в ее эффективном положении, так что если t'_0 есть время (местное время для M), когда эта точка приходит в это эффективное положение, а r — длина отрезка MP,

$$r = c(t' - t'_0). \qquad (46)$$

Помещая начало координат в точке M, обозначим координаты точки P через x'_P, y'_P, z'_P, координаты некоторой точки электрона Q в момент времени t'_0 (местное время M) через x', y', z', координаты эффективного положения Q_e этой точки через x'_e, y'_e, z'_e; через $t'_0+\tau$ (местное время M) обозначим время, в которое это положение достигается, так что, по (97), местное время самой точки Q_e будет выражаться следующим образом:

$$t'_e = t'_0 + \tau - \frac{1}{c^2}(w_x x'_e + w_y y'_e + w_z z'_e).$$

Условие, чтобы Q_e было эффективным положением рассматриваемой точки, выражается уравнением, подобным (46), а именно:

$$Q_e P = c\,(t' - t'_e);$$

возводя обе части в квадрат, имеем:

$$(x'_P - x'_e)^2 + (y'_P - y'_e)^2 + (z'_P - z'_e)^2 =$$

$$= c^2 (t' - t'_0 - \tau)^2 + 2\,(t' - t'_0 - \tau)\,(w_x x'_e + w_y y'_e + w_z z'_e).$$

Так как промежуток времени τ весьма мал, мы можем написать:

$$x'_e = x' + u_x\tau, \quad y'_e = y' + u_y\tau, \quad z'_e = z' + u_z\tau,$$

откуда, если пренебречь членами второго порядка по отношению к x', y', z', τ и воспользоваться (46), имеем:

$$-(x'_P x' + y'_P y' + z'_P z') - r u_r \tau =$$

$$= -rc\tau + \frac{r}{c}(w_x x' + w_y y' + w_z z') + \frac{r}{c}(wu)\,\tau,$$

$$\tau = \frac{(x'_P x' + y'_P y' + z'_P z') + \dfrac{r}{c}(w_x x' + w_y y' + w_z z')}{r\,(c - u_r) - \dfrac{r}{c}(wu)}. \qquad (47)$$

Теперь u_r обозначает составляющую u по направлению MP, причем произведение ru_r заменяет собой выражение $x'_P u_x + y'_P u_y + z'_P u_z$.

Здесь мы опять должны различать между элементом электрона dS в его положении в момент времени t'_0 (местное время M) и элементом dS_e, в котором содержатся эффективные положения различных точек dS, причем отношение величин этих элементов дается функциональным определителем x'_e, y'_e, z'_e по отношению к x', y', z', т. е. посредством выражения

$$1 + u_x \frac{\partial\tau}{\partial x'} + u_y \frac{\partial\tau}{\partial y'} + u_z \frac{\partial\tau}{\partial z'}.$$

Мы оставим только члены первого порядка по отношению к u_x, u_y, u_z. При этом мы можем пренебречь в выражениях $\frac{\partial\tau}{\partial x'}$, $\frac{\partial\tau}{\partial y'}$, $\frac{\partial\tau}{\partial z'}$ членами, содержащими эти скорости, так что на основании (*47*) получаем для определителя:

$$1 + \frac{1}{cr}\left\{u_x\left(x'_P + \frac{rw_x}{c}\right) + u_y\left(y'_P + \frac{rw_y}{c}\right) + u_z\left(z'_P + \frac{rw_z}{c}\right)\right\} =$$
$$= 1 + \frac{u_r}{c} + \frac{1}{c^2}(uw).$$

В конце концов мы получаем следующие уравнения, подобные тем, которые были получены в примечании **19**.

$$\varphi' = \frac{e}{4\pi r}\left\{1 + \frac{[u_r]}{c} + \frac{1}{c^2}[(uw)]\right\},$$

$$a' = \frac{e[u]}{4\pi cr}. \qquad (48)$$

Если теперь положить:

$$\varphi' - \frac{1}{c}(wa') = (\varphi'),$$

получим:

$$(\varphi') = \frac{e}{4\pi r}\left\{1 + \frac{[u_r]}{c}\right\}, \qquad (49)$$

и в силу (106)

$$d' = -\frac{1}{c}\dot{a}' - \operatorname{grad}(\varphi'). \qquad (50)$$

Сравнивая формулы (*49*), (*48*), (*50*) и (107) с (79), (33) и (34) и помня, что при весьма малом v множитель $1 - \frac{v_r}{c}$ можно опустить во втором из уравнений (79) и заменить через $1 + \frac{v_r}{c}$ в числителе первого, мы видим, что все эти уравнения имеют совершенно одинаковую форму. Поэтому, если мы говорим о соответственных состояниях в том случае, когда зависимость d', h' от x', y', z', t' в движущейся системе имеет тот же вид, что зависимость d, h от x, y, z, t в неподвижной системе, мы можем вывести следующее заключение: поле, вызываемое в удаленных точках движущейся системы электроном с координатами x', y', z', которые являются некоторыми функциями t' (местного времени, относящегося к мгновенному положению электрона), соответствует полю, которое вызывается в системе, не обладающей поступательным движением, таким же электроном, координаты которого x, y, z являются такими же функциями t.

Конечно, эту теорему можно распространить на любое число электронов, так что мы можем применить ее к поляризованной частичке. Мы примем, что эта частичка настолько мала, что можно пренебречь различиями местного времени в ее различных точках. Тогда с одинаковым правом можно сказать, что координаты x', y', z' электрона, движущегося внутри частички, являются некоторыми функциями местного времени t', относящегося к мгновенному положению самого электрона, или же что они являются такими же функциями местного времени, относящегося к некоторой определенной точке частички, например к ее центру; получаем положение: поле, вызываемое в электрической системе электрическим моментом, составляющие которого являются некоторыми функциями t' (местное время центра частички), соответствует полю в системе без поступательного движения, составляющие электрического момента которой являются такими же самыми функциями t. Но в этом последнем случае поле определяется уравнениями (88) и (89). Поэтому мы получим для движущейся системы:

$$(\varphi') = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[p_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{[p_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{[p_z]}{r}\right\},$$

$$a' = \frac{[\dot{p}]}{4\pi c r},$$

а d' и h' найдем, пользуясь формулами (*50*) и (107).

Отсюда следует, что выражение для поля, относящегося к электрическому моменту, который выражается посредством (108), можно получить так, как это описано в тексте.

27. (Стр. 101). В неподвижной системе пограничные условия для идеально проводящего тела заключаются в том, что электрическая сила направлена под прямым углом к поверхности проводника. Это следует из непрерывности тангенциальной слагающей силы, а также из того правила, что в идеальном проводнике электрическая сила должна быть равна нулю, так как иначе наблюдался бы ток бесконечной силы.

Но в движущейся системе электрон, который находится в покое относительно этой системы, подвержен действию силы, которая по (23) дается выражением

$$d + \frac{1}{c}[wh].$$

Так как это выражение равно вектору $\boldsymbol{d}'$, определяемому через (98), $\boldsymbol{d}'$ играет в точности ту же роль, какую играет $\boldsymbol{d}$ в системе, не имеющей поступательного движения; вникая несколько глубже в явления в весомых телах, можно показать, что в движущейся системе $\boldsymbol{d}'$ должно быть нормально к поверхности идеального проводника. Далее, для свободного эфира уравнения, определяющие $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, если их отнести к движущимся осям и местному времени, совпадают по форме с теми, которые мы имели для $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, когда мы пользовались осями, неподвижными в эфире. Это вытекает непосредственно из уравнений (100) — (103).

28. (Стр. 104). Так как $\boldsymbol{h}_z = \boldsymbol{d}_y$ и $\boldsymbol{h}_{z\,(r)} = -\boldsymbol{d}_{y\,(r)}$, имеем:

$$\boldsymbol{d}_y \boldsymbol{d}_{y\,(r)} = -\boldsymbol{h}_z \boldsymbol{h}_{z\,(r)}$$

и для энергии единицы объема получаем:

$$w_e + w_m = \frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{d}_y + \boldsymbol{d}_{y\,(r)})^2 + (\boldsymbol{h}_z + \boldsymbol{h}_{z\,(r)})^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}_y^2 + \boldsymbol{h}_z^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}_{y\,(r)}^2 + \boldsymbol{h}_{z\,(r)}^2).$$

29. (Стр. 109). Задачи, относящиеся к движению бесчисленных электронов, находящихся в куске металла, лучше всего рассматривать статистическим методом, который Максвелл ввел в кинетическую теорию газов и который можно представить в простой геометрической форме, пока мы ограничиваемся одним поступательным движением частичек. В самом деле, ясно, что если мы построим диаграмму, в которой скорость каждого электрона будет представлена по величине и по направлению вектором OP, проведенным из определенной точки O, распределение концов этих векторов, или, как мы их назовем, точек скоростей, даст нам картину состояния движения электронов.

Если положения точек скоростей отнести к осям координат, параллельным тем, которые были выбраны в самом металле, координаты некоторой точки скоростей будут равны составляющим скорости соответствующих электронов, ξ, η, ζ.

Пусть $d\lambda$ будет элемент объема на нашей диаграмме, находящийся в точке (ξ, η, ζ), настолько малый, что мы можем пренебречь изменениями ξ, η, ζ при переходе от одной из точек элемента к другой, но в то же время настолько большой, что в нем содержится значительное количество точек скоростей. Тогда можно принять, что число этих точек пропорционально $d\lambda$. Представляя его посредством выражения

$$f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda \tag{51}$$

на единицу объема металла, мы можем сказать, что, со статистической точки зрения, функция f определяет движение роя электронов.

Ясно, что интеграл

$$\int f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda,$$

взятый по всему объему диаграммы, дает полное число электронов в единице объема; подобным же образом интеграл

$$\int \xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda \tag{52}$$

выражает поток электронов через плоскость, нормальную OX, т. е. избыток электронов, проходящих через плоскость к положительной стороне, над числом электронов, которые идут в противоположном направлении, причем оба эти числа отнесены к единице площади и к единице времени. Это станет ясно, если рассмотреть сначала группу электронов, точки скоростей которых находятся в элементе $d\lambda$; можно считать, что эти точки движутся с одинаковыми скоростями; те из них, которые проходят через элемент $d\sigma$ в указанном направлении в промежуток времени между t и $t+dt$, находятся в начале этого промежутка времени в некотором цилиндре, основание которого равно $d\sigma$, а высота — $|\xi|\,dt$. Число этих частичек можно найти, если умножить объем цилиндра на число (51).

Отсюда, если $\int\limits_1$ обозначает интегрирование по той части диаграммы, которая расположена с положительной стороны плоскости $\eta\zeta$, а $\int\limits_2$ — интегрирование по другой части, число электронов, идущих в одну сторону, равно

$$d\sigma\, dt \int\limits_1 \xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda,$$

а в другую —

$$d\sigma\, dt \int\limits_2 -\xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda.$$

Выражение (52) есть разность этих чисел, деленная на $d\sigma\, dt$.

Если заряд всех электронов равен одной и той же величине e, избыток заряда, переносимого к положительной стороне, над зарядом, переносимым в противоположном направлении, дается выражением

$$J = e\int \xi f\, d\lambda; \tag{53}$$

легко видеть, что если через m мы обозначим массу электрона, а через

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

квадрат его скорости, получим, что разность между количествами энергии, переносимыми через плоскость в двух направлениях, равна

$$W = \frac{1}{2} m \int \xi r^2 f \, d\lambda. \qquad (54)$$

Эти величины (53) и (54) являются поэтому выражениями для потока электричества и для потока тепла, распространяющихся в одном и том же направлении OX.

Функция f определяется уравнением, которое следует считать основной формулой всей теории; к ее выводу мы теперь и приступим в том предположении, что электроны находятся под действием силы, направленной по OX; эта сила сообщает им ускорение X, одинаковое для всех частичек, принадлежащих к какой-нибудь из рассматриваемых групп.

Остановим наше внимание на электронах, находящихся в момент времени t в элементе объема металла dS, причем их точки скоростей находятся в элементе диаграммы $d\lambda$. Если бы не происходило никаких столкновений этих электронов ни с другими электронами, ни с атомами металла, эти электроны оказались бы в момент времени $t + dt$ в элементе dS', равном dS и расположенном в точке $(x + \xi\, dt,\ y + \eta\, dt,\ z + \zeta\, dt)$. В то же самое время их точки скоростей переместились бы в элемент $d\lambda'$, равный $d\lambda$ и расположенный в точке диаграммы $(\xi + X\, dt,\ \eta,\ \zeta)$, так что в результате

$$f(\xi + X\, dt,\ \eta,\ \zeta,\ x + \xi\, dt,\ y + \eta\, dt,\ z + \zeta\, dt,\ t + dt)\, dS'\, d\lambda' =$$
$$= f(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ x,\ y,\ z,\ t)\, dS\, d\lambda.$$

Столкновения, которые происходят за рассматриваемый промежуток времени, заставляют нас видоизменить это уравнение. Число электронов, образующих в момент времени $t + dt$ группу, относящуюся к элементам dS' и $d\lambda'$, не равно уже теперь числу электронов, которые в момент времени t принадлежали к группе $(dS,\ d\lambda)$, так как это последнее число должно быть уменьшено на число столкновений, которые рассматриваемая группа электронов претерпевает за промежуток времени dt, и увеличено на число столкновений, в результате которых в группу войдут такие электроны, которые раньше ей не принадлежали. Представляя эти числа выражениями $a\, dS\, d\lambda\, dt$ и $b\, dS\, d\lambda\, dt$, получаем, деля на $dS\, d\lambda = dS'\, d\lambda'$,

$$f(\xi + X\, dt,\ \eta,\ \zeta,\ x + \xi\, dt,\ y + \eta\, dt,\ z + \zeta\, dt,\ t + dt) =$$
$$= f(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ x,\ y,\ z,\ t) + (b - a)\, dt,$$

или, так как функцию в левой части уравнения можно заменить выражением

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)+\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} X+\frac{\partial f}{\partial x} \xi+\frac{\partial f}{\partial y} \eta+\frac{\partial f}{\partial z} \zeta+\frac{\partial f}{\partial t}\right) dt,$$

$$X \frac{\partial f}{\partial \xi}+\xi \frac{\partial f}{\partial x}+\eta \frac{\partial f}{\partial y}+\zeta \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}=b-a. \tag{55}$$

Это и есть то общее уравнение, о котором мы говорили.

Теперь мы должны вычислить значения a и b. Мы упростим задачу, пренебрегая взаимными столкновениями электронов и рассматривая только их столкновения с атомами металла. Далее, мы будем рассматривать атомы и электроны как идеально упругие твердые шарики и будем приписывать атомам настолько большие массы, что их можно будет считать неподвижными.

Среди всех столкновений мы будем предварительно рассматривать только те, при которых прямая, соединяющая центры атома и электрона, имеет в момент столкновения направление, лежащее внутри определенного конуса бесконечно малого телесного угла $d\omega$. Если R есть сумма радиусов атома и электрона, а n есть число атомов в единице объема, число электронов в группе (51), которые испытывают столкновения только что описанного вида за промежуток времени dt, равно

$$nR^2 f(\xi, \eta, \zeta)\, r \cos\vartheta\, d\lambda\, d\omega\, dt. \tag{56}$$

Здесь ϑ есть острый угол между линией центров и направлением скорости r.

Скорость электрона в конце столкновения находится по весьма простому правилу. Разложив первоначальную скорость на составляющие вдоль линии центров и под прямым углом к ней, мы должны только изменить знак первой составляющей на обратный. Отсюда новая точка скорости P', координаты которой я назову ξ', η', ζ', и первоначальная (ξ, η, ζ) лежат симметрично по обе стороны плоскости W, проходящей через O под прямым углом к оси конуса $d\omega$, и когда точка P принимает различные положения в элементе $d\lambda$, новая точка P' будет все время лежать в элементе $d\lambda'$, который является зеркальным изображением $d\lambda$ по отношению к плоскости W и равен поэтому $d\lambda$.

Это последнее замечание позволяет нам определить число b, поскольку оно определяется столкновениями, имеющими место при указанных условиях. Благодаря этим столкновениям точка скорости будет испытывать скачок от $d\lambda'$ к $d\lambda$: число этих «обращающих» встреч можно найти, изменяя соответственным образом выражение (56). Заменяя ξ, η, ζ через ξ', η', ζ', мы должны оставить множитель $r\cos\vartheta\, d\lambda$ без изменения, так как $d\lambda' = d\lambda$, $r' = r$ (если r' есть скорость с составляющими ξ', η', ζ') и прямая, соединяющая центры, образует с r и r' равные углы.

Поэтому мы получаем:

$$nR^2 f(\xi', \eta', \zeta')\, r \cos\vartheta\, d\lambda\, d\omega\, dt.$$

Вычитая (56) из этого выражения и интегрируя результат по всем направлениям оси конуса $d\omega$, которые наклонены под острым углом к направлению r, получим значение $(b-a)\, d\lambda\, dt$.

Когда сила, вызывающая ускорение X, имеет постоянную величину, зависящую только от координаты x, может иметь место устойчивое состояние, в котором функция f не содержит ни y, ни z. Для такого рода случаев, которые имеют место, например, тогда, когда концы цилиндрического стержня поддерживаются при различных температурах или когда к нему приложена параллельная его оси электрическая сила, основное уравнение (55) приобретает вид

$$nR^2 r \int \{f(\xi', \eta', \zeta') - f(\xi, \eta, \zeta)\} \cos\vartheta\, d\omega = X\frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi\frac{\partial f}{\partial x}. \qquad (57)$$

Выполняя интегрирование, мы должны оставить ξ, η, ζ без изменения, так что r сохраняет постоянное значение, но мы не должны забывать, что значения ξ', η', ζ' зависят от направления прямой, соединяющей центры. Обозначая через f, g, h углы между этой прямой (ее направление нужно выбирать так, чтобы она образовала с r острый угол) и осями, имеем:

$$\xi' = \xi - 2r\cos\vartheta\cos f, \quad \eta' = \eta - 2r\cos\vartheta\cos g,$$
$$\zeta' = \zeta - 2r\cos\vartheta\cos h.$$

Поскольку все точки металла находятся в одинаковом состоянии, электроны будут иметь во всех направлениях одинаковые скорости. Естественно принять для этого случая известное правило Максвелла, которое выражается следующим образом:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = A\varepsilon^{-hr^2}, \qquad (58)$$

где A и h суть некоторые постоянные.

Пользуясь формулами

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-h\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{h}},$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-h\xi^2} \xi^2\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h^3}},$$

находим из (58), что число электронов в единице объема равно

$$N = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= AJ_1^3 = A\sqrt{\frac{\pi^3}{h^3}}, \qquad (59)$$

а для суммы значений ξ^2, которую мы можем представить выражением $N\overline{\xi^2}$, если будем черточкой сверху обозначать средние значения, получаем:

$$N\overline{\xi^2} = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\xi^2\,d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= AJ_2J_1^2 = \frac{1}{2}A\sqrt{\frac{\pi^3}{h^5}}.$$

Из этих результатов следует, что

$$\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2} = \frac{1}{2h}$$

и что среднее значение кинетической энергии электрона равно

$$\frac{3m}{4h}.$$

Но мы уже ввели предположение, что средняя кинетическая энергия равна αT. Поэтому

$$h = \frac{3m}{4\alpha T}; \qquad (60)$$

это уравнение совместно с (59) дает постоянные h и A в зависимости от температуры и числа частиц N в единице объема.

Ясно, что при наличии внешней силы или в том случае, когда концы металлического стержня поддерживаются при различных температурах, формула (58) уже не может иметь места. Но каково бы ни было новое состояние движения, мы всегда будем иметь в единице объема определенное число электронов N и определенное среднее значение квадратов их скоростей; придавая h и A такие значения, чтобы $\frac{3}{2h}$ было равно этому среднему квадратичному, а $A\sqrt{\frac{\pi^3}{h^3}}$ — числу N, мы всегда можем написать:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = Ae^{-hr^2} + \varphi(\xi, \eta, \zeta), \qquad (61)$$

где φ есть функция, которую нам предстоит определить. Для этого у нас есть основное уравнение (57) и, кроме того, условия

$$\int \varphi \, d\lambda = 0, \qquad \int \varphi r^2 \, d\lambda = 0, \tag{62}$$

которые должны удовлетворяться ввиду того, что член $A\varepsilon^{-hr^2}$ был выбран так, чтобы приводить к существующим в действительности значениям N и $\overline{r^2}$.

Функция φ является математическим выражением изменения, вызываемого внешней силой или разностью температур в движении системы электронов. Можно показать, однако, что во всех действительных случаях это изменение чрезвычайно мало, так что величина φ всегда мала по сравнению с величиной $A\varepsilon^{-hr^2}$. На этом основании в правой части уравнения (57) мы можем заменить f через $A\varepsilon^{-hr^2}$. В левой части, напротив, мы должны пользоваться полным выражением функции (61), так как здесь, если опустить часть $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, мы получим нуль.

Уравнение поэтому приобретает вид

$$nR^2 r \int \{\varphi(\xi', \eta', \zeta') - \varphi(\xi, \eta, \zeta)\} \cos\vartheta \, d\omega =$$

$$= \left(-2hAX + \frac{dA}{dx} - r^2 A \frac{dh}{dx}\right) \xi\varepsilon^{-hr^2}. \tag{63}$$

Попробуем решение

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \xi\chi(r), \tag{64}$$

где χ есть функция одного только r. Это допущение находится в согласии с условиями (62), так что нам остается рассмотреть только основное уравнение (63). Подставляя в него значение (64), получаем прежде всего:

$$\int \{\varphi(\xi', \eta', \zeta') - \varphi(\xi, \eta, \zeta)\} \cos\vartheta \, d\omega =$$

$$= \chi(r) \int (\xi' - \xi) \cos\vartheta \, d\omega = -2r\chi(r) \int \cos^2\vartheta \cos f \, d\omega.$$

Вообразим себе две прямые OP и OQ, проведенные из начала координат, — первая в направлении скорости (ξ, η, ζ), а вторая в том направлении, которое линия центров занимает в момент столкновения, причем угол $POQ = \vartheta$ острый. Обозначая через μ угол POX и через ψ угол между плоскостями POX и POQ, получаем:

$$\cos f = \cos\mu\cos\vartheta + \sin\mu\sin\vartheta\cos\psi,$$

$$\int \cos^2\vartheta\cos f\,d\omega =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\vartheta(\cos\mu\cos\vartheta + \sin\mu\sin\vartheta\cos\psi)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi =$$

$$= 2\pi\cos\mu\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^3\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}\pi\cos\mu = \frac{1}{2}\pi\frac{\xi}{r},$$

вследствие чего (*63*) принимает вид

$$-\pi nR^2\xi r\chi(r) = \left(-2h\,AX + \frac{dA}{dx} - r^2A\frac{dh}{dx}\right)\xi\varepsilon^{-hr^2};$$

это показывает, что (так как ξ при сокращении пропадает) наше допущение действительно приводит к решению задачи.

Если мы положим

$$\frac{1}{\pi nR^2} = l,$$

в результате имеем:

$$\chi(r) = l\left(2h\,AX - \frac{dA}{dx} + r^2A\frac{dh}{dx}\right)\frac{1}{r}\varepsilon^{-hr^2}. \qquad (65)$$

В конце концов из (*53*) и (*54*) мы получаем для потоков электричества и тепла:

$$J = e\int\xi^2\chi(r)\,d\lambda,$$

$$W = \frac{1}{2}m\int\xi^2r^2\chi(r)\,d\lambda.$$

В этих формулах можно ξ^2 заменить через $\frac{1}{3}r^2$ и $d\lambda$ через $4\pi r^2\,dr$; интегрирование таким образом сводится к интегрированию по r от 0 до ∞. Подставляя, далее, (*65*) и принимая за новую переменную $s = r^2$, приходим к интегралам

$$\int\limits_0^\infty s\varepsilon^{-hs}\,ds,\quad \int\limits_0^\infty s^2\varepsilon^{-hs}\,ds \quad\text{и}\quad \int\limits_0^\infty s^3\varepsilon^{-hs}\,ds.$$

Значения их таковы:

$$\frac{1}{h^2},\quad \frac{2}{h^3}\quad\text{и}\quad\frac{6}{h^4},$$

так что для токов электричества и тепла имеем следующие выражения

$$J=\frac{2}{3}\pi el\left\{\frac{1}{h^2}\left(2hAX-\frac{dA}{dx}\right)+2\,\frac{A}{h^3}\,\frac{dh}{dx}\right\},$$

$$W=\frac{2}{3}\pi ml\left\{\frac{1}{h^3}\left(2hAX-\frac{dA}{dx}\right)+3\,\frac{A}{h^4}\,\frac{dh}{dx}\right\}.$$

Из первого уравнения легко найти коэффициент электропроводности (σ). Пусть цилиндрический стержень поддерживается на протяжении всей своей длины при одной температуре. Тогда $\frac{dh}{dx}=0$, $\frac{dA}{dx}=0$; при наличии электрической силы E, вызывающей ускорение

$$X=\frac{eE}{m},$$

получается электрический ток

$$J=\frac{4\pi lAe^2}{3hm}\,E.$$

Отсюда заключаем, что

$$\sigma=\frac{4\pi lAe^2}{3hm},$$

или, если воспользоваться соотношениями (*59*) и (*60*), вводя в то же самое время скорость u, квадрат которой равен средней квадратичной $\overline{r^2}$, так что $m=\frac{2\alpha T}{u^2}$, получим:

$$\sigma=\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cdot\frac{e^2lNu}{\alpha T}.$$

Чтобы найти выражение для теплопроводности, рассмотрим стержень, на концах которого поддерживается некоторая разность температур; эти концы электрически изолированы, так что электричество не может ни войти в металл, ни выйти из него. При этих обстоятельствах неравномерное нагревание создаст разность потенциалов, которая будет увеличиваться до тех пор, пока вызываемая ею электрическая сила не уничтожит тока J. Окончательное состояние будет характеризоваться выражением

$$2hAX-\frac{dA}{dx}=-2\,\frac{A}{h}\,\frac{dh}{dx},$$

откуда

$$W=\frac{2}{3}\,\pi ml\,\frac{A}{h^4}\,\frac{dh}{dx}=-\frac{8\pi lA\alpha}{9h^4}\,\frac{dT}{dx};$$

здесь мы также пользовались соотношением (*60*). Отсюда мы выводим значение для коэффициента теплопроводности

$$k = \frac{8\pi l A\alpha}{9h^2} = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\, \alpha l N u.$$

Остается добавить, что величину l можно рассматривать как некоторую среднюю длину свободного пути.

