Наблюдения действительно показывают, что узкие линии поглощения имеют, как общее правило, в середине бо́льшую интенсивность, чем широкие.

136. Кривая FGH на рис. 6 дает ход показателя поглощения как функции частоты. Другая кривая $ABCDE$ относится к показателю преломления; она соответствует формуле (229). Показатель μ, который на больших расстояниях по обе стороны от P равен единице [26], поднимается до максимума QB и затем падает до минимума RD. Положение максимума определяется условием $\alpha = \beta$, или

$$n = n_0' - \frac{\beta}{2m'n_0'},$$

положение минимума — условием $\alpha = -\beta$, или

$$n = n_0' + \frac{\beta}{2m'n_0'},$$

причем соответствующие значения μ равны

$$1 + \frac{1}{4\beta} \text{ и } 1 - \frac{1}{4\beta}.$$

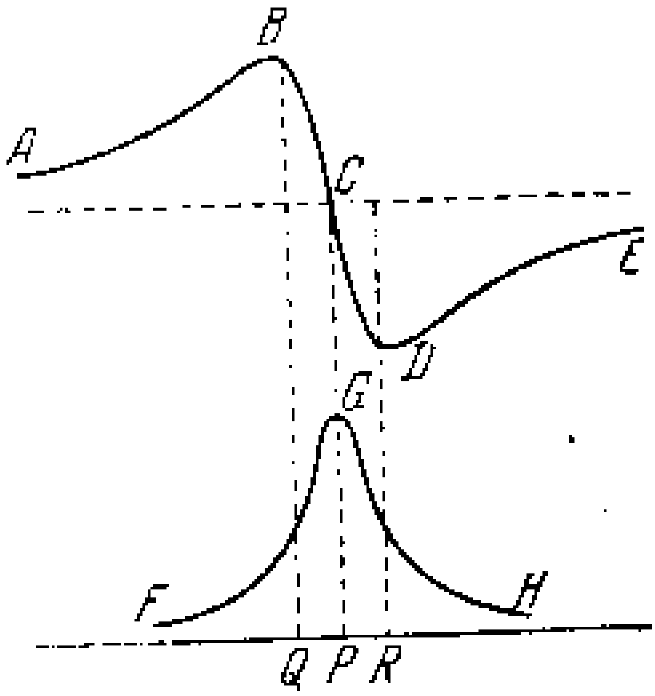

Рис. 6.

Максимум и минимум находятся в тех местах спектра, где показатель поглощения равен половине своего максимального значения.

В кривой $ABCDE$ мы уже узнаем известную кривую так называемой аномальной дисперсии. Добавлю следующее: если бы мы предположили, как в § 128, что частички системы состоят не из одного, а из нескольких атомов и каждый содержит по подвижному электрону, и если бы мы допустили, что каждый электрон встречает сопротивление, мы получили бы в конце концов кривую дисперсии, в которой часть кривой вида $ABCDE$ повторяется в соседстве каждого свободного колебания. Эти участки кривой стали бы на место разрывных участков, которые существовали в кривой для функции (223).

137. Влияние внешнего магнитного поля на распространение света в направлении линий сил можно исследовать при помощи вычислений, весьма напоминающих предшествующие выкладки. Нам предстоит опять пользоваться уравнениями (192), (193) и (194), только теперь мы должны сопоставлять их с формулами (204). Так как в этих последних сила $\mathfrak{H}$, по предположению, направлена по OZ, пучок света, идущий вдоль линий сил, можно представить выражениями, содержащими множитель (209). Мы приходим опять к уравнению

$$D_x = c^2q^2E_x,$$

к которому мы должны теперь добавить соответствующую формулу

$$D_y = c^2q^2E_y;$$

у нас не было повода рассматривать ее в предыдущем случае. Пользуясь (192), получаем:

$$P_x = (c^2q^2 - 1)\,E_x, \quad P_y = (c^2q^2 - 1)\,E_y,$$

и первое и второе уравнения (204) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} \left\{\frac{1}{c^2q^2-1} - (\alpha + i\beta)\right\} P_x &= -\,i\gamma P_y, \\ \left\{\frac{1}{c^2q^2-1} - (\alpha + i\beta)\right\} P_y &= +\,i\gamma P_x, \end{aligned}\right\} \tag{232}$$

откуда видно, что

$$P_y = \pm\, iP_x. \tag{233}$$

Таким образом, соответственно двойному знаку мы получаем *два* решения. Чтобы найти их смысл, мы должны вспомнить, что если две переменные величины даются действительными частями выражений

$$a\varepsilon^{i\,(nt+p)} \quad \text{и} \quad ar\varepsilon^{i\,(nt+p+2\pi s)}, \tag{234}$$

т. е. если они представляются выражениями

$$a\cos(nt + p) \quad \text{и} \quad ar\cos(nt + p + 2\pi s),$$

число r определяет отношение максимальных значений, или амплитуд, тогда как s есть разность фаз, выраженная в периодах. Так как $r\varepsilon^{2\pi i s}$, т. е. отношение между выражениями (234), становится равным $\pm i$ при

$$r = 1, \quad s = \pm\frac{1}{4},$$

уравнение (233) показывает, что $\boldsymbol{P}_x$ и $\boldsymbol{P}_y$ имеют одинаковые амплитуды и что между их изменениями по времени имеется разность фаз в четверть периода. То же самое можно сказать про смещения ξ и η отдельных подвижных электронов, так как эти величины пропорциональны $\boldsymbol{P}_x$ и $\boldsymbol{P}_y$. Отсюда мы можем заключить, что каждый электрон движется с постоянной скоростью по круговой орбите, плоскость которой нормальна OZ, причем движение направлено в одну сторону при решении, соответствующем верхнему знаку, и в противоположную сторону при другом решении.

Подобным же образом и вектор $\boldsymbol{P}$ равномерно вращается в плоскости, нормальной к OZ, причем то же самое относится также и к векторам $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$. Каждое из наших решений представляет поэтому пучок лучей, поляризованных по кругу; легко видеть, что, когда действительная часть q имеет положительный знак (так что свет распространяется в сторону положительных z), верхние знаки в наших формулах относятся к правому лучу, а нижние знаки — к левому.

Если мы теперь подставим значение (233) в одну из формул (232), мы получим следующее значение для коэффициента q:

$$c^2q^2 = 1 + \frac{1}{\alpha \pm \gamma + i\beta}, \tag{235}$$

откуда по введении величины (225) можно вычислить показатель поглощения и скорость v или показатель преломления μ.

138. Нет необходимости выписывать выражения для этих величин. Сравнивая (235) с нашим прежним уравнением (224), мы видим непосредственно, что единственное различие между этими двумя выражениями заключается в том, что α теперь заменено через $\alpha \pm \gamma$. Но в некотором узком участке спектра γ можно принять за величину постоянную; поэтому, если мы будем пользоваться поляризованными по кругу правыми лучами, значения k и μ, которые соответствуют определенному значению α, будут совпадать с теми значениями, которые мы получали для величины $\alpha+\gamma$ в отсутствии магнитного поля. В силу соотношения (231) мы можем выразить то же самое иначе, а именно: по соседству с частотой n'_0 величины μ и k для частоты n принимают под действием магнитной силы $\mathfrak{H}$ те же значения, которые они имели бы без магнитного поля для частоты, равной

$$n-\frac{\gamma}{2m'n'_0}.$$

Кривая поглощения для правого луча получается поэтому путем смещения кривой FGH рис. 6 на расстояние

$$\frac{\gamma}{2m'n'_0}, \tag{236}$$

причем смещение происходит в сторону увеличения частот, если это выражение положительно, и в противоположном направлении, если оно отрицательно. Для левого луча мы получаем такое же смещение в противоположном направлении.

Ясно, что в этом заключается объяснение существования обратного явления Зеемана. Если пучок неполяризованных лучей, который мы можем разложить на два пучка, правый и левый, пропустить через пламя, мы получим в его спектре обе полосы поглощения, о которых мы говорили. Если расстояние (236) достаточно велико по сравнению с шириной области поглощения, мы увидим, что темная полоса действительно разделится на две составляющие. Особенно интересно, что смещение (236), для которого на основании (203) и (199) мы можем написать:

$$\frac{n'_0\mathfrak{H}}{cNe}:\frac{2mn'_0}{Ne^2}=\frac{e\mathfrak{H}}{2mc},$$

в точности совпадает с тем значением, которое мы нашли в элементарной теории прямого явления Зеемана. Равным образом и знак явления в данном случае совпадает с полученным раньше. Когда мы рассматривали излучение в направлении магнитных линий сил, мы нашли, что если e отрицательно, свет той составляющей, которая соответствует большей частоте, поляризован по кругу влево. Изложенные здесь исследования показывают, что для такого света, если опять e считать отрицательным, полоса поглощения смещена в сторону больших частот.

139. Распространение света в направлении, перпендикулярном линиям сил, можно исследовать подобным же образом. Если ось OX совпадает с направлением распространения, причем ось OZ указывает, как и раньше, направление поля, и если мы примем, что в выражениях для составляющих $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{H}$ содержится множитель

$$e^{-kx+in\left(t-\frac{x}{v}\right)},$$

k опять будет обозначать показатель поглощения, а v—скорость распространения.

Нетрудно видеть теперь, что эти величины магнитным полем ни в коей мере не изменяются, если электрические колебания пучка параллельны линиям сил, так как в этом случае нам надлежит рассматривать только последнее из уравнений (204) совместно с соотношениями

$$\boldsymbol{D}_z = \boldsymbol{E}_z + \boldsymbol{P}_z,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}_y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}_y}{\partial t},$$

которые входят в (192)—(194). Так как ни одна из этих формул не содержит внешней силы $\mathfrak{H}$, мы можем сразу заключить, что магнитное поле не оказывает влияния на электрические колебания, происходящие вдоль линий сил.

Что касается колебаний, происходящих перпендикулярно линиям сил, я должен обратить внимание на любопытное обстоятельство. Так как переменные векторы являются периодическими функциями времени и зависят только от одной координаты x, условие

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{D}} = 0,$$

которое является следствием (193), требует, чтобы

$$D_x = 0. \tag{237}$$

Это можно выразить иначе так: электрические колебания не имеют продольной составляющей, если понимать под словами «электрические колебания» периодические изменения вектора D. Но наш результат никоим образом не исключает отличных от нуля значений E_x и P_x, так что, если термин «электрические колебания» прилагается к изменениям электрической силы E или поляризации P, колебания не могут быть названы поперечными.

Формула (237) имеет большое значение для решения нашей задачи. Переписывая ее в виде

$$E_x + P_x = 0,$$

мы можем вывести из (204) в сочетании с (192)

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \frac{i\gamma}{1+\alpha+i\beta} P_y, \\ D_y &= \frac{(1+\alpha+i\beta)^2-\gamma^2}{(1+\alpha+i\beta)(\alpha+i\beta)-\gamma^2} E_y. \end{aligned}\right\} \tag{238}$$

Условие

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2},$$

которое вытекает из (193) и (194), будет поэтому соблюдаться в том случае, если

$$\left(\frac{1}{v} - i\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{(1+\alpha+i\beta)^2-\gamma^2}{(1+\alpha+i\beta)(\alpha+i\beta)-\gamma^2}. \tag{239}$$

Это и есть то уравнение, при помощи которого можно вычислить скорость распространения и показатель поглощения. Одновременно мы можем из (238) получить величину отношения P_x к P_y. Если для этого отношения мы получим комплексное значение $r\varepsilon^{2\pi i s}$ (§ 137), так что

$$P_x = r\varepsilon^{2\pi i s} P_y,$$

амплитуды P_x и P_y будут относиться друг к другу, как r к 1; между периодическими изменениями двух составляющих создается разность фаз, измеряемая величиной s. Величины r и s определяют также отношения амплитуд и разность фаз тех колебаний, которые происходят вдоль OX и OY и на которые может быть разложено движение подвижного электрона. Вообще говоря, в рассматриваемом случае путь, описываемый каждым электроном, представляет собой эллипс, расположенный в плоскости, нормальной к линиям сил. Так как r и s изменяются с частотой, вид и ориентация эллипса будут зависеть от качества света, проходящего через пламя.

140. Чтобы найти положение линий поглощения в спектре, мы должны были бы определить k при помощи уравнения (239) и искать те значения частоты, которые обращают k в максимум. Если в знаменателе последней дроби в (239) освободиться от мнимых величин, уравнение принимает вид

$$\left(\frac{1}{v}-i\,\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{c^2}\,\frac{A-Bi}{Q},$$

и мы получаем:

$$k^2=\frac{n^2}{2c^2}\,\frac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{Q}. \qquad (240)$$

Обсуждение этого результата в общем виде приводит к формулам, которые настолько сложны, что вряд ли пригодны практически. К счастью, в тех случаях, которые нам предстоит рассмотреть, те частоты, для которых k имеет максимум, получаются с достаточной степенью точности, если искать минимум знаменателя Q. Дальнейшее упрощение заключается в том, что при нахождении минимума мы опять можем считать α единственной переменной величиной, так как величины β и γ в той узкой части спектра, которой мы ограничиваем наше рассмотрение, не изменяются заметно. Но знаменатель можно представить следующим образом [1]):

$$Q=\{\alpha(1+\alpha)+\beta^2-\gamma^2\}^2+\beta^2(1+4\gamma^2);$$

---

[1]) Примечание **63**.

отсюда непосредственно следует, что искомые величины даются уравнением

$$\alpha(1+\alpha)=\gamma^2-\beta^2.$$

Я буду предполагать, что

$$\gamma^2-\beta^2+\frac{1}{4}>0,$$

так что уравнение имеет два действительных корня:

$$\alpha=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\gamma^2-\beta^2+\frac{1}{4}}. \tag{241}$$

Соответственно им получаем:

$$A=4\beta^2\gamma^2,\quad B=\frac{1}{2}\beta\left(1+4\gamma^2\pm\sqrt{4\gamma^2-4\beta^2+1}\right),$$

$$Q=\beta^2(1+4\gamma^2),$$

$$re^{2\pi is}=\frac{P_x}{P_y}=\frac{i\gamma}{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\gamma^2-\beta^2+\frac{1}{4}}+i\beta}. \tag{242}$$

141. Эти результаты принимают весьма простой вид, если, как это обычно и имеет место (§ 134), β велико по сравнению с единицей, а магнитное поле настолько сильно, что при распространении света вдоль линий сил расстояния, на которые раздвигаются составляющие первоначальной линии поглощения, во много раз превышают их собственную ширину. Отсюда вытекает требование (§ 138), чтобы γ было во много раз больше, чем β. Вместо (241) мы можем поэтому написать приближенное выражение

$$\alpha=\pm\gamma, \tag{243}$$

которое показывает, что получаются две линии поглощения, лежащие как раз в тех местах спектра, где мы получали линии при распространении света вдоль линий сил, т. е. расположенные так, как этого требует элементарная теория прямого явления Зеемана.

Мы можем теперь при вычислении коэффициента поглощения заменить B через $2\beta\gamma^2$, а Q через $4\beta^2\gamma^2$. Так как

$$\sqrt{A^2+B^2}-A=\frac{B^2}{\sqrt{A^2+B^2}+A},$$

мы получаем для обеих линий:

$$k = \frac{n}{4\beta c}, \tag{244}$$

т. е. как раз половинное значение показателя поглощения, соответствующего $\alpha = 0$, при отсутствии магнитного поля.

Наконец, выражение (242) имеет значение $\pm i$, так что мы можем вывести следующее заключение.

Если через поглощающее тело проходит в направлении OX пучок лучей, электрические колебания которых первоначально были параллельны OY, величина поглощения определяется выражением (244), когда частота задается одним из значений (243). Электроны внутри молекул будут описывать круговые орбиты в плоскостях, параллельных OX и OY, причем направление их движения соответствует направлению магнитной силы, когда $\alpha = +\gamma$, и не соответствует ему, когда $\alpha = -\gamma$.

Следует отметить, что в случае, разобранном в § 138, в согласии с нашим настоящим результатом мы получили максимальное поглощение в точке $\alpha = +\gamma$, если круговое движение имело первое из только что названных нами направлений, и в точке $\alpha = -\gamma$ во втором случае.

142. Фохт вывел из своих уравнений другое весьма замечательное заключение. Когда пучок лучей идет под прямым углом к линиям сил и состоит из электрических колебаний, перпендикулярных этим линиям, те две линии поглощения, на которые расщепляется одиночная первоначальная линия, вообще говоря, расположены на неравных расстояниях от главной линии и имеют неодинаковые интенсивности в противоположность составляющим дублета при поперечном явлении Зеемана, которые неизменно обладают этой симметрией. Это следует непосредственно из того обстоятельства, что функции A, B и Q содержат не только четные, но и нечетные степени α, так что явления по обе стороны точки спектра, где $\alpha = 0$, оказываются несимметричными.

В некоторых опытах, предпринятых Зееманом для проверки этих теоретических предсказаний, была действительно обнаружена некоторая весьма слабая дисимметрия.

Если это действительно та самая дисимметрия, к которой Фохт пришел путем своих вычислений, это явление представляется в высшей степени интересным, так как на основании его мы можем вывести, что газ, в котором оно обнаруживается, обладает в середине полосы поглощением, которое мы можем назвать *металлическим*. В самом деле, та особенность, на которую Фохт обратил внимание, может проявиться только в том случае, если коэффициент β не на много больше единицы, а это приводит к поглощению, весьма заметному даже для толщины в одну длину волны (§ 134) [1]).

143. Я должен теперь обратить ваше внимание на тесную внутреннюю связь между явлением Зеемана и явлением вращения плоскости поляризации, открытым Фарадеем. Возвращаясь к случаю распространения света вдоль линий сил, мы можем взять за исходный пункт наш прежний результат (§§ 137, 138), что простейшими решениями нашей системы уравнений являются такие, которые представляют пучок поляризованных по кругу лучей, правых или левых, и что формулы для этих двух случаев можно получить, если в уравнениях, имеющих место в отсутствии магнитного поля, заменить α или через $\alpha+\gamma$, или через $\alpha-\gamma$. Это правильно не только для формул коэффициента поглощения, но также и для формул, которые определяют скорость распространения. Поэтому, если для левого луча эту скорость обозначить буквой v_1, а для правого — буквой v_2, мы получим [ср. уравнение (229)]:

$$\frac{1}{v_1}=\frac{1}{c}+\frac{\alpha-\gamma}{2c\,[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]},$$

$$\frac{1}{v_2}=\frac{1}{c}+\frac{\alpha+\gamma}{2c\,[(\alpha+\gamma)^2+\beta^2]}.$$

Для определенной частоты n эти величины не равны друг другу. То же самое относится и к соответствующим величинам коэффициента поглощения, так что под влиянием магнитного поля система приобретает различную прозрачность для указанных двух родов круговых лучей. Но для упрощения мы сейчас оставим это различие без рассмо-

---

[1]) Примечание **64**.

трения и будем говорить только о тех явлениях, которые вызываются различием в скоростях распространения. Вы знаете, что во всех случаях, когда скорость распространения для двух родов круговых лучей имеет различное значение, плоскость поляризации прямолинейно-поляризованного пучка будет по мере продвижения волны поворачиваться; угол вращения на единицу длины дается выражением

$$\omega = \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right), \tag{245}$$

которое в нашем случае принимает вид

$$\omega = \frac{n}{4c} \left[\frac{\alpha + \gamma}{(\alpha + \gamma)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha - \gamma}{(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2} \right]. \tag{246}$$

Направление вращения зависит от алгебраического знака этого выражения. Когда $\mathfrak{H}$ положительно, т. е. когда направление магнитной силы совпадает с направлением пучка лучей, положительный знак ω означает, что направление вращения соответствует направлению магнитной силы.

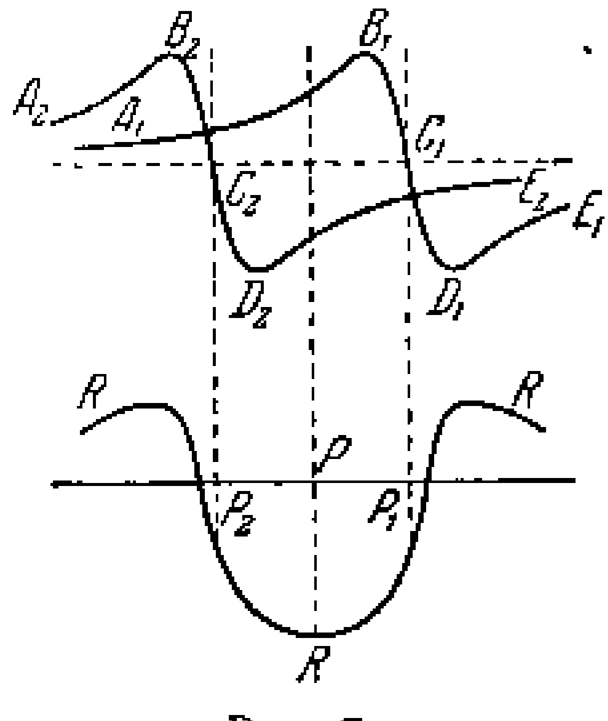

Рис. 7.

Основные черты явления, поскольку оно зависит от частоты, выступают особенно ясно, если мы воспользуемся графическим изображением. На рис. 6 мы провели кривую, дающую показатель преломления как функцию частоты и показывающую его изменение при переходе от коротких волн к длинным. Эта кривая, которая относится к телу, не находящемуся под действием магнитной силы, может служить также для представления величины $\frac{1}{v}$. Если же тело помещено в магнитное поле, кривые для $\frac{1}{v_1}$ и $\frac{1}{v_2}$ получаются простым смещением кривой рис. 6 направо или налево на расстояние, равное $\frac{e\mathfrak{H}}{2mc}$ (см. § 138). Таким путем мы получаем две кривые $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $A_2B_2C_2D_2E_2$ (рис. 7) которые прямо дают нам представление об угле вращения ω, так как по (245) этот угол пропорционален алгебраической разности между соответствующими ординатами. Его можно поэтому изобразить посредством кривой RR.

При помощи этого построения выявляются два интересных результата. Во-первых, в узкой части спектра, в непосредственной близости от первоначальной линии поглощения, вращение плоскости поляризации дважды меняет свой знак; во-вторых, в силу того, что μ или $\frac{1}{v}$ могут в некоторых точках принимать весьма большие значения, угол вращения тоже может достигать довольно значительной величины.

Макалузо и Корбино [1]), которые первые обнаружили это явление в натриевом пламени, получали вращения до 270°. Результат их опытов получил непосредственное объяснение на основании теории, которая была уже ранее разработана Фохтом. Несколькими годами позже Зееман [2]) и Халло [3]) весьма тщательно исследовали это явление и снова нашли удовлетворительное совпадение опыта с теорией Фохта [[27]].