30. (Стр. 123.) В качестве введения к выводу закона Вина мы применим рассуждение § 46 к случаю косого падения света. Пучок света, распространяющийся в направлении, которое лежит в плоскости XOZ и составляет угол ϑ с OX, может быть представлен выражением вида

$$a \cos n \left(t - \frac{x \cos\vartheta + z \sin\vartheta}{c} + p\right);$$

когда он падает на неподвижное зеркало, поверхность которого совпадает с плоскостью YOZ, для величин, относящихся к отраженному свету, мы будем иметь функции, содержащие множитель

$$\cos n \left(t + \frac{x \cos\vartheta - z \sin\vartheta}{c} + p\right).$$

Но когда зеркало имеет поступательную скорость w в направлении OX, то по теореме соответственных состояний (§ 45, примечание 26) состояние движения можно представить уравнениями, в которых вышеприведенные тригонометрические функции заменены выражениями

$$\cos n \left(t' - \frac{x' \cos\vartheta + z \sin\vartheta}{c} + p\right) \tag{66}$$

и

$$\cos n \left(t' + \frac{x' \cos\vartheta - z \sin\vartheta}{c} + p\right), \tag{67}$$

где

$$x' = x - wt \text{ и } t' = t - \frac{w}{c^2} x'.$$

Частоты лучей даются коэффициентами при t в (*66*) и (*67*)

$$n\left(1 + \frac{w}{c} \cos\vartheta\right) \text{ и } n\left(1 - \frac{w}{c} \cos\vartheta\right),$$

так что, если частота падающего луча равна

$$n\left(1 + \frac{w}{c} \cos\vartheta\right) = n,$$

то частота луча, отраженного от движущегося зеркала, дается выражением

$$n\left(1-\frac{2w}{c}\cos\vartheta\right).$$

Отсюда следует, что длина волны λ превращается в

$$\lambda\left(1+\frac{2w}{c}\cos\vartheta\right).$$

Мы должны также сказать несколько слов о давлении, которое оказывает на идеально отражающее зеркало пучок света, падающий на него под углом ϑ. Так как будет вполне достаточно узнать давление на зеркало, находящееся в покое, мы можем применить формулу, полученную в § 25. Так как свет отражается целиком, мы имеем $\bar{s}''=0$ и $|\bar{s}'|=|\bar{s}|$, причем эти последние векторы равны по величине произведению c на энергию i в единице объема падающего луча. Далее, если A есть площадь зеркала, имеем $\Sigma=\Sigma'=A\cos\vartheta$. Так как направление векторов $\bar{s}$ и $\bar{s}'$ совпадает с направлением лучей, легко видеть, что вектор $\bar{s}-\bar{s}'$ направлен к зеркалу по нормали. Результирующая сила дает поэтому нормальное давление, величина которого равна $2Ai\cos^2\vartheta$ или на единицу площади $2i\cos^2\vartheta$.

Возвращаясь теперь к доказательству закона Вина, рассмотрим цилиндрический сосуд, закрытый подвижным поршнем и не заключающий в себе весомой материи. Мы представим себе, что внутренность цилиндра пронизывается во всех направлениях световыми и тепловыми лучами; нашей задачей является рассмотреть изменения интенсивности и длины волн, которые вызываются движением поршня. Предположим, что этот последний является внутри идеально отражающим, тогда как стенки и дно цилиндра «идеально белые»; мы подразумеваем под этим, что они отражают лучи одинаково во всех направлениях, не производя никаких изменений в длине волны, никакого уменьшения интенсивности. Вводя эти допущения и предполагая, что поршень движется весьма медленно, мы тем самым обеспечиваем полную изотропность радиации.

Остановим наше внимание на лучах, длины волн которых в некоторый момент времени t заключены в промежутке от λ до $\lambda+d\lambda$; обозначим через $\psi(\lambda)\,d\lambda$ энергию этих лучей, или, как мы будем говорить, группы $(\lambda,\ \lambda+d\lambda)$, — энергию, приходящуюся на единицу объема. Если A есть площадь поршня, а h — его высота над дном цилиндра, полная энергия рассматриваемой группы равна

$$J=Ah\psi(\lambda)\,d\lambda. \tag{68}$$

Можно найти дифференциальное уравнение, которое послужит для определения ψ как функции λ и t, рассматривая количества энергии, которые получаются и теряются этой группой $(\lambda, \lambda + d\lambda)$.

Прежде всего, такая потеря вызывается отражением части лучей от движущегося поршня, так как в каждом луче, который на него падает, изменяется длина волны, так что после отражения этот луч уже не относится больше к группе $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Чтобы вычислить потерю, мы заметим, что лучи, о которых мы говорим, распространяются совершенно одинаково по всем направлениям; отсюда, если мы ограничимся теми лучами, направление которых лежит внутри бесконечно узкого конуса с телесным углом $d\omega$, мы получим для энергии единицы объема:

$$\frac{1}{4\pi}\psi(\lambda)\,d\omega\,d\lambda;$$

для тех лучей, направление которых составляет с нормалью к поршню (проведенной наружу) угол от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, соответствующее значение равно

$$\frac{1}{2}\psi(\lambda)\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda.$$

За промежуток времени dt лучи попадают на поршень постольку, поскольку они в момент t находятся от поршня на расстоянии $c\cos\vartheta\,dt$, т. е. заполняют собой часть цилиндра объемом в $cA\cos\vartheta\,dt$, так что энергия, падающая на поршень, может быть представлена так:

$$\frac{1}{2}cA\psi(\lambda)\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda\,dt.$$

Интегрируя от $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, получаем для энергии, потерянной группой $(\lambda, \lambda + d\lambda)$:

$$\frac{1}{4}cA\psi(\lambda)\,d\lambda\,dt. \tag{69}$$

С другой стороны, некоторое количество энергии добавляется к энергии группы, так как лучи, которые раньше имели другую длину волны, теперь вследствие отражения от движущегося поршня попадают в интервал длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$.

Рассмотрим специально те лучи, направления которых до отражения заключаются внутри конуса $d\omega$, ось которого составляет угол ϑ $\left(<\frac{1}{2}\pi\right)$ с нормалью к поршню. Если λ' есть длина их волны до отражения, она после отражения превратится в

$$\lambda = \left(1 + \frac{2w}{c}\cos\vartheta\right)\lambda',$$

где w следует считать положительной, если поршень движется наружу. Отсюда, если новая длина волны лежит между λ и $\lambda + d\lambda$, первоначальная длина волны должна была лежать между λ' и $\lambda' + d\lambda'$, где

$$\lambda' = \left(1 - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\right)\lambda,$$

$$d\lambda' = \left(1 - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\right)d\lambda.$$

Энергия этих лучей, заключенная в единице объема, равна

$$i = \frac{1}{4\pi}\psi(\lambda')\,d\omega\,d\lambda';$$

легко видеть при помощи рассуждения, подобного вышеприведенному, что энергия группы лучей, определяемой величинами $d\omega$, λ', $d\lambda'$, которая падает на поршень в течение промежутка времени dt, равна

$$cAi\cos\vartheta\,dt.$$

Часть этой энергии тратится на работу против движения поршня, и только остающаяся часть приобретается группой $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Так как давление, оказываемое на поршень лучами, о которых мы теперь говорим, равно

$$2Ai\cos^2\vartheta,$$

а работа его за время dt —

$$2wAi\cos^2\vartheta\,dt,$$

количество энергии, полученное группой $(\lambda, \lambda + d\lambda)$, дается выражением

$$cAi\cos\vartheta\,dt - 2wAi\cos^2\vartheta\,dt. \tag{70}$$

Так как мы систематически пренебрегаем квадратом скорости w, заменим i во втором члене величиной

$$\frac{1}{4\pi}\psi(\lambda)\,d\omega\,d\lambda,$$

а в первом члене, ввиду того, что

$$\psi(\lambda') = \psi(\lambda) - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\cdot\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda},$$

выражением

$$\frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\right)\psi(\lambda')\,d\omega\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\left(1 - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\right)\psi(\lambda) - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\cdot\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right\}d\omega\,d\lambda.$$

Вследствие этого выражение (*70*) приобретает вид

$$\frac{cA}{4\pi}\left[\cos\vartheta\cdot\psi(\lambda)-\frac{2w}{c}\cos^2\vartheta\left\{2\psi(\lambda)+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right\}\right]d\omega\,d\lambda\,dt.$$

Распространяя интеграл этого выражения по $d\omega$ на все направления лучей, для которых $\vartheta<\frac{1}{2}\pi$, находим энергию, которая относится к группе $(\lambda, \lambda+d\lambda)$ и которую нужно вычесть из выражения (*69*).

Так как

$$\int\cos\vartheta\,d\omega=\pi,\qquad \int\cos^2\vartheta\,d\omega=\frac{2}{3}\pi,$$

в результате интегрирования получаем:

$$\frac{1}{4}cA\left[\psi(\lambda)-\frac{4w}{3c}\left\{2\psi(\lambda)+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right\}\right]d\lambda\,dt;$$

для изменения заключенной внутри цилиндра энергии, которая относится к длинам волн от λ до $\lambda+d\lambda$, получаем выражение

$$\frac{dJ}{dt}=-\frac{1}{3}wA\left\{2\psi(\lambda)+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right\}d\lambda.$$

Но так как $\dfrac{dh}{dt}=w$, из (*68*) мы видим, что

$$\frac{dJ}{dt}=wA\psi(\lambda)\,d\lambda+Ah\frac{\partial\psi}{\partial t}\,d\lambda,$$

так что

$$w\psi+h\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{2}{3}w\psi-\frac{1}{3}w\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda},$$

или, если положить

$$\frac{w}{3h}=k,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-k\left(5\psi+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right). \qquad (71)$$

При помощи этого дифференциального уравнения мы можем вычислить то изменение в распределении энергии по длинам волн, которое вносится движением поршня. Чтобы представить это уравнение в таком виде, из которого был бы яснее виден его смысл, мы сначала выведем из него скорость изменения полной энергии в единице объема:

$$K=\int_0^\infty\psi\,d\lambda.$$

Для этого нам достаточно только умножить (71) на $d\lambda$ и проинтегрировать каждый член от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$. Так как

$$\int_0^\infty \frac{\partial\psi}{\partial t}\, d\lambda = \frac{dK}{dt}$$

и

$$\int_0^\infty \lambda \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\, d\lambda = |\lambda\psi|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} - \int_0^\infty \psi\, d\lambda = -\int_0^\infty \psi\, d\lambda = -K,$$

мы получаем:

$$\frac{dK}{dt} = -4kK, \quad \frac{d\log K}{dt} = -4k.$$

При выводе этого уравнения я предполагал, что для $\lambda = \infty$ произведение $\lambda\psi$ стремится к пределу, равному нулю.

Когда скорость w задана для каждого момента времени, то и k и K являются определенными функциями времени. Мы можем поэтому взять эту величину в качестве независимой переменной вместо t. Полагая

$$\log K = \xi$$

и рассматривая ψ как функцию от этой величины и от

$$\log\lambda = \eta,$$

находим из (71), разделив на $-k\psi$,

$$4\frac{\partial\log\psi}{\partial\xi} = 5 + \frac{\partial\log\psi}{\partial\eta}.$$

Это выражение упрощается еще больше, если мы вместо ξ и η введем в качестве независимых переменных

$$\xi' = \xi \text{ и } \eta' = \xi + 4\eta.$$

Уравнение тогда приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi'}\left(\log\psi - \frac{5}{4}\xi'\right) = 0,$$

откуда видно, что выражение

$$\log\psi - \frac{5}{4}\xi' = \log\left(\psi K^{-\frac{5}{4}}\right),$$

и следовательно,

$$\psi K^{-\frac{5}{4}}$$

само должно быть функцией одного η'. Но

$$\eta' = \xi + 4\eta = 4 \log (\lambda K^{\frac{1}{4}}),$$

так что $\psi K^{-\frac{5}{4}}$ может быть тоже представлено как функция $\lambda K^{\frac{1}{4}}$.

Отсюда видно, что решением нашего уравнения является выражение:

$$K^{-\frac{5}{4}} \psi (\lambda, K) = F (\lambda K^{\frac{1}{4}}); \tag{72}$$

здесь мы особо указали, что ψ есть функция λ и K; функция F остается неопределенной.

Если при движении поршня K достигнет значения K', мы получим для любой длины волны выражение, подобное (72):

$$K'^{-\frac{5}{4}} \psi (\lambda, K') = F (\lambda K'^{\frac{1}{4}}).$$

Если заменить λ через $\left\{\frac{K'}{K}\right\}^{\frac{1}{4}} \lambda$, правые части обоих уравнений будут одинаковы, так что

$$\psi (\lambda, K') = \left(\frac{K'}{K}\right)^{\frac{5}{4}} \psi \left(\left\{\frac{K'}{K}\right\}^{\frac{1}{4}} \lambda, K\right).$$

Отсюда, если в первоначальном состоянии распределение энергии дается функцией $\varphi (\lambda)$, т. е. для всех λ

$$\psi (\lambda, K) = \varphi (\lambda),$$

для соответствующей функции окончательного состояния получаем:

$$\varphi (\lambda, K') = \left(\frac{K'}{K}\right)^{\frac{5}{4}} \varphi \left(\left\{\frac{K'}{K}\right\}^{\frac{1}{4}} \lambda\right).$$

31. (Стр. 127.) Планк получил в единицах CGS

$$\alpha = 2{,}02 \cdot 10^{-16}$$

(так что средняя кинетическая энергия молекулы равна $2{,}02 \cdot 10^{-16}\, T$ эргов), для массы атома водорода —

$$1{,}6 \cdot 10^{-24}\, г$$

и для универсальной единицы электричества, выраженной в тех единицах, которыми мы пользовались:

$$1{,}6 \cdot 10^{-20}\, c \sqrt{4\pi}.$$

(См. § 35.)

32. (Стр. 128.) В своих первых опытах Гаген и Рубенс выводили поглощение металла из его отражательной способности; они нашли, что для $\lambda = 12\mu$, 8μ и даже для $\lambda = 4\mu$ результаты в точности совпадали с теми значениями, которые можно вычислить из проводимости. В позднейших опытах с лучами длины волны $25{,}5\,\mu$ (остаточные лучи—Reststrahlen — флюорита), которые привели к тем же результатам, испускательная способность металла сравнивалась с испускательной способностью черного тела и коэффициент поглощения вычислялся при помощи наших формул (122) (стр. 113).

33. (Стр. 129.) Расположим ось OX под прямым углом к пластинке, так что на передней поверхности $x = 0$ и $x = \Delta$ на задней; далее, пусть a будет амплитуда электрических колебаний падающего луча, причем уравнение этого луча пусть будет:

$$d_y = a \cos n\left(t - \frac{x}{c} + p\right).$$

Можно считать, что электрическая сила E_y внутри тонкой пластинки во всех точках имеет одну и ту же интенсивность. Она вызывает ток проводимости

$$J_y = \sigma E_y$$

и диэлектрическое смещение в эфире, содержащемся в металле. Изменения этого смещения не вызывают, однако, никакого термического эффекта; поэтому выделяемое тепло будет соответствовать работе силы E_y лишь постольку, поскольку он вызывает ток J_y. Величина этой работы в единицу времени и на единицу объема равна

$$J_y E_y = \sigma E_y^2,$$

так что тепло, выделяемое в участке пластинки, приходящемся на единицу ее площади, равно

$$\sigma E_y^2 \Delta.$$

На передней поверхности F_y равно напряжению поля в эфире вне металла (в силу непрерывности тангенциальной слагающей электрической силы), т. е. равно $d_y + d_{y\,(r)}$, где $d_{y\,(r)}$ относится к отраженному пучку. Но так как амплитуда $d_{y(r)}$ пропорциональна Δ и так как мы будем пренебрегать членами, содержащими Δ^2, мы можем член $d_{y\,(r)}$ опустить. Таким путем находим для выделенного тепла

$$\sigma a^2 \Delta \cos^2(nt + p),$$

а для его среднего значения за время, охватывающее много периодов:

$$\frac{1}{2}\,\sigma a^2 \Delta.$$

Коэффициент поглощения A можно найти, разделив это выражение на количество энергии $\frac{1}{2}a^2c$, которое падает за единицу времени на рассматриваемую часть пластинки.

34. (Стр. 134.) Это подтверждается окончательной формулой для a_s^2 (стр. 139), по которой эта величина пропорциональна s^2, а следовательно, $\frac{1}{\lambda^2}$.

35. (Стр. 137.) Мы легко увидим правильность этого, если будем рассматривать и атомы металла и электроны как идеально упругие шарики и допустим, что атомы неподвижны. Опишем вокруг центра O одного из атомов сферу, радиус которой R равен сумме радиусов атома и электрона, и проведем прямую OP в направлении, противоположном тому, по которому электрон сталкивается с атомом. Тогда положение той точки сферы Q, где находится центр электрона в момент столкновения, можно определить при помощи угла $POQ = \vartheta$ и угла φ между плоскостью POQ и некоторой постоянной плоскостью, проведенной через OP. Вероятность того, что при столкновении этот угол лежит в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$ и от φ до $\varphi + d\varphi$, определяется выражением

$$\frac{1}{\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi, \tag{73}$$

где ϑ принимает значения от 0 до $\frac{1}{2}\pi$, а φ — от 0 до 2π.

Направление, в котором отскакивает электрон, определим точкой S, в которой радиус, параллельный этому направлению, пересекает поверхность сферы. Полярные координаты этой точки суть $\vartheta' = 2\vartheta$ и $\varphi' = \varphi$; если эти углы изменяются в пределах от ϑ' до $\vartheta' + d\vartheta'$ и от φ' до $\varphi' + d\varphi'$, точка S занимает все возможные положения на элементе сферы

$$d\sigma = R^2 \sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\varphi'.$$

Но вместо выражения (73) мы можем написать

$$\frac{1}{4\pi}\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\varphi',$$

так что вероятность того, что точка S лежит на элементе $d\sigma$, равна

$$\frac{d\sigma}{4\pi R^2}.$$

Так как эта величина не зависит от положения $d\sigma$ на поверхности сферы, мы заключаем, что после столкновения все направления скорости электрона представляются одинаково вероятными.

36. (Стр. 139.) Рассмотрим отдельный электрон, который в момент времени t занимает положение P, и определим, чему равно расстояние $PQ = l$, которое он пробегает, пока не столкнется с атомом. Если какой-нибудь электрон испытывает за некоторый промежуток времени N столкновений, мы можем сказать, что мы N раз его бросили на атомы и столько же раз определили длину его свободного пути. Но так как атомы расположены весьма неправильным образом, мы можем с таким же успехом проделать этот опыт с N различными электронами, движущимися в одном направлении с общей скоростью u. Поэтому мы перейдем к рассмотрению именно такой группы и будем искать число N' содержащихся в ней электронов, которые, пройдя расстояние l, не испытали еще столкновений с атомом; это число, очевидно, является некоторой функцией l. За время dt некоторая часть этих электронов испытает нарушение своего прямолинейного движения; эта часть пропорциональна как N', так и dt, или, что равносильно последнему, расстоянию $dl = u\,dt$; поэтому мы можем написать, что она равна

$$\beta N'\,dl, \tag{74}$$

где β — некоторая постоянная. Отсюда за время прохождения расстояния dl число N' изменяется на

$$dN' = -\beta N'\,dl,$$

так что мы получаем:

$$N' = N\varepsilon^{-\beta l},$$

так как $N' = N$ для $l = 0$.

Выражение (74), которое теперь приобретает вид

$$\beta N\varepsilon^{-\beta l}\,dl, \tag{75}$$

дает нам число электронов, у которых длина свободных путей лежит между l и $l + dl$. Сумма их свободных путей равна

$$\beta N l\varepsilon^{-\beta l}\,dl;$$

мы найдем сумму всех свободных путей, если проинтегрируем от $l = 0$ до $l = \infty$. Деля на N, получим величину среднего свободного пути:

$$l_m = \beta \int\limits_0^\infty l\varepsilon^{-\beta l}\,dl = \frac{1}{\beta}.$$

На этом основании число (75) свободных путей, длины которых лежат в пределах от l до $l + dl$, равно

$$\frac{1}{l_m} N\varepsilon^{-\frac{l}{l_m}}\,dl,$$

или, так как

$$N = \frac{u\vartheta}{l_m},$$

равно величине

$$\frac{u\vartheta}{l_m^2} \varepsilon^{-\frac{l}{l_m}} dl.$$

37. (Стр. 139.) С этим случаем мы встречаемся тогда, когда атомы и электроны являются твердыми упругими шариками, причем атомы неподвижны; в самом деле, ясно, что электрон будет тогда и при разных скоростях двигаться по одинаковым зигзагообразным путям. Другие предположения привели бы к значению l_m, зависящему от скорости u, но тогда мы должны были бы также ввести изменение в формулу для электропроводности, приведенную в § 50. Окончательная формула для $\frac{E}{A}$, по всей вероятности, осталась бы без изменения.

38. (Стр. 141.) Следует заметить, что числа, приведенные в примечании **31**, можно считать выведенными на основании формулы (148), если при их вычислении мы будем пользоваться только той частью кривой излучения, которая соответствует длинным волнам.

39. (Стр. 144.) На основании вышесказанного потенциальная и кинетическая энергии могут быть представлены выражениями такого вида:

$$U = \frac{1}{2} a_1 p_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} a_n p_n^2,$$

$$T = \frac{1}{2} b_1 \dot{p}_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} b_n \dot{p}_n^2,$$

откуда непосредственно видно, что нужно только сложить количества энергии, относящиеся к каждому из n основных видов колебания. Так как для малых колебаний коэффициенты a и b можно считать постоянными, каждый вид колебаний определяется уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}\right) = -\frac{\partial U}{\partial p_k},$$

или

$$b_k \ddot{p}_k = -a_k p_k,$$

общее решение которого таково:

$$p_k = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{a_k}{b_k}}\, t + \beta\right),$$

где α и β суть постоянные.

Это движение обладает потенциальной энергией

$$\frac{1}{2}a_k p_k^2 = \frac{1}{2}a_k \alpha^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{a_k}{b_k}}t + \beta\right)$$

и кинетической энергией

$$\frac{1}{2}b_k \dot{p}_k^2 = \frac{1}{2}a_k \alpha^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{a_k}{b_k}}t + \beta\right);$$

среднее значение как той, так и другой равно

$$\frac{1}{4}a_k\alpha^2.$$

40. (Стр. 147.) Принимая три ребра параллелепипеда за оси координат и обозначая через f, g, h направляющие косинусы электрических колебаний пучка, распространяющегося в направлении (μ_1, μ_2, μ_3), мы можем представить этот пучок при помощи формул

$$d_x = fa\cos n\left(t - \frac{\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z}{c} + p\right),$$

$$d_y = ga\cos n\left(t - \frac{\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z}{c} + p\right),$$

$$d_z = ha\cos n\left(t - \frac{\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z}{c} + p\right).$$

Если мы представим семь других пучков такими же формулами, с теми же постоянными a и p, подставляя вместо μ_1, μ_2, μ_3 значения из (149) и заменяя f, g, h соответственно через

$$f,\ -g,\ -h; \qquad -f,\ g,\ -h; \qquad -f,\ -g,\ h;$$

$$f,\ g,\ -h; \qquad -f,\ g,\ h; \qquad f\ -g,\ h;$$

$$-f,\ -g,\ -h,$$

мы получим полные выражения для d_x, d_y, d_z:

$$\left.\begin{aligned}
d_x &= -8fa\cos\frac{n\mu_1 x}{c}\sin\frac{n\mu_2 y}{c}\sin\frac{n\mu_3 z}{c}\cos n(t+p),\\
d_y &= -8ga\sin\frac{n\mu_1 x}{c}\cos\frac{n\mu_2 y}{c}\sin\frac{n\mu_3 z}{c}\cos n(t+p),\\
d_z &= -8ha\sin\frac{n\mu_1 x}{c}\sin\frac{n\mu_2 y}{c}\cos\frac{n\mu_3 z}{c}\cos n(t+p).
\end{aligned}\right\} \quad (76)$$

При таком виде этих выражений условие, что d нормально к стенкам, удовлетворяется на плоскостях XOY, YOZ, ZOX, так как, например, на первой плоскости $z=0$, и, следовательно, $d_x=0$, $d_y=0$.

То же условие должно также удовлетворяться на противоположных сторонах параллелепипеда. Отсюда вытекает требование, что если q_1, q_2, q_3 имеют то значение, о котором говорилось в тексте,

$$\sin\frac{n\mu_1 q_1}{c}=0,\quad \sin\frac{n\mu_2 q_2}{c}=0,\quad \sin\frac{n\mu_3 q_3}{c}=0.$$

Поэтому

$$\frac{n\mu_1 q_1}{c},\quad \frac{n\mu_2 q_2}{c},\quad \frac{n\mu_3 q_3}{c}$$

должны быть кратными π и, так как $\frac{n}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}$,

$$\frac{2\mu_1 q_1}{\lambda},\quad \frac{2\mu_2 q_2}{\lambda},\quad \frac{2\mu_3 q_3}{\lambda}$$

должны быть целыми числами.

41. (Стр. 147.) Пусть одно из этих состояний — скажем, состояние A — определяется формулой (76) предыдущего примечания, в которой f, g, h относятся к любому направлению, образующему прямой угол с направлением (μ_1, μ_2, μ_3); тогда состояние A', в котором направление поляризации перпендикулярно направлению поляризации в A, представляется уравнениями того же вида (с другими постоянными a' и p'), в которых f, g, h заменены постоянными f', g', h', определяющими направление, перпендикулярное как (f, g, h), так и (μ_1, μ_2, μ_3).

Легко видеть, что любой другой вид движения, представляемый формулами, подобными (76), со значениями f, g, h, такими, что

$$\mu_1 f+\mu_2 g+\mu_3 h=0,$$

может быть разложен на два состояния типа A и A'. Полное электрическое поле будет поэтому состоять из большого числа полей A и A', каждое из которых имеет определенную амплитуду a и фазу p. Чтобы найти полную электрическую энергию, мы должны вычислить для каждого вида движения интеграл

$$\frac{1}{2}\int d^2\,dS$$

и для каждой комбинации двух видов движения интеграл

$$\int (dd')\,dS. \tag{77}$$

Но можно показать, что все интегралы последнего рода равны нулю. Для комбинации двух состояний, которые мы только что назвали A и A' (они характеризуются одинаковыми значениями μ_1, μ_2, μ_3 и частоты n), это легко видеть, если принять во внимание, что в интегралах

$$\int_0^{q_1} \cos^2 \frac{n\mu_1 x}{c}\, dx, \quad \int_0^{q_1} \sin^2 \frac{n\mu_1 x}{c}\, dx, \quad \int_0^{q_2} \cos^2 \frac{n\mu_2 y}{c}\, dy \text{ и т. д. } (78)$$

квадрат косинуса или синуса можно заменить $\frac{1}{2}$; для (77) мы получаем выражение

$$8\,(ff' + gg' + hh')\, aa'q_1q_2q_3 \cos n\,(t+p) \cos n\,(t+p'),$$

которое равно нулю, так как направления (f, g, h) и (f', g', h') взаимно перпендикулярны.

Во всяком другом случае по крайней мере один из коэффициентов $\frac{n\mu_1}{c}$, $\frac{n\mu_2}{c}$, $\frac{n\mu_3}{c}$ будет иметь различное значение в состояниях d и d'. Поэтому $\frac{n\mu_1}{c}$ может иметь значение k для одного состояния и значение k' для другого. Интегралы

$$\int_0^{q_1} \cos kx \cos k'x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\,(k+k')} \sin (k+k')\, q_1 + \frac{1}{2\,(k-k')} \sin (k-k')\, q_1,$$

$$\int_0^{q_1} \sin kx \sin k'x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2\,(k+k')} \sin (k+k')\, q_1 + \frac{1}{2\,(k-k')} \sin (k-k')\, q_1$$

оба равны нулю, так как kq_1 и $k'q_1$ являются кратными π. Следовательно, каждый из трех интегралов

$$\int d_x d_x'\, dS \text{ и т. д.,}$$

на которые может быть разложено выражение (77), обращается в нуль.

Легко видеть, что подобный же результат имеет место и для магнитной энергии. Достаточно заметить, что в том состоянии, которое выражается формулой (76), составляющие магнитной силы даются выражениями

$$h_x = 8f'a \sin\frac{n\mu_1 x}{c}\cos\frac{n\mu_2 y}{c}\cos\frac{n\mu_3 z}{c}\sin n(t+p),$$

$$h_y = 8g'a \cos\frac{n\mu_1 x}{c}\sin\frac{n\mu_2 y}{c}\cos\frac{n\mu_3 z}{c}\sin n(t+p),$$

$$h_z = 8h'a \cos\frac{n\mu_1 x}{c}\cos\frac{n\mu_2 y}{c}\sin\frac{n\mu_3 z}{c}\sin n(t+p),$$

где

$$f' = \mu_2 h - \mu_3 g,\quad g' = \mu_3 f - \mu_1 h,\quad h' = \mu_1 g - \mu_2 f$$

суть постоянные, определяющие направление, перпендикулярное как (μ_1, μ_2, μ_3), так и (f, g, h).

Если, далее, принять во внимание то, что было сказано про интегралы (78), можно найти, что в параллелепипеде содержится электрическая энергия

$$4(f^2+g^2+h^2)\,q_1q_2q_3a^2\cos^2 n(t+p) = 4q_1q_2q_3a^2\cos^2 n(t+p)$$

и магнитная энергия

$$4q_1q_2q_3a^2\sin^2 n(t+p);$$

среднее значение каждого из этих выражений равно

$$2q_1q_2q_3a^2.$$

42. (Стр. 151.) Целый ряд соображений убеждает в том, что весьма трудно прийти к формуле, отличной от формулы Рэлея, поскольку мы будем придерживаться общих принципов теории электронов, развиваемых в первой главе; с другой стороны, следует заметить, что теория Джинса, несомненно, находится в противоречии с известными из опыта фактами. Сравним, например, испускательную способность E_1 полированной серебряной пластинки при 15° С для желтого света с испускательной способностью E_2 черного тела при 1200° С, ограничиваясь направлением, нормальным к пластинке. Серебро отражает около 90% падающего света, так что коэффициент поглощения пластинки равен $\frac{1}{10}$, и по закону Кирхгофа $E_1 = \frac{1}{10}E_3$, если через E_3 обозначить испускательную способность черного тела при 15° С. По теории Джинса (см. § 74) испускательная способность черного тела для света данной длины волны должна быть пропорциональна абсолютной температуре, так что имеем: $E_3 = \frac{288}{1473}E_2 = \frac{1}{5}E_2$ и $E_1 = \frac{1}{50}E_2$.

Но при температуре 1200° С черное тело будет светиться весьма ярко, и если бы испускательная способность серебряной пластинки при 15° С была только в 50 раз меньше, пластинка, конечно, была бы видима в темноте.

Следует заметить, что мы основывали наши рассуждения на законе Кирхгофа, применимость которого Джинсом не отрицается. Действительно, существенным пунктом вышеприведенного доказательства было то, что при таких температурах, при которых черное тело обладает заметной испускательной способностью для рассматриваемых лучей, никак не может быть, чтобы для какого-нибудь другого тела был весьма мал *только один* из коэффициентов E или A. Можно было ожидать, что серебряная пластинка будет испускать значительное количество света, так как ее коэффициент поглощения указывает на то, что на самом деле обмен энергией между ее частичками и эфиром *не* очень мал.

Из фактов, подобных вышеприведенному, вытекает, что, если мы исключим случай весьма длинных волн, все тела испускают гораздо меньше света соответственно их коэффициенту поглощения, чем это следует из формулы Джинса. Единственное уравнение, удовлетворительно представляющее наблюдаемые явления, есть уравнение Планка; повидимому, необходимо допустить, что для коротких волн связь между материей и энергией осуществляется не свободными электронами, но частицами другого рода, подобными резонаторам Планка, к которым по каким-то причинам теорема равномерного распределения энергии неприложима. По всей вероятности, эти частицы должны быть таковы, что их колебания и действия, ими вызываемые, не могут быть должным образом описаны при помощи обыкновенных уравнений теории электронов; должны быть сделаны некоторые новые предположения, подобные гипотезе Планка о конечных элементах энергии.

Не следует, однако, думать, что все затруднения могут быть разъяснены таким путем. Пусть во многих, пусть даже в большинстве случаев резонаторы Планка имеют первенствующее значение; все же явления проводимости делают в высшей степени вероятным, что по крайней мере металлы содержат также свободные электроны, движение и излучение которых могут быть в точности описаны нашими формулами. Трудно усмотреть, каким образом формула, подобная формуле Планка, могла бы быть приложена к испусканию и поглощению, вызываемому такими частичками. Поэтому эта формула, повидимому, требует, чтобы свободные электроны, наверное существующие внутри металла, отличались полной неактивностью. Но это еще не все. Если мы правы в том, что приписываем испускание и поглощение металла двум различным агентам, а именно свободным электронам в случае длинных волн и (по основаниям, приведенным в § 60) резонаторам в случае коротких волн, то мы должны принять, что для промежуточных длин волн в явлениях принимают участие оба рода частичек. Тогда возникает вопрос, каким путем осуществляется равновесие при таких сложных обстоятельствах.

Следует добавить, что некоторые затруднения возникают даже в случае длинных волн. На эти затруднения обратил внимание Дж. Дж. Томсон [1]).

Я закончу это рассуждение замечанием об окончательном состоянии, требуемом по теории Джинса. Я беру на себя смелость утверждать, что невозможно составить себе ясное представление о таком состоянии, при котором энергия равномерно распределена по бесконечному количеству степеней свободы. Поэтому можно думать, что такое окончательное состояние вряд ли достигается в действительности; можно полагать, что энергия непрерывно стремится к равномерному распределению, не достигая его за конечный промежуток времени.

42*. (Стр. 151.) [1915] Позднейшие исследования показали, что, по всей вероятности, для систем, подчиняющихся обычным законам динамики и электромагнетизма, теорема равномерного распределения энергии имеет место. Удовлетворительная теория излучения требует поэтому глубокого изменения основных принципов. Пока же мы должны удовольствоваться гипотезой квантов Планка.

Мы не можем говорить здесь о том развитии, которое получила эта столь важная теория, но один результат нужно здесь отметить.

Планк находит, что средняя энергия резонатора, частота колебаний которого равна ν, дается выражением

$$E=\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}.$$

Если kT много больше $h\nu$, знаменатель можно заменить выражением

$$\frac{h\nu}{kT},$$

и наша формула приобретает вид

$$E=kT.$$

Это — то значение, которое требуется по теореме равномерного распределения энергии. Мы видим отсюда, что эта теорема применима только в том случае, если температура достаточно высока. Для более низких температур E меньше, чем kT,

1) J. J. Thomson, The corpuscular theory of matter, стр. 85.

и даже, если kT значительно меньше $h\nu$, мы можем написать:

$$\frac{E}{kT}=\frac{h\nu}{kT}\,\varepsilon^{-\frac{h\nu}{kT}};$$

эта величина весьма мала.

Предложенные Планком резонаторы являются «линейными» резонаторами: каждый из них состоит, например, из одного электрона, колеблющегося вдоль прямой линии. Если число степеней свободы вибратора больше, полная энергия тоже увеличивается, и мы, повидимому, можем установить, как общее правило, что система, способная совершать известное число основных колебаний, находясь в равновесии с телами при температуре T, берет на каждую из своих степеней свободы энергию E.

Мы можем приложить это правило и к случаю эфира, содержащегося в прямоугольном ящике, — случаю, который мы рассматривали в §§ 73 и 74 [1]).

Мы нашли (стр. 146—149) для числа основных колебаний, длины волн которых лежат в пределах от λ до $\lambda+d\lambda$, выражение

$$\frac{8\pi q_1q_2q_3}{\lambda^4}\,d\lambda.$$

Каждое из этих колебаний соответствует одной степени свободы, и мы поэтому должны умножить

$$E=\frac{h\nu}{\varepsilon^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

на это число. Заменяя ν через $\frac{c}{\lambda}$, получаем таким путем:

$$\frac{8\pi ch}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\frac{ch}{k\lambda T}}-1}\,q_1q_2q_3\cdot d\lambda.$$

Если нам нужно узнать энергию единицы объема, нам остается только разделить на объем параллелепипеда $q_1q_2q_3$. Мы видим, что результат находится в согласии с формулой излучения Планка (132).

43. (Стр. 157.) В первых опытах Зеемана не удалось полностью разделить составляющие; было обнаружено только расширение линий, и заключения были выведены из этого расширения и из поляризации на краях линий.

44. (Стр. 169.) Для больших значений координат коэффициенты c могут быть их функциями. Их можно, впрочем, при-

[1]) P. Debye, Ann. Phys. 33 (1910), стр. 1427.

нимать за постоянные, если мы будем ограничиваться очень малыми колебаниями.

45. (Стр. 171.) В результате исключения $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ из уравнений (176) получаем:

$$\begin{vmatrix} f_1 - m_1n^2, & -inc_{12}, & \ldots, & -inc_{1\mu} \\ -inc_{21}, & f_2 - m_2n^2, & \ldots, & -inc_{2\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ -inc_{\mu 1}, & -inc_{\mu 2}, & \ldots, & f_\mu - m_\mu n^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{79}$$

Раскладывая определитель, получаем, во-первых, главный член

$$\Pi = (f_1 - m_1n^2)(f_2 - m_2n^2) \ldots (f_\mu - m_\mu n^2),$$

а, во-вторых, члены, содержащие в виде множителей два из коэффициентов c. Так как эти коэффициенты весьма малы, мы можем пренебречь всеми остальными членами, которые содержат более двух множителей такого рода. Один из указанных членов получается, если заменить в главном члене два множителя $f_k - m_kn^2$ и $f_l - m_ln^2$ через $-inc_{kl} \cdot inc_{lk} = -n^2c_{kl}^2$. Отсюда, обозначая через Π_{kl} произведение, которое остается, если опустить в Π множители $f_k - m_kn^2$ и $f_l - m_ln^2$, мы можем написать вместо (*79*):

$$\Pi - n^2 \sum_{kl} c_{kl}^2 \Pi_{kl} = 0; \tag{80}$$

это уравнение может быть удовлетворено значениями n^2, весьма мало отличающимися от корней $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\mu^2$ уравнения

$$\Pi = 0,$$

определяемого выражением (172).

Итак, в числе корней будет один такой корень:

$$n^2 = n_k^2 + \delta, \tag{81}$$

где δ весьма мало. В самом деле, если это значение подставить в (*80*), можно заменить n^2 через n_k^2 во всех произведениях Π_{kl}, и то же самое можно проделать с множителями первого члена Π за исключением только $f_k - m_kn^2$, вместо которого мы должны написать $-m_k\delta$. Таким путем Π превращается в

$$-m_k\delta\Pi_k(n_k^2);$$

здесь последний член обозначает произведение Π, если опустить указанный множитель и подставить $n^2 = n_k^2$ в остающихся множителях.

В сумме, входящей в (*80*), только те члены отличны от нуля, в которые не входит множитель $f_k - m_k n^2$ (соответствующий частному значению, выбранному нами для k). Наше выражение поэтому принимает вид

$$-m_k \delta \Pi_k(n_k^2) - n_k^2 \sum_l c_{kl}^2 \Pi_{kl}(n_k^2) = 0,$$

откуда непосредственно получается значение δ.

Это значение может быть положительным или отрицательным, но, так как оно весьма мало, правая часть (*81*) во всяком случае положительна; она дает действительное значение для частоты:

$$n = n_k + \frac{\delta}{2n_k}.$$

46. (Стр. 172.) Уравнение (*79*) можно несколько упростить, если разделить горизонтальные строчки определителя на $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$ и т. д. и затем подобным же образом поступить с вертикальными столбцами. Полагая

$$\frac{c_{kl}}{\sqrt{m_k m_l}} = e_{kl}, \tag{82}$$

так что

$$e_{kl} = -e_{lk}, \tag{83}$$

и пользуясь (172), получаем:

$$\begin{vmatrix} n_1^2 - n^2, & -ine_{12}, & \ldots, & -ine_{1\mu} \\ -ine_{21}, & n_2^2 - n^2, & \ldots, & -ine_{2\mu} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ -ine_{\mu 1}, & -ine_{\mu 2}, & \ldots, & n_\mu^2 - n^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{84}$$

Предположим теперь, что из частот некоторое количество k,— например первые k частот $n_1, n_2, \ldots$ — имеет общее значение ν; будем искать значение n, удовлетворяющее условию (*84*) и приблизительно равное ν. Когда n принимает значение такого рода, все элементы определителя за исключением $n_{k+1}^2 - n^2, \ldots, n_\mu^2 - n^2$ являются весьма малыми величинами. Поэтому значительно превалирует та часть, которая содержит эти $\mu - k$ элементов, а именно часть

$$(n_{k+1}^2 - n^2)\ldots(n_\mu^2 - n^2) \begin{vmatrix} n_1^2 - n^2, & -ine_{12}, & \ldots, & -ine_{1k} \\ -ine_{21}, & n_2^2 - n^2, & \ldots, & -ine_{2k} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot\cdot \\ -ine_{k1}, & -ine_{k2}, & \ldots & n_k^2 - n^2 \end{vmatrix}.$$

Ввиду этого мы заменим (84) выражением

$$\begin{vmatrix} n_1^2-n^2, & -ine_{12}, & \ldots, & -ine_{1k} \\ -ine_{21}, & n_2^2-n^2, & \ldots, & -ine_{2k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -ine_{k1}, & -ine_{k2}, & \ldots, & n_k^2-n^2 \end{vmatrix}=0.$$

Наконец, так как величины e весьма малы, мы заменим n через ν там, где оно умножается на e, так что получаем:

$$\begin{vmatrix} \nu^2-n^2, & -i\nu e_{12}, & \ldots, & -i\nu e_{1k} \\ -i\nu e_{21}, & \nu^2-n^2, & \ldots, & -i\nu e_{2k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -i\nu e_{k1}, & -i\nu e_{k2}, & \ldots, & \nu^2-n^2 \end{vmatrix}=0; \qquad (85)$$

это уравнение — степени k относительно n^2.

Далее, в силу соотношений (83) последний определитель не изменится при перемене знака во всех его элементах, содержащих e (это скажется только в том, что горизонтальные строчки сделаются равными первоначальным вертикальным столбцам). Отсюда, раскрывая определитель, видим, что уравнение может содержать только такие члены, в которые входит четное число этих элементов, и, следовательно, имеет вид

$$(\nu^2-n^2)^k+P_1(\nu^2-n^2)^{k-2}+P_2(\nu^2-n^2)^{k-4}+\ldots=0, \qquad (86)$$

где P_1 составлено из членов, содержащих *два* множителя вида $i\nu e$, P_2 — из членов, содержащих *четыре* таких множителя, и т. д.

Отсюда следует, что коэффициенты P являются действительными величинами. Но мы можем пойти далее и доказать, что если рассматривать ν^2-n^2 как неизвестную величину, все корни уравнения (85) или (86) являются действительными.

Чтобы доказать это, мы заметим, что, имея в виду (85) и приняв за ν^2-n^2 один из его корней, мы можем удовлетворить уравнения

$$\begin{aligned} &(\nu^2-n^2)\,x_1-i\nu e_{12}x_2-\ldots-i\nu e_{1k}x_k=0, \\ &-i\nu e_{21}x_1+(\nu^2-n^2)\,x_2-\ldots-i\nu e_{2k}x_k=0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &-i\nu e_{k1}x_1-i\nu e_{k2}x_2-\ldots+(\nu^2-n^2)\,x_k=0 \end{aligned}$$

некоторыми значениями $x_1, x_2, \ldots, x_k$, которые в общем случае являются комплексными величинами. Пусть $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ будут их сопряженные величины. Тогда, умножая уравнения соответственно на $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ и складывая, получаем:

$$(\nu^2 - n^2)\sum_j x_j\overline{x}_j - \nu\sum_{jl} i\,(e_{jl}x_l\overline{x}_j + e_{lj}x_j\overline{x}_l) = 0. \qquad (87)$$

Полагая теперь

$$x_j = \xi_j + i\eta_j,\quad \overline{x}_j = \xi_j - i\eta_j,\quad x_l = \xi_l + i\eta_l,\quad \overline{x}_l = \xi_l - i\eta_l,$$

имеем:

$$x_j\overline{x}_j = \xi_j^2 + \eta_j^2,$$

и в силу (83)

$$i\,(e_{jl}x_l\overline{x}_j + e_{lj}x_j\overline{x}_l) = 2e_{jl}(\xi_l\eta_j - \xi_j\eta_l).$$

Обе суммы в (87) являются поэтому действительными и таким же должно быть выражение $\nu^2 - n^2$.

Мы должны теперь различать случаи четного и нечетного k. В первом случае (86) является уравнением степени $\frac{1}{2}\,k$, если рассматривать $(\nu^2 - n^2)^2$ как неизвестную величину, и, так как $\nu^2 - n^2$ должно быть действительным, все его корни положительны. Называя их $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \ldots$, получаем решение

$$n^2 - \nu^2 = \pm\alpha,\quad \pm\beta,\quad \pm\gamma, \ldots,$$

и отсюда

$$n = \nu \pm \frac{\alpha}{2\nu},\quad \nu \pm \frac{\beta}{2\nu},\quad \nu \pm \frac{\gamma}{2\nu}, \ldots \qquad (88)$$

— всего k значений частоты.

При нечетном k в уравнение (86) входит множитель $\nu^2 - n^2$, так что один из корней будет:

$$n = \nu,$$

соответственно первоначальной спектральной линии. Если мы разделим уравнение на $\nu^2 - n^2$, мы придем к первому случаю, так что теперь, кроме $n = \nu$, мы имеем $k - 1$ корней вида (88).

В частном случае трех эквивалентных степеней свободы уравнение (86) приобретает вид

$$(\nu^2 - n^2)^3 + (\nu^2 - n^2)\,\nu^2\,(e_{23}e_{32} + e_{31}e_{13} + e_{12}e_{21}) = 0;$$

для него будем иметь: $n^2 - \nu^2 = 0$ и

$$n^2 - \nu^2 = \pm\nu\sqrt{e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{12}^2},$$

откуда непосредственно следует (177), если заменить ν через n_1 и вместо e_{23}, e_{31}, e_{12} подставить их значения (82).

Доктору А. Паннекуку я обязан замечанием относительно распространения вышеприведенной теории на случаи более чем трех эквивалентных степеней свободы.

47. (Стр. 173.) Что расстояния между магнитными составляющими спектральной линии будут пропорциональны интенсивности магнитного поля (для данного направления поля), вытекает также из общего уравнения (*86*). Достаточно заметить, что каждая величина e пропорциональна $|\mathbf{H}|$. Поэтому P_1 пропорционально $\mathbf{H}^2$, P_2 пропорционально $\mathbf{H}^4$ и т. д. Значения $n^2-\nu^2$, которые удовлетворяют уравнению, изменяются пропорционально самому $|\mathbf{H}|$, и так как они весьма малы, то же относится и к $n-\nu$.

48. (Стр. 183.) В нижеследующей теории колебания системы четырех электронов мы будем обозначать через a ребро тетраэдра в положении равновесия, через l — расстояние от центра O до одного из ребер, через r — радиус описанной сферы и через ϑ — угол между радиусом, проведенным к одной из вершин, и ребром, оканчивающимся в этой вершине. Имеем:

$$\cos\vartheta=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad l=\frac{1}{4}a\sqrt{2},\quad r=\frac{1}{4}a\sqrt{6}.$$

В состоянии равновесия на один из электронов A действуют отталкивательные силы со стороны трех других электронов, каждая из которых равна

$$\frac{e^2}{4\pi a^2},$$

и сила, вызываемая положительным зарядом. Эта последняя сила такова, как если бы в точку O был помещен заряд $\mathbf{e}=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0$. Отсюда получаем условие равновесия

$$\frac{3e^2}{4\pi a^2}\cos\vartheta+\frac{e\mathbf{e}}{4\pi r^2}=0,$$

или

$$\rho_0=-\frac{3e}{\pi a^3}.$$

Мы легко найдем частоту первого вида колебаний, если заметим, что при смещении всех электронов на расстояние $r+\delta$ от центра, где δ бесконечно мало, результирующая сила, действующая на один из них, останется равной нулю, если притяжение, вызываемое положительной сферой, останется эквивалентным притяжению заряда $\mathbf{e}$, сосредоточенного в O. Но на самом деле получается некоторая притягательная результирующая сила, вызываемая притяжением положительного заряда, заключенного между сферическими поверхностями радиусов r и $r+\delta$. Так как этот заряд равен $4\pi r^2 \rho \mathfrak{z}$ и сила, с которой он действует на один из электронов, равна $e\rho\mathfrak{z}$, получаем уравнение движения

$$m\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = e\rho\mathfrak{z},$$

откуда вычисляется частота:

$$n^2 = -\frac{e\rho}{m}.$$

Рассмотрим, далее, движение, которое в тексте описано как закручивание вокруг оси OX. Формулу для этого случая проще всего найти, если остановиться на потенциальной энергии системы. Когда ребра AB и CD повернуты вокруг OX на равные углы φ в противоположных направлениях, два из отрезков AC, AD, BC, BD получают значение

$$\sqrt{4l^2 + a^2\sin^2\left(\frac{1}{4}\pi - \varphi\right)} = a\left(1 - \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8}\varphi^2\right),$$

а два других —

$$a\left(1 + \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8}\varphi^2\right).$$

Потенциальная энергия, вызываемая взаимодействием частичек, равна поэтому

$$2\cdot\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{e^2}{a\left(1 - \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8}\varphi^2\right)} + \frac{e^2}{a\left(1 + \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8}\varphi^2\right)}\right\} =$$

$$= \frac{e^2}{\pi a}\left(1 + \frac{3}{8}\varphi^2\right).$$

Ввиду того, что потенциальная энергия по отношению к положительной сфере осталась без изменения (так как каждый электрон сохранил свое расстояние от центра r), а кинетическая энергия равна

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2,$$

уравнение движения приобретает вид

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3e^2}{8\pi a}\varphi^2 = \text{const},$$

откуда для частоты получаем:

$$n^2 = \frac{3e^2}{4\pi a^3 m} = -\frac{\rho_0 e}{4m}.$$

Рассматривая колебания, которые даются в тексте уравнениями (181) и (182), мы можем считать, что система имеет только две степени свободы; ее конфигурация полностью определяется координатами p и g.