144. Явление Фарадея известно уже давно; поэтому в вышеприведенных результатах могло вызвать удивление только одно, а именно, что вращение в натриевом пламени гораздо больше, чем во всех исследованных когда бы то ни было прозрачных телах. Другое магнитооптическое явление, предсказанное Фохтом, является совершенно новым. Оно заключается в двойном лучепреломлении, которое наблюдается тогда, когда через тело со свойствами, которые мы рассматривали в настоящей главе, пучок света проходит под прямым углом к линиям сил. Для такого пучка мы должны различать электрические колебания, происходящие перпендикулярно и параллельно линиям сил. В первом случае скорость распространения дается уравнением (239), во втором — уравнениями (224) и (225) или,

---

[1]) D. Macaluso et O. M. Corbino, Comptes Rendus **127** (1898), стр. 548.

[2]) P. Zeeman, Amsterdam Proc. **5** (1902), стр. 41; Arch. néerl. (2), **7** (1902), стр. 465.

[3]) J. J. Hallo, Arch. néerl. (2), **10** (1905), стр. 148.

как мы можем тоже сказать, уравнением (239), если в нем положить $\gamma = 0$. Разница между двумя значениями и дает то, что я подразумевал под словами «двойное лучепреломление». Его можно вычислить на основании наших формул, поскольку известны α, β, γ, но я не буду тратить времени на эти вычисления. Замечу только, что результат остается прежним, когда направление поля меняет знак; это непосредственно следует из (239), так как в это выражение входит только квадрат величин γ и, следовательно, квадрат $\mathfrak{H}$.

Фохт и Вихерт проверили эти предсказания экспериментально, а Геест[1]) тщательно измерил магнитное двойное лучепреломление в натриевом пламени.

145. Пользуясь теорией, развиваемой в этой главе, мы можем из экспериментальных данных вывести некоторые интересные заключения относительно поглощающих (или излучающих) частичек. Некоторые измерения позволяют нам вычислить относительные значения трех величин α, β, γ; другие измерения могут служить для определения их абсолютных значений.

Положим, например, что мы измерим расстояние между средней и внешними составляющими триплета Зеемана; мы знаем, что для частоты n, относящейся к одной из этих последних линий, α и γ имеют одинаковые значения. Заменим γ его значением из (203), а α — значением из (231), в котором мы теперь пренебрежем различием между n_0' и n_0 (§ 135), так что

$$\alpha = 2m'n_0(n_0 - n) = \frac{2mn_0(n_0 - n)}{Ne^2}. \tag{247}$$

Тогда равенство этих величин приведет нас к нашему старому уравнению

$$n_0 - n = \frac{e\mathfrak{H}}{2mc},$$

при помощи которого можно определить отношение $\frac{e}{m}$.

Мы могли бы найти величину отношения α к β, если бы в нашем распоряжении были количественные определения

---

[1]) J. Geest, Arch. néerl. (2), 10 (1905), стр. 291.

поглощения для обыкновенного случая поглощения в отсутствии магнитного поля. Если бы, например, мы знали, что в некоторой точке полосы поглощения показатель поглощения k в $\varkappa$ раз меньше, чем в середине полосы, отношение ν между α и β можно было бы вычислить по формуле (§ 134)

$$\varkappa = 1 + \nu^2. \tag{248}$$

Распределение интенсивности было определено при помощи болометрических или других подобных измерений для широких полос, наблюдаемых в углекислоте и других газах, но мы не можем сказать, каково оно будет в узких полосах, получаемых, например, в натриевом пламени. Все, что мы можем сделать, — это составить себе приблизительное представление о величине отношения ν между α и β для края полосы. Если мы примем, например, что здесь $\varkappa$ равно 10 или 20, то можем из соотношения (248) вычислить ν; подставляем это значение в уравнение

$$\alpha = \nu\beta,$$

для которого в силу (247), (202) и (199) мы можем написать:

$$2m(n_0 - n) = \nu g;$$

тогда получаем:

$$g = \frac{2m(n_0 - n)}{\nu}.$$

Эта формула принимает интересный вид, если воспользоваться соотношением (207); она превращается в

$$\tau = \frac{\nu}{n_0 - n}.$$

Это выражение показывает, что из ширины полосы можно вывести величину промежутка времени, в течение которого колебания частички происходят без возмущений.

В опыте Халло линии D имели ширину около 1 единицы Онгстрёма, откуда можно заключить, что значение τ лежит в пределах от $12 \cdot 10^{-12}$ до $24 \cdot 10^{-12}$ сек. Первое число получается, если положить $\nu = 3$ $(\varkappa = 10)$, а второе — при $\nu = 6$ $(\varkappa = 37)$. Так как промежуток времени между двумя последовательными столкновениями молекулы, вероятно, порядка 10^{-10} сек., мы видим, что τ получается несколько меньше, чем этот промежуток, как уже было упомянуто в § 120.

После того, как мы нашли отношения между величинами α, β, γ, мы можем попробовать вычислить абсолютные значения этих коэффициентов. Для этого мы могли бы воспользоваться абсолютными значениями коэффициента поглощения, если бы они были известны. Мы можем также обратиться, как указали Халло и Геест, к вращению плоскости поляризации или к магнитному двойному лучепреломлению. Если отношения между α, β, γ даны, эти три величины могут быть выведены из формулы (246) или из разности между значением $\mathfrak{v}$ по формуле (239) и соответствующим значением для $\mathfrak{H} = 0$.

Далее, когда α известно для некоторой точки спектра по соседству с точкой n_0, т. е. когда известно значение (247), то, если затем ввести значения $\frac{e}{m}$ и e, можно вывести заключение о количестве поглощающих (излучающих) частичек в единице объема. Таким путем мы получаем для натриевого пламени в опытах Халло число

$$N = 4 \cdot 10^{14},$$

соответствующее плотности пара натрия около 10^{-8}. По всей вероятности, это значение гораздо меньше действительного значения плотности пара в пламени; вероятно, это различие нужно отнести на счет того обстоятельства, что в явлении поглощения принимают участие только некоторые частички, находящиеся в каком-то особенном состоянии и составляющие лишь малую часть общего числа частиц [28].

Едва ли стоит добавлять, что на все эти заключения следует смотреть с некоторой долей недоверия. По правде сказать, теория поглощения и испускания света в весомых телах находится в настоящий момент еще в младенческом возрасте. Если бы мы склонились к тому, чтобы примириться с ней и удовлетвориться уже полученными результатами, наша иллюзия рассеялась бы весьма скоро; нам стоило бы только вспомнить про исследования Вуда относительно оптических свойств паров натрия; эти опыты показывают, что молекула натрия должна обладать удивительной сложностью; то же следует заключить из опытов над смещением спектральных линий под влиянием давления — открытие Гемфриса и Молера. Теорией в ее современном состоянии оно объяснено быть не может [1]).

---

[1]) Примечание **64**.

ГЛАВА V

ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛАХ [29]

146. Электромагнитные и оптические явления в системах, имеющих поступательное движение, — а такими в силу годичного движения Земли являются все тела на Земле, — представляют большой интерес не только сами по себе, но также и потому, что они дают нам возможность проверить различные теории электричества. Электронная теория была развита отчасти со специальной целью охватить и эти явления. По этой причине я посвящу последнюю часть моих лекций некоторым вопросам, относящимся к распространению света в движущихся телах, и в первую очередь астрономической аберрации света.

Прежде чем детально останавливаться на попытках объяснить влияние движения Земли на кажущееся положение звезд, будет правильно установить общий метод, которым можно было бы пользоваться в задачах, касающихся распространения волн и световых лучей. Этот метод заключается в применении известного принципа Гюйгенса.

Будем рассматривать какую угодно прозрачную среду, движущуюся тем или иным способом, и будем относить это движение и распространение света в среде к трем прямоугольным осям координат, которым мы можем тоже приписать некоторое движение. Предположим, что наши диаграммы, которые должны представлять последовательные положения световых волн, жестко связаны с осями, так что эти последние на диаграммах имеют неподвижное положение.

Пусть σ (рис. 8) будет фронт волны в момент времени t; попробуем определить положение σ', которое он займет через бесконечно малый промежуток времени dt. Для этого мы должны рассматривать каждую точку P поверхности σ как центр колебаний и построить вокруг него элементарную волну, которая образуется за время dt, т. е. такую бесконечно малую поверхность, до которой доходит в момент $t+dt$ возмущение, вышедшее из P в момент времени t. Огибающая всех этих элементарных волн будет представлять собой новое положение фронта волны; непрерывно повторяя это построение, мы можем шаг за шагом проследить распространение волны.

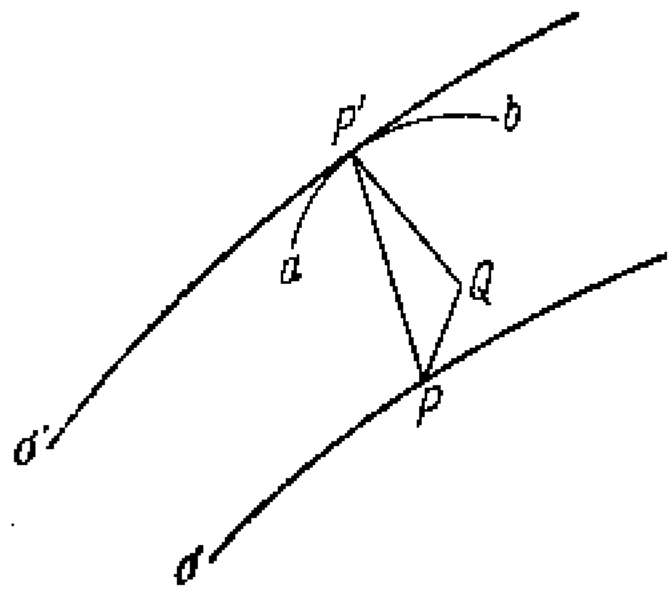

Рис. 8.

Одновременно с этим мы узнаем и ход световых лучей. Прямая, проведенная из центра колебаний P одной из элементарных волн в точку P' — точку касания элементарной волны с огибающей σ', является элементом луча; каждый новый шаг при построении волны даст нам также новый элемент луча.

Едва ли стоит напоминать здесь физический смысл определяемых таким образом прямых. Лучи указывают, каким образом пучки можно ограничивать сбоку. Если, например, свет пропускается через отверстие в непрозрачном экране, возмущение позади экрана ограничивается той частью пространства, в которую могут проникнуть лучи, проведенные через точки отверстия. Следует помнить, впрочем, что это является верным только в том случае, если мы будем пренебрегать явлениями диффракции, а это дозволительно, когда размеры отверстия весьма велики по сравнению с длиной волны.

Если мы хотим особо подчеркнуть, что в вышеприведенных построениях мы имели в виду *относительное* движение света по отношению к осям координат или по отношению к какой-нибудь другой, неподвижно с ними связанной системе, мы можем говорить об *относительных* световых лучах.

Что касается элементарных волн, от размеров и формы которых зависят все явления, они определяются в каждом случае оптическими свойствами и состоянием движения среды.

147. Мы теперь достаточно подготовлены к тому, чтобы рассмотреть две теории аберрации света, предложенные Френелем и Стоксом. При этом мы ограничимся годичной аберрацией, так что вращение нашей планеты вокруг ее оси будет оставлено нами без рассмотрения. В целях еще большего упрощения задачи мы заменим годичное движение Земли равномерным поступательным движением по прямой.

Теория Стокса [1]) покоится на предположении, что окружающий Землю эфир при перемещении этого тела приводится в движение и что в каждой точке поверхности земного шара скорость эфира в точности равна скорости Земли. Согласно этой гипотезе приборы в любой обсерватории находятся в покое по отношению к окружающему эфиру. Ясно, что при таких обстоятельствах то направление, в котором наблюдается какое-нибудь небесное тело, должно зависеть именно от того направления волн, которое они имеют непосредственно перед тем, как войти в прибор. Но в силу предполагаемого движения эфира это направление может отличаться от направления волн на некотором расстоянии от поверхности Земли; в этом и заключается причина того, почему видимое положение звезды будет отличаться от действительного.

Чтобы определить поворот волн, мы применим намеченный нами общий метод, пользуясь системой координат, движущейся вместе с Землей. Обозначим через g скорость, с которой эфир движется сквозь нашу модель; эта скорость равна нулю на поверхности Земли, если нет скольжения, и равна и противоположна скорости Земли на значительном от нее расстоянии. Это распределение движений является стационарным, а потому и относительная скорость

---

[1]) G. G. Stokes, On the aberration of light, Phil. Mag. (3), **27** (1845), стр. 9; Mathematical and physical papers **1**, стр. 134.

эфира не зависит от времени. Мы будем, далее, пренебрегать влиянием воздуха на распространение света, — известно, что это влияние очень слабо.

Если бы эфир был неподвижен по отношению к осям, световые волны двигались бы с определенной скоростью c; каждая элементарная волна представляла бы собой сферическую поверхность радиуса $c\,dt$ с центром в точке P, являющейся источником излучения. Для движущегося эфира все это изменится. Элементарная волна попрежнему останется сферической поверхностью с радиусом $c\,dt$, так как можно считать, что в бесконечно малом объеме, в котором она образуется, эфир имеет везде одну и ту же скорость, но при дальнейшем распространении сферическая поверхность увлекается движением среды совершенно таким же образом, каким ветер увлекает звуковые волны или течение реки увлекает волны на поверхности воды. Центр элементарной волны, образовавшейся вокруг точки P (рис. 8), будет поэтому расположен не в точке P, а в другой точке Q и именно в такой, куда в момент времени $t+dt$ дойдет частичка эфира, которая в момент времени t была в точке P. Если скорость эфира g будет изменяться на поверхности волны от точки к точке, фронт волны кроме того повернется на некоторый угол.

Для нашей цели будет достаточно рассмотреть такую малую часть волны, какая попадает при наблюдениях в прибор. Участок волны таких размеров можно принять за плоскость; можно также допустить, что скорость эфира в различных точках этого участка является линейной функцией координат. Следовательно, центры сферических поверхностей лежат на плоскости, и в силу того, что сферы одинаковы, часть нового фронта волны σ', о которой идет речь, представляет собой плоскость, имеющую то же направление, так что угол поворота волны равен углу поворота плоскости σ, которая увлекается вперед движением среды.

Расположим ось OX по направлению нормали N к фронту волны σ и проведем ее в направлении распространения. Тогда легко видеть, что косинусы углов направления [1])

---

[1]) Примечание **65**.

нормали N' к новому фронту волны пропорциональны выражениям

$$1-\frac{\partial g_x}{\partial x}dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial y}dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial z}dt.$$

Мы можем выразить этот результат иначе, говоря, что направление нормали N' может быть получено, если единичный вектор, расположенный по направлению N, сложить с вектором, составляющие которого суть:

$$-\frac{\partial g_x}{\partial x}dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial y}dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial z}dt. \tag{249}$$

Такой вектор, который позволяет определить изменение направления, для чего его приходится складывать с единичным вектором, имеющим первоначальное направление, может быть назван *вектором отклонения*.

Мы до сих пор не упоминали про одно допущение, которое в теории Стокса играет видную роль. Стокс предполагает, что движение эфира является *невихревым*, иными словами, что оно имеет потенциал скоростей. В силу этого мы имеем:

$$\frac{\partial g_x}{\partial y}=\frac{\partial g_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial z}=\frac{\partial g_z}{\partial x},$$

так что составляющие (249) вектора отклонения могут быть представлены выражениями

$$-\frac{\partial g_x}{\partial x}dt, \quad -\frac{\partial g_y}{\partial x}dt, \quad -\frac{\partial g_z}{\partial x}dt,$$

а самый вектор будет иметь значение

$$-\frac{\partial g}{\partial x}dt. \tag{250}$$

148. Так как скорость Земли $\boldsymbol{w}$ представляет только одну десятитысячную скорости света, все члены нашей формулы, содержащие множитель $\frac{|\boldsymbol{w}|}{c}$, весьма малы. Таковы же будут и члены, содержащие множитель $\frac{|\boldsymbol{g}|}{v}$, если $\boldsymbol{g}$ есть одно из значений скорости материи или эфира, а v — одно из значений скорости света, с которым мы в данном случае имеем дело. Мы будем называть члены такого рода величинами первого порядка малости и в большинстве случаев будем пренебрегать членами второго порядка малости, т. е. теми, которые пропорциональны

$$\frac{w^2}{c^2} \text{ или } \frac{g^2}{v^2}.$$

Если мы поступим таким образом, вычисление полного угла, на который повернутся световые волны, продвигающиеся по направлению к Земле, и который является величиной первого порядка, значительно упростится. Нам нужно только составить сумму всех векторов отклонения, даваемых выражением (250) и относящихся к последовательным элементам времени; результирующий вектор будет полным вектором отклонения, т. е. вектором, который мы должны сложить с единичным вектором, направленным по первоначальной нормали к волнам, чтобы получить окончательное направление нормали. Так как (рис. 8)

$$dt = \frac{QP'}{c},$$

(250) превращается в

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\cdot QP';$$

здесь мы можем заменить QP' элементом $PP' = ds$ луча, так как отношение $\frac{PP'}{QP'}$ отличается от единицы на величину порядка $\frac{|\mathbf{g}|}{c}$, и множитель $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}$ тоже является величиной того же порядка малости. Наконец, мы можем заменить $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}$ через $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s}$, так как угол между ds и осью OX, которая совпадает с нормалью к волне, является величиной порядка $\frac{|\mathbf{g}|}{c}$. Вектор отклонения, соответствующий элементу ds, можно поэтому представить выражением

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s}\,ds,$$

в котором исчезла всякая зависимость от осей координат; если луч распространяется от точки A к точке B, для полного отклоняющего вектора получаем выражение

$$-\frac{1}{c}\int_A^B \frac{\partial g}{\partial s}\,ds = \frac{1}{c}(g_A - g_B),$$

где g_A и g_B являются относительными скоростями эфира в точках A и B.

Пусть теперь точка A будет весьма удалена от Земли, а точка B лежит непосредственно на ее поверхности. Тогда при отсутствии скольжения мы получаем $g_B = 0$, тогда как g_A равно и противоположно скорости w Земли. Вектор отклонения оказывается равным

$$-\frac{w}{c},$$

и мы можем вывести следующее заключение:

Чтобы найти окончательное направление нормали к волне (в направлении распространения), мы должны провести вектор, равный скорости света c, в направлении первоначальной нормали к волне в точке A и сложить его с вектором, равным по величине и противоположным по направлению скорости Земли. Если принять во внимание, что нормаль в точке A совпадает с действительным направлением света, идущего от звезды, то ясно, что наш результат совпадает с обычным объяснением аберрации, которое приводится в учебниках астрономии и подтверждается наблюдениями.

149. К сожалению, изложенная теория Стокса встречает значительные трудности: два допущения, которые мы были принуждены принять, а именно, что движение эфира является невихревым и что на поверхности Земли нет скольжения, с трудом могут быть совмещены друг с другом. Эта возможность и совсем отпадает, как только мы примем, что эфир является несжимаемым. В самом деле, по известной гидродинамической теореме мы знаем, что, когда шар, погруженный в неограниченную несжимаемую среду, имеет заданное поступательное движение, движение среды будет вполне определено, если будет поставлено требование, чтобы существовал потенциал скоростей и чтобы в каждой точке поверхности скорость среды и скорость шара имели равные по величине составляющие в направлении нормали. В единственном движении, которое удовлетворяет обоим этим условиям, на поверхности имеется значительное скольжение, причем максимальное значение относительной скорости достигает полуторного значения скорости поступательного движения шара [1]). Это показывает, что для несжимаемой среды никак не может существовать невихревого движения среды без наличия скольжения; мы должны были бы сразу отказаться от теории Стокса, если бы мы были уверены в несжимаемости эфира.

Но эти рассуждения теряют силу, если допустить возможность изменения плотности эфира; Планк [2]) заметил, что можно устранить противоречие между двумя гипотезами теории Стокса, если только предположить, что эфир конденсируется около небесных тел, как если бы он был подвержен силе тяжести и обладал в большей или меньшей степени свойствами газа. Мы не можем совершенно уничтожить скольжения на поверхности, но мы можем сделать его сколь угодно малым, предполагая достаточную степень конденсации. Если нас не испугает предположение, что около Земли эфир сгущен до плотности, в e^{11} раз большей, чем плотность в межзвездном пространстве, мы можем вообразить такое положение, при котором максимальная скорость скольжения составляет не более полупроцента скорости движения Земли, а этого, конечно, было бы вполне достаточно для объяснения аберрации в пределах экспериментальных ошибок [3]).

В этой области физики, в которой нельзя двигаться вперед без гипотез, и если даже они на первый взгляд представляются несколько странными, мы не должны быть

---

[1]) Примечание **66**.

[2]) См. L o r e n t z, Stokes's theory of aberration in the supposition of a variable density of the aether, Amsterdam Proceedings 1898—1899, стр. 443 (Abhandlungen über theoretische Physik 1, стр. 454).

[3]) Примечание **67**.

расточительными и отказываться слишком поспешно от новых идей; поэтому предложение Планка сослужило хорошую службу. И все же я утверждаю, что это представление о чрезвычайно конденсированном эфире, да еще, по необходимости, соединенное с гипотезой, что такая конденсация не изменяет ни в малейшей степени скорости света, — это представление нельзя назвать вполне удовлетворительным. Я уверен, что сам Планк будет склонен предпочесть неизменяемый и неподвижный эфир Френеля, если только окажется возможным показать, что это представление может привести нас к пониманию наблюдаемых явлений.

150. Теория Френеля, основной принцип которой уже вошел в теорию, развитую в предыдущих главах, относится к 1818 г. Она впервые была формулирована в письме к Араго [1]), в котором прямо указано, что эфир нужно представлять себе как среду, не принимающую ни малейшего участия в движении Земли. К этому Френель добавляет одну в высшей степени важную гипотезу относительно распространения света в движущейся прозрачной весомой материи.

Я уверен, что все охотно согласятся, что оптическое явление, которое происходит в неподвижной системе, может протекать совершенно таким же образом и после того, как мы придадим системе равномерное поступательное движение, с тем условием, однако, что это движение мы сообщим *всему*, что принадлежит к этой системе. Поэтому, если все, что содержится в столбе воды или в куске стекла, испытает поступательное движение, которое мы сообщим этим веществам, распространение света в этих веществах будет происходить всегда совершенно одинаковым образом независимо от того, имеется поступательное движение или нет. Иное, однако, будет в том случае, если в стекле или воде будет содержаться нечто такое, чего мы не можем привести в движение.

Как я сказал, Френель высказал предположение, что эфир не следует за движением Земли. Единственный способ,

[1]) Письмо Френеля к Араго, Sur l'influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d'optique. Ann. de chim. et de phys. **9** (1818), стр. 57 (Oeuvres complètes de Fresnel **2**, стр. 627).