На этот раз мы будем применять общую теорию колеблющихся систем, исходя из формул для потенциальной энергии U и кинетической энергии T, выраженных как функции от $p, g, \dot{p}, \dot{g}$.

Если мы примем, что потенциальная энергия равна нулю у двух частиц, отстоящих друг от друга на расстоянии a, их потенциальная энергия на расстоянии $a + \delta a$ будет:

$$\frac{e^2}{4\pi(a+\delta a)} - \frac{e^2}{4\pi a} = \frac{e^2}{4\pi}\left\{-\frac{\delta a}{a^2} + \frac{(\delta a)^2}{a^3}\right\}.$$

Так как значение δa равно $2g$ для пары AB, $-2g$ для CD и $\frac{g^2}{a}$ для остальных пар, мы получим следующее выражение для взаимной потенциальной энергии четырех частичек:

$$\frac{e^2}{\pi a^3} g^2 = -\frac{1}{3} e\rho_0 g^2. \tag{89}$$

Что касается u, потенциальной энергии частички по отношению к положительной сфере, мы можем написать для нее выражение $e(\varphi - \varphi_0)$, если потенциал, вызываемый сферой, имеет значение φ_0 для положения равновесия частички и значение φ для ее нового положения. Так как φ есть функция расстояния r от центра, то мы можем написать, обозначая через δr изменение величины r:

$$u = e\left\{\frac{d\varphi}{dr}\delta r + \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}(\delta r)^2\right\}.$$

Принимая во внимание, что по уравнению Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} = -\rho$$

и что электрическая сила $-\frac{d\varphi}{dr}$, действующая на электрон в его первоначальном положении, равна

$$\frac{e}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}\rho_0 r,$$

получаем:

$$u = e\left\{-\frac{1}{3}\rho_0 r\delta r + \left(\frac{1}{3}\rho_0 - \frac{1}{2}\rho\right)(\delta r)^2\right\}. \tag{90}$$

Если $A'B'$ есть смещенная прямая AB и E' — ее средняя точка, имеем:

$$OE' = l + p,\ E'A' = \frac{1}{2}a + g,$$

$$OA' = \sqrt{(l+p)^2 + \left(\frac{1}{2}a + g\right)^2}.$$

Отсюда для электрона A получаем:

$$\delta r = \frac{1}{2r}(2lp + ag) - \frac{1}{8r^3}(2lp + ag)^2 + \frac{1}{2r}(p^2 + g^2).$$

То же значение получится для B; меняя знаки p и g, получаем значения для C и D. Подставляя в (*90*) и беря сумму четырех значений, получаем:

$$e\left\{\frac{1}{2}(\rho_0 - \rho)\frac{1}{r^2}(2lp + ag)^2 - \frac{2}{3}\rho_0(p^2 + g^2)\right\};$$

складывая с (*89*) и полагая затем

$$\alpha = -\frac{e\rho}{3m},\quad \beta = \frac{e(\rho_0 - \rho)\sqrt{2}}{3m},\quad \gamma = \frac{e(\rho_0 - 4\rho)}{6m},$$

имеем:

$$U = e\left\{\frac{1}{2}(\rho_0 - \rho)\frac{1}{r^2}(2lp + ag)^2 - \frac{1}{3}\rho_0(2p^2 + 3g^2)\right\} =$$
$$= 2m(\alpha p^2 + 2\beta pg + \gamma g^2).$$

Так как квадрат скорости равен для каждого электрона $\dot{p}^2 + \dot{g}^2$, имеем:

$$T = 2m(\dot{p}^2 + \dot{g}^2); \tag{91}$$

уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\right) + \frac{\partial U}{\partial p} = 0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}}\right) + \frac{\partial U}{\partial g} = 0$$

принимают вид

$$\ddot{p} + \alpha p + \beta g = 0,\quad \ddot{g} + \beta p + \gamma g = 0.$$

Если мы положим:

$$p = k\cos nt,\quad g = sp,$$

постоянные n и s определятся уравнениями

$$-n^2 + (\alpha + \beta s) = 0,\quad -sn^2 + (\beta + \gamma s) = 0,$$

откуда легко вывести (181) и (183).

При вычислении влияния магнитного поля на колебания, к которым относится формула (183), мы можем положить, что три вида движения, соответствующие определенному значению s и в отсутствии магнитного поля имеющие одну и ту же же частоту, скажем n_0, являются единственным видом движения, который способна совершать система. Возвращаясь к формулам § 90, мы будем обозначать через p_1, p_2, p_3 три смещения, общие для всех электронов, встречающихся в трех видах движения, причем это смещение параллельно OX в первом виде движения, OY — во втором и OZ — в третьем. При этом следует иметь в виду, что теперешнее p_1 есть то, что мы в § 100 обозначили через p, и что в каждом случае смещения p соединяются с поперечными смещениями $g = \pm sp$.

Уравнение (91) дает для каждого вида движения:

$$T = 2m(1+s^2)\dot{p}^2,$$

так что коэффициенты m_1, m_2, m_3, введенные в § 89, имеют общее значение

$$m_0 = 4m(1+s^2). \tag{92}$$

Коэффициенты f_1, f_2, f_3 тоже равны друг другу, и если мы подставим

$$p_1 = q_1\varepsilon^{int},\ p_2 = q_2\varepsilon^{int},\ p_3 = q_3\varepsilon^{int}$$

[см. (175)], мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m_0(n_0^2-n^2)\,q_1 - in_0c_{12}q_2 - in_0c_{13}q_3 &= 0, \\ -in_0c_{21}q_1 + m_0(n_0^2-n^2)\,q_2 - in_0c_{23}q_3 &= 0, \\ -in_0c_{31}q_1 - in_0c_{32}q_2 + m_0(n_0^2-n^2)\,q_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

соответствующие (176); они дают для частот магнитного триплета [см. (177)]:

$$n_0 \text{ и } n_0 \pm \frac{1}{8m(1+s^2)}\sqrt{c_{23}^2+c_{31}^2+c_{12}^2}. \tag{94}$$

Остается определить коэффициенты c, для чего нам нужно вернуться к (173).

Выражение $P_1\delta p_1$ представляет работу, производимую при виртуальном смещении δp_1 электромагнитными силами, которые возникают при движении электронов в магнитном поле H. Следовательно, $c_{12}\dot{p}_2\delta p_1$ есть работа этих сил, поскольку они вызываются скоростями частичек в движении, определяемом $\dot{p}_2$. Вычислив эту работу, мы найдем и значение c_{12}.

Оказывается выгодным ввести прямолинейные координаты наших четырех частичек в их положениях равновесия. Если оси выбраны соответствующим образом, эти координаты таковы: для A: l, l, l; для B: $l, -l, -l$; для C: $-l, l, -l$ и для D: $-l, -l, l$.

Когда координата p_1 изменяется на δp_1, четыре частички испытывают смещение, равное δp_1, в направлении OX одновременно со смещениями $s\delta p_1$, направленными вдоль прямой AB для A и B и вдоль прямой CD для C и D. Принимая во внимание, что в случае положительного $s\delta p_1$ расстояние от OX увеличивается для A и B и уменьшается для C и D, и полагая $s' = s\sqrt{\frac{1}{2}}$, находим для прямоугольных составляющих смещения

$$\left.\begin{array}{llll} \text{для } A: & \delta p_1, & s'\delta p_1, & s'\delta p_1, \\ \text{»} \quad B: & \delta p_1, & -s'\delta p_1, & -s'\delta p_1, \\ \text{»} \quad C: & \delta p_1, & -s'\delta p_1, & s'\delta p_1, \\ \text{»} \quad D: & \delta p_1, & s'\delta p_1, & -s'\delta p_1. \end{array}\right\} \tag{95}$$

Если здесь вместо δp_1 мы напишем $\dot{p}_1$, мы получим составляющие скоростей, имеющиеся при движении $\dot{p}_1$. Подобным же образом составляющие скоростей в движении $\dot{p}_2$ суть:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{для } A: & s'\dot{p}_2, & \dot{p}_2, & s'\dot{p}_2, \\ \text{»} \quad B: & -s'\dot{p}_2, & \dot{p}_2, & s'\dot{p}_2, \\ \text{»} \quad C: & -s'\dot{p}_2, & \dot{p}_2, & -s'\dot{p}_2, \\ \text{»} \quad D: & s'\dot{p}_2, & \dot{p}_2, & -s'\dot{p}_2. \end{array}\right\} \tag{96}$$

Мы должны теперь остановить наше внимание на электромагнитных силах, вызываемых этими скоростями, и определить работу этих сил, соответствующую смещениям (95). Оказывается, что результат зависит только от составляющей H_z; поэтому мы будем с самого начала опускать все члены с H_x и H_y. Таким образом, мы напишем для составляющих электромагнитной силы, действующей на электрон:

$$\frac{e}{c} v_y H_z, \quad -\frac{e}{c} v_x H_z, \quad 0;$$

отсюда, подставляя v_x и v_y из (96), получаем следующие силы, действующие на частички в направлениях OX и OY:

$$\begin{array}{lll} \text{для } A: & \frac{e}{c} H_z \dot{p}_2, & -\frac{e}{c} H_z s' \dot{p}_2, \\ \text{»} \quad B: & \frac{e}{c} H_z \dot{p}_2, & \frac{e}{c} H_z s' \dot{p}_2, \\ \text{»} \quad C: & \frac{e}{c} H_z \dot{p}_2, & \frac{e}{c} H_z s' \dot{p}_2, \\ \text{»} \quad D: & \frac{e}{c} H_z \dot{p}_2, & -\frac{e}{c} H_z s' \dot{p}_2. \end{array}$$

Наконец, чтобы найти работу $c_{12}\dot{p}_2\delta p_1$, мы должны взять произведения этих величин и соответственных величин в первых двух столбцах (*95*) и результаты сложить. Это приводит к значению

$$c_{12} = 4\frac{e}{c}H_z(1-s'^2) = 4\frac{e}{c}H_z\left(1-\frac{1}{2}s^2\right);$$

подобным же образом имеем:

$$c_{23} = 4\frac{e}{c}H_x\left(1-\frac{1}{2}s^2\right), \quad c_{31} = 4\frac{e}{c}H_y\left(1-\frac{1}{2}s^2\right),$$

так что последний член в (*94*) получается равным

$$\pm\frac{e}{2cm}|H|\cdot\frac{1-\frac{1}{2}s^2}{1+s^2}.$$

Деля это выражение на соответствующий член в (164), находим:

$$\omega = \frac{1-\frac{1}{2}s^2}{1+s^2}, \tag{97}$$

откуда легко вывести значения (184) и (185).

49. (Стр. 186.) Пусть $\rho-\rho_0$ стремится к пределу нуль с положительной стороны, так что по (182) $\nu = +\infty$. Принимая во внимание, что

$$4(\rho-\rho_0)\sqrt{2(1+2\nu^2)} = \frac{1}{2}(2\rho-\rho_0)\frac{\sqrt{2(1+2\nu^2)}}{\nu}$$

и что предел

$$\frac{\sqrt{2(1+2\nu^2)}}{\nu}$$

равен 2, легко находим, что формулы (183)—(185) приводят к значениям, данным в тексте.

Тот же результат можно получить при предположении, что $\rho-\rho_0$ стремится к пределу нуль с отрицательной стороны.

Следует, однако, отметить, что, как это видно из (*97*), для одного из двух решений (именно для того, для которого $\omega = -\frac{1}{2}$) коэффициент s, определяемый (181), обращается в бесконечность; это указывает, что для данного решения $p=0$ (так как g должно быть конечным). Соответствующие колебания будут поэтому в предельном случае (§ 99) неэффективными, так как излучение вызывается колебаниями электронов в направлении OX.

50. (Стр. 186.) После того как мы нашли частоту n, мы можем вывести из уравнений (*93*) отношения между величинами q_1, q_2, q_3, которые определяют форму колебаний и природу испускаемого света. Введем некоторые сокращения, полагая

$$4\frac{e}{c}\left(1-\frac{1}{2}s^2\right)=\sigma, \tag{98}$$

так что

$$c_{23}=\sigma H_x, \quad c_{31}=\sigma H_y, \quad c_{12}=\sigma H_z;$$

для внешних линий триплета имеем на основании (*94*) и (*92*):

$$n^2-n_0^2=\pm\frac{n_0\sigma}{m_0}\,|\boldsymbol{H}|, \tag{99}$$

где под $|\boldsymbol{H}|$ понимается положительное число.

Если $\boldsymbol{h}$ есть единичный вектор, направление которого совпадает с направлением магнитной силы, уравнения (*93*) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\pm q_1+i(h_zq_2-h_yq_3)=0,\\ \pm q_2+i(h_xq_3-h_zq_1)=0,\\ \pm q_3+i(h_yq_1-h_xq_2)=0.\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Пусть

$$q_1=a_x+ib_x, \quad q_2=a_y+ib_y, \quad q_3=a_z+ib_z$$

будет система комплексных значений, удовлетворяющих этим условиям, и пусть a_x, b_x и т. д. будут составляющие некоторых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Разделяя мнимую и действительную части выражения (*100*), получаем уравнения

$$\pm\boldsymbol{a}-[\boldsymbol{b}\boldsymbol{h}]=0, \qquad \pm\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a}\boldsymbol{h}]=0,$$

из которых видно, во-первых, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ должны быть расположены под прямыми углами как к магнитному полю, так и друг к другу, и, во-вторых, что они должны быть равны по своей величине.

Теперь мы в состоянии определить природу света, испускаемого колеблющейся системой. Как мы уже нашли в § 39, излучение электрона зависит только от его ускорения. Отсюда мы заключаем, что, если мы имеем некоторое число одинаковых электронов, результирующее излучение будет таково же, как если бы мы имели одну частичку с таким же зарядом и ее смещение из положения равновесия было в каждый момент равно результирующей смещения отдельных электронов. В первом виде движения, рассмотренном нами выше, результирующее смещение, очевидно, равно $4p$ в направлении OX. Таким путем мы видим, что излучение, исходящее из тетраэдра, колеблющегося вышерассмотренным образом, равно излучению от одного электрона — «эквивалентного электрона», как мы его можем назвать, причем составляющие его смещения даются действительными частями выражений

$$4q_1\varepsilon^{int},\quad 4q_2\varepsilon^{int},\quad 4q_3\varepsilon^{int},$$

т. е. выражениями

$$\left.\begin{aligned} &4a_x\cos nt - 4b_x\sin nt,\\ &4a_y\cos nt - 4b_y\sin nt,\\ &4a_z\cos nt - 4b_z\sin nt. \end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

Движение эквивалентного электрона слагается поэтому из двух прямолинейных колебаний в направлениях векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с равными амплитудами $4|\boldsymbol{a}|$ и $4|\boldsymbol{b}|$ и с разностью фаз в четверть периода. Электрон движется поэтому с постоянной скоростью по кругу в плоскости, нормальной к магнитной силе; излучение будет в значительной степени такое же, что и по элементарной теории явления Зеемана.

Если мы в нашей формуле возьмем верхний знак, получим:

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{bh}],$$

откуда следует, что круговое движение, представляемое (*101*), направлено по часовой стрелке, если наблюдатель расположен с той стороны, куда направлены линии сил. Следовательно, в этом случае свет, испускаемый в направлений линий сил, поляризован по кругу вправо. Если мы возьмем нижний знак, получим левую поляризацию.

Далее, из уравнения (*99*) видно, что если σ положительно, частота больше для правой поляризации и меньше для левой, в противоположность тому, что мы имели в элементарной теории явления Зеемана. Обратное, впрочем, мы будем иметь для отрицательного σ. Так как заряд e отрицателен, из (*97*) и (*98*) следует, что σ и ω должны иметь разные знаки. Знак явления Зеемана будет поэтому такой же, какой мы получили из элементарной теории, или ему противоположный, смотря по тому, положительно или отрицательно ω.

51. (Стр. 189.) Когда частичка имеет поступательную скорость $\boldsymbol{v}$, силы, действующие на один из ее электронов, равны:

$$X = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}_y H_z - \boldsymbol{v}_z H_y),\quad Y = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}_z H_x - \boldsymbol{v}_x H_z),$$

$$Z = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}_x H_y - \boldsymbol{v}_y H_x).$$

Здесь, обозначая через x, y, z координаты электрона по отношению к центру частички и обозначая индексом 0 значения в этой точке, мы можем заменить H_x, H_y, H_z через

$$H_{0x} + x\frac{\partial H_x}{\partial x} + y\frac{\partial H_x}{\partial y} + z\frac{\partial H_x}{\partial z} \text{ и т. д.} \qquad (102)$$

Подставляя это в выражения

$$\sum(yZ - zY) \text{ и т. д.}$$

для составляющих результирующей пары и пользуясь уравнениями § 104, находим:

$$\frac{e}{c}\left[v_x \frac{\partial H_y}{\partial y} \sum y^2 - v_y \frac{\partial H_x}{\partial y} \sum y^2 - \right.$$

$$\left. - v_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \sum z^2 + v_x \frac{\partial H_z}{\partial z} \sum z^2 \right] \text{ и т. д.}$$

или, так как

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = -\frac{\partial H_x}{\partial x},$$

$$-\frac{eK}{c}\left(v_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial H_z}{\partial z}\right) \text{ и т. д.}$$

Если поле постоянно и если в символе $\frac{dH}{dt}$ мы понимаем под H магнитную силу в точке, занимаемой частичкой в момент времени t, пара дается выражением

$$-\frac{eK}{c}\frac{dH}{dt},$$

и, так как момент инерции есть $2mK$, изменение угловой скорости k определяется выражением

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{e}{2mc}\frac{dH}{dt}.$$

Отсюда, в том предположении, что частичка не вращалась, пока была вне поля, имеем:

$$k = -\frac{e}{2mc} H.$$

В этом вычислении мы не обращали внимания на электромагнитные силы, возникающие вследствие самого вращения. Поскольку магнитное поле можно считать однородным во всем объеме частички, эти силы не вызывают результирующей пары именно потому, что ось вращения параллельна линиям сил. Это видно из следующего. Если через r обозначить вектор, проведенный из центра к одному из электронов, получаем для линейной скорости этой частички

$$v = [kr],$$

а для электромагнитной силы, действующей на нее:

$$F = \frac{e}{c}[vH] = \frac{e}{c}\{(kH)r - (rH)k\}.$$

Момент этой силы по отношению к центру равен:

$$[\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}] = -\frac{e}{c}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{H})[\boldsymbol{r}\boldsymbol{k}],$$

так что составляющие даются выражениями

$$-\frac{e}{c}(xH_x + yH_y + zH_z)(yk_z - zk_y) \text{ и т. д.} \qquad (103)$$

Отсюда находим для составляющих результирующего момента:

$$-\frac{e}{c}K(H_y k_z - H_z k_y) \text{ и т. д.},$$

откуда видно, что этот момент равен нулю, когда $\boldsymbol{k}$ имеет направление $\boldsymbol{H}$.

Задача становится более сложной, если мы примем во внимание небольшие изменения магнитного поля от одной точки частички к другой. Я замечу только одно: если мы будем пользоваться значениями (*102*), мы должны прибавить к (*103*) члены третьего порядка по отношению к x, y, z, и что сумма этих членов во многих случаях пропадает, например, тогда, когда каждому электрону с координатами x, y, z соответствует другой электрон с координатами $-x$, $-y$, $-z$.

52. (Стр. 190.) Пусть $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{r}$ имеют то же значение, что и в предыдущем примечании, и пусть $\boldsymbol{v}$ будет абсолютная скорость электрона, $\boldsymbol{v}'$ — его относительная скорость по отношению к вращающейся частичке, так что

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}] + \boldsymbol{v}'. \qquad (104)$$

Отсюда получаем для ускорения

$$\boldsymbol{q} = \dot{\boldsymbol{v}} = [\boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{r}}] + \dot{\boldsymbol{v}}' = [\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}] + \dot{\boldsymbol{v}}'.$$

Изменение $\boldsymbol{v}'$ состоит из двух частей:

$$\dot{\boldsymbol{v}}' = [\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}'] + \boldsymbol{q}',$$

где вторая часть есть относительное ускорение, а первая — изменение, которое испытало бы $\boldsymbol{v}'$ в отсутствии такого ускорения; в этом случае $\boldsymbol{v}'$ просто будет вращаться вместе с частичкой. Так как в силу (*104*) мы можем написать:

$$[\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}'] = [\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}],$$

если пренебрежем квадратом $\boldsymbol{k}$, то мы приходим к формуле

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}' + 2[\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}].$$

53. (Стр. 202.) Здесь молчаливо подразумевалось, что ограничивающая сферический объем S поверхность σ не проходит

ни через одну частичку. Предположим, например, что молекулы поляризованы таким образом, что в каждой из них с правой стороны находится положительный электрон, а с левой — отрицательный; проведем OX в направлении направо. Тогда, если поверхность σ проходит всеми своими частями через пространство между частичками, интеграл $\int \rho x\, dS$ будет равен сумме электрических моментов, заключенных внутри поверхности частичек, и может быть с полным правом назван моментом части тела, заключенной внутри поверхности [см. уравнение (195)]. Если, напротив, поверхность проходит через молекулы, значение интеграла не будет просто зависеть от *целых* частичек, лежащих внутри объема S; при этом должно быть принято во внимание, что в добавление к этим последним поверхность σ заключает также некоторое количество отрицательных электронов с правой стороны и некоторое количество положительных электронов с левой. Даже если эти x добавочных электронов гораздо меньше, чем те x, которые принадлежат к целым частичкам, все же они могут привнести в интеграл значительную долю, так как разница между значениями x для положительной и отрицательной частиц сравнима с размерами самого объема S и поэтому значительно превышает соответствующую разницу для двух электронов в одной и той же частичке.

Нижеследующие замечания помогут, однако, рассеять все сомнения относительно справедливости соотношения

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = \dot{\mathbf{P}}.$$

Когда молекулы расположены беспорядочно, как это имеет место в жидкостях и газах, некоторые из них (и даже некоторые электроны), конечно, пересекаются сферической поверхностью σ, которой мы пользовались при определении среднего значения $\overline{\varphi}$. Но в силу предположений, сделанных относительно размеров σ, этих пересеченных молекул будет гораздо меньше, чем молекул, полностью лежащих внутри поверхности, и если, вычисляя $\int \varphi\, dS$, мы опустим *части* молекул, заключенные внутри σ, это не приведет нас ни к какой ошибке; только функция φ должна обладать такими свойствами, что величина, привносимая одной из таких частей, немногим больше, чем то, что привносится одной из целых частичек.

Это условие является удовлетворенным при вычислении интеграла $\int \rho v_x\, dS$, так как здесь нет никакой причины, почему скорости $\mathbf{v}$ могли бы иметь исключительные значения вблизи поверхности σ. Не изменяя значения интеграла, мы можем поэтому провести поверхность между частичками (слегка ее изменяя), и тогда мы можем быть уверены, что $\int \rho v_x dS = \frac{d}{dt}\int \rho x dS$ и что последний интеграл представляет полный электрический момент всех целых частичек в объеме S.

54. (Стр. 207.) Мы заметим прежде всего, что поле в непосредственном соседстве с поляризованной частичкой может быть определено по правилам электростатики, даже если электрический момент не постоянен. Возьмем, например, случай, рассмотренный в § 43. В примечании **23** мы установили, что на больших расстояниях члены, получающиеся при дифференцировании тригонометрических функций, гораздо больше, чем те члены, которые получаются при дифференцировании $\frac{1}{r}$. Эти последние, наоборот, превалируют, если мы ограничимся расстояниями, весьма малыми по сравнению с длиной волны; тогда [см. (88) и (89)] мы можем написать:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\boldsymbol{p}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+\boldsymbol{p}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\boldsymbol{p}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\},$$

$$\boldsymbol{a} = 0,$$

$$\boldsymbol{d} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad \boldsymbol{h} = 0,$$

откуда вытекает, что поле идентично с электростатическим полем, которое мы имели бы, если бы $\boldsymbol{p}$ было постоянно.

Далее, следует заметить, что различие между средней электрической силой $\boldsymbol{E}$ и электрической силой, наблюдающейся в небольшой полости, зависит только от таких действий, которые происходят на весьма небольших расстояниях, так что мы можем оперировать с этим различием так, как если бы мы имели дело с электростатической системой.

Рассмотрим поэтому систему молекул с неизменными электрическими моментами и разберем некоторые подробности, касающиеся наблюдающейся в ней электрической силы.