которым можно себе объяснить это, заключается в представлении, что Земля во всей своей массе пронизана эфиром и является для него совершенно проницаемой. Если мы не убоялись приписать такие свойства телу, имеющему размеры нашей планеты, то подавно мы должны приписать их телам гораздо меньших размеров. Мы должны ожидать, что, когда через трубку течет вода, в ней нет потока эфира, а потому, поскольку пучок света распространяется частью через воду, а частью через эфир, световые волны эфиром будут как бы тормозиться и потому не достигнут полной скорости потока воды. По гипотезе Френеля, мы найдем скорость, которой обладают лучи по отношению к стенкам трубки, или — что то же самое — по отношению к эфиру, если прибавим к скорости, с которой свет распространялся бы в неподвижной воде, не всю скорость потока, а только некоторую ее часть, а именно $1-\frac{1}{\mu^2}$; здесь μ есть показатель преломления неподвижной воды. Френель прилагает этот же коэффициент и ко всем другим изотропным прозрачным веществам. Если μ мало отличается от единицы, как это имеет место в газах, наш коэффициент тоже оказывается малым; световые волны едва увлекаются потоком воздуха, так как в воздухе распространение света происходит почти исключительно по содержащемуся в нем эфиру. Если мы хотим, чтобы коэффициент Френеля был близок к единице, т. е. чтобы световые волны приобретали почти полную скорость весомой материи, мы должны взять тело с бо́льшим коэффициентом преломления.

151. Я должен добавить два замечания. Во-первых, вместо того, чтобы рассматривать скорость относительно эфира, мы можем с таким же правом рассматривать скорость относительно весомой материи. Если через воду, текущую по трубе направо со скоростью w, идет пучок лучей, распространяющихся в том же направлении, скорость распространения относительно эфира может быть представлена выражением

$$v+\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)w,$$

где v означает скорость света в неподвижной воде. Скорость света относительно воды может быть получена из этого выражения, если из него вычесть w; она равна

$$v - \frac{1}{\mu^2} w. \tag{251}$$

Можно считать, что она слагается из скорости v и некоторой части скорости эфира относительно весомой материи, определяемой дробью $\frac{1}{\mu^2}$; в нашем примере эта скорость направлена в левую сторону.

Во-вторых, вышеприведенная формулировка гипотезы Френеля должна быть распространена на случай таких сред, в которых скорость света зависит от частоты. Когда тело находится в движении, мы должны различать частоту колебаний в определенной неподвижной точке эфира и ту частоту, с которой электромагнитное состояние изменяется в точке, движущейся вместе с весомой материей. Если, пользуясь осями координат, неподвижными по отношению к эфиру, мы выразим значения возмущений при помощи формул, в которые входят выражения вида

$$\cos n\left(t - \frac{x}{u} + p\right), \tag{252}$$

то n будет обозначать первую из этих частот, которую можно назвать *истинной*, или *абсолютной*. Ко второй, *относительной* частоте мы можем перейти, вводя в это выражение координату по отношению к началу, движущемуся вместе с весомой материей. Если эту координату обозначить через x' и если материя движется в направлении OX со скоростью w, имеем:

$$x = x' + wt,$$

так что (252) приобретает вид

$$\cos n\left(t - \frac{w}{u} t - \frac{x'}{u} + p\right).$$

Коэффициент при t в этом выражении

$$n' = n\left(1 - \frac{w}{u}\right)$$

представляет собой относительную частоту; то обстоятельство, что она не совпадает с n, согласуется с принципом Допплера.

Гипотезу Френеля можно теперь выразить более точно следующим образом: если нам нужно узнать скорость распространения света в движущейся весомой материи, мы должны фиксировать наше внимание на *относительной* частоте n' колебаний, понимая под v и μ в выражении (251) величины, относящиеся к световым колебаниям, которые проходят через неподвижное тело и имеют частоту n'.

152. Я должен теперь показать, что теория Френеля действительно объясняет наблюдаемые явления. В кратких словах эти явления заключаются в следующем. Во-первых, мы имеем аберрацию света, о которой я уже говорил. Далее, было найдено, что астроном, определивший кажущееся направление лучей, идущих от звезды, и их кажущуюся частоту, может на основании этих данных предсказать, пользуясь обычными законами оптики и не обращая внимания на движение Земли, все результаты любых опытов над отражением, преломлением, диффракцией и интерференцией, которые могут быть проделаны с этими лучами. Наконец, все оптические явления, которые могут быть воспроизведены при помощи земных источников света, оказываются абсолютно независимыми от движения Земли. Если, поворачивая весь прибор, включая сюда и источник света, мы изменим направление лучей по отношению к направлению поступательного движения Земли, то никаких изменений мы никогда не заметим.

Следует отметить, что все это можно было бы объяснить непосредственно и без всяких математических формул при помощи теории Стокса, если бы только можно было примирить друг с другом два ее основных допущения. Становясь на точку зрения Френеля, нам приходится прибегать к кое-каким вычислениям; но они приведут нас ко вполне удовлетворительному объяснению всех перечисленных явлений с той оговоркой, впрочем, что мы должны будем ограничиться явлениями первого порядка малости.

153. Начнем опять с рассмотрения распространения фронта волны, на этот раз внутри весомого прозрачного тела; пусть его свойства могут изменяться от точки к точке, но пусть оно везде будет изотропным. Для данной частоты скорость света в неподвижном теле будет иметь в каждой точке определенное значение v, которое связано с показателем преломления μ соотношением

$$\mu = \frac{c}{v}.$$

Как и раньше, мы будем пользоваться осями координат, связанными с Землей; если мы изобразим продвижение волн графически, то нужно представлять себе, что чертеж также движется вместе с Землей; тогда эфир будет течь сквозь нее со скоростью, которую мы опять обозначим через g. Эта скорость имеет теперь во всех точках одинаковое направление и одинаковую величину, будучи в каждом месте равной по величине и противоположной по направлению скорости Земли.

Пусть σ, как и прежде, представляет собой положение фронта волны (см. рис. 8, стр. 248) в момент времени t, а σ' — положение фронта волны в момент времени $t + dt$, причем эта последняя поверхность является огибающей всех элементарных волн, которые успели образоваться за промежуток времени dt. Если бы эфир в нашем случае оставался в покое, каждая элементарная волна представляла бы собой сферу с радиусом $v\,dt$; ее геометрический центр совпадал бы с центром колебаний. В действительности, на основании того, что было сказано о гипотезе Френеля, геометрический центр сферы, радиус которой будет попрежнему $v\,dt$, окажется смещенным по отношению к центру колебаний на некоторое расстояние, причем величина смещения дается вектором $\frac{1}{\mu^2} g\,dt$.

Рассмотрим бесконечно малый треугольник, вершины которого расположены в точке P фронта волны σ, являющейся источником элементарной волны, в точке Q, являющейся ее геометрическим центром, и в точке P', где элементарная волна касается нового фронта волны σ'. Как только что было упомянуто, сторона PQ есть вектор $\frac{1}{\mu^2} g\,dt$.

Сторона QP', являющаяся радиусом сферы, нормальна к σ' и в пределе к σ. Ее длина равна $v\,dt$. Что касается стороны PP', это есть элемент относительного луча. Следуя общепринятому обозначению, мы назовем величину $\frac{PP'}{dt}$ скоростью луча, так что, если ее обозначить через v', получаем выражение

$$PP' = v'\,dt.$$

Отсюда ясно, что если угол между относительным лучом и скоростью g обозначить через ϑ,

$$v^2 = v'^2 - 2\frac{|g|}{\mu^2}v'\cos\vartheta + \frac{g^2}{\mu^4},$$

откуда можно получить, пренебрегая величинами третьего порядка малости, т. е. порядка $\frac{|g|^3}{v^3}$, следующее выражение:

$$v' = v + \frac{|g|}{\mu^2}\cos\vartheta - \frac{g^2}{2v\mu^4}\sin^2\vartheta. \qquad (253)$$

Мы должны будем особенно заняться обратной величиной этого количества. С той же степенью приближения она дается выражением

$$\frac{1}{v'} = \frac{1}{v}\left\{1 - \frac{|g|}{v\mu^2}\cos\vartheta + \frac{g^2}{2v^2\mu^4}(1+\cos^2\vartheta)\right\}. \qquad (254)$$

Мы имеем, далее, простое правило, при помощи которого можем перейти от направления волновой нормали к направлению относительного луча и наоборот. Вектор PP' является суммой векторов PQ и QP'. Поэтому, деля все три вектора на dt, получаем следующее положение: если вектор, направленный по нормали к волне и имеющий величину v, сложить с вектором $\frac{g}{\mu^2}$, результирующий вектор будет иметь направление относительного луча; и обратно, если вектор величины v', имеющий направление луча, сложить с вектором $-\frac{|g|}{\mu^2}$, мы найдем направление нормали к волне.

Чтобы вполне уяснить себе смысл этих положений, мы должны помнить, что в каждой точке среды относительный луч и волна могут иметь всевозможные направления. Вышеприведенный результат относится ко всем случаям.

154. Эти предварительные рассуждения дают нам возможность доказать красивую теорему, что, если пренебречь величинами второго порядка, движение Земли не оказывает никакого влияния на ход относительных лучей. Мы видели, каким образом принцип Гюйгенса, определяя последовательные положения σ, σ', σ'', ... фронта волны, дает нам в то же время ряд последовательных элементов относительного луча PP', $P'P''$, $P''P'''$, ... Если назвать центр колебаний элементарной волны и ту точку, где эта волна касается огибающей, *сопряженными* точками, можно сказать, что луч проходит через ряд сопряженных точек, следующих одна за другой через бесконечно малые расстояния. Мы можем теперь провести между двумя последовательными положениями фронта волны большое число бесконечно малых отрезков прямых, часть которых будет соединять между собой сопряженные точки, а часть не будет, и для каждого из таких отрезков мы можем вычислить значение

$$\frac{ds}{v'}, \tag{255}$$

принимая за v' величину, относящуюся к элементу луча с направлением ds. Легко видеть, что это выражение (255) имеет одно и то же значение для всех отрезков, соединяющих сопряженные точки, и большее значение для всех других отрезков. В самом деле, в силу определения v' это значение в первом случае равно тому времени dt, за которое свет успеет пройти из первого положения фронта волны во второе; что касается отрезка ds, проведенного между точкой P первого фронта волны и точкой Q второго (причем точка Q не является сопряженной с точкой P), его конец Q лежит вне элементарной волны, построенной при точке P, так как новый фронт волны имеет меньшую кривизну, чем элементарная волна, и должен лежать целиком вне ее, за исключением точки касания. Поэтому для отрезка PQ выражение (255) должно иметь значение, превышающее то, которое оно имело бы, если бы Q лежало на поверхности элементарной волны.

Пусть теперь A и B будут две точки относительного луча s, лежащие на конечном расстоянии друг от друга, и пусть s' будет другая кривая, соединяющая эти точки. Если между A и B мы построим ряд фронтов волны на бесконечно малых расстояниях друг от друга, кривая s разобьется на элементы, каждый из которых соединяет две сопряженные точки, тогда как этим свойством могут обладать не все элементы отрезка s'. Отсюда мы можем вывести, что интеграл

$$\int \frac{ds}{v'}, \tag{256}$$

взятый по s, будет иметь меньшую величину, чем соответствующий интеграл для кривой s'. Таким образом, ясно, что ход относительного луча между двумя заданными точками A и B определяется тем свойством, что на этом пути интеграл (256) имеет наименьшее значение по сравнению с любой другой кривой, проведенной между этими точками.

Подставляя в интеграл значение (254), получаем, пренебрегая членами второго порядка:

$$\int_A^B \frac{ds}{v'} = \int_A^B \frac{ds}{v} - \int_A^B \frac{|\boldsymbol{g}|\cos\vartheta}{\mu^2 v^2}\, ds; \tag{257}$$

так как $\mu v = c$, то здесь мы можем заменить последний член выражением

$$\frac{1}{c^2}\int_A^B g_s ds = \frac{1}{c^2}(AB)_g\,|\boldsymbol{g}|,$$

если под $(AB)_g$ понимать проекцию отрезка траектории AB на направление скорости $\boldsymbol{g}$, вполне определяемую положением крайних точек A и B. Последний член в (257) является поэтому одинаковым для всех путей, соединяющих A и B, и условие минимума требует просто, чтобы первый член

$$\int_A^B \frac{ds}{v}$$

имел минимальное значение. В этом члене нет, впрочем, ничего, что зависело бы от скорости g; поэтому путь луча, для которого он имеет минимальное значение, тоже не зависит от этой скорости, что и требовалось доказать.

При этом доказательстве мы не вводили никаких предположений относительно того способа, каким v и μ изменяются от точки к точке. Поэтому наше доказательство применимо к любому распределению изотропной прозрачной материи и даже к тем крайним случаям, когда на некоторой поверхности имеется внезапное изменение свойств. Следовательно, для относительных лучей закон преломления сохраняет ту же формулировку, что и для неподвижных тел (в этом случае слово «относительный» может быть опущено). Я должен добавить, что последнее положение может быть доказано и независимо, путем непосредственного применения принципа Гюйгенса к преломлению на поверхности, и что случай отражения лучей может быть разобран таким же способом и с таким же результатом.

155. Чтобы объяснить явление аберрации, достаточно только комбинировать вышеприведенные результаты. Пусть P будет точка на некотором расстоянии от Земли; мы представим себе, что она неподвижно связана с Землей и лежит сейчас же за атмосферой в свободном эфире. В этой точке свет, идущий от какой-нибудь звезды, будет состоять из волн, нормаль к которым имеет определенное направление N, противоположное тому направлению, по которому в действительности звезда расположена. Эти волны обладают также определенной относительной частотой, которая, вообще говоря, отличается от истинной или абсолютной частоты, повинуясь правилу Допплера.

В точке P мы имеем $v = c$, $\mu = 1$. Поэтому, если нам нужно найти направление относительного луча s в этой точке, мы должны вектор c, направленный по нормали к волне N, сложить с вектором g, представляющим скорость эфира по отношению к Земле; этот вектор g должен поэтому быть равен по величине и противоположен по направлению скорости Земли. Это построение, очевидно, приводит к направлению относительного луча, совпадающему с кажущимся направлением лучей, которое дается элементарной теорией аберрации. Мы можем считать поэтому, что мы объясним это явление, если нам удастся показать, что результат наблюдений, произведенных на поверхности нашей планеты, таков, что астроном (который не думает о том, что Земля движется) будет считать, что свет обладает именно той частотой n, которую он видит, и выведет из этих наблюдений заключение, что лучи доходят до атмосферы по направлению s. Но это так и есть на самом деле, потому что, как мы видели, распространение относительных лучей от P и далее в точности совпадает с тем, какое имели бы абсолютные лучи, если бы Земля была неподвижна и если бы истинная частота имела значение n.

В частности, мы можем заметить, что если в этом последнем случае путь лучей загородить при помощи соответственным образом расположенных экранов с малыми отверстиями, луч света может все-таки пройти через эти отверстия, если экраны будут двигаться вместе с Землей. Далее, если на Земле, находящейся в покое, абсолютные лучи собираются в фокусе телескопа, относительные лучи тоже соберутся в эту же точку, производя в ней действительное сгущение света. Что это действительно так, можно сразу видеть, если при помощи теоремы § 153 определить вид фронтов волны по соседству с фокусом. Оказывается, что схождение относительных лучей к одной точке неизбежно вызывает стягивание фронта волн около этой точки [1].

Объяснение того факта, что движение Земли не оказывает никакого влияния ни на какие оптические явления, производимые земными источниками света, настолько просто, что может быть выражено в нескольких словах. Достаточно заметить, что в опытах по интерференции разности фаз остаются без изменения. Это следует непосредственно из нашей формулы (257) для того промежутка времени, в течение которого относительный луч проходит некоторый отрезок пути. Если два относительных луча, выходящих из точки A, встречаются в точке B, промежутки времени,

---

[1]) Примечание **68**.

потребные им для этого, даются выражениями

$$\int_A^B \frac{ds_1}{v} + \frac{1}{c^2}(AB)_g |\mathbf{g}|$$

и

$$\int_A^B \frac{ds_2}{v} + \frac{1}{c^2}(AB)_g |\mathbf{g}|,$$

где интегралы относятся к указанным двум путям. Так как последние члены тождественны, мы находим, что разность между двумя временами прихода равна

$$\int_A^B \frac{ds_1}{v} - \int_A^B \frac{ds_2}{v}.$$

Так как эта величина не зависит от движения Земли, результат интерференции тоже будет независим от этого движения; это заключение можно распространить на *все* оптические явления, так как в свете принципа Гюйгенса мы можем все такие явления рассматривать как случаи интерференции.

Следует, впрочем, заметить, что положение светлых и темных полос интерференции определяется разностями фаз, *выраженными в периодах колебаний*, так что вышеприведенные заключения законны лишь в том случае, если движение Земли не сказывается на самих периодах колебаний частичек источника света. Это условие будет соблюдено, если ни действующие на них упругие силы, ни массы их не претерпят изменений. Тогда во всех опытах, производящихся на движущейся Земле, относительная частота в любой точке нашего прибора будет равна той частоте, которую мы получили бы, если бы могли произвести подобный опыт на планете, не имеющей поступательного движения.

156. Коэффициент Френеля $1 - \frac{1}{\mu^2}$, всю важность которого мы теперь должны были оценить, может быть выведен из той теории, по которой в пучке света, проходящем через весомое тело, происходит колебательное движение электрических зарядов. К сожалению, если мы предположим, что эти заряды сосредоточены в отдельных электронах, мы столкнемся при выводах с теми затруднениями, которые присущи почти всем молекулярным теориям; истинная причина частичного увлечения световых волн материей, находящейся в движении, выступает вследствие этого с недостаточной ясностью. По этой причине я рассмотрю сначала идеальный случай, а именно, когда заряды распределены по телу непрерывно. В этом предварительном рассмотрении я разъясню то затруднение, с которым мы теперь встречаемся и которое заключается в том, что мы должны представить себе четыре различные среды, проникающие друг через друга совершенно свободно, так что они могут занимать одно и то же место пространства, а именно: 1) эфир, 2) положительное и отрицательное электричество, 3) весомую материю.

В целях упрощения я введу предположение, что из положения равновесия в весомом теле может быть смещено электричество только одного знака, а электричество другого знака неподвижно связано с материей и не имеет никакого другого движения, кроме общего поступательного движения всей системы. Я обозначу через ρ объемную плотность подвижного заряда, а через ρ' — неподвижного. Так как все тело как целое остается незаряженным, мы получим для состояния равновесия

$$\rho+\rho'=0; \tag{258}$$

это выражение останется справедливым и в том случае, если один из зарядов совершает колебания, — он только не должен при этом сгущаться или разрежаться.

В нашей теории мы оставим открытым вопрос о том, какое из двух электричеств, положительное или отрицательное, может испытывать смещение внутри тела.

157. Примем, что движущийся заряд имеет некоторую массу и притягивается назад к положению равновесия упругой силой, противоположной смещению и ему пропорциональной; пусть q будет смещение, $-fq$ — упругая сила, m — масса; обе последние величины отнесены к единице объема.

Уравнения, которыми мы должны пользоваться при решении предложенной задачи, были уже приведены в § 11. Вводя координаты, неподвижно связанные с эфиром, получаем:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d} = \rho + \rho', \tag{259}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0, \tag{260}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{h}}, \tag{261}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \frac{1}{c} (\dot{\boldsymbol{d}} + \rho \boldsymbol{v} + \rho' \boldsymbol{v}'), \tag{262}$$

где $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ обозначают скорости двух родов электричества, так что $\rho \boldsymbol{v} + \rho' \boldsymbol{v}'$ представляет ток конвекции.

К этим формулам мы должны добавить уравнение движения колеблющегося электрического заряда. Если его ускорение обозначить через $\boldsymbol{j}$, мы получим:

$$m\boldsymbol{j} = -f\boldsymbol{q} + \rho \boldsymbol{d} + \frac{1}{c} \rho [\boldsymbol{v}\boldsymbol{h}]. \tag{263}$$

158. Рассмотрим сначала вкратце распространение электрических колебаний в неподвижном теле. Можно ограничиться случаем, когда мы имеем смещение $\boldsymbol{q}_y$ подвижного заряда в направлении OY наряду с диэлектрическим смещением $\boldsymbol{d}_y$ эфира, имеющим то же направление, и магнитную силу $\boldsymbol{h}_z$, параллельную OZ; пусть все эти величины будут функциями только x и t. Так как соотношение (258) не нарушается, уравнения (259) и (260) оказываются при этих допущениях удовлетворенными и (261) и (262) сводятся к следующим выражениям:

$$\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial t}, \tag{264}$$

$$-\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \left(\rho \frac{\partial \boldsymbol{q}_y}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial t} \right). \tag{265}$$

В конце концов уравнение движения приобретает вид

$$m \frac{\partial^2 \boldsymbol{q}_y}{\partial t^2} = -f\boldsymbol{q}_y + \rho \boldsymbol{d}_y. \tag{266}$$

Решение этих уравнений можно получить, если положить

$$d_y = a \cos n\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

откуда при помощи (264) и (266) имеем:

$$h_z = \frac{c}{v} d_y, \qquad q_y = \frac{\rho}{f - mn^2} d_y. \tag{267}$$

Подставляя эти значения в (265), получаем следующую формулу для определения скорости распространения v:

$$\frac{c^2}{v^2} = \frac{\rho^2}{f - mn^2} + 1. \tag{268}$$

159. Когда тело обладает равномерным поступательным движением со скоростью w в направлении OX, мы можем попрежнему удовлетворить уравнениям соответственно подобранными величинами d_y, h_z, q_y, но здесь будут необходимы некоторые изменения. Первое из этих изменений относится к току конвекции. Его составляющая в направлении OX попрежнему остается равной нулю, так как положительное и отрицательное электричество при поступательном движении тела переносятся вместе, но, если мы, как и ранее, будем пользоваться осями координат, неподвижно связанными с эфиром, конвекционный ток параллельно OY уже нельзя будет представлять выражением $\rho \frac{\partial q_y}{\partial t}$. Правильное выражение для этого тока можно найти следующим образом. Если определенная точка колеблющегося заряда в момент времени t имеет координату x, то в момент времени $t + dt$ ее координата будет $x + w\,dt$, так что приращение ее смещения q_y дается выражением

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} dt + w \frac{\partial q_y}{\partial x} dt,$$

а скорость в направлении OY будет

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + w \frac{\partial q_y}{\partial x},$$

или, в другом обозначении,

$$\left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right),$$

где скобки обозначают производную для точки, движущейся вместе с телом. Ток конвекции можно поэтому представить следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right).$$

Ясно, что ускорение равно

$$\left(\frac{\partial^2 q_y}{\partial t^2}\right)$$

и что для любой величины φ, зависящей от координат и от времени, следует различать две производные: $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$, точно так же, как мы это делали и для q_y. Первое из этих выражений есть частная производная от φ, когда φ рассматривается как функция от t и от «абсолютных» координат, т. е. координат по отношению к осям, неподвижно связанным с эфиром; второй символ нужно применять, когда за независимые переменные принимаются время и «относительные» координаты, т. е. координаты по отношению к осям, движущимся вместе с телом. Соотношение между этими двумя величинами всегда дается формулой

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial t}+w\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{269}$$

Что касается производных по x, y, z, то значение всех их не зависит от того, что мы будем понимать под x, y, z: абсолютные или относительные координаты.

Второе изменение, которое мы должны произвести, вызывается последним членом в (23). В силу того, что заряд ρ имеет скорость w по направлению OX, на него будет действовать сила

$$-\frac{\rho}{c}wh_z,$$

параллельная OY; эту силу следует добавить к правой части уравнения движения.

В силу принятых нами допущений $\rho+\rho'$ во время колебаний попрежнему равно нулю, и (259) и (260) оказываются удовлетворенными. Уравнение (264) можно оставить без изменения, но (265) и (266) должны быть заменены выражениями

$$-\frac{\partial h_z}{\partial x}=\frac{1}{c}\left\{\rho\left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right)+\frac{\partial d_y}{\partial t}\right\}$$

и

$$m\left(\frac{\partial^2 q_y}{\partial t}\right)=-fq_y+\rho d_y-\frac{w}{c}\rho h_z.$$

Эти три формулы несколько упрощаются, если принять за независимые переменные время и относительные координаты и если одновременно положить:

$$d_y-\frac{w}{c}h_z=d_y'.$$

Применяя соотношение (269) к d_y и h_z, получаем:

$$\frac{\partial d_y'}{\partial x}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial h_z}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial h_z}{\partial x}=\frac{1}{c}\left\{\rho\left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial d_y'}{\partial t}\right)-w\frac{\partial d_y'}{\partial x}+\frac{w}{c}\left(\frac{\partial h_z}{\partial t}\right)\right\},$$

$$m\left(\frac{\partial^2 q_y}{\partial t^2}\right)=-fq_y+\rho d_y'.$$

Первое и третье из этих уравнений имеют ту же форму, что и (264) и (266). Поэтому, если мы положим:

$$d_y'=a\cos n\left(t-\frac{x}{v'}\right), \tag{270}$$

понимая под x относительную координату, получаем, соответственно (267):

$$h_z=\frac{c}{v'}d_y', \quad q_y=\frac{\rho}{f-mn^2}d_y',$$

вследствие чего второе уравнение превращается в

$$\frac{c^2}{v'^2}=\frac{\rho^2}{f-mn^2}+1+2\frac{w}{v'}.$$

Сравнивая это выражение с (268), мы видим, что для определенного значения частоты n можно написать:

$$\frac{c^2}{v'^2} = \frac{c^2}{v^2} + 2\,\frac{w}{v'}.$$

Так как мы все время пренебрегаем величинами второго порядка, можно в последнем члене заменить v' через v. Таким образом, мы получим:

$$\frac{c}{v'} = \frac{c}{v} + \frac{w}{c},$$

$$v' = v - \frac{wv^2}{c^2} = v - \frac{w}{\mu^2},$$

если μ есть показатель преломления для неподвижного тела.

Нужно помнить, что в (270) x обозначает относительную координату. Поэтому n есть относительная частота и v' — скорость распространения относительно весомой материи. Скорость света по отношению к эфиру будет

$$v' + w = v + \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)w$$

в соответствии с гипотезой Френеля.

160. Я должен теперь показать вам, каким образом тот же результат можно вывести из теории электронов. Для этого мы могли бы повторить по отношению к движущейся системе все то, что было сказано в главе IV относительно распространения света в системе молекул. Мы придем, однако, к нашей цели более кратким путем, если будем сравнивать явления в движущейся системе с теми явлениями, которые происходят в той же самой системе, когда она неподвижна.

При этом сравнении мы должны пользоваться теми допущениями, которые были приняты в главе IV.

При отсутствии поступательного движения задачу можно формулировать следующим образом. В молекулах тела имеются электрические моменты $\boldsymbol{p}$, изменяющиеся как от одной молекулы к другой, так и с течением времени. Благодаря этому моменту каждая молекула окружена электромагнитным полем, которое определяется потенциалами (§ 42):

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[p_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[p_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[p_z]}{r}\right\},$$

$$a = \frac{[\dot{p}]}{4\pi c r};$$

здесь x, y, z суть координаты рассматриваемой точки, r — ее расстояние от молекулы; квадратные скобки напоминают нам, что мы имеем дело с запаздывающими потенциалами. Электрическая сила d и магнитная сила h даются нижеследующими формулами, которые могут быть выведены из (33) и (34):

$$d = -\frac{1}{4\pi c^2 r}[\ddot{p}] + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[p_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[p_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[p_z]}{r}\right\}, \tag{271}$$

$$h = \frac{1}{4\pi c}\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{r}[\dot{p}]\right\}. \tag{272}$$

После сложения полей, производимых всеми молекулами тела, мы должны добавить еще одно поле, а именно то, которое вызывается внешними причинами и которое я буду обозначать через d_0, h_0. Оно удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} d_0 &= 0,\\ \operatorname{div} h_0 &= 0,\\ \operatorname{rot} h_0 &= \frac{1}{c}\dot{d}_0,\\ \operatorname{rot} d_0 &= -\frac{1}{c}\dot{h}_0. \end{aligned}\right\} \tag{273}$$

Наконец, нам остается рассмотреть уравнения движения электронов, которые при своем смещении дают электрические моменты p. Пусть в каждой молекуле содержится только один подвижный электрон e, смещение которого q вызывает электрический момент

$$p = eq. \tag{274}$$

Если символ $\sum$ относится к сумме полей всех окружающих частичек и если $-fq$ есть упругая сила, $-g\dot{q}$ — сопротивление движению, уравнение движения будет:

$$m\ddot{q} = e\sum d + ed_0 - fq - g\dot{q}. \qquad (275)$$

161. В теории движения системы, обладающей скоростью w, мы можем с большой выгодой воспользоваться преобразованиями, которые мы применяли ранее в § 44.

Принимая за независимые переменные координаты x', y', z' по отношению к осям, движущимся вместе с системой, и «местное» время

$$t' = t - \frac{1}{c^2}(w_x x' + w_y y' + w_z z'), \qquad (276)$$

мы получаем уравнения (104)—(107) для векторов d' и h', которые теперь становятся на место d и h. Новые формулы, правда, имеют не совсем ту форму, что (33)—(36), и член $\frac{1}{c}\operatorname{grad}(w \cdot a')$, который вызывает это различие, нельзя опускать [1]), так как он первого порядка малости по отношению к $\frac{|w|}{c}$, но все же, несмотря на это, оказывается, что поле, вызываемое электрическим моментом, определяется формулами [2])

$$d' = -\frac{1}{4\pi c^2 r}[\ddot{p}] + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[p_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{[p_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{[p_z]}{r}\right\},$$

$$h' = \frac{1}{4\pi c}\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{r}[\dot{p}]\right\},$$

которые в точности соответствуют (271) и (272).

Едва ли нужно напоминать, что символы grad и rot имеют тот смысл, который был им придан в § 44, и что если нам нужно вычислить d' и h' для точки (x', y', z'), лежащей на расстоянии r от поляризованной частички, для того момента времени, в который местное время в этой точке имеет данное определенное значение t', мы должны

---

[1]) См., впрочем, примечание 72*.

[2]) См. примечание 26.

принять за $\boldsymbol{p}$, $\dot{\boldsymbol{p}}$, $\ddot{\boldsymbol{p}}$ значения для того момента времени, когда местное время частички равно $t' - \frac{r}{c}$.

Поле, вызываемое причинами, лежащими вне тела, опять-таки подчиняется основным уравнениям для свободного эфира. При наших новых переменных эти уравнения приобретают вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d}_0' = 0,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h}_0' = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h}_0' = \frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{d}}_0',$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d}_0' = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{h}}_0';$$

это будет ясно, если в (100)—(103) положить ρ равным нулю. Эти уравнения по форме тождественны с (273).

В уравнение движения электрона должно теперь входить выражение для электромагнитной силы $\frac{1}{c}[\boldsymbol{wh}]$, обусловленной поступательным движением $\boldsymbol{w}$, так что для полной силы, действующей на единицу заряда, нужно написать:

$$\boldsymbol{d} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{wh}].$$

Но это как раз тот вектор, который мы обозначили через $\boldsymbol{d}'$. Следовательно, если мы допустим, что упругая сила, определяемая коэффициентом f, и сопротивление, измеряемое величиной g, при поступательном движении не изменяются, мы можем написать уравнение движения следующим образом:

$$m\ddot{\boldsymbol{q}} = e\sum \boldsymbol{d}' + e\boldsymbol{d}_0' - f\boldsymbol{q} - g\dot{\boldsymbol{q}},$$

где знак $\sum$ имеет тот же смысл, что и в (275).

Следует заметить, что соотношение (274) остается справедливым и теперь и что в определенной точке движущейся системы производные по t и по t' равны друг другу. В силу этого мы можем принять, что значки в вышеприведенном уравнении означают частное дифференцирование по t'. В том же смысле следует понимать их и в предыдущих формулах.

162. Из всего вышесказанного вытекает, что при введении новых переменных все уравнения в нашей задаче опять принимают тот вид, который они имели, когда не было никакого поступательного движения. Это сразу приводит нас к следующему заключению.

Если в неподвижной системе может существовать такое состояние, в котором $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{p}$ суть известные функции x, y, z, t, то в движущейся системе могут происходить такие явления, в которых векторы $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$, $\boldsymbol{p}'$ являются такими же функциями относительных координат x', y', z' и местного времени t'.

Эту теорему можно распространить на средние значения $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$ или $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$, на электрический момент $\boldsymbol{P}$ единицы объема и также на вектор $\boldsymbol{D}$, который мы ввели в § 114; в параллель ему нужно будет ввести соответственно определенный вектор для движущейся системы. Если для одной системы мы положим

$$\overline{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{E},\ \overline{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{H},\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P},$$

а для другой

$$\overline{\boldsymbol{d}'} = \boldsymbol{E}',\ \overline{\boldsymbol{h}'} = \boldsymbol{H}',\ \boldsymbol{D}' = \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{P},$$

мы получим в результате, что для каждого состояния, в котором $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ являются некоторыми функциями x, y, z, t, имеется соответствующее состояние движущейся системы, характеризующееся величинами $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, которые точно таким же образом связаны с x', y', z', t'.

163. Непосредственным следствием этой общей теоремы является значение коэффициента Френеля. Предположим, что световые волны распространяются в каком-нибудь прозрачном весовом теле, не обладающем поступательным движением; при этом составляющие $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ даются выражениями вида

$$a \cos n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v} + p\right),$$

где α, β, γ суть направляющие косинусы нормали к волне, а v — скорость распространения. Тогда соответственно этому мы можем наблюдать в этом же теле, если оно находится в движении, такие явления, которые тоже могут быть описаны, как распространение световых волн, и которые могут быть представлены выражениями вида

$$a \cos n\left(t' - \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z'}{v} + p\right),$$

или в силу (276)

$$a \cos n\left(t - \frac{w_x x' + w_y y' + w_z z'}{c^2} - \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z'}{v} + p\right).$$

Если мы положим здесь

$$\frac{\alpha}{v} + \frac{w_x}{c^2} = \frac{\alpha'}{v'}, \quad \frac{\beta}{v} + \frac{w_y}{c^2} = \frac{\beta'}{v'}, \quad \frac{\gamma}{v} + \frac{w_z}{c^2} = \frac{\gamma'}{v'}, \tag{277}$$

при условии

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \tag{278}$$

формула приобретает вид

$$a \cos n\left(t - \frac{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'}{v'} + p\right);$$

она показывает, во-первых, что v' есть скорость распространения по отношению к движущемуся телу и, во-вторых, что n есть частота в какой-нибудь точке, движущейся вместе с телом. Поэтому, если мы возьмем v и v' для одного и того же значения n, мы можем быть уверены в том, что в этих двух случаях мы сравниваем скорость распространения для одинаковых относительных частот.

Пренебрегая квадратом величины w, легко находим из (277) и (278):

$$\frac{1}{v'^2} = \frac{1}{v^2} + 2\,\frac{\alpha w_x + \beta w_y + \gamma w_z}{c^2 v} = \frac{1}{v^2} + 2\,\frac{w_n}{c^2 v},$$

где w_n есть составляющая скорости перемещения вдоль нормали к волне. Можно заметить, что, так как α', β', γ' отличаются от α, β, γ только величинами порядка $\frac{w}{c}$, мы можем за нормаль взять нормаль в движущейся системе.

Далее:
$$\frac{1}{v'}=\frac{1}{v}+\frac{w_n}{c^2},$$
$$v'=v-\frac{v^2}{c^2}w_n=v-\frac{w_n}{\mu^2},$$

так что мы опять пришли к нашему прежнему результату.

164. Гипотеза, выдвинутая Френелем, была подтверждена наблюдениями Физо над распространением света в движущейся воде [1]) и с большей доказательностью — тщательными исследованиями Майкельсона и Морлея по тому же вопросу [2]).

В этих опытах вода протекала в двух противоположных направлениях по двум параллельным трубам, расположенным рядом и закрытым с обоих концов стеклянными пластинками; два интерферирующих пучка лучей пропускались через эти трубы таким образом, что во время всего своего пути один из них был направлен по течению воды, а другой — против течения.

Чтобы вычислить изменение разности фаз, вызываемое движением жидкости, необходимо знать скорость распространения света по отношению к неподвижным частям прибора [3]). Если T есть период колебаний в источнике света, на основании предыдущей теории мы получаем следующее выражение для искомой скорости:
$$\frac{c}{\mu}\pm w\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)\mp\frac{w}{\mu}T\frac{d\mu}{dT}.$$

Здесь скорость потока воды обозначена через w; мы должны брать верхний или нижний знак, смотря по тому, как идет свет: по течению воды или в противоположном направлении.

---

[1]) H. Fizeau, Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur, Comptes Rendus **33** (1851), стр. 349; Ann. d. Phys. u. Chem. Erg. **3** (1853), стр. 457.

[2]) A. A. Michelson and E. W. Morley, Influence of motion of the medium on the velocity of light, Amer. Journ. of Science (3), **31** (1886), стр. 377.

[3]) Примечание **69**.

Я должен добавить, что Майкельсон и Морлей, сравнивая результаты своих опытов с теорией, опустили последний член, зависящий от дисперсии жидкости. Если его принять во внимание, совпадение становится несколько хуже; но так как этот член оказывает только очень малое влияние, оно все же в достаточной степени удовлетворительно [1]).

165. Найдя коэффициент Френеля, мы можем применить его, как уже было показано в §§ 152—155, к различным явлениям. Во многих вопросах, однако, рассуждение можно вести также на основании теоремы соответственных состояний, не прибегая к этому коэффициенту.

Если, например, в некоторых частях пространства неподвижной системы как электрические, так и магнитные силы все время равны нулю, соответствующее состояние в движущейся системе будет характеризоваться тем, что в тех же частях пространства будут отсутствовать векторы $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$, что влечет за собой отсутствие векторов $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$. Поэтому светлые и темные места геометрически должны быть распределены в обеих системах одинаково; нужно только сравнение производить каждый раз для равных относительных частот.

Интересный пример дает нам цилиндрический пучок света. Образующие его граничной поверхности, т. е. относительные лучи, могут в обеих системах итти одинаковым образом даже при наличии отражения и преломления, так что поступательное движение не оказывает никакого влияния на законы отражения и преломления относительных лучей. Равным образом оно не может изменить положения той точки, где лучи собираются в фокусе при помощи зеркала [2]) или линзы; этот принцип показывает также, что положение темных полос в интерференционных опытах не должно измениться.

Необходимое для этих заключений условие, а именно, что относительные частоты в обоих случаях должны быть одинаковы, будет удовлетворяться, если источник света

---

[1]) Примечание **69***.
[2]) Примечание **70**.

будет закреплен неподвижно по отношению к остальным приборам, оставаясь в покое или двигаясь поступательно одновременно со всей системой приборов.

166. Необходимо отметить, что вышеприведенные результаты никоим образом не ограничиваются изотропными телами. Легко включить в наше рассмотрение и кристаллы. Для этого нужно себе представить или что частицы расположены некоторым правильным образом, или что наблюдается отсутствие изотропности в структуре отдельных молекул, проявляющееся в том, что упругие силы оказываются неодинаковыми при различном направлении смещения электронов; последнее допущение повлекло бы за собой требование, чтобы составляющие упругой силы были выражены посредством

$$-(f_{11}q_x+f_{12}q_y+f_{13}q_z),$$
$$-(f_{21}q_x+f_{22}q_y+f_{23}q_z),$$
$$-(f_{31}q_x+f_{32}q_y+f_{33}q_z),$$

причем $f_{21}=f_{12}$, $f_{32}=f_{23}$, $f_{13}=f_{31}$; для доказательства же теоремы соответственных состояний нужно было бы принять, что коэффициенты при поступательном движении системы остаются неизменными.

Мы могли бы показать, что в явлениях двойного лучепреломления ход относительных лучей не изменяется при движении Земли; после этого можно было бы перейти к рассмотрению того, какое изменение претерпевает коэффициент Френеля в случае кристаллических тел. Результат может быть выражен следующим образом:

Если для относительного луча определенного направления s значения скорости этого луча в неподвижном и движущемся кристалле обозначить через u и u', то

$$u'=u-\frac{u^2}{c^2}\mathfrak{w}_s,$$

где $\mathfrak{w}_s$ есть составляющая скорости поступательного движения в направлении луча [1]).

[1]) Примечание **71**.

167. До сих пор мы все время пренебрегали членами второго порядка малости по отношению к $\frac{[\mathfrak{w}]}{c}$; действительно, почти ни в одном из опытов, произведенных в надежде обнаружить влияние движения Земли на оптические явления, было невозможно обнаружить действия, пропорциональные $\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}$. Есть, однако, несколько исключений и притом весьма важных, так как они привели к ряду трудных задач; одна из них и до настоящего времени не получила еще вполне удовлетворительного решения [1]).

Нам предстоит прежде всего говорить о знаменитом опыте, произведенном Майкельсоном [2]) в 1881 г. и повторенном им в больших размерах в сотрудничестве с Морлеем [3]) в 1887 г. Это очень смелый опыт; Майкельсон заставляет интерферировать два световых луча, после того как они прошли пути значительной длины в двух взаимно перпендикулярных направлениях. На рис. 9 показана общая схема прибора. Луч, идущий от источника света, при помощи поставленной под углом 45° стеклянной пластинки расщепляется на два луча: проходящий PA и отраженный PB. Отразившись от зеркал A и B, эти лучи опять возвращаются к пластинке P; теперь отраженная часть первого луча и проходящая часть второго интерферируют и дают систему светлых и темных полос, которую можно наблюдать в трубу, помещенную вдоль прямой PC.

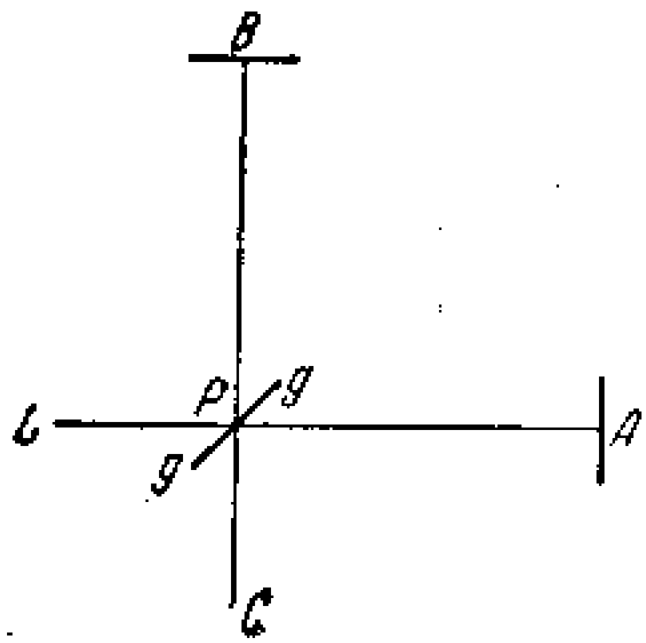

Рис. 9.

---

1) См., впрочем, примечание 72*.

2) A. A. Michelson, The relative motion of the earth and the luminiferous ether, Amer. Journ. of Science (3), 22 (1881), стр. 20.

3) A. A. Michelson and E. W. Morley, Amer. Journ. of Science (3), 34 (1887), стр. 333.

Основная идея опыта заключается в том, что если эфир остается в покое, поступательное движение прибора необходимо должно вызвать появление разности фаз, — правда, второго порядка малости. В самом деле, если система имеет поступательное движение в направлении PA или AP и если длину PA обозначить через L, промежуток времени, в течение которого луч света пройдет в одном направлении, будет $\frac{L}{c+|w|}$, а в другом $\frac{L}{c-|w|}$. Для полного времени пробега получаем:

$$\frac{2Lc}{c^2-w^2},$$

или с точностью до величин второго порядка

$$\frac{2L}{c}\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right), \tag{279}$$

так что лучи, которые пройдут путь PA в том и другом направлении, испытают отставание по фазе, измеряемое величиной

$$\frac{2Lw^2}{c^3}.$$

В другом пучке будет наблюдаться подобное же отставание по фазе, хотя и несколько меньшей величины. Чтобы путем элементарных рассуждений получить этот результат, достаточно принять во внимание, что некоторый луч этого пучка, если даже он вернется, как я это буду предполагать, в ту же самую точку пластинки P, попадет при этом уже в другую точку эфира, так как за тот промежуток времени, в течение которого свет прошел от P в B и обратно, упомянутая точка пластинки переместилась со скоростью w в направлении движения Земли на некоторое расстояние, скажем, PP'. Если Q есть та точка эфира, в которой луч света встречает зеркало B, мы можем сказать с достаточным приближением, что точки P, Q, P' являются вершинами равнобедренного треугольника, высота которого есть L (так как отрезки PA и PB в приборе равны друг другу), а основание равно $\frac{2L|w|}{c}$. Сумма сторон PQ и QP' имеет величину

$$2\sqrt{L^2+\frac{L^2w^2}{c^2}},$$

так что мы можем написать, что время пробега второго луча равно

$$\frac{2L}{c}\left(1+\frac{w^2}{2c^2}\right). \tag{280}$$

Отсюда вытекает, что вследствие движения между двумя лучами создается разность фаз

$$\frac{Lw^2}{c^3},$$

которая при длине L в несколько метров может составить заметную долю периода колебаний.