Так как поле, производимое электронами, определяется выражениями

$$\Delta\varphi = -\rho,$$

$$\boldsymbol{d} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

мы имеем для средних значений:

$$\Delta\overline{\varphi} = -\overline{\rho},$$

$$\boldsymbol{E} = \overline{\boldsymbol{d}} = -\operatorname{grad}\overline{\varphi},$$

или, выражая то же словесно: средняя электрическая сила равна силе, которая была бы произведена зарядом, распределенным со средней, или, будем говорить, с «эффективной» плотностью $\overline{\rho}$.

В определении среднего значения $\bar{\varphi}$, приведенном в § 113, было ясно выражено, что объем S должен иметь сферическую форму. Легко видеть, однако, что мы можем придать ему какую угодно форму, лишь бы он был бесконечно мал в физическом смысле слова. Уравнение

$$\bar{\rho}S = \int \rho\, dS$$

поэтому, собственно говоря, означает, что для любого объема упомянутого рода эффективный заряд (понимая под этими словами произведение $\bar{\rho}$ и S) равен полному действительному заряду.

Рассмотрим теперь распределение эффективного заряда. В целях упрощения допустим, что молекула содержит два электрона, расположенных в точках A и B, с зарядами $-e$ и $+e$, и обозначим через $\mathbf{r}$ вектор AB. Таких векторов различной величины и направления будет столько, сколько имеется молекул. Если теперь длина этих векторов много больше, чем размеры электрона, мы можем пренебречь пересечениями ограничивающей поверхности объема S с самими электронами, но при этом будет большое число пересечений с прямыми AB. Этими пересечениями нельзя пренебрегать, так как для любой целой молекулы $\int \rho\, dS = 0$, тогда как каждое из упомянутых пересечений привносит в значение эффективного заряда внутри σ величину $-e$ или $+e$, смотря по тому, какой знак — положительный или отрицательный — имеет $\mathbf{r}_n$ (n есть внешняя нормаль к σ) (см. примечание 53). Значит, полный заряд внутри σ может быть представлен интегралом по поверхности. Чтобы найти ту часть его, которая соответствует элементу $d\sigma$ (бесконечно малому в физическом смысле слова), начнем с того, что остановим наше внимание на тех прямых AB, которые имеют некоторое определенное направление и некоторую определенную длину. Если начальные точки A распределены беспорядочно и если для рассматриваемой группы их число в единице объема равно ν, число пересечений с $d\sigma$ будет $\nu \mathbf{r}_n d\sigma$ при положительном $\mathbf{r}_n$ и $-\nu \mathbf{r}_n\, d\sigma$ при отрицательном $\mathbf{r}_n$. Поэтому часть, привносимая в заряд внутри σ, есть $-\nu e \mathbf{r}_n\, d\sigma$ в обоих случаях и вся доля, связанная с $d\sigma$, есть $-\sum \nu e \mathbf{r}_n\, d\sigma$, причем сумма распространяется на все группы прямых AB. Но $e\mathbf{r}$ есть электрический момент частички, $\nu e\mathbf{r}$ — момент выбранной группы на единицу объема и $\sum \nu e \mathbf{r}$ — полный момент единицы объема. Обозначая его через $\mathbf{P}$, получаем для вышеприведенного выражения $-\sum \nu e \mathbf{r}_n\, d\sigma$ значение $-\mathbf{P}_n$ и для эффективного заряда, заключенного внутри поверхности σ,

$$-\int \mathbf{P}_n\, d\sigma. \qquad (105)$$

Так как различие между $\boldsymbol{E}$ и электрической силой в полости зависит исключительно от состояния системы в непосредственной близости от рассматриваемой точки, мы можем теперь допустить, что поляризация $\boldsymbol{P}$ везде однородна. В этом случае интеграл (*105*) равен нулю для любой замкнутой поверхности, полностью лежащей внутри тела, так что можно сказать, что эффективный заряд сосредоточен на ограничивающей поверхности Σ. Его поверхностную плотность можно найти, если вычислить (*105*) для поверхности плоского цилиндра, основания которого являются сторонами элемента $d\Sigma$ и расстояние между которыми бесконечно мало по сравнению с размерами $d\Sigma$. Называя N нормаль к поверхности Σ, мы имеем на внешней плоскости $P_n = 0$ (предполагая, что тело окружено эфиром), а на внутренней $P_n = -P_N$. Величина эффективного заряда, содержащегося в цилиндре, дается поэтому выражением $P_N\, d\Sigma$; можно сказать, что заряд распределен по поверхности с плотностью P_N.

Рассмотрим теперь какую-нибудь точку A внутри тела. На основании сказанного электрическая сила $\boldsymbol{E}$ в этой точке производится зарядом P_N на ограничивающей поверхности Σ. Впрочем, если A находится в центре сферической полости, в этой точке будет наблюдаться добавочная электрическая сила $\boldsymbol{E}'$, производимая подобным же зарядом на стенках полости и, очевидно, имеющая направление $\boldsymbol{P}$. Величину этой силы можно найти следующим образом. Пусть a будет радиус сферы, $d\sigma$ — элемент поверхности, ϑ — угол между радиусом, проведенным к этому элементу, и поляризацией $\boldsymbol{P}$. Так как поверхностная плотность на $d\sigma$ равна $-|\boldsymbol{P}|\cos\vartheta$, получаем для силы, производимой в A,

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int |\boldsymbol{P}| \cos^2\vartheta\, d\sigma,$$

откуда

$$\boldsymbol{E}' = \frac{1}{3}\boldsymbol{P}.$$

Наши предыдущие замечания показывают, что мы всегда можем пользоваться выражением

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}$$

для электрической силы в центре сферической полости, даже если поляризация тела изменяется от точки к точке и от одного момента времени к другому.

55. (Стр. 207.) В случае кубического расположения можно сказать, что все частички внутри сферы имеют один и тот же электрический момент $\boldsymbol{p}$. Принимая центр A сферы за начало координат, мы имеем для силы, производимой в направлении x

частичкой, расположенной в точке (x, y, z) на расстоянии r от центра,

$$\frac{p_x}{4\pi}\cdot\frac{3x^2-r^2}{r^5},\quad \frac{p_y}{4\pi}\cdot\frac{3xy}{r^5},\quad \frac{p_z}{4\pi}\cdot\frac{3xz}{r^5}.$$

Но суммы

$$\sum\frac{3x^2-r^2}{r^5},\quad \sum\frac{3xy}{r^5},\quad \sum\frac{3xz}{r^5}$$

равны нулю, если их распространить на все частички внутри сферы. Для второй и третьей сумм это следует непосредственно, если мы направим оси координат параллельно главным направлениям кубического распределения. Далее, при таком направлении осей

$$\sum\frac{3x^2-r^2}{r^5}=\sum\frac{3y^2-r^2}{r^5}=\sum\frac{3z^2-r^2}{r^5},$$

откуда видно, что каждое из этих выражений должно быть равно нулю, так как их сумма равна нулю.

56. (Стр. 207.) Следует отметить, что эта магнитная сила $\boldsymbol{H}$ вызывает силу

$$\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}],$$

действующую на электрон. Так как в пучке света $\boldsymbol{H}$, вообще говоря, того же порядка величины, что и электрическая сила $\boldsymbol{E}$ [см. уравнения (7)], эта сила имеет порядок величины $\frac{|\boldsymbol{v}|}{c}$ по сравнению с силой $e\boldsymbol{E}$. Поэтому ею можно пренебречь, так как амплитуды электронов чрезвычайно малы по сравнению с длиной волны, вследствие чего скорость колебания гораздо меньше, чем скорость распространения света.

56*. (Стр. 210.) [1915] Если подставить значение β [см. формулы (202) и (199)], соответствующее (206), в уравнение (230) (§ 134), которое определяет коэффициент поглощения, получится в точности тот же результат, который Рэлей[1]) нашел для поглощения света в газе. Это поглощение вызывается рассеянием лучей молекулами, так как содержащиеся внутри них электроны приводятся в колебание лучами падающего света и становятся поэтому центрами испускания. Так как энергия, излучаемая электроном, тесно связана с силой, даваемой (в § 40) уравнением (205), естественно, что величина поглощения будет определяться коэффициентом (206).

57. (Стр. 211.) Чтобы сравнить действие столкновений с действием сопротивления того рода, какой представлен выраже-

---

[1]) Rayleigh, Phil. Mag. **47** (1899), стр. 375.

нием (197), мы рассмотрим сначала колебания, возникающие в изолированной частичке, электрон которой подвержен действию периодической электрической силы

$$F_x = p \cos nt \qquad (106)$$

и действию сил, определяемых выражениями (196) и (197). Уравнение движения

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = eE_x - f\xi - g\frac{d\xi}{dt}$$

решается весьма легко, если, следуя методу, указанному в § 119, мы заменим (*106*) выражением

$$E_x = p\varepsilon^{int}.$$

Таким путем мы найдем для вынужденных колебаний:

$$\xi = \frac{pe}{f - mn^2 + ing}\,\varepsilon^{int} = \frac{pe}{m\,(n_0^2 - n^2) + ing}\,\varepsilon^{int}, \qquad (107)$$

где

$$n_0^2 = \frac{f}{m}.$$

Предположим сперва, что никакого истинного сопротивления нет, но что колебания электронов все время непрерывно нарушаются благодаря столкновениям, происходящим через неправильно чередующиеся интервалы. В этом случае движение каждой частички за промежуток времени от последнего столкновения вплоть до того момента времени t, для которого мы хотим вычислить ξ, определяется уравнением

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = eE_x - f\xi,$$

общее решение которого будет:

$$\xi = \frac{pe}{m\,(n_0^2 - n^2)}\,\varepsilon^{int} + C_1\varepsilon^{in_0t} + C_2\varepsilon^{-in_0t}, \qquad (108)$$

где постоянные интегрирования C_1 и C_2 изменяются от одной частички к другой. Эти постоянные определяются значениями ξ и $\frac{d\xi}{dt}$, скажем $(\xi)_0$ и $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0$, непосредственно после последнего столкновения. Среди большого числа частичек мы можем выделить группу, все же достаточно многочисленную, для которой последнее столкновение произошло в определенный момент времени t_1. Допуская, что после столкновения все направления смещения и скорости являются одинаково вероятными, мы получим среднее значение ξ для этой группы, если в (*108*) определим C_1 и C_2 на основании условий, что для $t = t_1$ пропадают как ξ, так и $\frac{d\xi}{dt}$. В результате имеем:

$$\xi = \frac{pe}{m(n_0^2 - n^2)} \left\{ \varepsilon^{int} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n}{n_0}\right) \varepsilon^{in_0(t-t_1)+int_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right) \varepsilon^{-in_0(t-t_1)+int_1} \right\},$$

или, если положим: $t - t_1 = \vartheta$,

$$\xi = \frac{pe}{m(n_0^2 - n^2)} \varepsilon^{int} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n}{n_0}\right) \varepsilon^{i(n_0-n)\vartheta} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right) \varepsilon^{-i(n_0+n)\vartheta} \right\}. \qquad (109)$$

Это есть среднее значение ξ, взятое для определенного момента времени t и для тех частичек, для которых после последнего столкновения протекло время ϑ; мы получим выражение, которое можно будет сравнить с (*107*), если возьмем среднее значение выражения (*109*) для всех групп частичек, которые отличаются друг от друга величиной интервала ϑ.

Пусть N будет общее число рассматриваемых частичек и A — число столкновений, испытываемых ими в единицу времени, так что промежуток времени, упоминаемый в тексте, равен

$$\frac{N}{A} = \tau.$$

Так как столкновения следуют друг за другом совершенно нерегулярно, мы можем принять, что число частичек, для которых интервал ϑ лежит в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, равно

$$A\varepsilon^{-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta = \frac{N}{\tau} \varepsilon^{-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta; \qquad (110)$$

к этому результату мы приходим путем рассуждений, подобных тем, которыми мы пользовались в примечании **36**.

Мы должны поэтому перемножить (*109*) и (*110*), проинтегрировать от $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \infty$ и разделить на N. Таким путем мы получаем для окончательного среднего значения смещения

$$\xi = \frac{pe}{m\left(n_0^2 + \frac{1}{\tau^2} - n^2\right) + 2\frac{imn}{\tau}} \varepsilon^{int}.$$

Пренебрегая членом $\frac{1}{\tau^2}$ в знаменателе, мы видим, что под влиянием столкновений явление будет происходить совершенно так же, как если бы существовало сопротивление, определяемое выражением

$$g = \frac{2m}{\tau}.$$

58. (Стр. 219.) В случае смеси электрический момент P слагается из стольких отдельных частей P_1, P_2, ..., сколько есть составляющих. Рассуждая, как в §§ 116—119, мы можем установить для каждой компоненты формулы, подобные (200), так что, если мы положим $a = \frac{1}{3}$, то получим для первой составляющей смеси [32]:

$$m_1' \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = E + \frac{1}{3} P - f_1' P_1,$$

для второй:

$$m_2' \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} = E + \frac{1}{3} P - f_2' P_2,$$

и т. д. Отсюда, если все зависимые переменные изменяются по закону e^{int},

$$P_1 = \frac{E + \frac{1}{3} P}{f_1' - m_1' n^2}, \qquad P_2 = \frac{E + \frac{1}{3} P}{f_2' - m_2' n^2}, \ \ldots$$

и если положим:

$$\frac{1}{f_1' - m_1' n^2} + \frac{1}{f_2' - m_2' n^2} + \ldots = \omega,$$

$$P = \omega\left(E + \frac{1}{3} P\right).$$

Комбинируя это выражение с (192), получаем:

$$D = \frac{1 + \frac{2}{3}\omega}{1 - \frac{1}{3}\omega} E.$$

Для показателя преломления имеем:

$$\mu^2 = \frac{1 + \frac{2}{3}\omega}{1 - \frac{1}{3}\omega},$$

$$\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2} = \frac{1}{3}\omega = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{f_1' - m_1' n^2} + \frac{1}{f_2' - m_2' n^2} + \ldots\right).$$

Но каждый член $\frac{1}{3(f' - m'n^2)}$ дает значение $\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2}$ для одной из компонент, плотность которой внутри смеси равна $m\rho$; это значение можно получить, если умножить постоянную r для рассматриваемой компоненты на плотность $m\rho$. Отсюда непосредственно получается уравнение (218).

59. (Стр. 221.) Если положить $a = \frac{1}{3}$, то на основании уравнений (220) смещения $\xi_1, \xi_2, \ldots$ определяются выражениями

$$(f_1 - m_1 n^2)\,\xi_1 = e_1\left(\boldsymbol{E}_x + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}_x\right) \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$Ne_1\xi_1 = \frac{Ne_1^2}{f_1 - m_1 n^2}\left(\boldsymbol{E}_x + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}_x\right) \text{ и т. д.}$$

Подобные же формулы можно написать и для $Ne_1\eta_1$, $Ne_1\zeta_1$ и т. д. Отсюда, суммируя:

$$\boldsymbol{P} = \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}\right)\left\{\frac{Ne_1^2}{f_1 - m_1 n^2} + \frac{Ne_2^2}{f_2 - m_2 n^2} + \ldots\right\},$$

откуда легко получается формула (222).

60. (Стр. 227.) Прямой результат подстановки есть

$$\left(\frac{c^2}{v^2} - \frac{c^2k^2}{n^2}\right) - i\,\frac{2c^2k}{vn} = 1 + \frac{1}{\alpha + i\beta} = 1 + \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

откуда получается:

$$\mu^2 - \frac{c^2k^2}{n^2} = 1 + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$2\mu\,\frac{ck}{n} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

а отсюда легко выводятся уравнения (227) и (228).

61. (Стр. 228.) Выражение $\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$, рассматриваемое как функция α, имеет максимальное значение $\frac{1}{2\beta}$ при $\alpha=\beta$; оно поэтому весьма мало при больших β. Из этого следует, что даже наибольшие значения $\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\beta^2}$ имеют порядок величины $\frac{1}{\beta}$, так что мы можем разложить корень квадратный в (227) и (228) по восходящим степеням этой величины. Отсюда, если мы будем пренебрегать членами порядка $\frac{1}{\beta^3}$, получим:

$$\sqrt{1+\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\beta^2}}=1+\frac{1}{2}\,\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{1}{8}\,\frac{(2\alpha+1)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2};$$

это выражение можно заменить следующим:

$$1+\frac{1}{2}\,\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2},$$

так как величина $\frac{4\alpha+1}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$ никогда не может быть порядка выше, чем $\frac{1}{\beta^3}$. Окончательно

$$\mu^2=1+\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1}{4}\,\frac{\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2},$$

$$\frac{c^2k^2}{n^2}=\frac{1}{4}\,\frac{\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}. \qquad (III)$$

Поэтому, если мы в μ отбросим члены порядка $\frac{1}{\beta^2}$, а в k — порядка $\frac{1}{\beta^{5/2}}$, мы придем к формулам (229) и (230). В самом деле, если нам нужно знать k с такой степенью точности, мы можем опустить в k^2 и в $\frac{c^2k^2}{n^2}$ величины порядка $\frac{1}{\beta^3}$, как мы это сделали в (III).

62. (Стр. 230.) Если $J\,dn$ есть интенсивность падающего света, поскольку она относится к частотам, лежащим между n и $n+dn$, количество света, поглощенное слоем толщины Δ, на который световые лучи падают в направлении нормали, дается интегралом

$$A=\int\left(1-\varepsilon^{-2k\Delta}\right)J\,dn.$$

в котором мы учли, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Если полоса поглощения весьма узка, можно положить:

$$k = \frac{n_0'}{2c} \cdot \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

и в силу (231)

$$dn = -\frac{1}{2m'n_0'}\,d\alpha.$$

Далее, мы можем распространить интегрирование от $\alpha = -\infty$ до $\alpha = +\infty$, принимая $\beta = n_0'g'$ и J за постоянные. Вычисление легко выполняется для тонкого слоя, для которого

$$1 - e^{-2k\Delta} = 2k\Delta - 2k^2\Delta^2.$$

Оказывается, что часть A, обусловленная первым членом, не зависит от g' и g. Но если оставить и второй член, A увеличивается с сопротивлением g.

63. (Стр. 237.) Это легко найти, если знаменатель (239) представить в виде

$$\{\alpha(1+\alpha) - \beta^2 - \gamma^2\} + i(1+2\alpha)\beta$$

и затем умножить на сопряженное комплексное выражение.

64. (Стр. 240.) Объяснение магнитоэлектрических явлений значительно облегчается, если предположить, что частички светящегося или поглощающего тела под действием магнитного поля определенным образом ориентируются. Основываясь на этом предположении, благодаря которому является возможным обойтись без условия изотропности частичек (§ 93), Фохт[1]) удачно объяснил многие наиболее сложные формы явления Зеемана; для этого оказалось достаточным предположить, что каждая частичка содержит два или более взаимно связанных электронов, движение которых определяется уравнениями, подобными нашим формулам § 90, причем теперь вместо обобщенных координат p нужно ввести прямоугольные координаты электронов. Полученную таким образом теорию следует, без сомнения, считать наилучшей из существующих в настоящее время, хотя природа связей все же остается неясной и хотя Фохт не делает никаких попыток показать, каким образом производятся магнитным полем действия, определяемые коэффициентами c.

Я должен также отметить великолепные явления, открытые Беккерелем[2]). В некоторых кристаллах, содержащих элементы

---

[1]) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. Leipzig, 1908.

[2]) J. Becquerel, Comptes rendus **142** (1906), стр. 775, 874, 1144; **143** (1906), стр. 769, 890, 962, 1133; **144** (1907), стр. 132, 420, 682, 1032, 1336.

эрбий и дидимий, наблюдается большое число полос поглощения, многие из которых настолько резки, особенно при низких температурах, получаемых при помощи жидкого воздуха или жидкого водорода [1]), что они в этом отношении уже сравнимы с линиями газообразных тел; эти линии обнаруживают замечательное разнообразие эффекта Зеемана и связанных с ним явлений. Конечно, в применении к этим кристаллам гипотеза изотропии частичек оказалась бы совершенно неуместной. Фохт и Беккерель удачно объяснили бо́льшую часть явлений, наблюдаемых на этих линиях, при помощи новой теории Фохта, о которой я только что упоминал.

В § 91 было показано, что можно надеяться получить истинное магнитное расщепление спектральной линии только в том случае, если первоначальная линия в действительности является сложной, т. е. если в отсутствии магнитного поля уже имеется налицо две или более одинаковые частоты. Фохт обратил внимание на то обстоятельство, что подобные явления могут получиться и тогда, когда мы имеем две частоты, одинаковые не вполне, но только до некоторой степени; тогда эти явления могут протекать с той особенностью, что в расположении составляющих, появляющихся под действием магнитного поля, наблюдается более или менее резко выраженная дисимметрия. Подобного рода случаи встречаются в опытах Беккереля довольно часто; Фохт придерживается того мнения, что если не все, то многие случаи дисимметрии, наблюдаемой в изотропных телах (§ 142), можно толковать подобным же образом.

Представляется весьма интересным, что на некоторых линиях Беккереля явление Зеемана наблюдается со знаком, противоположным обычному эффекту (т. е. с обратным знаком круговой поляризации, обычно наблюдаемой при продольном эффекте); наблюдаемая при этом интенсивность эффекта равна, а то и превышает интенсивность эффекта в ранее наблюдавшихся случаях. Эти, а также другие подобные им явления, наблюдавшиеся на некоторых линиях в газообразных телах [2]), привели некоторых физиков к допущению о возможности колеблющихся положительных электронов, для которых значение $\frac{e}{m}$ было бы сравнимо или даже больше, чем значение, найденное для отрицательных электронов в катодных лучах. Но эти явления можно также объяснить, если представить себе, что в некоторых системах молекул под действием внешнего магнитного поля возникают перемещения электричества, которые в свою очередь могут

---

[1]) H. Kamerlingh Onnes and J. Becquerel, Amsterdam Proceedings **10** (1908), стр. 592.

[2]) J. Becquerel, Comptes rendus **146** (1908), стр. 683; A. Dufour, там же, стр. 118, 229, 634, 810; R. W. Wood, Phil. Mag. (6), **15** (1908), стр. 274.

вызвать внутри частичек поля, противоположные внешнему. Против этой последней гипотезы Беккерель, однако, выдвигает то возражение, что, подобно многим явлениям индуцированного намагничивания, рассматриваемые внутренние поля тоже, по всей вероятности, были бы связаны со значительными изменениями при нагревании или охлаждении тела, тогда как магнитное расщепление спектральных линий остается на большом интервале температур постоянным.

Возможность третьего объяснения — хотя я имею относительно него некоторые сомнения — подсказывается, может быть, выводами, полученными в § 102; я имею в виду обращение направления обычного эффекта, вызываемое особым расположением отрицательных электронов.

65. (Стр. 250.) Если x, y, z суть координаты частички среды в момент времени t, ее координаты в момент времени $t+dt$ будут равны

$$x' = x + g_x\,dt, \quad y' = y + g_y\,dt, \quad z' = z + g_z\,dt.$$

Здесь g_x, g_y, g_z можно рассматривать как линейные функции x, y, z, так что, например,

$$g_x = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta z,$$

или, как мы можем также написать,

$$g_x = \alpha + \beta x' + \gamma y' + \delta z'.$$

Частички, которые первоначально лежали в плоскости

$$x = a,$$

достигнут в конце рассматриваемого интервала плоскости

$$x' = a + (\alpha + \beta x' + \gamma y' + \delta z')\,dt.$$

Косинусы углов направления нормали к этой плоскости пропорциональны

$$1 - \beta\,dt, \quad -\gamma\,dt, \quad -\delta\,dt$$

или

$$1 - \frac{\partial g_x}{\partial x}\,dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial y}\,dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial z}\,dt.$$

66. (Стр. 254.) Пусть шар радиуса R движется с постоянной скоростью w через несжимаемую среду; предположим, что движение этой последней невихревое. Тогда, если центр шара примем за начало координат, а траекторию — за ось x, потенциал скоростей дается выражением

$$\varphi = -\frac{1}{2} R^3 w \frac{x}{r^3},$$

откуда для составляющих скорости имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{2}R^3w\frac{3x^2-r^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{2}R^3w\frac{3xy}{r^5},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{1}{2}R^3w\frac{3xz}{r^5}.$$

В точках пересечения поверхности с плоскостью YOZ эти величины делаются равными

$$-\frac{1}{2}w,\ 0,\ 0,$$

так что относительная скорость скольжения равна $-\frac{3}{2}w$.

67. (Стр. 254.) Вместо того, чтобы рассматривать равномерное поступательное движение Земли через эфир, мы можем с таким же правом представить себе, что планета неподвижна, а эфир обтекает ее, так что на бесконечном расстоянии он имеет постоянную скорость w_0 в направлении OZ.

Пусть эфир подчиняется закону Бойля и пусть он притягивается к Земле с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния r от центра. Тогда при отсутствии движения среды плотность k и давление p будут функциями r, определяемыми уравнением равновесия

$$-\frac{dp}{dr}=\frac{\omega k}{r^2}$$

и соотношением

$$k=\mu p,$$

где ω и μ суть постоянные.

Эти условия удовлетворяются при

$$\log k=\frac{\mu\omega}{r}+\log k_0,$$

где k_0 есть плотность на бесконечном расстоянии.

Может существовать такое состояние движения, при котором имеется потенциал скоростей φ и в котором плотность k имеет значение, данное в вышеприведенной формуле. В самом деле, если мы положим:

$$\varphi=z\left[a\left(\frac{\mu\omega}{2r}-1\right)+b\left(\frac{\mu\omega}{2r}+1\right)e^{-\frac{\mu\omega}{r}}\right]$$

(понимая под a и b постоянные и принимая центр сферы за начало координат), то составляющие скорости

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial (ku)}{\partial x}+\frac{\partial (kv)}{\partial y}+\frac{\partial (kw)}{\partial z}=0.$$

Вид функции φ выбран, имея в виду остальные условия задачи, а именно:

$$\text{для } r=\infty:\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=w_0,$$

и

$$\text{для } r=R \text{ (т. е. на поверхности Земли): } \frac{\partial\varphi}{\partial r}=0.$$

Эти условия приводят к уравнениям

$$-a+b=w_0,$$

$$a=\left(\frac{\mu^2\omega^2}{2R^2}+\frac{\mu\omega}{R}+1\right)\varepsilon^{-\frac{\mu\omega}{R}}b.$$

Вдоль пересечений поверхности планеты с плоскостью xy имеется скорость скольжения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\left(\frac{\mu\omega}{2R}-1\right)a+\left(\frac{\mu\omega}{2R}+1\right)\varepsilon^{-\frac{\mu\omega}{R}}b=\frac{\mu^3\omega^3}{4R^3}\varepsilon^{-\frac{\mu\omega}{R}}b.$$

Оказывается, что эта величина равна $0{,}011\,w_0$, если $\frac{\mu\omega}{R}=10$ и $0{,}0056\,w_0$, если $\frac{\mu\omega}{R}=11$. В этих случаях отношение между плотностью вблизи поверхности и на бесконечном расстоянии будет соответственно ε^{10} и ε^{11}.

68. (Стр. 264.) Пусть относительные лучи сходятся в точке O, которую мы примем за начало координат; определим форму волн построением, которое мы обсуждали в § 153. Мы должны сложить вектор в направлении относительного луча величины v' с вектором $-\frac{g}{\mu^2}$. Пренебрегая величинами второго порядка, мы можем также приравнять первый вектор v, т. е. скорости движения волны при неподвижной среде, и можем рассматривать эту скорость в непосредственном соседстве с точкой O как постоянную. Мало того, и второму вектору можно приписать постоянную величину, например, в направлении OX.

В точке (x, y, z) на расстоянии r от O составляющие первого вектора суть:

$$-\frac{x}{r}v,\quad -\frac{y}{r}v,\quad -\frac{z}{r}v,$$

а составляющие второго —

$$-\frac{|g|}{\mu^2},\ 0,\ 0,$$

так что составляющие результирующего вектора, который направлен под прямым углом к фронту волны, суть:

$$-\left\{\frac{x}{r}v+\frac{|g|}{\mu^2}\right\},\quad -\frac{y}{r}v,\quad -\frac{z}{r}v.$$

Поэтому уравнение поверхности, нормальной к результирующему вектору, таково:

$$vr+\frac{|g|}{\mu^2}x=C.$$

Это — уравнение эллипсоида, центр которого имеет координаты

$$-\frac{aC}{v^2-a^2},\ 0,\ 0,$$

если положить:

$$a=\frac{|g|}{\mu^2};$$

полуоси эллипсоида направлены по координатным осям OX, OY, OZ и имеют длину

$$\frac{vC}{v^2-a^2},\quad \frac{C}{\sqrt{v^2-a^2}},\quad \frac{C}{\sqrt{v^2-a^2}}.$$

Так как мы пренебрегаем квадратом a, мы можем сказать, что волны имеют сферическую форму. Их центр при уменьшении постоянной C приближается к точке O.

69. (Стр. 277.) Если n есть частота источника света, частота в определенной точке одной из трубок тоже будет n, так как последовательные волны употребляют равные времена для того, чтобы достигнуть этой точки. На этом основании луч света может быть представлен по отношению к неподвижным осям выражениями вида

$$a\cos n\left(t-\frac{x}{u}+p\right),$$

где u есть рассматриваемая скорость.

Преобразовывая это выражение для отнесения его к осям движущимся вместе с жидкостью, и ограничиваясь одним из двух случаев, указанных в тексте, мы должны положить:

$$x=x'+wt,$$

вследствие чего вышеприведенное выражение примет вид

$$a \cos n\left(t - \frac{w}{u} t - \frac{x'}{u} + p\right).$$

Таким образом, мы видим, что относительная частота равна

$$n' = n\left(1 - \frac{w}{u}\right);$$

обозначая через μ показатель преломления для частоты n, мы можем написать вместо этого:

$$n' = n\left(1 - \frac{\mu w}{c}\right),$$

так как u отличается от $\frac{c}{\mu}$ только на величину, пропорциональную w.

Показатель преломления, соответствующий частоте n', равен

$$\mu - \frac{\mu w}{c} n \frac{d\mu}{dn};$$

соответствующая скорость распространения

$$\frac{c}{\mu - \frac{\mu w}{c} n \frac{d\mu}{dn}} = \frac{c}{\mu} + \frac{w}{\mu} n \frac{d\mu}{dn} = \frac{c}{\mu} - \frac{w}{\mu} T \frac{d\mu}{dT} = \frac{c}{\mu} - \frac{w}{\mu} \lambda \frac{d\mu}{d\lambda},$$

если λ есть длина волны.

Это — та скорость, к которой мы должны добавить член $w\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)$.

В случае воды мы имеем для спектральной линии D

$$1 - \frac{1}{\mu^2} = 0{,}438$$

и

$$1 - \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} = 0{,}451.$$

Если скорость относительно неподвижных частей прибора представить выражением

$$\frac{c}{\mu} \pm \varepsilon w,$$

$\varepsilon = 0{,}434$ (с возможной ошибкой $\pm 0{,}02$) есть то значение, которое Майкельсон и Морлей вывели из своих опытов.

69*. (Стр. 278.) [1915] Повторяя опыт Физо, Зееман [1]) нашел, что смещения интерференционных колец для различных длин волн находятся в удовлетворительном согласии с формулой, приведенной в § 164. Это видно из нижеследующей таблички,

λ в Å · U	Число наблюдений	$\Delta_{\text{эксп}}$	Δ_{Fr}	Δ_L
4500	6	$0{,}826 \pm 0{,}007$	0,786	0,825
4580	6	$0{,}808 \pm 0{,}005$	0,771	0,808
5461	9	$0{,}656 \pm 0{,}005$	0,637	0,660
6440	1	0,542	0,534	0,551
6870	10	$0{,}511 \pm 0{,}007$	0,500	0,513

в которой $\Delta_{\text{эксп}}$ обозначает наблюдаемое смещение, выраженное в частях расстояния между кольцами, Δ_L — смещение, вычисленное по формуле, и Δ_{Fr} — результат вычисления, если опустить член

$$\mp \frac{w}{\mu} T \frac{d\mu}{dT}.$$

Зееман добавляет, что вычисленные значения могли быть слегка искажены неточностями при измерении скорости потока и длины столба протекающей воды. Эти погрешности исключаются при нахождении отношения значений Δ для двух различных длин волн. Для длин волн 4500 и 6870 из опыта получается отношение, равное 1,616. По формуле оно оказывается равным 1,572, если опустить последний член, и 1,608, если принять его во внимание.

70. (Стр. 278.) Для случая зеркала это предложение может быть доказано весьма легко по способу, указанному в § 154. Если, предполагая, что зеркало — металлическое, мы захотим вывести этот же результат из теоремы соответственных состояний (§§ 162 и 165), мы должны сначала распространить теорему на поглощающие тела. Сделать это вполне возможно [2]).

71. (Стр. 279.) В неподвижном и движущемся кристаллах пучки параллельных лучей будут соответствовать друг другу, когда их боковые поверхности одинаковы, т. е. когда относительные лучи имеют одно и то же направление s. В обоих случаях мы можем рассматривать определенную прямую в этом направлении и написать уравнения для нарушения равновесия

---

[1]) Zeeman, Proc. Amsterdam Academy **17** (1914), стр. 445; **18** (1915), стр. 398.

[2]) См. H. B. A. Bockwinkel, Sur les phénomènes du rayonnement dans un système qui se meut d'une vitesse uniforme, par rapport á l'éther. Arch. néerl. (2) **14** (1908), стр. 1.

в различных точках этой прямой, отсчитывая расстояние s от неподвижной точки на этой прямой. Для неподвижного кристалла колебания могут быть представлены выражениями вида

$$a \cos n\left(t-\frac{s}{u}+p\right);$$

соответствующие выражения для второго случая имеют вид

$$a \cos n\left(t'-\frac{s}{u}+p\right),$$

или, так как вдоль рассматриваемой прямой

$$t'=t-\frac{1}{c^2}(w_x x'+w_y y'+w_z z')=t-\frac{1}{c^2}w_s s,$$

$$a \cos n\left(t-\frac{w_s s}{c^2}-\frac{s}{u}+p\right),$$

откуда вытекает, что скорость u' луча по отношению к весомой материи определяется выражением

$$\frac{1}{u'}=\frac{1}{u}+\frac{w_s}{c^2}, \quad u'=u-\frac{u^2}{c^2}w_s.$$

72. (Стр. 282.) Строго говоря, следует принять во внимание, что в движущейся системе относительные лучи могут слегка отклоняться от этих прямых, так как теорема о неизменности их пути при перемещении была доказана только для того случая, когда мы пренебрегали членами второго порядка. Более подробное рассмотрение показывает, однако, что это обстоятельство не вызывает никаких ошибок[1]).

72*. (Стр. 286.) [1915] Если бы мне предстояло написать эту последнюю главу теперь, я, конечно, поставил бы на гораздо более видное место теорию относительности Эйнштейна (§ 189), с помощью которой теория электромагнитных явлений в движущихся системах получает такую простоту, какой мне достигнуть не удалось. Главная причина моей неудачи заключалась в том, что я всегда придерживался мысли, что только переменную t можно принимать за истинное время и что мое местное время t' должно рассматриваться не более как вспомогательная математическая величина. В теории Эйнштейна, напротив, t' играет ту же роль, что и t; если мы хотим описывать явления в зависимости от x', y', z', t', мы должны оперировать с этими переменными совершенно таким же образом, как мы оперировали

---

[1]) Lorentz, De l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux, Arch. néerl. 21 (1887), стр. 169—172. (Abhandlungen über theoretische Physik 1, стр. 389—392.)

бы с x, y, z, t. Если, например, точка находится в движении, ее координаты x, y, z за время dt испытывают некоторые изменения dx, dy, dz, и составляющие скорости v будут:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Но эти четыре изменения dx, dy, dz, dt вызовут соответственные изменения dx', dy', dz', dt' в новых переменных x', y', z', t', и в этой системе координат скорость v' будет определяться как вектор с составляющими

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \tag{112}$$

Подстановка, которой пользуется Эйнштейн, получается как частный случай, если в (287) и (288) положим $l = 1$, что мы и сделаем вскоре (примечание 75* и § 179). Пока мы оставим этот множитель неопределенным.

Истинный смысл подстановок (287), (288) заключается в соотношении

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = l^2(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2), \tag{113}$$

которое легко можно проверить, и из него мы можем вывести, что должно быть:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2, \tag{114}$$

если

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \tag{115}$$

Это можно истолковать следующим образом. Пусть возмущение, произведенное в точке $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в момент времени $t = 0$, распространяется по всем направлениям со скоростью света c, так что в момент времени t оно достигает сферической поверхности (*115*). Тогда можно сказать, что в системе x', y', z', t' то же самое возмущение исходит в момент $t' = 0$ из точки $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ и достигает сферической поверхности (*114*) в момент t'. Так как радиус этой сферы равен ct', возмущение распространяется в системе x', y', z', t' с той же скоростью c, какую оно имело в системе x, y, z, t. Отсюда вытекает, что скорость света не изменяется при преобразовании (см. § 190).

Формулы (287) и (288) можно также получить, если искать *линейное* преобразование, удовлетворяющее условию (*113*) и притом такое, чтобы для $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ мы имели $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, $t' = 0$. Так как эти соотношения линейны, точка $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ будет в системе x, y, z, t обладать скоростью, постоянной по величине и направлению. Если оси x и x' выбраны в направлении этой скорости, мы приходим к уравнениям вида (287), (288).

В теории относительности нам постоянно придется иметь дело с соотношениями между соответственными величинами, которые приходится вводить, если мы хотим описывать одни и те же явления сначала в системе x, y, z, t, а затем в системе x', y', z', t'. Часть этих формул преобразования получается из основных предпосылок, другие должны быть подходящим образом выбраны; можно считать, что они определяют «соответственные величины», причем цель всегда заключается в том, чтобы прийти, если возможно, в обоих способах описания к уравнениям одинакового вида.

Формулы преобразования для скоростей найти нетрудно. Нужно только подставить в (112) значения

$$\left.\begin{aligned} dx' &= kl\,(dx - w\,dt), \quad dy' = l\,dy, \; dz' = l\,dz, \\ dt' &= kl\left(dt - \frac{w}{c^2}\,dx\right) \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

и разделить на dt числитель и знаменатель дробей. Если положить:

$$\omega = k\left(1 - \frac{w}{c^2}\,v_x\right), \tag{117}$$

то в результате получится:

$$v_x' = k\,\frac{v_x - w}{\omega}, \qquad v_y' = \frac{v_y}{\omega}, \qquad v_z' = \frac{v_z}{\omega}. \tag{118}$$

Эти формулы совместно с (285) приводят к следующим соотношениям, которые нам пригодятся впоследствии:

$$(c^2 - v'^2)^{1/2} = \frac{(c^2 - v^2)^{1/2}}{\omega}, \tag{119}$$

$$\omega = \frac{1}{k\left(1 + \frac{w}{c^2}\,v_x'\right)}. \tag{120}$$

Чтобы не расходиться с обозначениями, которыми мы пользовались в тексте, положим теперь:

$$v_x = u_x + w, \qquad v_y = u_y, \qquad v_z = u_z.$$

Тогда мы находим:

$$v_x' = k\,\frac{u_x}{\omega}, \qquad v_y' = \frac{u_y}{\omega}, \qquad v_z' = \frac{u_z}{\omega}, \tag{121}$$

откуда вытекает соотношение между скоростью $\boldsymbol{v}'$ и вектором $\boldsymbol{u}'$, которым мы пользуемся в тексте:

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{u}'}{k\omega}. \tag{122}$$

Наконец, мы можем вывести из (120) и (122):

$$\omega = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{w}{c^2}u'_x\right). \tag{123}$$

Мы можем добавить, что ω есть величина положительная, так как скорости w и v_x всегда меньше, чем c.

Рассмотрим, далее, формулу преобразования для той величины, которую можно назвать «материальным» элементом объема.

Пусть имеется весьма большое число точек, расположенных весьма близко друг к другу и движущихся таким образом, что их скорости являются непрерывными функциями координат. Остановим наше внимание на определенном значении t; пусть в этот момент x, y, z будут координаты одной из точек P_0 и $x + \boldsymbol{x}$, $y + \boldsymbol{y}$, $z + \boldsymbol{z}$ — координаты точки P, расположенной бесконечно близко к предыдущей. Если

$$\overline{x'},\ \overline{y'},\ \overline{z'},\ \overline{t'}$$

суть значения x', y', z', t', соответствующие x, y, z, t, мы можем написать, что значения, соответствующие $x + \boldsymbol{x}$, $y + \boldsymbol{y}$, $z + \boldsymbol{z}$, t, будут:

$$\overline{x'} + kl\boldsymbol{x},\quad \overline{y'} + l\boldsymbol{y},\quad \overline{z'} + l\boldsymbol{z},\quad \overline{t'} - kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}. \tag{124}$$

Пользуясь системой x, y, z, t, мы можем остановить наше внимание на всех точках, лежащих одновременно, т. е. в данный момент времени t, в некотором элементе dS пространства x, y, z. Мы можем рассмотреть эти же самые точки после перехода к системе x', y', z', t'. Тогда мы должны будем считать однородными положения, относящиеся к определенному моменту времени t', например $\overline{t'}$; мы можем рассматривать элемент $\overline{dS'}$ в пространстве x', y', z', в котором находятся эти положения. То, что нам надо знать, — это отношение между dS и $\overline{dS'}$.

Чтобы его определить, мы должны заметить, что в (124) мы имеем координаты точки P в момент времени $\overline{t'} - kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}$. Отсюда мы перейдем к координатам в момент времени $\overline{t'}$, прибавляя расстояния, пройденные за время $kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}$. Мы можем для них написать:

$$kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}v'_x,\qquad kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}v'_y,\qquad kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}v'_z,$$

и так как x, y, z бесконечно малы, мы можем здесь понимать под v'_x, v'_y, v'_z скорости точки P_0 в момент времени $\overline{t'}$. Координаты различных точек P (имеющих различные значения x, y, z) в определенный момент времени $\overline{t'}$ даются поэтому выражениями

$$x' = \overline{x'} + kl\left(1 + \frac{wv'_x}{c^2}\right)x,$$

$$y' = \overline{y'} + kl\frac{wv'_y}{c^2}x + ly,$$

$$z' = \overline{z'} + kl\frac{wv'_z}{c^2}x + lz.$$

Эти уравнения выражают соотношения между координатами x, y, z точки элемента dS и координатами соответствующей точки элемента $\overline{dS'}$. В силу известной теоремы отношение между элементами дается выражением

$$\frac{\overline{dS'}}{dS} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{\partial y}, & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x}, & \frac{\partial y'}{\partial y}, & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x}, & \frac{\partial z'}{\partial y}, & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix},$$

причем определитель берется с положительным знаком. Развертывая эту формулу и помня, что x, y, z бесконечно малы, находим, что определитель равен

$$kl^3\left(1 + \frac{wv'_x}{c^2}\right),$$

так что в силу (123)

$$\overline{dS'} = \frac{l^3}{\omega}dS.$$

Мы обозначим элемент $\overline{dS'}$ верхней чертой для отличия от элемента dS' в формуле (299).

Предположим теперь, что в точках, которые мы рассматривали, расположены одинаковые электрические заряды. Тогда мы можем сказать, что такой же заряд, который расположен в dS в момент времени t, находится в $\overline{dS'}$ в момент времени $\overline{t'}$, или, как мы теперь можем написать, t', и это останется верным, если мы, увеличивая число точек, перейдем к непрерывному распределению. Плотности ρ и $\overline{\rho'}$, которые при двух способах рассмотрения явлений должны быть приписаны электрическому заряду, будут поэтому обратно пропорциональны объемам dS и $\overline{dS'}$. Отсюда

$$\overline{\rho'} = \frac{\omega}{l^3}\rho. \qquad (I25)$$

Мы написали $\overline{\rho'}$ с верхней чертой, чтобы отличать эту плотность от величины ρ', определяемой (290). Эти две величины связаны друг с другом соотношением

$$\overline{\rho'} = k\omega\rho', \qquad (I26)$$

к которому мы можем добавить в силу (*I22*) и (*I26*):

$$\overline{\rho'}\boldsymbol{v}' = \rho'\boldsymbol{u}'. \qquad (I27)$$

Формулы преобразования для электрической и магнитной сил остаются в прежнем виде (291).

73. (Стр. 287.) [1915]. Можно показать, что в теории относительности основные уравнения (17)—(20) не изменяют своего вида при переходе к системе x', y', z', t'.

В силу (286) и (288) мы имеем нижеследующие общие соотношения между частными производными по x, y, z, t и по x', y', z', t':

$$\frac{\partial}{\partial x} = kl\frac{\partial}{\partial x'} - kl\frac{w}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = l\frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = l\frac{\partial}{\partial z'}, \qquad (I28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = kl\frac{\partial}{\partial t'} - klw\frac{\partial}{\partial x'}. \qquad (I29)$$

Уравнение (17) поэтому принимает вид

$$kl\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial x'} + l\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial y'} + l\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial z'} - kl\frac{w}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t'} = \rho, \qquad (I30)$$

а первое из трех уравнений, заключенных в (19), — вид

$$l\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial y'} - \frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial z'}\right) = \frac{kl}{c}\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t'} - kl\frac{w}{c}\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial x'} + \frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}_x. \qquad (I3I)$$

Подставляя значение $\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t'}$ из этой формулы в (*I30*), находим:

$$kl\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial x'} + l\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial y'} + l\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial z'} - l\frac{w}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial y'} - \frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial z'}\right) -$$
$$- kl\frac{w^2}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial x'} = \left(1 - \frac{w\boldsymbol{v}_x}{c^2}\right)\rho = \frac{\omega}{k}\rho.$$

Отсюда, умножая на $\frac{k}{l^3}$ и принимая во внимание значения d'_x и т. д. и $\overline{\rho'}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial d'_x}{\partial x'} + \frac{\partial d'_y}{\partial y'} + \frac{\partial d'_z}{\partial z'} = \overline{\rho'}, \tag{132}$$

имеющее тот же вид, что и (17).

Если, с другой стороны, значение $\frac{\partial d_x}{\partial x'}$, взятое из (*130*), мы подставим в (*131*), то получим:

$$l\left(\frac{\partial h_z}{\partial y'} - \frac{\partial h_y}{\partial z'}\right) - \frac{lw}{c}\frac{\partial d_y}{\partial y'} - \frac{lw}{c}\frac{\partial d_z}{\partial z'} =$$

$$= \left(\frac{kl}{c} - \frac{klw^2}{c^3}\right)\frac{\partial d_x}{\partial t'} + \frac{1}{c}\rho u_x,$$

или, умножая на $\frac{k}{l^3}$:

$$\frac{\partial h'_z}{\partial y'} - \frac{\partial h'_y}{\partial z'} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial d'_x}{\partial t'} + \overline{\rho'}v'_x\right),$$

так как в силу (*121*) и (*125*)

$$\frac{k}{l^3}\rho u_x = \overline{\rho'}v'_x .$$

Мы нашли, таким образом, первое из уравнений, входящих в состав

$$\mathrm{rot}'\, h' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial d'}{\partial t'} + \overline{\rho'}v'\right). \tag{133}$$

Остальные формулы получаются путем подобных же преобразований.

Что касается уравнений (292), приведенных в тексте, заметим только, что в (*132*) $\overline{\rho'}$ можно заменить через

$$\left(1 - \frac{w u'_x}{c^2}\right)\rho',$$

вытекающее из (*126*) и (*123*), и что, имея в виду (*127*), мы можем в (*133*) заменить $\overline{\rho'}v'$ через $\rho' u'$.

74. (Стр. 288.) [1915] Так как в теории относительности основные уравнения в обеих системах x, y, z, t и x', y', z', t' имеют совершенно одинаковый вид, мы можем сразу применить к этой последней системе формулы, которые мы приводили в § 13. Мы можем поэтому определить скалярный потенциал $\overline{\varphi'}$ и вектор-потенциал $\mathfrak{a}'$ посредством уравнений

$$\Delta'\overline{\varphi'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{\varphi'}}{\partial t'^2} = -\overline{\rho'}, \tag{134}$$

$$\Delta'\mathfrak{a}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{a}'}{\partial t'^2} = -\frac{1}{c}\overline{\rho'}\mathfrak{v}' \tag{135}$$

и получим:

$$\mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{a}'}{\partial t'} - \operatorname{grad}'\overline{\varphi'}, \tag{136}$$

$$\mathfrak{h}' = \operatorname{rot}\mathfrak{a}'. \tag{137}$$

Так как

$$\overline{\rho'}\mathfrak{v}' = \rho'\mathfrak{a}',$$

формулы (*135*) и (*137*) совпадают со вторым уравнением (294) и с (296).

Далее, заменяя в (*134*) $\overline{\rho'}$ через

$$\left(1 - \frac{w\mathfrak{a}_x'}{c^2}\right)\rho',$$

мы видим при сравнении с (294), что решением может быть

$$\overline{\varphi'} = \varphi' - \frac{w}{c}\mathfrak{a}_x'.$$

Вследствие этого (*136*) принимает вид (295).

75. (Стр. 294.) Первые три уравнения вытекают сразу из (*118*), если заменить ω через $\frac{1}{k}$, как мы это можем сделать в силу (*120*), так как $\frac{\mathfrak{v}_x}{c}$ весьма мало. Значения $\frac{\partial^2 x'}{\partial t'^2}$, $\frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2}$, $\frac{\partial^2 z'}{\partial t'^2}$ получаются путем нового дифференцирования при помощи соотношения

$$\frac{dt'}{dt} = kl\left(1 - \frac{w\mathfrak{v}_x}{c^2}\right),$$

выведенного из (*116*). Мы можем здесь заменить $\mathfrak{v}_x$ через w, так что это выражение принимает вид

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{l}{k}.$$

75*. (Стр. 295 и 298.) [1915] Важное заключение можно вывести из уравнений (305), если исходить из основного предположения, что движение частички может быть описано при помощи уравнения вида

$$F = \dot{G}, \tag{138}$$

где под F подразумевается сила, действующая на частичку, а G есть некоторый вектор, а именно количество движения; направление вектора совпадает с направлением скорости $\boldsymbol{v}$ и величина его G есть функция величины скорости v. В самом деле, мы можем вывести отсюда (см. § 27), что продольная масса m' и поперечная масса m'' даются выражениями

$$m' = \frac{dG}{dv}, \quad m'' = \frac{G}{v}. \tag{139}$$

Формулы (305) показывают, что

$$m' = k^2 m'' = \frac{c^2}{c^2 - v^2} m'',$$

и мы поэтому получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dG}{dv} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \cdot \frac{G}{v},$$

откуда можно определить количество движения как функцию скорости.