К такому же заключению можно прийти несколько более строгим путем на основании общей формулы (254). Время, в течение которого относительный луч проходит некоторый путь s, дается выражением

$$\int\frac{ds}{v}-|g|\int\frac{\cos\vartheta}{v^2\mu^2}ds+\frac{1}{2}g^2\int\frac{1+\cos^2\vartheta}{v^3\mu^4}ds.$$

Здесь первый член дает то время, которое потребовалось бы, если бы система была в покое; второй член в разбираемой нами задаче имеет одинаковые значения для двух путей, начинающихся и кончающихся в одних и тех же точках; остается только третий член, который, пользуясь нашими теперешними обозначениями и полагая $\mu=1$, мы напишем следующим образом:

$$\frac{w^2}{2c^3}\int(1+\cos^2\vartheta)\,ds. \tag{281}$$

За пути, по которым должен быть взят этот интеграл, можно принять отрезки прямых, начерченные на рис. 9 [1]). На основании того, что было сказано, $\cos^2\vartheta$ становится

---

[1]) Примечание **72**.

равным единице вдоль PAP и имеет значение 0 в любой точке PBP. Поэтому наше последнее выражение действительно приобретает те два значения, которые даются формулами (279) и (280).

Разность фаз, вызываемая движением Земли, получит противоположный знак, если мы повернем прибор и этим достигнем того, что путь первого луча станет перпендикулярен поступательному движению, а путь второго луча — ему параллелен. Поэтому, если явления протекают в согласии с вышеприведенной теорией, такой поворот должен вызвать изменение разности фаз, равное

$$\frac{2Lw^2}{c^3}, \tag{282}$$

и соответствующее смещение интерференционных полос.

В первоначальном приборе Майкельсона длина L была, пожалуй, слишком мала, чтобы можно было заметить искомый эффект, но в более поздних опытах, проделанных вместе с Морлеем, путь лучей был значительно увеличен. Лучи испытывали многократное отражение от зеркал, расположенных соответственным образом по обе стороны пластинки P; эти зеркала, равно как и другие части прибора, в том числе источник света и зрительная труба, были установлены на каменной плите, которая плавала в бассейне с ртутью. Каждый луч при последовательных своих прохождениях шел почти по одному и тому же пути, так что можно было принять $\cos^2\vartheta$ за величину, постоянную на всем пути прохождения луча. Если $\cos^2\vartheta$ имеет для наших двух пучков вначале значения 1 и 0, а затем, после поворота на 90°, значения 0 и 1, изменение в разности фаз может быть найдено на основании (281); его можно выразить также и через (282), если под $2L$ понимать всю длину пути одного из лучей. Так как эта длина доходила до 22 *м*, значение (282) равно 0,4 периода колебания желтого света; поэтому можно было бы ожидать заметного смещения полос. Однако на деле ни в одном случае не наблюдалось ни малейшего смещения, которое можно было бы приписать вышеобъясненной причине. Такой же результат был получен впоследствии Морлеем и

Миллером [1]), которые пришли к заключению, что если и есть какое-нибудь действие того рода, которого мы ожидали, оно меньше одной сотой доли вычисленного значения.

168. Чтобы объяснить это отсутствие всякого влияния поступательного движения Земли, я попробовал предложить гипотезу, которая была высказана также Фиц-Джеральдом, а именно, что твердое тело, движущееся сквозь эфир, испытывает небольшое изменение своих размеров порядка $\frac{w^2}{c^2}$. Допустим, что два отрезка внутри весомого тела, из которых один параллелен движению, а другой ему перпендикулярен и которые в неподвижном теле имеют одинаковую длину, во время движения относятся друг к другу, как

$$\frac{L_2}{L_1} = 1 + \frac{w^2}{2c^2}; \tag{283}$$

этим самым будет вполне объяснен отрицательный результат всех опытов. В самом деле, эти изменения в длине повлекут за собой такое изменение фаз интерферирующих лучей, которое равносильно тому, что луч, распространяющийся в направлении движения Земли, ускорится на величину

$$\frac{Lw^2}{c^3};$$

это ускорение в точности компенсирует то изменение в фазе, которое мы рассматривали в предыдущих параграфах.

Эта гипотеза, несомненно, представляется на первый взгляд несколько странной, но нам трудно обойтись без нее, если мы будем настаивать на представлении о неподвижном эфире. Я думаю, мы можем даже утверждать, что при этом допущении опыт Майкельсона *доказывает* существование указанного изменения размеров тела и что это заключение не менее законно, чем те выводы, которые мы делаем относительно теплового расширения или изме-

---

[1]) E. W. Morley and D. C. Miller, Report of an experiment to detect the Fitz-Gerald — Lorentz effect, Phil. Mag. (6), 9 (1905), стр. 680.

нения показателя преломления, — выводы, которые в ряде случаев даются на основании наблюдений над положением интерференционных полос.

169. Некоторые физики развивали мысль, что, подобно обыкновенным механическим натяжениям, и те сокращения или растяжения, о которых сейчас идет речь, тоже могут вызвать в теле двойное лучепреломление; Рэлей и Брэс пытались поэтому обнаружить двойное лучепреломление, вызываемое движением Земли. Но здесь все попытки оказались тщетными: не удалось найти никаких следов подобного рода влияния.

Имея в виду этот вопрос о двойном лучепреломлении, а также и по другим причинам, представляется своевременным перейти к рассмотрению электромагнитных явлений в движущейся системе и притом не только для скоростей, весьма малых по сравнению со скоростью света c, как мы это делали раньше, но и для любой скорости поступательного движения, меньшей c. Хотя формулы получают в этом случае несколько более сложный вид, мы можем применить к этой задаче в точности те же методы, которыми мы пользовались ранее.

Нашей задачей будет опять свести, поскольку это по крайней мере окажется возможным, уравнения для движущейся системы к тому виду обычных формул, которые имеют место для неподвижной системы. Оказывается, что необходимые для этого преобразования могут оставаться до некоторой степени неопределенными; в наши формулы будет входить некоторый численный коэффициент l, относительно которого мы сделаем предварительное допущение, что он является функцией скорости поступательного движения w и что он равен единице для $w=0$ и отличается от единицы на величину порядка $\frac{w^2}{c^2}$ для малых значений отношения $\frac{w}{c}$.

Если x, y, z являются координатами точки по отношению к осям, неподвижным в эфире, или, как мы будем говорить, «абсолютными» координатами, и если поступательное движение происходит в направлении OX, координаты по отношению к осям, движущимся вместе с системой и совпадающим с неподвижными осями в момент времени $t=0$, будут иметь значения

$$x_r = x - wt, \qquad y_r = y, \qquad z_r = z. \tag{284}$$

Введем теперь вместо x_r, y_r, z_r новые независимые переменные, отличающиеся от этих «относительных» координат некоторыми множителями, которые для всей системы имеют постоянное значение. Полагая

$$\frac{c^2}{c^2 - w^2} = k^2, \tag{285}$$

я определяю новые переменные уравнениями[1])

$$x' = klx_r, \quad y' = ly_r, \quad z' = lz_r, \tag{286}$$

или

$$x' = kl(x - wt), \quad y' = ly, \quad z' = lz; \tag{287}$$

сюда я прибавлю в качестве нашей четвертой независимой переменной

$$t' = \frac{l}{k}\,t - kl\frac{w}{c^2}(x - wt) = kl\left(t - \frac{w}{c^2}\,x\right). \tag{288}$$

Мы опять будем понимать под $\boldsymbol{u}$ скорость относительно подвижных осей, так что составляющие абсолютной скорости могут быть представлены так:

$$\boldsymbol{u}_x + w, \quad \boldsymbol{u}_y, \quad \boldsymbol{u}_z;$$

введем, далее, новый вектор $\boldsymbol{u}'$ с составляющими

$$\boldsymbol{u}'_x = k^2\boldsymbol{u}_x, \quad \boldsymbol{u}'_y = k\boldsymbol{u}_y, \quad \boldsymbol{u}'_z = k\boldsymbol{u}_z. \tag{289}$$

Положим подобным же образом

$$\rho' = \frac{1}{kl^3}\,\rho \tag{290}$$

---

[1]) Примечание **72***.

и введем два новых вектора $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, определяемых уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{d}'_x=\frac{1}{l^2}\boldsymbol{d}_x,\ \boldsymbol{d}'_y=\frac{k}{l^2}\left(\boldsymbol{d}_y-\frac{w}{c}\boldsymbol{h}_z\right), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{d}'_z=\frac{k}{l^2}\left(\boldsymbol{d}_z+\frac{w}{c}\boldsymbol{h}_y\right), \\ &\boldsymbol{h}'_x=\frac{1}{l^2}\boldsymbol{h}_x,\ \boldsymbol{h}'_y=\frac{k}{l^2}\left(\boldsymbol{h}_y+\frac{w}{c}\boldsymbol{d}_z\right), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{h}'_z=\frac{k}{l^2}\left(\boldsymbol{h}_z-\frac{w}{c}\boldsymbol{d}_y\right). \end{aligned}\right\} \quad (291)$$

Тогда основные уравнения принимают вид[1])

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}'\boldsymbol{d}'=\left(1-\frac{w\boldsymbol{u}'_x}{c^2}\right)\rho', \\ &\operatorname{div}'\boldsymbol{h}'=0, \\ &\operatorname{rot}'\boldsymbol{h}'=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\boldsymbol{d}'}{\partial t'}+\rho'\boldsymbol{u}'\right), \\ &\operatorname{rot}'\boldsymbol{d}'=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{h}'}{\partial t'}. \end{aligned}\right\} \quad (292)$$

Смысл символов div′, rot′ и grad′ (последним мы будем пользоваться в дальнейшем) тот же, который мы раньше придавали div, rot, grad с тем единственным различием, что производные по x, y, z, взятые при постоянном t, заменены производными x', y', z' (при постоянном t')[2]).

Что касается силы $\boldsymbol{f}$, с которой эфир действует на единицу электрического заряда, ее составляющие даются выражениями

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{f}_x=l^2\boldsymbol{d}'_x+l^2\cdot\frac{1}{c}(\boldsymbol{u}'_y\boldsymbol{h}'_z-\boldsymbol{u}'_z\boldsymbol{h}'_y)+l^2\frac{w}{c^2}(\boldsymbol{u}'_y\boldsymbol{d}'_y+\boldsymbol{u}'_z\boldsymbol{d}'_z), \\ &\boldsymbol{f}_y=\frac{l^2}{k}\boldsymbol{d}'_y+\frac{l^2}{k}\cdot\frac{1}{c}(\boldsymbol{u}'_z\boldsymbol{h}'_x-\boldsymbol{u}'_x\boldsymbol{h}'_z)-\frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}\boldsymbol{u}'_x\boldsymbol{d}'_y, \\ &\boldsymbol{f}_z=\frac{l^2}{k}\boldsymbol{d}'_z+\frac{l^2}{k}\cdot\frac{1}{c}(\boldsymbol{u}'_x\boldsymbol{h}'_y-\boldsymbol{u}'_y\boldsymbol{h}'_x)-\frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}\boldsymbol{u}'_x\boldsymbol{d}'_z. \end{aligned}\right\} \quad (293)$$

---

1) Примечание 79.

2) В статье «Über das Doppler'sche Princip», опубликованной в 1887 г. (Gött. Nachr., стр. 41) и, к моему сожалению, остававшейся до последнего времени вне моего внимания, Фохт приме-

Поле, образуемое системой электронов, можно и здесь определить через посредство скалярного потенциала φ' и вектор-потенциала $\mathbf{a}'$. Если эти последние даются уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\Delta'\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} &= -\rho',\\ \Delta'\mathbf{a}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{a}'}{\partial t'^2} &= -\frac{1}{c}\rho'\mathbf{u}',\end{aligned}\right\} \tag{294}$$

в которых символ Δ' обозначает

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2},$$

получаем [1]:

$$\mathbf{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial t'} - \operatorname{grad}'\varphi' + \frac{w}{c}\operatorname{grad}' a'_x, \tag{295}$$

$$\mathbf{h}' = \operatorname{rot}'\mathbf{a}'. \tag{296}$$

Аналогия между этими преобразованиями и теми, которыми мы пользовались раньше, бросается в глаза. Вышеприведенные формулы переходят в формулы §§ 44 и 45 при отбрасывании всех членов порядка выше первого по отношению к $\frac{w}{c}$, причем как k, так и l принимают значение 1. В настоящей более общей теории за местное время следует принять переменную t', определяемую уравнением (288).

Особенно интересно, что окончательные формулы (292) и (294)—(296) имеют в точности тот же самый вид, что и те, которые были нами выведены для малых значений w. Различие по сравнению с уравнениями для неподвижной системы заключается в тех же чертах, которые отмечены нами в §§ 44 и 45; но что касается самого вида уравнений, то введение больших скоростей поступательного движения не влечет за собой никаких новых усложнений.

нил к уравнениям вида (6) (§ 3 этой книги) преобразование, эквивалентное формулам (287) и (288). Идея такого преобразования, которым мы пользовались выше (и в § 44), могла бы быть поэтому заимствована от Фохта; в его статье содержится доказательство того, что преобразование это не изменяет вида уравнений для свободного эфира.

[1]) Примечание 74.

170. Задача значительно упрощается при переходе к электростатической системе, т. е. к системе электронов, не имеющих никакого другого движения, кроме общего поступательного движения w. В этом случае $\mathbf{u}' = 0$ и, следовательно, $\mathbf{h}' = 0$. Скалярный потенциал φ', вектор $\mathbf{d}'$ и электрическая сила $\mathbf{f}$ определяются выражениями

$$\Delta'\varphi' = -\rho', \tag{297}$$

$$\mathbf{d}' = -\operatorname{grad}'\varphi', \tag{298}$$

$$f_x = l^2 d'_x, \qquad f_y = \frac{l^2}{k} d'_y, \qquad f_z = -\frac{l^2}{k} d'_z.$$

Эти уравнения допускают простую интерпретацию. Сравним подвижную систему S, положение точек которой определяется относительными координатами x_r, y_r, z_r, с системой S_0, которая не обладает поступательным движением; при этом каждая точка с координатами x', y', z' в этой системе соответствует точке с координатами x_r, y_r, z_r в системе S, так что на основании (286) S переходит в S_0, если ее размеры, параллельные оси OX, умножить на kl, а размеры, параллельные оси OY и оси OZ, — на l. Тогда, если dS и dS' являются соответствующими элементами объема, получим:

$$dS' = kl^3\,dS, \tag{299}$$

так что, если мы предположим, что соответствующие элементы объема имеют одинаковые заряды, плотность в какой-нибудь точке S_0 будет дана величиной ρ', которая определяется уравнением (290).

Отсюда следует, что уравнение, определяющее скалярный потенциал в S_0, имеет тот же вид, что и уравнение (297), которое мы получили для φ', и что поэтому эта последняя величина в какой-нибудь точке P системы S имеет то же самое значение, что обыкновенный скалярный потенциал в соответствующей точке P_0 системы S_0. Уравнение (298) говорит нам далее, что то же относится и к вектору $\mathbf{d}'$ в точке P и к диэлектрическому смещению в точке P_0. Но, чтобы найти составляющие электрической силы в S, мы должны умножить значения этих составляющих $\mathbf{d}'$

на l^2, $\frac{l^2}{k}$, $\frac{l^2}{k}$, тогда как в системе S_0 составляющие электрической силы даются непосредственно составляющими диэлектрического смещения. Поэтому между этими значениями электрических сил имеет место соотношение, которое лучше всего может быть выражено посредством формулы

$$F(S) = \left(l^2, \ \frac{l^2}{k}, \ \ \frac{l^2}{k}\right) F(S_0), \tag{300}$$

где в скобки заключены коэффициенты, на которые мы должны умножить составляющие силы в S_0, чтобы получить составляющие силы в S. Так как соответствующие элементы заряжены одинаково, то же соотношение имеет место по отношению к силам, действующим на соответствующие электроны.

Следует заметить, что соответствующие электроны наших двух систем занимают соответствующие части пространства и что заряды являются одинаковыми, но сами электроны геометрически друг другу не подобны; если электроны в системе S имеют сферическую форму, электроны в S_0 представляются удлиненными эллипсоидами.

Будем также помнить, что потенциал в точке P_0 системы S и, следовательно, величину φ' в соответствующей точке P системы S можно вычислить при помощи формулы

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho' \, dS'}{r'}, \tag{301}$$

где через r' мы обозначили расстояние между точкой Q_0 элемента dS' и точкой P_0. Интегрирование должно распространяться по всем элементам системы S_0, в которых имеется заряд.

Сравнение движущейся системы с неподвижной нам весьма пригодится в последующей части этой главы; поэтому будет полезно установить раз навсегда, что, если мы говорим про S и S_0, мы всегда подразумеваем две системы с вышеописанными свойствами, причем индекс 0 всегда будет обозначать неподвижную систему.

171. Имея в виду последующие рассуждения, будет полезно изложить вышеприведенные положения еще в несколько ином виде. Оставим временно в стороне воображаемую систему S_0 и сосредоточим наше внимание на системе S, которая в действительности одна нас и интересует. Для этой системы мы можем вывести, что мы уже и делали, величины x', y', z'; мы можем даже пользоваться ими для определения положения точки, так как они связаны определенным образом с величинами x_r, y_r, z_r. Назовем их *эффективными* координатами и назовем *эффективным* расстоянием между двумя точками с эффективными координатами x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2 выражение

$$r' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2}.$$

Если dx_r, dy_r, dz_r суть бесконечно малые приращения относительных координат, соответствующие приращения эффективных координат будут:

$$dx' = kl\,dx_r, \qquad dy' = l\,dy_r, \qquad dz' = l\,dz_r;$$

параллелепипед с ребрами dx, dy, dz будет, конечно, вполне определен этими приращениями dx', dy', dz'. Если вместо обычной единицы объема мы выберем единицу, в kl^3 раз меньшую, объем параллелепипеда будет выражаться произведением $dx'dy'dz'$; элемент любой формы, который в обычных единицах дается величиной dS, будет при новых единицах измерения иметь объем

$$dS' = kl^3\,dS. \tag{302}$$

Этот объем совпадает с объемом dS' в уравнении (299) но символ получил теперь другое значение. Так как я уже несколько раз пользовался термином «эффективный», я теперь — только в целях единообразия, не придавая никакого более глубокого значения этим словам, — буду называть dS' «эффективным» элементом объема. Мы будем также говорить, что какая-нибудь точка внутри dS принадлежит в то же время и эффективному элементу dS'.

Наконец, если заряд $\rho\,dS$ элемента dS разделить на численное значение эффективного элемента dS', получится величина ρ', даваемая уравнением (290). По этой причине будет, пожалуй, целесообразно называть ρ' эффективной плотностью заряда.

Теперь будет ясно, что операции, входящие в символ в правой части уравнения (301), могут быть описаны в терминах, относящихся только к действительной системе, причем знаменатель r' является эффективным расстоянием между точкой эффективного элемента dS' и точкой P, для которой мы должны вычислить φ'. Когда мы определим этот потенциал, его частные производные по эффективным координатам, взятые с обратным знаком, будут представлять собой составляющие вектора $\mathfrak{d}'$.

Делать различие между эффективными и «истинными» координатами, между эффективными и «истинными» элементами объема имеет смысл только для движущихся систем; раз $w = 0$, мы сейчас же получим:

$$x' = x_r = x, \quad y' = y_r = y, \quad z' = z_r = z, \quad dS' = dS, \quad \rho' = \rho$$

и т. д. Но как раз в силу этих равенств мы и в случае неподвижной системы можем говорить про эффективные координаты, эффективную плотность и т. д.; мы только не должны забывать, что в этом случае эти величины совпадают с истинными координатами, истинной плотностью и т. д. Равным образом мы можем всегда говорить про вектор $\mathfrak{d}'$, помня, что он при отсутствии поступательного движения совпадает с вектором $\mathfrak{d}$.

Я остановился несколько подробнее на этих вопросах терминологии, так как в сложных задачах надлежащий выбор обозначений имеет большое значение. Установленная нами терминология позволяет нам в кратких словах сконцентрировать то, что было сказано в предыдущих параграфах про системы S и S_0, а именно: в двух электростатических системах, из которых одна движется, а другая находится в покое и в которых эффективная плотность электрических зарядов является одной и той же функцией эффективных координат, вектор $\mathfrak{d}'$ будет иметь в соответствующих точках одинаковое значение, и силы будут связаны друг с другом соотношением (300).

172. После этого отступления вернемся к той гипотезе, при помощи которой я пытался объяснить результат майкельсоновского опыта. Мы поймем возможность постулируемого изменения размеров, если будем помнить, что форма твердого тела зависит от сил, действующих между его молекулами, и что, по всей вероятности, эти силы передаются через окружающий эфир способом, более или менее похожим на распространение черэз эту среду электромагнитных действий. Стоя на этой точке зрения, естественно предположить, что, подобно электромагнитным силам, молекулярные притяжении и отталкивания тоже получают некоторое изменение при сообщении телу поступательного движения; в результате весьма легко может последовать изменение размеров тела.

Весьма замечательно, что мы придем в точности к такой величине изменения, которую мы постулировали в § 168, если распространим на молекулярные взаимодействия результат, полученный для электрических сил, т. е. если при сравнении двух систем молекул S и S_0, в которых частички обладают одинаковыми эффективными координатами, мы примем, что и на молекулярные силы можно распространить соотношение (300).

В самом деле, согласно этому уравнению при $F(S_0) = 0$ $F(S)$ тоже равно нулю, так что если в системе S_0 каждая молекула находится в равновесии под действием сил, испытываемых ею со стороны других молекул, то же самое будет справедливо и для системы S. Поэтому, считая доказанным, что может существовать только одно положение равновесия частичек, мы можем утверждать, что в движущейся системе S молекулы сами собой примут то расположение, которое согласно (286) соответствует расположению в S_0.

Так как x', y', z' суть истинные координаты системы S_0, а x_r, y_r, z_r являются относительными координатами в S, изменение размеров в различных направлениях дается коэффициентами в выражении (286); два отрезка прямых, о которых мы говорили в § 168, будут относиться друг к другу, как

$$\frac{L_2}{L_1} = k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - w^2}};$$

это выражение совпадает со значением (283), если пренебречь величинами порядка выше второго.

173. Интересно теперь разобрать вопрос, следует ли из наших допущений, что тела, размеры и форма которых в большей или меньшей степени зависят от их молекулярных движений, будут подвержены таким же изменениям размеров. Предварительно я рассмотрю систему точек, обладающих наряду с общим поступательным движением $\mathfrak{w}$ некоторыми скоростями $\mathfrak{u}$. Для каждой из них координаты x_r, y_r, z_r являются определенными функциями времени t; далее,

$$\frac{dx_r}{dt} = \mathfrak{u}_x, \qquad \frac{dy_r}{dt} = \mathfrak{u}_y, \qquad \frac{dz_r}{dt} = \mathfrak{u}_z.$$

Но мы можем также сказать, что эффективные координаты каждой точки x', y', z' являются функциями местного времени t', которое я буду в дальнейшем также называть эффективным временем; мы можем выразить производные от x', y', z' по t' через производные от x_r, y_r, z_r по t. При этом я буду предполагать, что скорости $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$ настолько малы, что можно пренебречь членами порядка $\frac{|\mathfrak{u}|}{c}$ по сравнению с теми, которые будут написаны далее. Тогда в результате получаем[1]):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx'}{dt'} = k^2\frac{dx_r}{dt}, \qquad \frac{dy'}{dt'} = k\,\frac{dy_r}{dt}, \qquad \frac{dz'}{dt'} = k\,\frac{dz_r}{dt},\\
&\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{k^3}{l}\,\frac{d^2x_r}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{k^2}{l}\,\frac{d^2y_r}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{k^2}{l}\,\frac{d^2z_r}{dt^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{303}$$

Первый ряд уравнений показывает, что

$$\frac{dx'}{dt'}, \quad \frac{dy'}{dt'}, \quad \frac{dz'}{dt'}$$

являются составляющими вектора $\mathfrak{u}'$, который был нами определен в § 169, а из второго ряда вытекает, что, если мы имеем две системы точек S и S_0, движущиеся таким образом, что в обеих системах эффективные координаты

---

[1]) Примечание **75**.

являются одинаковыми функциями эффективного времени, мы получим для ускорений j следующее соотношение:

$$j(\mathrm{S}) = \left(\frac{l}{k^3},\ \frac{l}{k^2},\ \frac{l}{k^2}\right) j(\mathrm{S}_0). \tag{304}$$

Эта формула, в которой обозначения приняты те же, что и в (300), непосредственно следует из (303), так как составляющие ускорения в системе S_0 суть

$$\frac{d^2x'}{dt'^2},\quad \frac{d^2y'}{dt'^2},\quad \frac{d^2z'}{dt'^2},$$

а в системе S —

$$\frac{d^2x_r}{dt^2},\quad \frac{d^2y_r}{dt^2},\quad \frac{d^2z_r}{dt^2}.$$

174 [1]). Остается применить эти рассуждения к телу, в котором происходят молекулярные движения. При обыкновенной температуре скорости этих движений малы по сравнению со скоростью света, так что приближения, которыми мы пользовались в вышеприведенных формулах, повидимому, являются законными. На том же основании мы можем считать, что взаимодействия между молекулами не зависят от скоростей u и определяются исключительно относительными положениями и поступательной скоростью w.

Пусть S и S_0 будут две системы молекул, движущиеся таким образом, что эффективные координаты обеих систем являются одинаковыми функциями эффективного времени. Остановим наше внимание на тех положениях, которые две соответствующие частички P и P_0 занимают в определенный момент времени,— скажем, это будет t' по эффективному времени. Положим, что мы хотим узнать, каковы будут в тот же момент времени положения соседних частичек в S_0, которые настолько близки к P_0, что могут оказывать на нее заметное влияние; тогда нам нужно только рассмотреть значения их координат x', y', z' для того же самого значения t' эффективного времени, которое в данном случае совпадает с истинным. В движущейся системе S

[1]) Подробнее о разных вопросах, разбираемых в этом параграфе, см. примечание 75*.

дело обстоит иначе. Здесь те моменты, для которых эффективное (т. е. теперь местное) время имеет определенное значение $\underline{t}'$ для различных точек, *не совпадают* друг с другом; это значительно усложнило бы сравнение S и S_0, если бы мы не имели дела со сравнительно медленными молекулярными движениями, — упрощение, к которому мы уже прибегали. При этих условиях мы можем, я думаю, преодолеть это препятствие. Если Δ обозначает расстояние между двумя близлежащими молекулами P и Q, интервал времени между моментами, когда эффективное время в P и Q принимает выбранное значение $\underline{t}'$, будет порядка $\frac{w\Delta}{c^2}$, как это вытекает из (288). Изменения, которые относительные координаты Q испытывают по отношению к P за такой промежуток времени, порядка величины $\frac{w\,|u|\,\Delta}{c^2}$, или, по сравнению с Δ, порядка $\frac{w\,|u|}{c^2}$. Соответствующие изменения составляющих силы, действующей между P и Q, того же порядка малости по сравнению с самой силой; ими поэтому можно пренебречь, так как $\frac{|u|}{c}$ весьма мало. Другими словами, когда мы будем искать силу, действующую на молекулу P, мы можем считать одновременными положения, занимаемые окружающими частичками в те моменты времени, когда их местные времена имеют значения $\underline{t}'$. В силу нашего предположения относительные координаты в этих положениях связаны с x', y', z', т. е. с соответствующими координатами в S_0, отношениями, определяемыми (286), так что можно сказать, что внутри небольшого участка, содержащего P и действующие на него молекулы, размеры тела изменяются таким образом, как мы уже неоднократно указывали. Отсюда мы заключаем, что силы, действующие на соответствующие частички в S и S_0, подчиняются соотношению (300).

С другой стороны, мы имеем соотношение (304), связывающее ускорения. Если бы в (304) и (300) мы имели тело с одним и тем же отношением, мы могли бы сделать следующее заключение: если состояние движения в S_0

является возможным, так что для каждой частички сила, действующая на нее, равна произведению из массы на ускорение, и если в обеих системах частичка имеет одну и ту же массу, то состояние движения в первой системе, соответствующее состоянию движения во второй системе, тоже является возможным.

На самом деле, однако, отношения в (304) и (300) не равны друг другу. Вышеприведенные соображения не могут поэтому привести нас к теореме соответствующих состояний в S и S_0, если только мы не откажемся от равенства масс в этих системах. Я думаю, что мы не должны бояться этого шага. Мы видели, что масса свободного электрона является функцией скорости, так что, если частичка уже обладает скоростью $\mathfrak{w}$ (эта скорость есть поступательная скорость того тела, к которому эта частичка принадлежит), то сила, потребная для изменения скорости, будет вследствие этого иметь другое значение; вы помните, далее, что нам пришлось также ввести различие между продольной и поперечной массой. После того как мы уже распространили на молекулярные взаимодействия правило, выведенное для электрических сил, с нашей стороны не будет слишком смелым шагом вообразить себе, что и массы молекул могут испытывать изменение при поступательном движении, или даже представить себе две массы: одну m' (продольную), к которой мы должны прибегать при рассмотрении ускорений параллельно OX, и другую m'' (поперечную), которая выступает на сцену, когда мы имеем дело с ускорением, направленным или по OY, или по OZ.

Деля друг на друга отношения (300) и (304), мы видим, что если m_0 есть масса неподвижной молекулы, в формулах

$$m' = \left(l^2 : \frac{l}{k^3}\right) m_0, \qquad m'' = \left(\frac{l^2}{k} : \frac{l}{k^2}\right) m_0$$

или

$$m' = k^3 l m_0, \qquad m'' = k l m_0 \tag{305}$$

содержатся допущения, необходимые для установления такой теоремы: в двух системах S и S_0 могут происходить молекулярные движения такого рода, что в обоих случаях эффективные координаты молекул являются одинаковыми функциями эффективного времени[1]).

Если теперь молекулы S_0, совершая свое неправильное движение, все время остаются внутри поверхности, имеющей постоянное положение, молекулы в S тоже будут все время заключены в соответствующую поверхность, т. е. в такую поверхность, которая определяется таким же уравнением относительно x', y', z'. Поэтому размеры ограничивающей поверхности как при наличии молекулярных движений, так и без них испытывают одинаковые изменения.

Этот результат может быть распространен на тела, размер и форма которых частью определяются внешними силами, как, например, давлением со стороны прилежащих молекул, при том условии, однако, что эти силы изменяются так же, как силы взаимодействия между частичками самого тела.

175. Мы подготовлены теперь к теореме, касающейся соответственных состояний; при электромагнитных колебаниях она подобна теореме § 162, но имеет более широкое значение. К введенным ранее допущениям я добавлю два новых, а именно: 1) что упругие силы, управляющие колебательными движениями электронов, подчиняются соотношению (300) и 2) что продольная и поперечная массы электронов m' и m'' отличаются от массы m_0 для неподвижных электронов и связаны с ней соотношениями (305). Теорема заключается в том, что в двух системах S и S_0, из которых одна находится в движении, а другая неподвижна, могут существовать такие движения, что не только эффективные координаты, определяющие положения молекул, являются в обоих случаях одной и той же функцией эффективного времени (так что поступательное движение связано с изменением размеров, о котором мы говорили), но что это же самое правило имеет место и для эффективных координат отдельных электронов. Мало того, оказывается, что составляющие векторов $\mathbf{d}'$ и $\mathbf{h}'$ получают в обеих системах S и S_0 одинаковое выражение через x', y', z', t'.

---

[1]) Примечание **75***.

При доказательстве мы будем считать, что смещения электронов из их положений равновесия и скорости колебаний являются малыми величинами, квадратами и произведениями которых можно пренебречь. Мы не будем также принимать во внимание сопротивление, которое стремится вызвать затухание колебаний.

Пусть M и M_0 будут две соответствующие частички в системах S и S_0; вычислим для этих частичек при определенном значении эффективного времени, например $\underline{t'}$, значение вектора $\boldsymbol{p}'$, составляющие которого суть

$$p'_x = \sum ex', \quad p'_y = \sum ey', \quad p'_z = \sum ez', \tag{306}$$

а суммы распространены на все электроны рассматриваемой частички. Если мы предположим, что положения и движения электронов таковы, как это требуется по условиям теоремы, окажется, что вектор $\boldsymbol{p}'$ имеет одинаковое значение как для M, так и для M_0. Для последней частички $\boldsymbol{p}'$ представляет собой, очевидно, электрический момент для заданного времени. Что касается частички M, следует заметить, что если мы вычислим суммы для заданного момента эффективного времени $\underline{t'}$ для каждого электрона, значения x', y', z' в суммах не будут, строго говоря, представлять координаты, которые различные электроны будут иметь в один и тот же момент. В силу того, однако, что величина скорости колебаний весьма мала, мы можем упростить смысл сумм, понимая под x', y', z' эффективные координаты нескольких электронов, какими они являются в один и тот же момент времени, именно в тот момент, когда эффективное время, взятое для определенной точки молекулы, которую можно назвать ее центром, принимает определенное частное значение $\underline{t'}$. Так как составляющие момента в точке M в этот момент времени можно представить выражениями

$$p_x = \sum ex_r, \quad p_y = \sum ey_r, \quad p_z = \sum ez_r, \tag{307}$$

мы тогда получим в силу (286)

$$p'_x = klp_x, \quad p'_y = lp_y, \quad p'_z = lp_z.$$

Можно показать, что значения потенциалов φ' и $\boldsymbol{a}'$, о которых мы говорили в § 169, даются уравнениями, подобными (35) и (36):

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r'}[\rho']\, dS',$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{1}{r'}[\rho'\boldsymbol{u}']\, dS',$$

где r' есть эффективное расстояние между рассматриваемой точкой P и какой-нибудь точкой эффективного элемента dS'. Квадратные скобки обозначают, что если мы хотим определить φ' и $\boldsymbol{a}'$ для значения эффективного времени t', мы должны под ρ' и $\boldsymbol{u}'$ понимать значения этих величин в dS' в эффективный момент времени $t' - \frac{r'}{c}$.

При помощи этих формул легко показать, что электромагнитное поле, производимое молекулой, определяется весьма просто при помощи вектора $\boldsymbol{p}'$, который можно назвать эффективным моментом. Окончательные формулы, имеющие тот же вид, что и наши прежние уравнения (271) и (272), будут [1]:

$$\boldsymbol{d}' = -\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\frac{[\boldsymbol{p}']}{r'} + \\ + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[\boldsymbol{p}'_x]}{r'} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{[\boldsymbol{p}'_y]}{r'} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{[\boldsymbol{p}'_z]}{r'}\right\}, \qquad (308)$$

$$\boldsymbol{h}' = \frac{1}{4\pi c}\operatorname{rot}'\left\{\frac{1}{r'}[\dot{\boldsymbol{p}}']\right\};$$

здесь r' есть эффективное расстояние между центром молекулы и рассматриваемой точкой (x', y', z'). Квадратные скобки обозначают, что, если мы хотим узнать значения $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$ для того момента времени, в который местное время, относящееся к этой точке, имеет значение t', мы должны взять значения $\boldsymbol{p}'_x$, $\boldsymbol{p}'_y$, $\boldsymbol{p}'_z$ для того момента, когда местное время центра молекулы равно

$$t' - \frac{r'}{c}.$$

---

[1]) Примечание **76**.

Точка обозначает дифференцирование по t'; эти уравнения относятся в одинаковой мере как к системе S_0, так и к S.

176. Остановим теперь наше внимание на какой-нибудь молекуле M тела S и том единственном подвижном электроне, который согласно нашему предположению в ней содержится. Поле, образуемое в M всеми другими молекулами тела, может быть представлено выражениями $\sum \boldsymbol{d}'$ и $\sum \boldsymbol{h}'$ (см. § 160), но к ним мы должны добавить еще поле, вызываемое причинами, лежащими вне тела, и представляемое уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}' \boldsymbol{d}_0' = 0, \\ &\operatorname{div}' \boldsymbol{h}_0' = 0, \\ &\operatorname{rot}' \boldsymbol{h}_0' = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{d}}_0', \\ &\operatorname{rot}' \boldsymbol{d}_0' = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{h}}_0', \end{aligned}\right\} \tag{309}$$

которые легко получить, если в формуле (292) положить $\rho' = 0$.

Найдя полные значения $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, можно воспользоваться уравнениями (293), которые, впрочем, можно заменить следующими выражениями:

$$\boldsymbol{f}_x = l^2 \boldsymbol{d}_x', \qquad \boldsymbol{f}_y = \frac{l^2}{k}\boldsymbol{d}_y', \qquad \boldsymbol{f}_z = \frac{l^2}{k} d_z'. \tag{310}$$

В самом деле, поскольку векторы $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$ вызываются колебаниями в других молекулах тела, они пропорциональны амплитудам, так что можно пренебречь всеми членами, в которых их составляющие умножаются на $\boldsymbol{u}_x'$, $\boldsymbol{u}_y'$ или $\boldsymbol{u}_z'$. Соответствующие члены с составляющими $\boldsymbol{d}_0'$ и $\boldsymbol{h}_0'$ тоже могут быть опущены, если интенсивность внешнего поля достаточно мала, как это может быть, например, в том случае, когда поле вызывается колебаниями весьма малой амплитуды в источнике света.

Возвращаясь к сравнению наших двух систем, мы можем достичь нашей цели в нескольких словах. На основании того, что мы знаем об ускорениях, и того, что мы допустили относительно масс, ясно, что состояние, которое мы представили себе, может существовать в обеих системах — как в S, так и в S_0, если все силы, действующие на электроны, удовлетворяют условию (300). Для упругих сил мы это допустили; для электрических сил мы можем это вывести из уравнений (310), (308) и (309). Так как эффективные моменты являются одинаковыми функциями t' в соответствующих частичках систем S и S_0, векторы $\sum \mathbf{d}'$ тоже будут для соответствующих точек обладать этим свойством; мы можем предположить, что это же будет иметь место и по отношению к вектору $\mathbf{d}_0'$, так как одна и та же совокупность уравнений (309) служит для определения как его, так и $\mathbf{h}_0'$ в той и другой системе. Так как составляющие силы, действующие на единицу заряда, даются $\mathbf{d}_x'$, $\mathbf{d}_y'$, $\mathbf{d}_z'$ для S_0 и формулами (310) для S, условие (300) оказывается действительно выполненным.

177. На основании обобщенной теоремы о соответственных состояниях мы можем прийти теперь к тем же заключениям, которые мы вывели из ее более узкой формулировки (§ 165). Следует, однако, обратить внимание на разницу частот между соответствующими колебаниями в S и S_0. Если для определенных значений эффективных координат, т. е. в определенной точке системы, какая-нибудь величина изменяется по закону $\cos nt'$, n будет обозначать частоту в неподвижной системе, ибо здесь t' — истинное время, но для движущейся системы мы получим:

$$\cos nt' = \cos n\left(\frac{l}{k} t - kl \frac{w}{c^2} x_r\right),$$

так что здесь частота в определенной точке системы имеет значение

$$\frac{l}{k} n.$$

Замечательно, что когда источник света является частью системы, участвуя в ее поступательном движении со скоростью $\mathfrak{w}$, то действиями, происходящими в излучающих частичках, будет вызываться как раз эта частота, если эти действия таковы, что для неподвижного источника света частота имела бы значение n. Во всяком случае, это оказывается верным, если мы сделаем естественное предположение, что в источнике света массы электронов и упругие силы, действующие на них, изменяются по тому же самому закону, как в теле, через которое свет проходит. Тогда мы можем утверждать, что и в источнике света эффективные координаты электронов могут быть одинаковыми функциями эффективного времени независимо от того, движется ли источник света или находится в покое. Если в обоих случаях колебания могут быть представлены формулами, содержащими множитель nt', частота будет иметь значения n для неподвижного источника света и $\frac{l}{k}n$ для движущегося. Это показывает, что во всех опытах, производимых с земными источниками света, все явления будут в точности соответствовать тем явлениям, которые мы наблюдали бы, если бы пользовались тем же источником света на неподвижной планете; ни ход относительных лучей, ни положение интерференционных полос, ни вообще распределение света и темноты не изменятся.

Нечто иное мы получаем при пользовании небесным источником света. В этом случае относительная частота n в какой-нибудь точке нашего прибора равна частоте источника света, измененной согласно принципу Допплера (такого изменения, однако, не будет при пользовании солнечным светом, так как расстояние от Солнца до Земли можно считать постоянным); явления будут соответствовать тем, которые происходят в неподвижной системе с частотой $\frac{k}{l}n$. Поэтому в среде, обладающей дисперсией, пути относительных лучей, наблюдаемых для линий D натрия в спектре Солнца и в спектре натриевого пламени, не будут совпадать в точности. Если, предполагая, что Солнце неподвижно по отношению к эфиру, мы обозначим через n относительную частоту в первом случае, во втором она будет иметь значение $\frac{l}{k}n$. Едва ли следует добавлять, что этот вопрос представляет чисто теоретический интерес, так как ни в одном явлении, поддающемся точному наблюдению, нельзя заметить изменения частоты порядка $\frac{w^2}{c^2}$.

Далее, следует отметить, что если мы предполагаем путем опыта обнаружить какое-нибудь влияние поступательного движения Земли и для этого вращаем наш прибор или повторяем наши наблюдения через несколько часов, в течение которых прибор вследствие суточного движения Земли повертывается на некоторый угол, мы имеем при этом дело с одной и той же относительной частотой (каков бы ни был источник света). Эта постоянная частота ν будет соответствовать определенной частоте $\frac{k}{l}\nu$ в неподвижной системе; вращение прибора не произведет никакого эффекта, как и в том случае, если бы мы поворачивали наши приборы на теле, находящемся в покое, и пользовались при этом светом частоты $\frac{k}{l}\nu$.

Но, может быть, я уделяю слишком много времени этим тонким вопросам. Следует только особенно подчеркнуть, что наша теорема объясняет, почему Рэлею и Брэсу не удалось обнаружить двойного лучепреломления. Пучок света, в опытах последнего из названных физиков воспринимаемый наблюдателем, состоял из двух частей; оба эти пучка распространялись рядом, были одинаково поляризованы и имели одинаковую интенсивность, несмотря на то, что они проходили через различные среды. Ясно, что раз такое тождество двух пучков наблюдается в неподвижной системе, оно по нашей теореме должно наблюдаться также и в соответственном состоянии движущейся системы.

178. При сравнении двух электрических систем S и S_0 (§ 171) мы установили, что в обеих системах эффективная плотность заряда должна быть одной и той же функцией эффективных координат; это необходимо влечет за собой следствие, что электроны в двух системах имеют неодинаковую форму. В выкладках § 175 мы, однако, не делали такого предположения, ограничиваясь теми двумя допущениями, которые приведены в начале упомянутого параграфа. В самом деле, рассматривая движение электронов, мы имеем дело только с их зарядами, их массами и действующими на них упругими силами; все остальные подробности для наших окончательных результатов не имеют значения. Следовательно, мы можем с таким же правом предположить, что электроны не меняют своей формы и величины, когда тело приводится в движение (хотя размеры самого тела и изменяются при этом вышеописанным способом); нужно только, чтобы необходимые соотношения между упругими силами и массами электронов до того, как тело приведено в движение, и после этого остались одинаковыми.

Для теории, которая пытается объяснить явление при помощи этих мельчайших частичек, простейшим является тот путь, при котором электроны признаются совершенно неизменяемыми, как, скажем, абсолютно твердые шарики с равномерно распределенным поверхностным зарядом. Это представление было разработано Абрагамом; на нем основаны многие формулы, приведенные в главе I. К несчастью, это представление расходится с нашей теоремой соответственных состояний. По этой теореме, как видно на основании (305), продольная и поперечная массы электрона относятся, как

$$\frac{m'}{m''}=k^2=\frac{c^2}{c^2-w^2},$$

или, с точностью до величин второго порядка,

$$\frac{m'}{m''}=1+\frac{w^2}{c^2},$$

тогда как на основании формул (68) и (69) мы получили бы с той же степенью приближения:

$$\frac{m'}{m''}=1+\frac{4}{5}\frac{w^2}{c^2}.$$

179. Это обстоятельство и заставило меня заняться вопросом, что произойдет с теорией, если предполагать, что электроны подвержены таким же деформациям, как и тела, в которых они содержатся. При таком предположении получается правильное значение отношений между величинами m_0, m', m'', если только приписать значение 1 коэффициенту l, который мы до сих пор оставляли неопределенным.

Электромагнитная масса деформируемого электрона легко выводится из теории электромагнитного количества движения, так как мы всегда можем применять общие формулы § 24, каковы бы ни были изменения формы и размеров электрона во время его движения. Вычисляя электромагнитное количество движения G и скорость его изменения $\dot{G}$, мы получим выражение для силы, действующей на электрон; далее, деля ее на ускорение, находим электромагнитную массу, продольную или поперечную.

При наших выкладках мы припишем электромагнитному количеству движения то значение, которое оно имело бы, если бы электрон постоянно двигался со скоростью, существующей в данный момент времени; в одном из дальнейших параграфов мы обсудим, насколько такой прием является законным.

Определение количества движения будет теперь даже проще, чем в случае твердого шара. Мы видели, что поле движущейся электростатической системы известно, если дано поле другой системы, которая предполагается неподвижной и размеры которой определенным образом отличаются от размеров движущейся системы. Пусть теперь наша система состоит из одного электрона и пусть, пока он находится в покое, он имеет шарообразную форму и заряд его равномерно распределен по поверхности; пусть при движении он превращается в эллипсоид согласно (286); тогда оказывается, что неподвижная система, к рассмотрению которой сводится эта задача, есть как раз первоначальный шар, так что поле определить весьма легко.

Обозначая через e заряд, а через R радиус шара, находим для электромагнитного количества движения, соответствующего скорости w [1]:

$$G| = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} kl w, \tag{311}$$

[1] Примечание 77.