Решение таково:

$$d \log G = \frac{c^2 dv}{(c^2 - v^2) v} = \frac{dv}{v} - \frac{dv}{2(c+v)} + \frac{dv}{2(c-v)},$$

$$\log G = \log v - \frac{1}{2} \log (c+v) - \frac{1}{2} \log (c-v) + \log C,$$

$$G = \frac{Cv}{(c^2 - v^2)^{1/2}},$$

где C есть постоянная интегрирования.

Подставляя в (139), получаем:

$$m' = \frac{Cc^2}{(c^2 - v^2)^{3/2}}, \quad m'' = \frac{C}{(c^2 - v^2)^{1/2}},$$

и для случая, рассмотренного в тексте:

$$m' = k^3 \frac{C}{c}, \quad m'' = k \frac{C}{c},$$

Переходим теперь к пределу $v=0$; тогда k и l становятся равными единице, и мы заключаем, что

$$\frac{C}{c}=m_0,$$

$$m'=k^3m_0, \qquad m''=km_0.$$

Коэффициент l должен поэтому иметь значение 1 для всех значений скорости (см. § 179).

Что касается количества движения, мы можем написать для него:

$$G=\frac{cm_0v}{(c^2-v^2)^{1/2}};$$

его составляющие будут:

$$G_x=\frac{cm_0v_x}{(c^2-v^2)^{1/2}}, \qquad G_y=\frac{cm_0v_y}{(c^2-v^2)^{1/2}}, \qquad G_z=\frac{cm_0v_z}{(c^2-v^2)^{1/2}}.$$

Теперь мы можем непосредственно написать формулы преобразования для количества движения.

В самом деле, пользуясь системой x', y', z', t', мы должны положить:

$$G'_x=\frac{cm_0v'_x}{(c^2-v'^2)^{1/2}}, \qquad G'_y=\frac{cm_0v'_y}{(c^2-v'^2)^{1/2}}, \qquad G'_z=\frac{cm_0v'_z}{(c^2-v'^2)^{1/2}};$$

эти величины могут быть выражены через G_x, G_y, G_z, если воспользоваться формулами (*118*) и (*119*).

В результате получаем:

$$G'_x=kG_x-\frac{kcwm_0}{(c^2-v^2)^{1/2}}, \qquad G'_y=G_y, \qquad G'_z=G_z. \qquad (140)$$

Этими формулами мы можем теперь воспользоваться для нахождения соотношения между силой $F=\dot{G}$ в системе x, y, z, t и силой в системе x', y', z', t', для которой мы можем написать:

$$F'=\dot{G}';$$

здесь штрих указывает, что дифференцирование производится по t'. Для этого мы обратим внимание на изменение величин (*140*), происходящее за промежуток времени dt. Между этими величинами мы имеем соотношения

$$dG'_x = k\,dG_x - \frac{kcwm_0v}{(c^2-v^2)^{3/2}}\,dv, \qquad dG'_y = dG_y, \qquad dG'_z = dG_z.$$

Если их разделить на уравнение

$$dt' = \omega\,dt,$$

которое получается из (*116*) и (*117*), мы имеем:

$$F'_x = \frac{k}{\omega}F_x - \frac{kc}{\omega}\,\frac{wm_0v}{(c^2-v^2)^{3/2}}\,\frac{dv}{dt}, \qquad F'_y = \frac{1}{\omega}F_y, \qquad F'_z = \frac{1}{\omega}F_z.$$

При движении частички, рассматриваемом в системе x, y, z, t, $\frac{m_0c^3}{(c^2-v^2)^{3/2}}$ есть продольная масса, а $\frac{dv}{dt}$ — продольное ускорение. Произведение этих величин есть составляющая силы F в направлении движения; умножая ее опять на v, мы получим скалярное произведение $(\boldsymbol{v}\boldsymbol{F})$. Последний член в первом из вышеприведенных уравнений поэтому может быть переписан так:

$$-\frac{k}{\omega}\cdot\frac{w}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{F}),$$

и формулы преобразования для сил принимают поэтому вид

$$F'_x = \frac{k}{\omega}\left\{F_x - \frac{w}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{F})\right\}, \qquad F'_y = \frac{1}{\omega}F_y, \qquad F'_z = \frac{1}{\omega}F_z. \quad (141)$$

Мы теперь в состоянии формулировать условие, которое должно быть выполнено, если принцип относительности должен оказаться справедливым. При этом мы должны помнить, что физическая теория, которая сводит объяснение явлений к движению мельчайших частичек, состоит из двух частей: 1) из уравнения движения частичек (*138*) и 2) из законов, выражающих силы в зависимости от относительных положений частичек, их скоростей, электрических зарядов и пр. Принцип относительности требует, чтобы в обеих системах x, y, z, t и x', y', z', t' теория имела один и тот же вид. Для этого необходимо следующее: если мы при помощи вышеуказанных законов вычислим силы F из относительных положений и т. д. в системе x, y, z, t и таким же образом вычислим силы F' из относительных положений и т. д. в системе x', y', z', t', то составляющие F и F' должны удовлетворять соотношениям (*141*). Мы можем назвать это *общим законом сил*; поскольку он верен, мы можем быть уверены в том, что описание явлений будет в обеих системах совершенно одинаковым.

Есть один класс сил, относительно которых при настоящем состоянии науки мы можем сказать с уверенностью, что они подчиняются общему закону: это — силы, производимые электромагнитным полем. В самом деле, правило, определяющее действие такого поля на электрон, несущий заряд e, выражается формулой

$$F = ed + \frac{e}{c}[vh] \tag{142}$$

в системе x, y, z, t и

$$F' = ed' + \frac{e}{c}[v'h'] \tag{143}$$

в системе x', y', z', t'. Если в формулах (291) и (118) положить $l = 1$, можно из них вывести, что (142) и (143) удовлетворяют условиям (141).

При доказательстве этого мы ограничимся частным случаем одного электрона, неподвижного в системе x, y, z, t. Полагая $v = 0$, мы получаем из (117) и (118):

$$\omega = k, \qquad v'_x = -w, \qquad v'_y = 0, \qquad v'_z = 0,$$

так что (143) принимает вид

$$F'_x = ed'_x, \qquad F'_y = e\left(d'_y + \frac{w}{c}h'_z\right), \qquad F'_z = e\left(d'_z - \frac{w}{c}h'_y\right),$$

или, после подстановки значений (291),

$$F'_x = ed_x, \qquad F'_y = \frac{e}{k}d_y, \qquad F'_z = \frac{e}{k}d_z.$$

Те же значения получатся из (141), если положить:

$$v = 0, \qquad \omega = k, \qquad F = ed.$$

Для других классов естественных сил мы не можем положительно утверждать, что они подчиняются общему закону, но мы можем предположить, что это так, не входя в противоречие с установленными фактами.

Если мы примем эту гипотезу относительно молекулярных сил, мы сразу придем к заключению, к которому мы приходим в конце § 174. Здесь следует упомянуть, что притягательные или отталкивательные силы, зависящие только от расстояния, как оказывается, не подчиняются общему закону. Поэтому принцип относительности требует, чтобы силы, действующие между частичками, были несколько другого характера; их математическое выражение должно в общем случае содержать небольшие члены, зависящие от скорости движения. Кроме того, принцип накладывает условие, чтобы все силы распространялись со скоростью света.

Это можно видеть из следующего. Пусть действующее тело расположено в момент времени $t=0$ в точке $x=0$, $y=0$, $z=0$ и пусть его скорость или его состояние изменяются в этот момент. Если t есть тот момент, в который влияние этого изменения начинает сказываться в некоторой удаленной точке x, y, z, скорость распространения s будет определяться выражением

$$x^2+y^2+z^2=s^2t^2. \qquad (144)$$

По принципу относительности скорость распространения должна иметь то же значение s в системе x', y', z', t'. Так как значения для исходного места и времени суть $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, $t'=0$, то мы должны иметь:

$$x'^2+y'^2+z'^2=s^2t'^2,$$

если x', y', z', t' суть значения, соответствующие x, y, z, t в (144). Если эти два уравнения комбинировать с (113), т. е. с

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2,$$

получится:

$$s=c.$$

Эти соображения можно применить, например, к всеобщему тяготению. В теории относительности предполагается, что эта сила распространяется со скоростью света, и закон Ньютона изменяется введением некоторых добавочных членов, зависящих от движения. Они, впрочем, настолько малы, что было бы весьма затруднительно наблюдать то влияние, которое они могли бы оказывать на движение в солнечной системе.

Легко видеть, что вопрос о том, нуждаются ли силы в конечном промежутке времени для того, чтобы распространиться от одной частички к другой, теряет значение при отсутствии относительного движения. В этом случае теоретические рассуждения значительно упрощаются. Предположим, например, что все частички в системе x', y', z', t' неподвижны, так что они все имеют общую скорость $v_x=w$ в системе x, y, z, t. Тогда уравнение (117) превращается в $\omega=\frac{1}{k}$ и соотношения (141) принимают вид

$$F'_x=F_x, \qquad F'_y=kF_y, \qquad F'_z=kF_z,$$

совпадающий с (300). В самом деле, в этом последнем уравнении S_0 есть система, в которой координаты суть x', y', z', так что F (S_0) соответствует тому, что мы теперь называем F'.

Мы видим, таким образом, что уравнение (300) является частным случаем более общей формулы (141). Хотя, строго говоря, она применима только к системам, в которых нет относительного движения частей, все же ею можно пользоваться с достаточным приближением в вопросах, разбираемых в §§ 173—176.

76. (Стр. 300.) [1915] Те довольно длинные вычисления, при помощи которых были получены эти формулы и которые были добавлены в примечании к первому изданию, теперь, после того, что было сказано в примечании **75***, могут быть опущены. Значительно упрощены могут быть и рассуждения, развиваемые в этом параграфе и в следующем. Если допустить, что все силы, действующие на электроны, — например силы, возвращающие электроны в их положения равновесия, — подчиняются общему закону сил (примечание **75***), можно прямо заключить, что уравнения, определяющие движение электронов и поле $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$ в системе x', y', z', t', имеют тот же вид, как и те, которые описывают это движение и поле $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$ в системе x, y, z, t. Иначе, пользуясь обозначениями текста, можно сказать, что движение электронов и значения $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, выраженные через посредство x', y', z', t', могут быть одинаковыми в обеих системах S_0 и S. Это и есть та теорема соответственных состояний, которую нам нужно было вывести.

Что касается соображений, которые шаг за шагом привели к ней в §§ 175 и 176, мы можем сделать следующие замечания.

1. В первоначальной системе x, y, z, t электрический момент частички определяется уравнениями

$$\boldsymbol{p}_x = \sum ex, \qquad \boldsymbol{p}_y = \sum ey, \qquad \boldsymbol{p}_z = \sum ez,$$

причем координаты x, y, z различных электронов берутся для определенного значения t, так что мы имеем дело с одновременными положениями электронов. Я встретился с некоторыми затруднениями при соответствующем определении $\boldsymbol{p}'_{x'}$, $\boldsymbol{p}'_{y'}$, $\boldsymbol{p}'_{z}$ (§ 175), так как я не рассматривал t' как действительное «время» и придерживался мысли, что в системе x', y', z', t' одновременность попрежнему следует рассматривать как равенство значений t. Но в теории относительности t' играет в точности ту же роль, что и t; вследствие этого мы должны просто понимать под x', y', z' в формулах

$$\boldsymbol{p}'_x = \sum ex', \qquad \boldsymbol{p}'_y = \sum ey', \qquad \boldsymbol{p}'_z = \sum ez'$$

координаты электронов для одного и того же времени t'.

Поступая таким путем, мы можем написать непосредственно уравнения (308), в точности соответствующие (271) и (272). В самом деле, мы видели (примечание **72***), что основные уравнения не изменяются при подстановках, которыми пользуются в теории относительности. Отсюда ясно, что если в двух системах — x, y, z, t и x', y', z', t' — плотность электрического заряда (ρ или ρ') является одной и той же функцией координат и времени (причем заряды движутся одинаковым образом), то же самое будет верно относительно составляющих электрической и магнитной сил ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{h}$ или $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{h}'$).

2. Формулы преобразования для электрического момента могут быть получены следующим образом.

Пусть x, y, z будут координаты «центра» частички, $x+\mathfrak{x}$, $y+\mathfrak{y}$, $z+\mathfrak{z}$ — координаты точки P, где находится электрон e, причем все эти координаты берутся для одного и того же времени. Тогда, если x', y', z', t' суть значения, соответствующие x, y, z, t (так что во второй системе x', y', z' есть положение центра в момент времени $\overline{t'}$), значения, соответствующие $x+\mathfrak{x}$, $y+\mathfrak{y}$, $z+\mathfrak{z}$, будут:

$$x'+kl\mathfrak{x}, \quad y'+l\mathfrak{y}, \quad z'+l\mathfrak{z}, \quad \overline{t'}-kl\frac{w}{c^2}\mathfrak{x}.$$

Первые три выражения определяют место P для значения t', указываемого четвертым; чтобы найти координаты электрона в момент времени $\overline{t'}$, мы должны принять во внимание изменения координат за промежуток времени $kl\dfrac{w}{c^2}\mathfrak{x}$. Отсюда, если принять $\mathfrak{x}$ бесконечно малым, можно написать для относительных координат по отношению к центру значения, которыми они обладают в момент времени $\overline{t'}$:

$$kl\mathfrak{x}+kl\frac{w}{c^2}\mathfrak{x}\mathfrak{v}'_x, \qquad l\mathfrak{y}+kl\frac{w}{c^2}\mathfrak{x}\mathfrak{v}'_y, \qquad l\mathfrak{z}+kl\frac{w}{c^2}\mathfrak{x}\mathfrak{v}'_z,$$

где $\mathfrak{v}'$ есть скорость центра, совпадающего с точкой 0 для случая, рассматриваемого в тексте.

Мы найдем значения $\mathfrak{p}'_x$, $\mathfrak{p}'_y$, $\mathfrak{p}'_z$, если, умножив на e, распространим суммы на все электроны частички. Отсюда

$$\mathfrak{p}'_x=kl\mathfrak{p}_x, \qquad \mathfrak{p}'_y=l\mathfrak{p}_y, \qquad \mathfrak{p}'_z=l\mathfrak{p}_z,$$

что совпадает с формулами § 175.

77. (Стр. 306.) Пусть S будет движущаяся *электростатическая* система, S_0 — соответствующая ей неподвижная система. Имеем $\mathfrak{d}'=0$, $\mathfrak{h}'=0$; если φ' есть скалярный потенциал в S_0, уравнения (291) и (295) дают для каждой точки S:

$$\mathfrak{d}_x=-l^2\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}, \quad \mathfrak{d}_y-\frac{w}{c}\mathfrak{h}_z=-\frac{l^2}{k}\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}, \quad \mathfrak{d}_z+\frac{w}{c}\mathfrak{h}_y=-\frac{l^2}{k}\frac{\partial\varphi'}{\partial z'},$$

$$\mathfrak{h}_x=0, \qquad \mathfrak{h}_y+\frac{w}{c}\mathfrak{d}_z=0, \qquad \mathfrak{h}_z-\frac{w}{c}\mathfrak{d}_y=0,$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} d_x &= -l^2\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}, & d_y &= -kl^2\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}, & d_z &= -kl^2\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}, \\ h_x &= 0, & h_y &= kl^2\frac{w}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}, & h_z &= -kl^2\frac{w}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}. \end{aligned}\right\} \quad (145)$$

Отсюда мы получаем для первой составляющей потока энергии в S:

$$S_x = c\,(d_y h_z - d_z h_y) = k^2 l^4 w\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\right)^2\right\},$$

и [на основании (53) и (302)] для первой составляющей электромагнитного количества движения, которым мы только и интересуемся,

$$G_x = \frac{k^2 l^4 w}{c^2}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\right)^2\right\} dS =$$

$$= \frac{klw}{c^2}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)^2\right\} dS'.$$

Нам нужно поэтому только вычислить последний интеграл для поля сферы радиуса R и заряда e, не имеющей поступательного движения. Это — весьма простая задача. Мы можем заметить, что три интеграла

$$\int\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2 dS', \qquad \int\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)^2 dS', \qquad \int\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\right)^2 dS'$$

имеют одинаковую величину, так что каждый из них равен трети их суммы, т. е. двум третям энергии системы. Так как эта последняя равна $\dfrac{e^2}{8\pi R}$, мы получаем, что каждый интеграл равен

$$\frac{e^2}{12\pi R},$$

и

$$G_x = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\,klw.$$

Ясно, что

$$G_y = 0 \qquad \text{и} \qquad G_z = 0,$$

так что вообще

$$G = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\,kl\,w.$$

78. (Стр. 309.) Уравнения (*145*) приводят к нижеследующему значению электромагнитной энергии:

$$\frac{1}{2} l^4 \int \left[\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2 + k^2\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\right)^2\right\}\right] dS =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{l}{k}\int\left[\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2 + k^2\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\right)^2\right\}\right] dS'. \qquad (146)$$

Полагая $l = 1$ и вспоминая, что каждый из интегралов

$$\int\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2 dS'$$

и т. д. равен

$$\frac{e^2}{12\pi R},$$

получаем:

$$\frac{e^2}{24\pi k R}\left[1 + 2k^2\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right)\right], \qquad (147)$$

который становится равным (315) при подстановке значения k.

79. (Стр. 310.) В самом деле, когда электрон неподвижен, электрическая сила в непосредственной его близости равна $E = \frac{e}{4\pi R^2}$. Так как она направлена под прямым углом к поверхности, имеется нормальное напряжение, равное

$$\frac{1}{2}E^2 = \frac{e^2}{32\pi^2 R^4}. \qquad (148)$$

80. (Стр. 311.) Когда вследствие какой-либо возмущающей силы радиус сферы увеличивается, электрическое напряжение, действующее на его поверхности, уменьшается, как видно из (*148*). Так как, по предположению, внутреннее напряжение остается постоянным, оно будет стягивать точки сферы внутрь, так что первоначальный объем будет восстанавливаться.

Мы покажем теперь, что равновесие будет неустойчивым по отношению к изменению формы. Рассмотрим деформацию, при которой сфера превращается в растянутый эллипсоид вращения, причем величина каждого элемента поверхности остается без изменения и каждый элемент сохраняет свой заряд. Тогда можно показать, что внутри, в каждой точке оси, будет электрическая сила, направленная к центру, если заряд электрона отрицателен. Пусть эта сила равна q в точке, расположенной внутри поверхности и как раз под нею, на одном из концов оси P. По известной теореме, электрическая сила у самой поверхности снаружи, у того же конца оси, будет $q + \omega$, если через ω мы обозначим отрицательную поверхностную плотность эллипсоида, которая, по нашему предположению, равна поверхностной плотности первоначального шара. На элемент поверхности в точке P будут действовать два нормальных электрических напряжения: наружу $\frac{1}{2}(q+\omega)^2$ и внутрь $\frac{1}{2}q^2$; наряду с ними имеется постоянное внутреннее напряжение, которое должно быть равно $\frac{1}{2}\omega^2$, так как в первоначальном состоянии оно уравновешивает электрическое напряжение.

Так как и q и ω положительны, имеется результирующая сила $q\omega$, направленная наружу и стремящаяся еще больше растянуть эллипсоид.

Чтобы доказать то, что было сказано про внутреннюю электрическую силу, мы можем поступить следующим образом. Выберем точку A на полуоси OP и рассмотрим конус бесконечно малого телесного угла $d\varepsilon$, вершина которого находится в этой точке и который продолжен за нее в другую сторону. Пусть элемент $d\sigma_1$ в точке B_1 и элемент $d\sigma_2$ в точке B_2 будут элементы поверхности эллипсоида, определяемые пересечением с конусом, ϑ_1 и ϑ_2 — углы между прямой B_1B_2 и касательными плоскостями в конечных точках; пусть B_1 будет точка, ближайшая к A, так что угол B_1AP является острым углом. Тогда ввиду того, что

$$d\sigma_1 = \frac{AB_1^2 \cdot d\varepsilon}{\sin\vartheta_1}, \qquad d\sigma_2 = \frac{AB_2^2 \cdot d\varepsilon}{\sin\vartheta_2},$$

притяжения, испытываемые единицей положительного электричества в A со стороны двух элементов, будут равны

$$\frac{\omega\, d\varepsilon}{4\pi\sin\vartheta_1} \quad \text{и} \quad \frac{\omega\, d\varepsilon}{4\pi\sin\vartheta_2}.$$

Можно показать на основании геометрических соображений, что

$$\sin\vartheta_1 > \sin\vartheta_2,$$

откуда следует, что из двух притяжений второе больше, так что имеется остаточная сила в направлении AB_2. Подобный же результат можно получить для другого направления конуса; полная результирующая электрическая сила должна быть поэтому направлена к центру.

81. (Стр. 319.) Выражения (*146*) в примечании **78** показывают, что, если l отлично от единицы, значение (*147*), полученное для энергии, должно быть умножено на l. Согласно гипотезе Бухерера-Ланжевена $l = k^{-\frac{1}{3}}$, что и приводит к результату, упоминаемому в тексте.

82. (Стр. 321.) Если в уравнениях (200), в которых мы можем теперь опустить члены, зависящие от сопротивления и от внешнего магнитного поля, подставить $P = D - E$, они примут вид линейного соотношения между векторами D и E, содержащего и производные по времени.

83. (Стр. 325.) Пусть эффективные координаты точек P и Q будут 0, 0, 0 и x', y', z'; тогда, по (286), относительные координаты будут 0, 0, 0 и $\frac{x'}{k}$, y', z'. Отсюда, если 0, t_1, t_2 суть значения t в моменты времени, когда сигнал выходит из точки P, приходит в Q и опять получается в P, мы имеем на основании (284) для абсолютных координат точек, где сигнал воспринимается в упомянутые моменты:

$$0,\ 0,\ 0; \qquad \frac{x'}{k} + wt_1,\ y',\ z'; \qquad wt_2,\ 0,\ 0,$$

и так как расстояние от первой точки до второй проходится в промежуток времени t_1, а от второй до третьей — в $t_2 - t_1$, то

$$\left(\frac{x'}{k} + wt_1\right)^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t_1^2,$$

$$\left\{\frac{x'}{k} + w(t_1 - t_2)\right\}^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2.$$

При помощи этих уравнений можно вычислить t_1 и t_2. Проще, впрочем, рассмотреть величины

$$t_1' = \frac{1}{k} t_1 - \frac{w}{c^2} x' \tag{149}$$

и

$$t_2' = \frac{1}{k} t_2. \tag{150}$$

В самом деле, эти формулы можно преобразовать так:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t_1'^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 (t_2' - t_1')^2,$$

откуда

$$t_1' = \frac{1}{c} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \tag{151}$$

и

$$t_2' = \frac{2}{c} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{152}$$

Но из уравнения (288), которое теперь можно написать так:

$$t' = \frac{1}{k} t - \frac{w}{c^2} x', \tag{153}$$

вытекает, что переменная t_2', определяемая уравнением (150), есть время, измеряемое как местное время в P, которое протекло между выходом и возвращением сигнала. С другой стороны, $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ есть длина L, которую наблюдатель A приписывает расстоянию PQ, а $\frac{2L}{t'_2}$ — значение скорости света, которое он выводит из своего опыта. Уравнение (*152*) показывает, что это значение будет равно c.

84. (Стр. 327.) Достаточно указать, что, как это видно из (*153*) и (*149*), часы, показывающие местное время в Q, отметят время t'_1 в момент, когда сигнал приходит в Q, и что, по (*151*), это время t'_1 есть как раз $\frac{L}{c}$ [85].

85. (Стр. 328.) На основании сказанного в § 189 масса m, которую движущийся наблюдатель приписывает телу, будет той массой, которую это тело действительно имело бы, если бы оно находилось в покое. Но так как массы изменяются при поступательном движении так, как это указано в (305), действительная масса будет k^3m, если ускорение направлено по OX, и km, если оно направлено под прямым углом к этой оси. Пользуясь индексами (o) и (r) для обозначения действительных и наблюдаемых значений, мы можем поэтому написать:

$$m_{(r)} = (k^3,\ k,\ k)\, m_{(o)},$$

где множители, заключенные в скобки, относятся к ускорениям, параллельным осям OX, OY и OZ.

С другой стороны, из формул (303) вытекает, что для ускорений

$$J_{(r)} = \left(\frac{1}{k^3},\ \frac{1}{k^2},\ \frac{1}{k^2}\right) J_{(o)},$$

так что, если движущийся наблюдатель измеряет силы F как произведения из ускорения и массы, мы получим:

$$F_{(r)} = \left(1,\ \frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right) F_{(o)}. \qquad (154)$$

Пусть теперь две частички с одинаковыми действительными зарядами e расположены в двух точках движущейся системы; эффективные координаты их пусть будут x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2; эффективное расстояние их r'_1 дается первым уравнением § 171. Если бы эти частички имели соответствующие положения в неподвижной системе, составляющие силы, действующей на вторую из них, были бы:

$$\frac{(x'_2-x'_1)\,e^2}{4\pi r'^3}, \qquad \frac{(y'_2-y'_1)\,e^2}{4\pi r'^3}, \qquad \frac{(z'_2-z'_1)\,e^2}{4\pi r'^3}. \qquad (155)$$

Отсюда в силу (300) составляющие действительной силы в движущейся системе будут:

$$\frac{(x_2'-x_1')\,e^2}{4\pi r'^3}, \qquad \frac{1}{k}\,\frac{(y_2'-y_1')\,e^2}{4\pi r'^3}, \qquad \frac{1}{k}\,\frac{(z_2'-z_1')\,e^2}{4\pi r'^3},$$

и на основании (*154*) составляющие наблюденной силы опять будут иметь значения (*155*). Наблюдатель A заключит поэтому из своих опытов, что частички отталкиваются друг от друга с силой

$$\frac{e^2}{4\pi r'^2},$$

и он припишет каждой из них заряд e, равный истинному заряду.