откуда выводим, пользуясь формулами (64) и (65):

$$m' = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\frac{d(kl w)}{dw}, \quad m'' = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} kl,$$

или

$$m' = \frac{d(klw)}{dw} m_0, \quad m'' = klm_0. \tag{312}$$

Последняя формула совпадает со вторым уравнением (305), так что остается одно условие, что значение m' должно быть равно тому, которое было получено при помощи первого из этих уравнений. Отсюда

$$\frac{d(klw)}{dw} = k^3 l,$$

и в силу того, что

$$\frac{d(kw)}{dw} = k^3,$$

получаем:

$$\frac{dl}{dw} = 0, \quad l = \text{const}.$$

Эта постоянная должна равняться единице, так как мы знаем, что $l = 1$ для $w = 0$.

Мы приходим, таким образом, к уточнению гипотезы, предложенной для объяснения результата опыта Майкельсона, а именно: мы должны принять, что движущиеся тела испытывают только сокращение в направлении движения, причем это сокращение определяется коэффициентом k. Сами электроны принимают вид сплюснутых эллипсоидов вращения, которые в предельном случае — при скорости, равной скорости света, — превращаются в круговые диски радиуса R, расположенные нормально к направлению движения.

Все это представилось бы весьма заманчивым, так как дало бы нам возможность предсказать, что никакой опыт, произведенный с земными источниками света, не мог бы обнаружить влияния движения Земли, даже в том случае, если бы он был достаточно чувствителен для открытия явлений не только второго порядка, но вообще любого порядка величины. Но, насколько мы можем судить в настоящий момент, факты противоречат нашей гипотезе [1]).

По этой гипотезе продольная и поперечная массы электрона должны иметь значения

$$m' = k^3 m_0, \qquad m'' = k m_0,$$

или, если мы положим

$$\frac{w}{c} = \beta,$$

$$m' = (1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}} m_0, \qquad m'' = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} m_0. \qquad (313)$$

При увеличении β эти величины возрастают быстрее, чем те, которые были нами найдены раньше для сферического электрона. Поэтому определение $\frac{e}{m''}$ для больших скоростей, которыми обладают β-лучи, дает возможность решить, которая из теорий верна. Кауфман, который уже в 1901 г. [2]) заключил на основании своих исследований по этому вопросу, что величина $\frac{e}{m}$ возрастает весьма заметно, так что массе электрона можно приписать чисто электромагнитное происхождение, повторил свои опыты с чрезвычайной тщательностью и со специальной целью проверить мою гипотезу [3]). Его новые числа совпадают в пределах экспериментальных погрешностей с формулами Абрагама, но расходятся со вторым уравнением (313), так что они решительно противоречат тому представлению о сжимаемом электроне, которое я пытался разработать [4]). Все же, несмотря на то, что, по всей вероятности, нам придется отбросить всю эту гипотезу целиком, стоит, по моему мнению, вникнуть в нее несколько ближе. После этого будет полезно рассмотреть

---

[1]) В настоящее время (1915) этого сказать уже нельзя.

[2]) W. Kaufmann, Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen, Gött. Nachr., Math.-phys. Kl. 1901, стр. 143; Über die elektromagnetische Masse des Elektrons, там же, 1902, стр 291; 1903, стр. 90.

[3]) Kaufmann, Über die Konstitution des Elektrons, Ann. Phys. 19 (1906), стр. 487.

[4]) См., впрочем, примечание 86.

изменение этой гипотезы, предложенное Бухерером и Ланжевеном.

180. В предшествующем определении массы деформируемого электрона мы пользовались электромагнитным количеством движения, но не касались вопроса об энергии. Это было сделано Абрагамом [1]), который нашел, что наряду с обычной электромагнитной энергией электрон должен обладать энергией другого рода, количество которой уменьшается, когда частичка приходит в движение; что это положение правильно, становится ясно, если мы рассмотрим прямолинейное движение электрона, обладающего переменной скоростью. Имеем следующие выражения для массы:

$$m' = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} k^3 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

и для работы движущей силы за элемент времени dt:

$$\frac{e^2}{6\pi c^2 R}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \dot{w} w\, dt, \tag{314}$$

а для электромагнитной энергии [2]):

$$\frac{e^2}{6\pi R}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{e^2}{24\pi R}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{315}$$

Приращение первого члена за время dt в точности равно выражению (314).

Отсюда следует, что должна существовать другая энергия E и притом в таком количестве, что, будучи прибавлена ко второму члену (315), она даст в сумме постоянную величину; это количество энергии определяется поэтому выражением

$$E = \frac{e^2}{24\pi R}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C, \tag{316}$$

где C есть некоторая постоянная.

---

[1]) M. Abraham, Die Grundhypothesen der Elektronentheorie, Phys. Zeitschrift 5 (1904), стр. 576.

[2]) Примечание 78.

181. Пуанкаре [1]) первый заметил — и этим в значительной степени способствовал разъяснению природы этой новой энергии и механизма «сокращения», — что электрон будет находиться в равновесии как в первоначальной, так и в сжатой форме, если ему будут присущи свойства весьма тонкого, идеально гибкого и растяжимого слоя, все части которого втягиваются внутрь нормальным напряжением, имеющим интенсивность

$$S = \frac{e^2}{32\pi^2 R^4}$$

на единицу площади и сохраняющим это значение при какой угодно степени сжатия.

Значение S было выбрано таким, что, пока электрон остается в покое и имеет поэтому вид шара радиуса R, внутренняя сила в точности уравновешивает электромагнитное натяжение снаружи, вызываемое окружающим полем [2]). И вот — в этом и заключается сущность замечания Пуанкаре — электрон, деформированный вышеуказанным образом, будет попрежнему оставаться в равновесии под соединенным действием напряжения S и электромагнитных сил.

Чтобы показать это, обратим наше внимание на составляющие внутреннего напряжения, действующего на элемент поверхности слоя; можно найти их, если умножить S на проекции элемента на плоскости yz, zx, xy. Но при деформации эти проекции умножаются на множители $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}$, откуда видно, что составляющие напряжения изменяются в том же самом отношении, как и составляющие электромагнитной силы [см. (300)], так что равновесие будет сохраняться попрежнему. При устойчивом равновесии электрон необходимо получит соответствующую конфигурацию; электромагнитные силы, с которыми эфир действует на его поверхность, изменяются вследствие движения согласно нашим формулам; наряду с этим на элемент поверхности

---

[1]) H. Poincaré, Sur la dynamique de l'électron, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **21** (1906), стр. 129.

[2]) Примечание **79**.

действуют внутренние силы, которые при движении не изменяются; под влиянием совокупности этих сил электрон и принимает форму сплюснутого эллипсоида.

Соответственно внутренним напряжениям должна существовать некоторая потенциальная энергия U; вышеприведенный результат накладывает условие, чтобы эта энергия была равна выражению (316). В самом деле, если v есть объем эллипсоида, мы, очевидно, можем написать:

$$U = Sv + \text{const} = \frac{e^2}{32\pi^2 R^4}\, v + \text{const},$$

вследствие чего получаем:

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3 \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

182. Абрагам [1]) выдвинул возражение, что я не показал, что электрон, принявший благодаря движению эллипсоидальную форму, будет находиться в состоянии устойчивого равновесия. Замечание вполне справедливое, но я не думаю, чтобы следовало отбросить гипотезу именно по *этой* причине. Доводы Абрагама доказывают только то, что электромагнитные действия и напряжения, о которых я говорил, являются не единственными силами, определяющими конфигурацию электрона.

Если бы они действительно были единственными силами, каждой задаче, касающейся относительного движения частей движущегося эллипсоидального электрона, соответствовала бы другая задача, касающаяся сферического неподвижного электрона, так как силы обоего рода удовлетворяли бы условию (300). Но легко видеть, что при совместном действии напряжений в окружающем поле и постоянного внутреннего напряжения S сферический слой будет находиться в состоянии устойчивого равновесия, поскольку дело касается изменения объема, но по отношению к изменению формы [2]) это равновесие будет неустойчивым. Это же будет верно и по отношению к движущемуся и

[1]) A b r a h a m, цит. выше, стр. 578.

[2]) Примечание **80**.

сплюснутому слою. В последнем случае будет даже наблюдаться неустойчивость ориентации, так как при небольшом повороте электрон будет соответствовать [в том смысле, как это указано в (286)] не первоначальной сфере, но сфере, слегка деформированной.

Несмотря на все это, было бы, по моему мнению, вполне законно придерживаться гипотезы деформируемых электронов, если бы таким путем мы могли действительно продвинуться вперед в понимании явлений. При теоретических рассуждениях о строении этих мельчайших частичек мы не должны забывать, что может быть много таких возможностей, которых мы сейчас не можем себе и представить; весьма вероятно, что имеются другие внутренние силы, служащие для придания системе устойчивости; наконец, возможно, что мы вообще стоим на ложном пути, когда пытаемся применить к отдельным частям электрона наше обычное понятие силы.

Если мы не пожелаем принять специального механизма, предложенного Пуанкаре, мы станем перед следующей альтернативой. Или мы должны смотреть на сферический электрон как на такую материальную систему, между отдельными частями которой действуют отдельные силы, обеспечивающие постоянство его формы и размеров, или же мы просто должны принять это постоянство за некоторый факт, не подлежащий дальнейшему обсуждению. В первом случае форма, размеры и ориентация движущегося эллипсоида тоже будут под действием системы сил поддерживаться постоянными; необходимо при этом, чтобы все они обладали свойством, выражаемым (300). Во втором случае мы должны удовлетвориться простым допущением, без всякого дальнейшего обсуждения, что движущийся электрон имеет эллипсоидальную форму с малой осью по направлению поступательного движения.

183. Я должен коснуться также другого вопроса, связанного с предыдущим. Вычисляя в § 179 массы m' и m'', мы ввели допущение, что для любого момента времени значение электромагнитного количества движения соответствует при стационарном движении той скорости, которая существует в этот момент. В частности, при применении формулы (311) мы молчаливо предполагали, что при криволинейном движении короткая ось электрона все время направлена по касательной к траектории и что при изменении скорости одновременно изменяется также и отношение осей эллипсоида.

Строго говоря, для наших результатов не представляется совершенно необходимым, чтобы ориентация и форма электрона в точности и моментально следовали за изменениями направления и скорости его поступательного движения; можно допустить некоторое запаздывание. Во всяком случае, ясно одно: если мы хотим пользоваться величинами m' и m'' в оптических явлениях, что мы уже и делали, время запаздывания должно быть мало по сравнению с периодом колебания света.

Если мы остановимся на последней альтернативе предыдущего параграфа, мы можем просто принять за данное, что вообще нет никакого запаздывания. Но, если мы предпочтем первую альтернативу, мы уже не можем действовать таким упрощенным способом. Если форма и ориентация электронов определяются силами, мы не можем быть уверены в том, что в каждый данный момент времени имеется состояние равновесия. Даже при постоянном равномерном поступательном движении могут существовать небольшие колебания как размеров, так и ориентации частички, а при переменном режиме, т. е. когда скорость поступательного движения изменяется или по величине, или по направлению, нельзя просто отрицать возможности того запаздывания, о котором мы только что говорили. Здесь мы имеем аналогию с чечевицей маятника, на которую действует переменная сила; известно, что маятник не следует за изменениями этой силы мгновенно. Если, однако, колебания силы происходят весьма медленно по сравнению с собственными колебаниями маятника, можно утверждать с некоторым приближением, что запаздывания не происходит. Подобным же образом можно предполагать, что и электрон находится в каждый момент времени в состоянии равновесия, соответствующем его скорости, если сила меняется в течение промежутка времени, который гораздо больше периода колебаний, могущих происходить под влиянием выравнивающих сил. Если эти колебания происходят гораздо быстрее, чем световые колебания, значения (313) для масс m' и m'' можно вполне надежно применять к электронам тела, через которое проходит световой пучок, и с еще большим правом к свободным электронам, которые отклоняются от своей траектории действием магнитного или электрического поля.

Мы почти ничего не знаем о структуре электрона, а потому, конечно, нельзя еще составить себе никакого представления о периоде его свободных колебаний; но, вероятно, мы будем не слишком далеки от истины, если предположим, что этот период соответствует длине волны такой приблизительно величины, какую имеет диаметр электрона.

Из этих соображений следует, что из идеи о деформируемости электронов вытекает ряд новых проблем. Одной из таких проблем может явиться вопрос о вращении этих частичек. Электрон начинает вращаться, как только магнитная сила, которая на него действует, претерпевает изменение; представляется необходимым составить себе хоть приблизительное понятие об особенностях этого движения, которое может сообщаться в таких случаях нашим сплюснутым эллипсоидам.

184. Как уже было отмечено в § 178, можно составить себе некоторое представление об изменении внутренних сил и, значит, размеров тела (этого вопроса мы касались неоднократно), не распространяя соответственного допущения на самые электроны; поэтому естественно возникает вопрос, не можем ли мы получить удовлетворительную теорию, просто принимая существование твердых сферических электронов. Мы могли бы пойти по этому пути, если бы можно было показать, что разногласие между значениями $\frac{m'}{m''}$, о котором говорилось в конце § 178, не оказывает заметного влияния на наблюдаемые явления. Рассмотрение этого вопроса опять приводит нас к вопросу о двойном лучепреломлении, о котором мы уже говорили.

Простой взгляд на формулу, которой мы пользовались в главе IV при рассмотрении распространения света в системе молекул, убедит нас, что единственным членом, содержащим массу электрона в уравнении (201), является член $m'n^2 = \frac{mn^2}{Ne^2}$. Мало того, если мы ограничимся случаем идеально прозрачных тел (не находящихся под действием внешней магнитной силы) и оставим без внимания сопротивление, испытываемое колебаниями, этот член будет также единственным таким, в который входит частота. Отсюда следует, что все зависит от произведения mn^2 и что изменение m, например в отношении 1 к α, будет равноценно изменению n в отношении 1 к $\alpha^{\frac{1}{2}}$.

Допустим теперь на короткое время, что обе массы электронов, не будучи в точности равны выражениям (313) по крайней мере пропорциональны им, так что, скажем,

$$m' = \alpha k^3 m_0, \qquad m'' = \alpha k m_0, \tag{317}$$

где коэффициент α является некоторой функцией скорости поступательного движения w; он равен единице для $w = 0$ и отличается от единицы на величину второго порядка при малом w. Тогда явления в движущейся системе S и в неподвижной S_0 будут соответствовать друг другу так, как было объяснено выше, если только масса электронов в системе S_0 будет не m_0, а αm_0. Если рассматриваемое тело первоначально было изотропным, изменение массы электронов m_0 до αm_0, конечно, не превратит его в двоякопреломляющее. Отсюда следует, что и движущееся тело, электроны которого обладают массами (317), тоже не будут обладать двойным лучепреломлением. Преломление в нем должно быть обычным, и мы можем быть уверены, что практически все явления в тех опытах, в которых источник света движется вместе с телом, должны протекать совершенно таким же образом, как если бы оно было в покое. Правда, при этом должна появиться разница, эквивалентная той, которая была бы вызвана изменением массы электрона с m_0 до αm_0 или изменением частоты на соответствующую величину (второго порядка), но, конечно, это обстоятельство не может произвести заметного действия.

Рассмотрим, далее, тот случай, когда отношение продольной и поперечной массы электрона равно не k^2, а другой величине. Пусть эти массы будут:

$$m' = h'm_0, \qquad m'' = h''m_0,$$

где h' и h'' суть множители, обладающие теми же свойствами, что и вышеприведенный коэффициент a. Тогда все явления в теле S соответствуют явлениям в теле S_0, в котором массы электронов по отношению к ускорениям, параллельным OX, имеют значения

$$\frac{h'}{k^3} m_0,$$

а по отношению к ускорениям в перпендикулярных к нему направлениях — значения

$$\frac{h''}{k} m_0.$$

В таком теле, без сомнения, должно обнаруживаться двойное лучепреломление; то же самое можно сказать и про соответствующее ему движущееся тело S. Если бы, например, луч света распространялся в направлении, перпендикулярном OX, скажем, вдоль оси OY, скорость распространения имела бы различные значения, смотря по тому, как направлены колебания: параллельно OX или OZ. Если частоту световых колебаний в этом случае обозначить через n, скорость распространения этих колебаний будет такова, как если бы (по теореме, изложенной в начале этого параграфа) частота тех колебаний, которые происходят в одном направлении, имела значение

$$h'^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{3}{2}} n,$$

а в другом

$$h''^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} n,$$

причем в обоих случаях масса имеет одно и то же значение m_0.

185. Для сферического электрона имеем согласно формулам (70) и (71), пренебрегая членами третьего и высших порядков:

$$h' = 1 + \frac{6}{5}\beta^2, \qquad h'' = 1 + \frac{2}{5}\beta^2,$$

и, так как

$$k = 1 + \frac{1}{2}\beta^2,$$

получаем выражения

$$\left(1 - \frac{3}{20}\beta^2\right)n \quad \text{и} \quad \left(1 - \frac{1}{20}\beta^2\right)n,$$

разность между которыми составляет

$$\frac{1}{10}\beta^2 n = 10^{-9}\,n,$$

так как скорость Земли равна одной десятитысячной скорости света. Пользуясь желтым светом, получим, что для воды изменение показателя преломления, вызываемое этим изменением частот, будет порядка $2 \cdot 10^{-11}$; такова, следовательно, будет ожидаемая разность между двумя главными показателями преломления в опыте по двойному лучепреломлению.

Едва ли стоит особо указывать, что наблюдения Рэлея [1]) и Брэса [2]) производились таким образом, что двойное лучепреломление, при котором одно из главных направлений колебаний было бы параллельно движению Земли, можно было бы обнаружить на опыте. Как я уже упоминал, результаты получались неизменно отрицательные, хотя чувствительность метода Брэса была настолько велика, что разность главных показателей преломления уже порядка 10^{-12} не могла бы ускользнуть от его внимания. А это составляет приблизительно одну двадцатую часть той величины, которую мы только что вычислили.

---

1) Rayleigh, Does motion through the aether cause double refraction? Phil. Mag. (6), **4** (1902), стр. 678.

2) D. B. Brace, On double refraction in matter moving through the aether, Phil. Mag. (6), **7** (1904), стр. 317.

Правда, мы основывали наши вычисления на некоторых допущениях, которые можно было бы изменить, и сам Брэс в своих вычислениях шел другим путем. Все же, я думаю, мы можем с уверенностью заключить, что примирить результат его наблюдений с представлением о твердых сферических электронах было бы чрезвычайно трудно.

Следует добавить, что, если бы мы приняли это представление, потребовалось бы также произвести некоторые изменения в соображениях, касающихся молекулярных движений в движущейся системе.

186. Мы видели в § 184, что противоречия с результатами Брэса не будет, если отношение продольной массы к поперечной будет равно k^2. Отсюда возникает вопрос, нельзя ли получить это отношение, не прибегая к допущению, что l равно единице, — это допущение ведь было началом всех наших затруднений. К сожалению, этот путь для нас закрыт, так как уравнение

$$\frac{d\,(klw)}{dw} : kl = k^2$$

удовлетворяется только при постоянном значении l. По этой причине оптические опыты не позволяют нам присоединиться к предположению Бухерера [1]) и Ланжевена [2]), что движущийся электрон, превращаясь в эллипсоид такой формы и ориентации, как было предположено мной, сохраняет, однако, не первоначальный экваториальный радиус, а первоначальный объем. Это допущение, очевидно, равносильно тому, что $l = k^{-\frac{1}{3}}$, так что размеры электрона изменяются вследствие этого в отношении $k^{-\frac{2}{3}}$, $k^{\frac{1}{3}}$, $k^{\frac{1}{3}}$. Пользуясь этим значением l, получаем следующие

---

[1]) A. H. Bucherer, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie, Leipzig, 1904, стр. 57, 58.

[2]) P. Langevin, La physique des électrons, Revue générale des sciences pures et appliquées, **16** (1905), стр. 257.

значения электромагнитных масс:

$$m' = (1-\beta^2)^{-\frac{4}{3}}\left(1-\frac{1}{3}\beta^2\right)m_0, \tag{318}$$

$$m'' = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{3}}m_0,$$

и для их отношения имеем

$$\frac{m'}{m''} = \frac{1-\frac{1}{3}\beta^2}{1-\beta^2} \qquad \text{вместо} \qquad k^2 = \frac{1}{1-\beta^2}.$$

Если мы к этой гипотезе применим такие же выкладки, как и в случае твердых сфер, мы придем к двойному лучепреломлению даже несколько большей величины, так что противоречие с опытом Брэса попрежнему остается в силе.

Следует пожалеть, что это так, так как новое допущение имеет несомненные преимущества по сравнению с моим первоначальным представлением [1]. Оно находится в достаточном согласии с результатами опытов Кауфмана; самая мысль о постоянстве объема действительно весьма проста. Если мы последуем ему, нам уже не нужно будет принимать существование какой-то другой энергии, помимо электромагнитной, как это было в § 180. Это подтверждается величиной электромагнитной энергии [2])

$$\frac{e^2}{8\pi R}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right)$$

и выражением для работы силы

$$\frac{e^2}{6\pi R c^2} = (1-\beta^2)^{-\frac{4}{3}}\left(1-\frac{1}{3}\beta^2\right)w\dot{w}\,dt,$$

---

[1]) Теперь (1915), имея в виду принцип относительности, я уже не могу этого утверждать.

[2]) Примечание 81.

получающимся из (318) для случая, когда электрон движется прямолинейно с переменной скоростью. Величина работы равна приращению величины энергии за время dt.

187. Интересно теперь опять вернуться к гипотезе $l=1$ в сочетании с формулой (305) для масс (принимая как факт влияние движения на массы, выражаемое этими уравнениями) и рассмотреть те уравнения распространения света в движущихся прозрачных телах, к которым эта гипотеза приводит. Мы видели, что векторы $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$, $\boldsymbol{p}'$ представляют собой одинаковые функции x', y', z', t' как в движущейся системе S, так и в покоящейся S_0. То же должно быть справедливым по отношению к другим векторам, выводимым из предыдущих, а именно: 1) к вектору $\boldsymbol{E}'$, который мы определяем как среднее значение $\overline{\boldsymbol{d}'}$ вектора $\boldsymbol{d}'$, взятое в системе S_0 для сферического объема, бесконечно малого в физическом смысле слова, с центром в рассматриваемой точке, а в системе S — для объема, соответствующего этой сфере; 2) к среднему значению $\overline{\boldsymbol{h}'}$, которое мы определяем совершенно таким же образом и которое будем обозначать через $\boldsymbol{H}'$; 3) к вектору

$$\boldsymbol{P}'=N\boldsymbol{p}', \tag{319}$$

где для обеих систем мы понимаем под N число молекул, содержащихся в единице объема системы S_0, и 4) к вектору $\boldsymbol{D}'$, определяемому уравнением

$$\boldsymbol{D}'=\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{P}'. \tag{320}$$

Так как все эти векторы могут быть как в S_0, так и в S представлены одинаковыми функциями x', y', z', t', уравнения, определяющие их, тоже должны быть таковы, что могут быть написаны в виде, одинаковом для обеих систем.