Предположим, наконец, что заряд e помещен в электромагнитное поле, существующее в движущейся системе, в точке, которая принимает участие в движении. Тогда в силу (293) составляющие истинной силы, действующей на нее, равны

$$e\mathbf{d}_x', \qquad \frac{1}{k}\,e\mathbf{d}_y', \qquad \frac{1}{k}\,e\mathbf{d}_z',$$

и мы можем заключить из (*154*), что составляющие наблюденной силы имеют значения

$$e\mathbf{d}_x', \qquad e\mathbf{d}_y', \qquad e\mathbf{d}_z'.$$

Отсюда ясно, что, как это было установлено в тексте, движущийся наблюдатель должен будет прийти к вектору $\mathbf{d}'$, если он будет определять силу, действующую на заряженную частичку.

86. (Стр. 332) [1915] Позднейшие опыты Бухерера [1]), Гупки [2]), Шефера и Неймана [3]) и, наконец, Ги и Лаванши [4]) подтвердили формулу (313) для поперечной электромагнитной массы, так что, по всей вероятности, единственное возражение, которое можно было бы выставить против гипотезы деформируемого электрона и принципа относительности, теперь отпадает.

---

[1]) A. H. Bucherer, Phys. Zeitschr. **9** (1908), стр. 755; Ber. d. deutschen Phys. Ges. **6** (1908), стр. 688.

[2]) E. Hupka, Ann. Phys. **31** (1910), стр. 169.

[3]) Cl. Schaefer und G. Neumann, Phys. Zeitschr. **14** (1913), стр. 1117.

[4]) Ch. E. Guye et Ch. Lavanchy, Comptes Rendus **161** (1915), стр. 52.

Примечания РЕДАКТОРА

[1] Термины «электрическая *сила*» и «магнитная *сила*» ныне заменены «электрической» и «магнитной *напряженностями*». Это относится ко всему последующему тексту.

[2] В предисловии уже было указано, что электронная теория представляет собой почти «единоличное творение» самого Лорентца. Для экспериментального обоснования теории особенно много сделала школа Дж. Дж. Томсона; ему же принадлежит первый подсчет величин «кажущейся» массы электрона. Термин «электрон» предложен в 1891 г. Джонстоном Стони. Вначале, как видно из текста настоящей книги, под этим названием разумелись как отрицательные, так и положительные элементарные заряды. Только значительно позже удалось получить отдельно положительные элементарные заряды с массой, равной массе электрона (а не протона); «позитрон» стал физической реальностью только в 1932 г., после работ Андерсона, Блэккета и Оккиалини (Nature, 1932, 1933).

[3] Теория электронов была создана в эпоху, чрезвычайно тяжелую для атомистики — в период «кризиса» в физике, когда реакционное отрицание гипотез вообще повлекло за собой неверие и в атомную теорию. Безусловно, успехи электронной теории сыграли немаловажную роль в дискредитации идеалистического течения и в возвращении атомным образам их былого обаяния; по времени эти успехи почти совпадают с открытием ультрамикроскопа, с трудами Перрена, Сведберга и др.

[4] Скромность Лорентца заставляет его и здесь умалчивать, что создателем теории неподвижного эфира является он сам. До него вопросами электродинамики (а, значит, и оптики) движущихся тел занимался только Г. Герц, стоявший на точке зрения увлечения эфира движущимся веществом. Нам известна только одна неопубликованная работа В. А. Михельсона (1893), также исходившая из представлений о неподвижном эфире. Выводы этой работы («световое трение») были помещены в «тезисах» при защите Михельсоном диссертации в 1894 г.

[5] Лорентц, говоря о магнитном действии токов конвекции, ограничивается указанием на труды Роулэнда. Вопрос о магнитном действии движущихся зарядов имеет длинную историю. После Роулэнда он связан с именем Рентгена, с ошибочными

опытами Кремье, с рядом других, менее значительных работ, и завершается классическими исследованиями нашего соотечественника А. А. Эйхенвальда.

[6] Так называемый «второй член лоренцовского выражения для силы», действующей на электрон, эквивалентен закону Ампера о действии магнитного поля на элемент тока. В электронной теории этот закон перестает быть непроверяемой гипотезой, а, напротив, ложится в основание действия магнитного поля на движущиеся заряды (в лучах α, β, катодных и пр.). Он играет большую роль в теории светового давления и во всех исследованиях явлений в движущихся телах.

[7] Как здесь, так и в примечании 4, автор развивает обычную теорию того, как уравнению (29) можно удовлетворить так называемыми запаздывающими потенциалами. В. Ритц первый указал (Ann. Chim. et Phys. (8), **13**, стр. 145—275), что это решение не есть единственное и что уравнению (29) можно столь же хорошо удовлетворить системой «опережающих» потенциалов, которые не имеют того ясного физического смысла, как запаздывающие потенциалы. Лоренц глухо говорит об этом далее в § 14 и соответствующем примечании **6**. См. также Einstein und Ritz, Phys. Zs. **10**, стр. 323, 1900.

[8] Здесь и далее излагаются вывод и приложение теоремы Пойнтинга, но умалчивается о том, что создание понятия о потоке энергии принадлежит нашему соотечественнику Н. А. Умову. В соответствии с этим мы теперь называем и самую теорему теоремой Умова-Пойнтинга.

[9] В предыдущем параграфе, здесь и в примечании **9** Лоренц показывает, что максвелловы напряжения сохраняют свое значение, помимо статического поля, и в случае переменных полей; здесь они дополняются, однако, не приводимым к форме интеграла по поверхности членом F_2 (46). Это обстоятельство выяснено Лоренцом впервые. Сам Максвелл выводил световое давление более суммарно, без этого учета более тонких соотношений в переменном поле. Укажем еще для примера, что очень интересная диссертация А. И. Садовского о вращательных действиях света поневоле должна была базироваться на допущении, что действие максвелловых напряжений одинаково в статическом и динамическом полях.

[10] В изложении автора труды П. Н. Лебедева, с одной стороны, и Никольса и Хэлла, с другой, — поставлены на один уровень с некоторым даже предпочтением последних. Это — дань американскому самолюбию. На самом деле именно работы П. Н. Лебедева являются как первыми по времени, так и единственно безупречными по методу. Теории светового давления посвящены: а) классическая работа Д. А. Гольдгаммера (Ann. d. Phys. **4**, стр. 847, 1901); б) основные математические изыскания Шварцшильда (Ber. Münch. Ak. **31**, стр. 293, 1901) и Дебая

(Ann. d. Phys. **30**, стр. 100, 1909); в) интересные работы Пойнтинга и многие другие, в том числе — с электронной точки зрения — работы К. Н. Шапошникова и Т. П. Кравца. См. также предыдущее примечание. Далее, вопросы светового давления получили огромное значение для оценки явлений внутри звезд и в звездных атмосферах.

[11] Теория относительности показала, что не только электромагнитная, но и всякая масса одинаково зависит от скорости, что лишает рассуждения этого параграфа их значения.

[12] Точность работы Кауфмана здесь явно переоценена: в дальнейшем и абсолютные цифры и изменение $\frac{e}{m}$ со скоростью, даваемые им, оказались неверными. Впрочем, настоящее замечание относится более к § 179.

[13] В настоящее время наиболее точным значением для $\frac{e}{m}$ следует считать $1{,}7589 \cdot 10^7$; см. УФН, **45**, стр. 458 (1951), а также статью Дюмонда и Когена в Phys. Rev. **82**, стр. 55 (1951).

Вопрос о точной величине e ставился также в связи с попыткой Эддингтона постулировать для константы тонкого строения сначала точную величину 136, а потом 137, исходя из одних только теоретических соображений. Сводку данных о величине e см. также в цитированной статье Дюмонда и Когена.

[14] Вопросу о природе сил, действующих между молекулами, Лорентц отдает здесь так много внимания потому, что позже (§§ 168 и сл.) для него будет существенно предположение, что все молекулярные силы суть силы электромагнитного происхождения: в этом случае не понадобилось бы других добавочных гипотез для объяснения продольного сжатия движущихся тел. Открытие, с одной стороны, нейтронов, а с другой, — особых «ядерных» сил в значительной степени подрывает электромагнитную теорию материи.

[15] Как известно, именно теория излучения исторически оказалась наиболее уязвимой частью классической теории; в особенности выпукло это обстоятельство впервые проявляется в знаменитых работах Н. Бора (Phil. Mag., 1912), где для получения качественно и количественно правильного выражения для бальмеровской спектральной серии автор постулирует, что ускоренное движение электрона *не* сопровождается излучением.

[16] Сам автор в своем примечании **72*** разъясняет ту роль, которую играет теория относительности в установлении основных уравнений, аналогичных уравнениям настоящего параграфа. Из ее принципов они вытекают с полной убедительностью, простотой и общностью, без помощи упрощающих допущений, которые автор делает здесь и далее.

[17] Представление об электронном газе именно в вопросе об отношении $\frac{k}{\sigma}$ встретило свое первое серьезное затруднение, за которым последовал ряд других. Только Зоммерфельду удалось преодолеть эти затруднения, применив к электронному газу вместо статистики Максвелла отличную от нее статистику Ферми. См., например, дополнительную статью «Волновая механика» к книге Зоммерфельда «Строение атома и спектральные серии».

[18] Хотя автор и снабжает этот параграф во втором издании подстрочным примечанием о важном значении, которое гипотеза Планка о квантах приобрела к этому времени (1915), текст параграфа исторически совершенно не отвечает той роли, которую теория квантов играла уже тогда в науке. Напомним, что уже в 1911 г. явилась необходимость обсуждения теории квантов на особом конгрессе (Сольвеевском, с обзорными докладами Планка, Нернста, Зоммерфельда, Эйнштейна). Здесь речь шла преимущественно о тепловых свойствах веществ. Труды конгресса изданы в 1914 г. Эйкеном, который прибавил обширный обзор работ в этой области в 1911 по 1913 г. включительно. Наконец, в 1912 и 1913 гг. появились знаменитые работы Н. Бора, положившие начало мощному расцвету квантовой теории спектров. Конечно, все эти успехи шли мимо старой, классической электронной теории и самым фактом своего существования выбивали у нее из-под ног почву.

[19] Неоднократно давались доказательства, что классическая теория *не* могла привести к формуле Планка. Напротив, Эйнштейну в 1916 г. (Phys. Zeitschr. 18, стр. 121, 1917) удалось показать, что последняя получается совершенно элементарно, если заранее принять существование квантов и выражение $h\nu$ для их величины.

[20] Это — взгляды, современные теории электронов Лорентца.

[21] В настоящее время достигнуто единство результатов для величин $\frac{e}{m}$, получаемых по методу отклонения лучей и по методу явления Зеемана. Лучшие измерения отличаются не больше чем в четвертом знаке. Объяснение мультиплетов легко дается квантовой теорией (см. следующее примечание).

[22] Блестящее подтверждение, которое электронная теория получила в первых опытах Зеемана, обязывает Лорентца итти навстречу всем трудностям, которые уготовили ему позднейшие исследования в этой области. И мы видим, какое громадное количество труда и остроумия он тратит на преодоление всех этих препятствий и как, несмотря на это, он относится ко всему сделанному с большой дозой скепсиса. Успех в области сложного эффекта Зеемана достигнут впервые применением квантовой теории. Достаточно сравнить такие две книги, как W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik (1908), с одной стороны, и Sommer-

feld, Atombau und Spektrallinien (1919), с другой, — чтобы оценить всю плодотворность введения сюда квантовых принципов, разрушающих старую теорию.

[23] Упоминаемая здесь модель атома, предложенная Дж. Дж. Томсоном, в свое время сыграла большую роль; она впервые постулировала или выводила расположение электронов в нескольких последовательных кольцах; при этом по мере усложнения должны были наблюдаться отношения, несомненно весьма напоминающие менделеевскую таблицу. Но Дж. Дж. Томсон предполагал наличие большого объемно-заряженного шара с расположенными внутри электронами. Опытами Резерфорда было доказано, что отклонение β-лучей в тонких пластинках не согласуется с этим воззрением и, напротив, находится в полном согласии с моделью атома, имеющей в центре малое по сравнению с размерами атома ядро. Такое же ядро лежит, как известно, и в основе теории Бора.

[24] Здесь автор указывает на серьезное затруднение старой теории при разъяснении явлений магнетизма: вращающиеся и движущиеся по замкнутым орбитам заряды совершают ускоренное движение и должны поэтому излучать. Как известно, квантовая теория Бора обходит это затруднение просто постулатом, что излучения при этом быть не должно...

[25] Теперь мы знаем, что рентгеновы лучи обладают свойством преломления, чрезвычайно слабым, конечно; при этом показатель преломления меньше единицы, как это выходит из теории для области, лежащей выше самых высоких поглощаемых частот.

[26] Здесь приходится отметить несомненную ошибку автора: показатель μ стремится к единице только со стороны коротких волн; со стороны длинных волн он стремится к значению $1+\frac{1}{2\alpha}\left(=\sqrt{\varepsilon}\right)$.

[27] Вопрос о дисимметрии явления Зеемана получил особую важность, когда в 1912 г. Пашен и Бак открыли, что при весьма сильных полях расщепление линий имеет совсем иной характер, чем при слабых, а теория, данная Фохтом, предсказала, что в трудных для исследования полях средней величины нужно ожидать дисимметричного расщепления. Дисимметрия действительно была обнаружена, но оказалась значительно большей, чем предсказанная Фохтом. Позднейшие прецизионные измерения Зеемана, Гмелина и др. показали, что в рамки квантовой теории явление хорошо укладывается. См., например, у Landé, Handb. d. Experimentalphys. XVII, стр. 160 и сл.

[28] Со времени Лорентца появилось немало исследований по вопросу о ширине спектральных линий. Как одно из наиболее подробных можно назвать исследование М. Л. Вейнгерова, сумевшего разделить явление поглощения на отдельные области,

в которых действуют как главная причина то лоренцовские столкновения, то чистое планковское рассеяние и т. д. (См. Труды ГОИ, вып. 63).

[29] Для читателя, знакомого с теорией относительности, бросается в глаза, какие мучительные усилия приходится делать адепту старой теории для истолкования экспериментальных результатов в ее терминах, и насколько теория явлений становится проще и естественнее с точки зрения принципа относительности. Но еще более поучительно, как много было сделано до Эйнштейна, в частности самим Лорентцом, для нахождения выражений, остающихся инвариантными при переходе от одной инерциальной системы к другой. Нехватало только физического толкования полученных выражений; для этого нужно было еще отказаться от понятия абсолютного времени, что и является делом Эйнштейна. Сам Лорентц в примечании 72* ясно оценивает значение нового строя мыслей последнего. Но этот строй не может быть приведен в единство со старыми идеями и образами и знаменует собой не эволюцию, а революцию в физике.

[30] Автор курьезным образом сближает здесь имена двух ярых антагонистов по вопросу об электроне. Незачем прибавлять, что позднейшее время отдало дань полного доверия Милликену, а утверждения Эренгафта о субэлектроне имели хождение только в Венской школе. Справедливость требует указать еще на тонкие и изящные опыты А. Ф. Иоффе.

[31] Необходимо упомянуть, что формулы, которыми пользовались Брэгги, одновременно были выведены нашим соотечественником Ю. В. Вульфом.

[32] Такое предположение часто делают в приложении к смесям, и оно до некоторой степени оправдывается опытом. Оно, однако, основано на произвольной гипотезе, что молекулы первой составляющей действуют только на молекулы той же составляющей и т. д. Об отступлениях от аддитивности рефракции см. М. В. Волькенштейн, Молекулярная оптика.

[33] В формулах преобразования теории относительности

$$x' = k(x - wt),$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t' = k\left(t - \frac{wx}{c^2}\right)$$

множитель $k = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{w^2}{c^2}}}$ имеется одинаково в первой и четвертой. Отсюда следует, что в системе, движущейся относительно наблюдателя, масштабы длины и времени меняются одинаково в отношении $\frac{1}{k}$. Доказательством изменения длин служит опыт Майкельсона (именно для его объяснения Лорентц и предложил свою гипотезу «контракции»). Для изменения масштаба времени соответственный опыт был сделан только в 1938 г. Г. Айвсом и Стилуэллом (JOSA, 28, стр. 215), которые прецизионным образом измеряли допплеровское смещение спектральной линии, испускаемой каналовыми лучами, причем последние наблюдались как спереди, так и сзади (с помощью зеркала). По классической теории изменение периода при этом должно равняться $\pm T\frac{w}{c}$, а изменение длины волны $\Delta\lambda = \pm\lambda\frac{w}{c}$. По теории относительности соответственное изменение должно быть:

$$\Delta\lambda = \pm\frac{\lambda w}{kc}, \qquad \text{или} \qquad \Delta\lambda = \lambda\left[\pm\frac{w}{c} - \frac{1}{2}\frac{w^2}{c^2}\right],$$

т. е. должна наблюдаться небольшая дисимметрия смещения линии в том и в другом случаях. В опытах авторов она констатирована и оказалась вполне совпадающей по величине с предсказанием теории.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аберрация света; теория Стокса 249—255; теория Френеля 255—263
Атом, модель Томсона 178

Безвихревое распределение вектора 24

Вихрь (керль, ротация) 24
Волны элементарные 248, 259; распространение фронта волны 248, 259; соотношение между волной и лучом 260
Вращение вокруг магнитных линий сил 187; частички в магнитном поле 187; магнитное вращение плоскости поляризации 271, 272
Время, измерение 323, 327; местное или эффективное 97, 273, 288, 293—295, 327, 438; универсальное 97

Градиент скалярной величины 23

Давление света 56, 57, 63, 64
Движущийся наблюдатель, измерение длин и времени 325—326; изучение электромагнитных явлений в движущейся системе 327; в неподвижной системе 329
Движущаяся система по сравнению с неподвижной 66, 67; для малых скоростей 275; для больших скоростей 289, 295—301
Дивергенция (расходимость) 24
Дисперсия света 213, 214, 223—225; аномальная 230—231
Диэлектрическое смещение 25, 203

Единицы 20—22

Зеемана явление, элементарная теория 153—158; более сложный вид 158; в спектральной серии 164, 165; в излучении от вращающейся частички 190—192; обратное явление 198, 234—239
Земные источники света при движении Земли 258, 264, 303

Излучение света и тепла 30; электрона 86—89; колеблющегося электрона 90—93; поляризованной частички 93—95; атома 181; равновесие излучения 113—116, 144
Измерения в движущейся системе 323
Изображение отраженное электромагнитной системы 195
Интерференция света в движущейся системе 262, 278; интерференционный опыт

для обнаружения влияния движения Земли во втором порядке 279—285, 292—294
Ионы 77, 78
Испускательная способность 112; отношение между ней и поглощательной способностью 112, 113, 140

Колебания электронов 30, 85; в магнитном поле 153, 154; заряженной системы 168—174; изотропной системы 174; заряженных сферических слоев 175; системы четырех электронов 176—186; вращающейся частички 190—192; электромагнитные колебания в прямоугольном параллелепипеде 146—149; фундаментальные 144
Количество движения, электромагнитное 61; движущегося электрона 68; деформируемого электрона 306
Комбинация нескольких периодических явлений 192, 193
Координаты абсолютные 269; относительные 269; эффективные 291, 293; обобщенные 143.

Лучи света 248; относительные 249, 260; соотношение между лучом и фронтом волны 261; теорема Ферма 262; путь относительного луча в движущейся среде 260—263; в движущемся кристалле 279; каналовые 74; катодные 74; Рентгена 89—90, 226, 369; α-лучи 74; β-лучи 74, 75, 308

Магнитная сила 20, 24, 27; вывод для покоящейся системы из вектор-потенциала 43; то же для медленно движущейся системы 98; то же для большой скорости 285—288
Масса электромагнитная электрона 65, 70, 72, 76; деформируемого электрона 306, 307; сплюснутого электрона, без изменения объема 318, 319; системы электронов 82, 83; отношение заряда к массе 74, 75, 78, 79, 158, 308; изменение при поступательном движении 314, 315; продольная и поперечная 70, 297
Математические обозначения 21
Местное время 97, 273, 288, 327, 438
Металлы, электропроводность 104, 105; теплопроводность 106; отношение проводимостей 106—110; поглощение тонкой пластинки 129; испускание пластинки 130—140
Молекулы, число 245
Молекулярное движение в движущихся системах 295—298

Натяжения в эфире 54, 59—61

Относительности принцип 333, 438—443, 445—451
Отражение от движущегося зеркала 100—104

Перенос часов 326
Произведения скалярное и векторное 22, 23
Поле электрона покоящегося 46; движущегося 46, 47, 65, 84, 89; медленно движущейся электростатической системы 65, 66; системы, движущейся с большой скоростью 289; колеблющегося электрона 91; частички с переменным элек-

трическим моментом 99; колеблющейся системы, движущейся с малой скоростью 99—107; с большой скоростью 301
Поляризованный свет 26, 50
Поляризация света в эффекте Зеемана 156, 157, 196
Потенциалы 42—44, 98, 288; запаздывающие 45
Преломление 30, показатель 212, 225—231; связь его с плотностью 214—218; смесей 219; химических соединений 219—222; преломление в магнитном поле 242; двойное преломление от движения Земли 285
Преобразования Лорентца 294—295

Равновесие излучения 115, 116, 144, 403
Размеры тел, их изменение при движении 284, 293, 297, 298
Распространение электрических возмущений 26, 44; света 30; вдоль магнитных линий сил 231—234; под прямым углом к линиям сил 235; в системе, движущейся с небольшой скоростью 268—277; в текущей воде 277, 435; в системе, движущейся с большой скоростью 298—304
Рассеяние света 424
Расщепление магнитное спектральных линий 152—197, 231—246
Рефракция атомная 219, 220, молекулярная 220

Серии спектральные 159—164
Сила, действующая на электрический заряд 36, 287; результирующая сила, действующая на систему электронов 53, 54, 62; изменение при поступательном движении электрических сил 289, 290
Скаляр 22
Скорость света в эфире 25; в системе молекул 212; измерение скорости в движущейся системе 325, 326; скорость луча в движущейся системе 258
Соленоидальное распределение вектора 24
Соответствующие состояния в движущейся и неподвижной системе, для малых скоростей 275; для больших скоростей 298
Сопротивление движению электрона 85; причина поглощения 204
Средние значения в системе молекул 199, 200
Статистический метод 378

Теплопроводность 31, 106
Ток электрический 24; 27; смещения 24, 27, 29, 203; проводимости 27, 29; конвекции 35, 203; индукционный 38

Уравнения электромагнитного поля для эфира 25; отнесенные к подвижным осям 322, 330; для весомых тел 27, 330; в теории электронов, отнесенные к неподвижным осям 34; к медленно движущимся осям 97

Частота истинная или абсолютная 257; относительная 257
Черное тело 113

Эквивалентные степени свободы 172
Электрическая сила 20, 24, 27, 203; выраженная в зависимости от потенциала для стационарной системы 43; для медленно движущейся системы 98; для больших скоростей 287
Электромагнитная теория материи 79
Электроны 28; в диэлектриках 28—31; в металлах 28—31, 104—110; их заряд 78, 360; масса 70—73, 78—81; размеры 78; тепловое движение 30, 31; изменение формы (сплюснутый эллипсоид) 305—308; изменение формы без изменения объема 318; устойчивость 311
Электропроводность 31, 104, 105
Электростатическая система покоящаяся 45; движущаяся с малыми скоростями 66; с большими скоростями 289—290
Энергия электрическая 49; магнитная 49; движущегося твердого электрона 67, 68; движущегося деформированного электрона 309; излучения 113, 114, 149; электрона 309; кинетическая энергия молекулы 393; поток 49—53; равномерное распределение 142—144
Эфир 333; проникновение им тел 33, 256; его неподвижность 33, 58, 59, 256; предполагаемое движение 58, 59; невихревое движение 251, 254; конденсация у Земли 254
Эффективные координаты в движущейся системе 291
Эффективный заряд в движущейся системе 291

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора ко второму изданию 5
Предисловие редактора к первому изданию 6
Предисловие автора к первому изданию 7
Предисловие автора ко второму изданию 7
Г. А. Лоренц и теория электронов. (Очерк редактора) . . 11

Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения

Глава I. Общие принципы. Теория свободных электронов 19
Глава II. Испускание и поглощение тепла 111
Глава III. Теория явления Зеемана 152
Глава IV. Распространение света в теле, состоящем из молекул. Теория обратного явления Зеемана . 198
Глава V. Оптические явления в движущихся телах . . 247

Примечания автора 337
Примечания редактора 461
Предметный указатель 468

Редактор *В. А. Григорова*
Техн. редактор *С. С. Гаврилов*
Корректор *Е. А. Белицкая*

Подписано к печати 6/X 1953 г. Бумага 84×108/32. 7,41 бум., 24,21 печ. л. + +1 вкл. 24,25 уч.-изд. л. 49024 тип. зн. в печ. л. Т-06889.
Тираж 5000 экз. Цена книги 12 р. 10 к. Переплет 2 р. Заказ № 623.

4-я типография им. Евг. Соколовой Союзполиграфпрома Главиздата Министерства культуры СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.