Но x', y', z', t' в системе S_0 являются истинными координатами и истинным временем, вследствие чего вышеприведенные векторы совпадают с теми, которые мы прежде обозначали через $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{D}$. Так как мы знаем, что они удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{321}$$

то мы можем быть уверены, что в движущейся системе

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}' \boldsymbol{D}' &= 0, \\ \operatorname{div}' \boldsymbol{H}' &= 0, \\ \operatorname{rot}' \boldsymbol{H}' &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t'}, \\ \operatorname{rot}' \boldsymbol{E}' &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t'}, \end{aligned}\right\} \tag{322}$$

где символы div′ и rot′ нужно понимать так, как это было объяснено в § 169.

К (321) нужно добавить соотношение между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$, а к (322) — соответствующее соотношение между $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{D}'$, так что, если написать:

$$\boldsymbol{D} = F(\boldsymbol{E}), \tag{323}$$

мы получим также:

$$\boldsymbol{D}' = F(\boldsymbol{E}'). \tag{324}$$

Здесь символ F следует понимать в весьма широком смысле; изображаемые им уравнения могут иметь любой вид в зависимости от особенностей рассматриваемого тела. Если в первую формулу входят, как это вполне может быть [1]), производные по t, во второй формуле мы найдем соответствующие производные по t'.

Полагая $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$ и подобным же образом $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{E}'$, получаем уравнения для свободного эфира. Впрочем, эти

[1]) Примечание 82.

последние для системы S_0 могут быть оставлены в виде

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{d} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{h} &= 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{h} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{d} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (325)$$

так как нет необходимости рассматривать средние значения там, где нет молекул; для системы S можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}' \boldsymbol{d}' &= 0, \\ \operatorname{div}' \boldsymbol{h}' &= 0, \\ \operatorname{rot}' \boldsymbol{h}' &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{d}'}{\partial t'}, \\ \operatorname{rot}' \boldsymbol{d}' &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{h}'}{\partial t'}. \end{aligned}\right\} \qquad (326)$$

Так как эфир не принимает участия в поступательном движении со скоростью w, последние две системы уравнений относятся к совершенно одинаковым явлениям. Одна из этих систем выведена из другой при помощи чисто математических преобразований, причем единственное различие между ними заключается в том, что в (325) электромагнитное поле относится к осям, неподвижным относительно эфира, и к «истинному» времени, а в (326) — к подвижным осям и к «местному» времени и что в обоих случаях оно описывается при помощи различных векторов. Напротив, те явления, к которым относятся уравнения (321), (323) и (322), (324), не могут быть названы тождественными, хотя они и соответствуют друг другу.

188. В дальнейших рассуждениях мы можем пойти по тому пути, по которому часто идет теоретическая физика. Мы можем освободиться от лесов, при помощи которых была построена система уравнений, и, не заботясь больше о теории электронов и тех затруднениях, к которым она нас привела, можем постулировать вышеприведенные уравнения как сжатое и, насколько нам известно, точное описание явлений. С этой точки зрения векторы E, H, D в одной системе и E', H' и D' в другой являются просто «некоторыми» векторами, о смысле которых мне будет достаточно сказать ровно столько, сколько представляется необходимым, чтобы однозначно определить для каждого случая их направление и величину.

Основания, по которым эти уравнения напрашиваются сами собой, заключаются в следующем: 1) формулы (321) в сочетании с соответствующими допущениями, касающимися соотношений между E и D, могут служить для объяснения оптических явлений в прозрачных телах, обладающих или не обладающих двойным лучепреломлением; 2) тождественный вид уравнений (321), (323) и (322), (324) объясняет неудачу всех попыток обнаружения влияния движения Земли при помощи опытов с земными источниками света, и 3) уравнения (322), (324) дают правильное значение коэффициента Френеля.

189. Выражения «эффективные координаты», «эффективное время» и т. д., которыми мы пользовались для облегчения терминологии, подготовили нас к весьма интересной интерпретации вышеприведенных результатов, которой мы обязаны Эйнштейну [1]. Представим себе, что наблюдатель, которого мы будем называть A_0 и которому мы припишем неподвижное положение в эфире, занимается изучением явлений, происходящих в неподвижной системе S_0. Мы предположим, что он снабжен масштабом и часами, — даже, для его удобства, скажем, целым рядом часов, помещенных в различных точках S_0 и сверенных друг с другом с абсолютной точностью. Обладая такими средствами, он будет в состоянии определить координаты x, y, z для любой точки и время t для любого момента; изучая электромагнитное поле по его проявлениям в различных точках пространства и в различные моменты времени, он придет к уравнениям (321), (323).

---

[1]) См. Ann. d. Phys. **17** (1905), стр. 891; **18** (1905), стр. 639; **20** (1906), стр. 627; **21** (1906), стр. 583; **23** (1907), стр. 197, 371; простое изложение теории Эйнштейна: Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik **4** (1908), стр. 411.

Пусть A — второй наблюдатель, задача которого состоит в том, чтобы изучать явления в системе S, и который сам движется через эфир со скоростью w, не подозревая ни о своем движении, ни о движении системы S.

Пусть этот наблюдатель пользуется тем же самым масштабом (или его точной копией), которым пользовался наблюдатель A_0, причем этот масштаб тем или иным путем приобрел скорость w, прежде чем попал к нему в руки. Тогда на основании нашего допущения относительно размеров движущихся тел деления шкалы, вообще говоря, будут иметь другую длину, чем раньше, и будут претерпевать изменения также при поворотах масштаба; это изменение будет происходить по следующему закону: в положениях, которые в системах S_0 и S являются соответственными, проекции линейки на плоскость YOZ являются одинаковыми, но проекции на OX относятся друг к другу, как k к единице. Ясно, что, так как наблюдатель ничего не знает об этих изменениях, он не будет в состоянии измерить истинные относительные координаты x_r, точек системы. Его отсчеты дадут ему только значения эффективных координат x' и, конечно, y' и z', которые для $l=1$ равны y_r, z_r. Значит, полагаясь на показания своего масштаба, он не сможет определить истинную форму тела. Он будет принимать за сферу то, что в действительности является эллипсоидом; его кубический сантиметр будет не истинным кубическим сантиметром, а параллелепипедом, в k раз меньшим. В этом параллелепипеде, однако, содержится некоторое количество материи, которое при отсутствии движения занимало бы объем кубического сантиметра, так что если A подсчитывает молекулы в *своем* кубическом сантиметре, он получит то же число N, как и A_0. Наконец, его единица массы будет та же самая, что и для неподвижного покоящегося наблюдателя, если каждый из них примет за единицу массы массу воды, заключенной в тех объемах, который каждый из наблюдателей *принимает* за кубический сантиметр.

Так же обстоит дело у наблюдателя A и с часами. Если мы допустим, что силы в часовом механизме подвержены изменениям, определяемым (300), ход двух одинаковых часов в системах S_0 и S будет таков, что эффективные координаты подвижных частей в обеих системах будут одинаковыми функциями эффективного времени. Если поэтому стрелка часов системы S_0 вернется в первоначальное положение по истечении некоторого промежутка времени Θ, стрелка часов системы S тоже вернется в свое исходное положение через промежуток Θ эффективного времени t'. Таким образом, часы в системе S будут показывать ход эффективного времени; помимо ведения A, его часы будут итти в k раз медленнее, чем часы A_0.

190. Из сказанного следует, что если движущийся наблюдатель будет измерять скорость света, заставляя луч света пройти сначала путь от точки P к точке Q и потом обратно, он получит значение c. Это можно доказать для любого направления прямой PQ [1]); достаточно будет, однако, если мы докажем это для случая, когда прямая или параллельна OX, или ей перпендикулярна. Если L есть расстояние между P и Q, измеренное наблюдателем A, тогда в первом случае истинная величина расстояния есть $\frac{L}{k}$, и так как обе точки движутся через эфир со скоростью w, время, потребное для прохождения этого расстояния лучом света, равно

$$\frac{L}{k}\left(\frac{1}{c+w}+\frac{1}{c-w}\right)=\frac{2cL}{k\left(c^2-w^2\right)}=\frac{2kL}{c}. \tag{327}$$

Во втором случае луч света должен пройти по двум сторонам равнобедренного треугольника (см. § 167), высота которого равна L, а половина основания относится к боковой стороне, как w к c. Длина стороны равна поэтому

$$\frac{L}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}=kL;$$

время, потребное лучу света, чтобы вернуться к исходной точке, опять дается выражением (327). Так как часы A идут в k раз медленнее, они отметят промежуток

[1]) Примечание 83.

времени $\frac{2L}{c}$, так что наблюдатель должен будет заключить, что скорость лучей равна c.

Предположим теперь, что у него в распоряжении имеется несколько часов, помещенных в различных точках его системы, и что он каждые устанавливает со всей возможной точностью. Чтобы сверить часы, помещенные в точках P и Q, на определенном измеренном расстоянии друг от друга, он может пустить оптический сигнал из P в тот момент, когда первые часы показывают время $t' = 0$, и установить вторые часы так, чтобы они по приходе сигнала показывали время $\frac{L}{c}$, отмечая таким образом время прохождения света между этими точками, которое, по его суждению, равно $\frac{L}{c}$.

Предположим, что P лежит в начале координат, а Q — на положительной стороне оси x; пусть, далее, на каких-нибудь часах, находящихся в покое и, следовательно, отмечающих истинное время, отмечается нулевой момент сигнала. Тогда вследствие различного хода движущихся и неподвижных часов мы будем получать для часов в точке P все время значение

$$t' = \frac{1}{k} t.$$

В момент прихода сигнала истинное время будет

$$\frac{L}{k(c-w)},$$

так как это есть промежуток времени, потребный для того, чтобы свет мог пройти расстояние между точками P и Q, которые движутся со скоростью w и истинное расстояние между которыми равно $\frac{L}{k}$.

Но так как в этот момент часы в точке Q показывают время $\frac{L}{c}$, в любой другой истинный момент времени они будут показывать:

$$t' = \frac{L}{c} + \frac{1}{k}\left[t - \frac{L}{k(c-w)}\right],$$

или, так как $L = x'$,

$$t' = \frac{1}{k}t - \frac{w}{c^2}x'.$$

Это выражение в точности совпадает с (288); отсюда мы видим, что, когда часы сверены при помощи оптических сигналов, они все будут показывать свое местное время t', т. е. время, соответствующее их положению.

Это доказательство легко можно распространить на случаи, когда прямая, соединяющая два места наблюдения, направлена любым иным образом [1]).

191. Важно не упускать из виду, что, проделывая все вышеописанные манипуляции, наблюдатель все время остается в полном неведении относительно того, что его система (и он сам вместе с нею) движется через эфир и что показания его часов и масштабов неверны.

Продолжая свои исследования, он может теперь предпринять изучение электромагнитных явлений в своей системе совершенно таким же образом, как наблюдатель A_0 сделал это в своей системе. Мы можем предсказать, каковы будут его результаты, так как мы знаем эти явления на основании нашей теоремы соответственных состояний. Из последней мы можем заключить, что если движущийся наблюдатель будет определять скорости и ускорения как функции своих эффективных координат и своего эффективного времени, если он будет выводить величину сил по тому ускорению, которое они сообщают единице массы, и если он будет измерять электрические заряды обычным путем на основании тех электростатических взаимодействий, которые они друг на друга оказывают, его единица электричества совпадет с единицей электричества, выбранной наблюдателем A_0. Напротив, определенная им плотность заряда будет не истинная плотность ρ, а та величина, которую мы назвали эффективной плотностью ρ'. Далее, если он будет определять силу, действующую на единицу заряда в какой-нибудь точке электромагнитного поля, он получит

---

1) Примечание **84**.

вектор $\boldsymbol{d}'$ [1]. Подобным же образом ему придется заняться вектором $\boldsymbol{h}'$; продолжая свое изучение, он рано или поздно придет к установлению уравнений, определяющих поле, а именно к формулам (326) для свободного эфира и к формулам (322), (324) для весомого тела.

Он может прийти к последнему результату различными путями. Может быть, он удовлетворится той мыслью, что $\boldsymbol{D}'$ есть известный вектор, который он впервые имел случай ввести, занимаясь заряженным конденсатором. Или, если он будет развивать теорию электронов, он установит понятие об электрическом моменте частички, составляющие которого он естественно обозначит через $\sum ex'$, $\sum ey'$, $\sum ez'$, так что то, что он называет моментом, в действительности является вектором $\boldsymbol{p}'$ в наших уравнениях (306). Введя его, движущийся наблюдатель определит $\boldsymbol{P}'$ и $\boldsymbol{D}'$ по формулам (319) и (320).

Мы можем резюмировать эти соображения следующим образом: если A_0 и A будут делать отчеты о своих наблюдениях и выведенных из них заключениях, то при сравнении окажется, что эти отчеты совершенно тождественны.

192. Следует обратить особое внимание на замечательную обратимость, на которую указал Эйнштейн. До сих пор исследованиями явлений в неподвижной системе занимался только A_0, тогда как A ограничивался системой S. Предположим теперь, что каждый наблюдатель способен видеть ту систему, в которой находится другой наблюдатель, и изучать происходящие в ней явления. Тогда A_0 будет находиться в том положении, в котором, как мы все время воображали, находимся мы сами (хотя, строго говоря, в силу движения Земли мы находимся в положении A); изучая электромагнитное поле в S, он будет приведен к тому, чтобы ввести новые переменные x', y', z', $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$ и т. д.; таким образом, он установит уравнения (326) и (322), (324). Обратимость заключается в том, что если наблюдатель A начнет совершенно таким же способом

[1]) Примечание **85**.

описывать поле неподвижной системы, он опишет его вполне точно.

Чтобы убедиться в этом, мы вернемся к уравнениям (287) и (288), которые на основании нашего предположения, что l равно 1, принимают вид

$$x' = k(x - wt),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = k\left(t - \frac{w}{c^2}x\right). \qquad (328)$$

Пусть P будет точка, принадлежащая к системе S_0; остановим наше внимание на ее координате x' по отношению к подвижным осям системы S, для двух определенных значений местного времени t' и $t' + \Delta t'$. Так как x для этой точки P есть величина постоянная, получаем на основании последнего из вышеприведенных уравнений:

$$\Delta t = \frac{1}{k}\Delta t',$$

а из первого:

$$\Delta x' = -kw\,\Delta t = -w\,\Delta t'.$$

Основываясь на своих наблюдениях, наблюдатель A поэтому припишет системе S_0 скорость w в направлении, противоположном положительному направлению оси x'.

Наблюдатель A_0 в своей теории электромагнитного поля в системе S изменил координаты x, y, z и время t на переменные (328), электромагнитные векторы $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$ — на векторы $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$ с составляющими

$$\left.\begin{aligned} d'_x &= d_x, & d'_y &= k\left(d_y - \frac{w}{c}h_z\right), & d'_z &= k\left(d_z + \frac{w}{c}h_y\right), \\ h'_x &= h_x, & h'_y &= k\left(h_y + \frac{w}{c}d_z\right), & h'_z &= k\left(h_z - \frac{w}{c}d_y\right), \end{aligned}\right\} \qquad (329)$$

векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{D}$ — на векторы $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{D}'$. Совершенно так же наблюдатель A введет вместо величин x', y', z', t', $\boldsymbol{d}'$ и т. д., относящихся к его системе, некоторые новые величины, которые мы будем обозначать двумя штрихами и которыми он будет пользоваться в своей теории системы S_0.

Он определит эти новые величины посредством уравнений, аналогичных (328) и (329), заменяя w через $-w$, что, впрочем, не окажет никакого влияния на постоянную k. Его преобразования будут поэтому иметь следующий вид:

$$x''=k(x'+wt'),\ y''=y',\ z''=z',\ t''=k\left(t'+\frac{w}{c^2}x'\right), \tag{330}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{d}''_x &= \boldsymbol{d}'_x,\quad \boldsymbol{d}''_y = k\left(\boldsymbol{d}'_y+\frac{w}{c}\boldsymbol{h}'_z\right),\ \boldsymbol{d}''_z = k\left(\boldsymbol{d}'_z-\frac{w}{c}\boldsymbol{h}'_y\right),\\ \boldsymbol{h}''_x &= \boldsymbol{h}'_x,\quad \boldsymbol{h}''_y = k\left(\boldsymbol{h}'_y-\frac{w}{c}\boldsymbol{d}'_z\right),\ \boldsymbol{h}''_z = k\left(\boldsymbol{h}'_z+\frac{w}{c}\boldsymbol{d}'_y\right). \end{aligned}\right\} \tag{331}$$

Если он, далее, даст векторам $\boldsymbol{E}''$, $\boldsymbol{H}''$, $\boldsymbol{D}''$ определение, подобное тому, которое A_0 дал векторам $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, он придет в конце концов для системы S_0 к следующим уравнениям, соответствующим (326), (322) и (324): для эфира

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}''\boldsymbol{d}'' &= 0,\\ \operatorname{div}''\boldsymbol{h}'' &= 0,\\ \operatorname{rot}''\boldsymbol{h}'' &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{d}''}{\partial t''},\\ \operatorname{rot}''\boldsymbol{d}'' &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{h}''}{\partial t''}, \end{aligned}\right\} \tag{332}$$

а для весомого тела

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}''\boldsymbol{D}'' &= 0,\\ \operatorname{div}''\boldsymbol{H}'' &= 0,\\ \operatorname{rot}''\boldsymbol{H}'' &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}''}{\partial t''},\\ \operatorname{rot}''\boldsymbol{E}'' &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}''}{\partial t''}, \end{aligned}\right\} \tag{333}$$

$$\boldsymbol{D}'' = F(\boldsymbol{E}''). \tag{334}$$

Символы div'' и rot'' не требуют дальнейших пояснений.

193. Остается показать, что в этих формулах содержится *точное* описание явлений, происходящих в системе S_0.

Доказательство очень просто, так как при ближайшем рассмотрении оказывается, что уравнения совпадают с теми, которыми для той же цели пользовался A_0.

В самом деле, если мы решим уравнения (328) относительно x, y, z, t и (329) относительно $\boldsymbol{d}_x$, $\boldsymbol{d}_y$, $\boldsymbol{d}_z$, $\boldsymbol{h}_x$, $\boldsymbol{h}_y$, $\boldsymbol{h}_z$, мы получим значения, в точности совпадающие с (330) и (331), так что

$$x'' = x, \quad y'' = y, \quad z'' = z, \quad t'' = t,$$
$$\boldsymbol{d}'' = \boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{h}'' = \boldsymbol{h},$$

чем и доказывается тождественность систем уравнений (322) и (325). Что касается уравнений (333), (334) и (321), (323), то единственное различие между двумя системами уравнений заключается в том, что в одну систему входят векторы $\boldsymbol{E}''$ и $\boldsymbol{D}''$, а в другую — векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$. Если рассматривать эти четыре величины только как «известные» векторы (представляемые символами, выбор которых не имеет значения), это сходство внешнего вида, а также то, что в свободном эфире $\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}'' = \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}'' = \boldsymbol{H}$ (ведь для этой среды $\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{D}'' = \boldsymbol{d}''$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} = \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{H}'' = \boldsymbol{h}''$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{h}$) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы мы могли заключить, что явления в системе S_0 могут быть описаны при помощи уравнений (333), (334) столь же правильно, как и при помощи уравнений (321), (323).

Мы можем пойти еще дальше и предположить, что движущийся и неподвижный наблюдатели — или, вернее, теоретики, в которых они теперь превращаются, — устанавливают теорию электронов и молекул. A_0 определил $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ как средние значения $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$, а для других векторов он пользовался уравнениями

$$\boldsymbol{p}'_x = \sum ex', \quad \boldsymbol{p}'_y = \sum ey', \quad \boldsymbol{p}'_z = \sum ez',$$
$$\boldsymbol{P}' = N\boldsymbol{p}',$$
$$\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{P}'.$$

Подобным же образом A определит $\boldsymbol{E}''$ и $\boldsymbol{H}''$ как средние значения векторов $\boldsymbol{d}''$ и $\boldsymbol{h}''$, так что эти векторы сделаются равными средним значениям $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, т. е. $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Для каждой молекулы он положит

$$p''_x = \sum ex'', \ p''_y = \sum ey'', \ p''_z = \sum ez'',$$

и далее

$$\boldsymbol{P}'' = N\boldsymbol{p}'',$$

$$\boldsymbol{D}'' = \boldsymbol{E}'' + \boldsymbol{P}''.$$

Сравнивая эти формулы с (307) (где мы можем написать $p_x = \sum ex$ и т. д.) и с уравнениями $\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ и помня, что $x'' = x$, $y'' = y$, $z'' = z$, мы видим, что действительно

$$\boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p}, \ \boldsymbol{P}'' = \boldsymbol{P}, \ \boldsymbol{D}'' = \boldsymbol{D}.$$

194. На основании вышесказанного должно быть ясно, что впечатления, получаемые обоими наблюдателями A и A_0, должны быть во всех отношениях одинаковыми. Нельзя решить, какая из систем является неподвижной по отношению к эфиру, а какая движется; не будет никаких оснований предпочесть измерения длин и времени, произведенные в одной системе, измерениям, произведенным в другой системе, или говорить, что какая-нибудь одна из этих систем обладает «истинным» временем или «истинной» длиной. Эйнштейн обратил особое внимание на это обстоятельство в своей теории, в которой он исходит из того, что он называет принципом относительности, т. е. принципом, на основании которого уравнения, при помощи которых могут быть описаны физические явления, не изменяют своего вида при переходе от одной системы координат к другой, имеющей равномерное прямолинейное движение по отношению к первоначальной системе.

Я не могу касаться здесь многочисленных и в высшей степени интересных применений, которые Эйнштейн вывел из своего принципа. Его результаты, касающиеся электромагнитных и оптических явлений (приводящие к тем же противоречиям с результатами Кауфмана, о которых мы говорили в § 179[1]), в основных чертах совпадают с теми результатами, которые мы получили на предыдущих страницах, причем главное различие заключается в том, что

[1]) Примечание **86**.

Эйнштейн просто постулирует то, что мы старались, с некоторыми затруднениями и не всегда вполне удовлетворительно, вывести из основных уравнений электромагнитного поля. При этом он, конечно, требует от нас, чтобы мы заранее верили, что отрицательный результат опытов, подобных опытам Майкельсона, Рэлея и Брэса, является не случайной компенсацией противоположных эффектов, но выражением общего и основного принципа.

Я полагаю, что все же можно кое-что сказать в пользу и того способа, которым я старался изложить свою теорию. Эфир, который может являться носителем электромагнитного поля, его энергии и его колебаний, я должен поневоле рассматривать как нечто обладающее известной субстанциальностью, как бы отличен он ни был от обычной материи. С этой точки зрения представляется естественным не вводить с самого начала предположения, что совершенно безразлично, движется тело через эфир или нет, и измерять расстояния и промежутки времени при помощи масштабов и часов, имеющих относительно эфира неподвижное положение.

Было бы несправедливо не добавить, что наряду с захватывающей смелостью своего отправного пункта теория Эйнштейна имеет еще и другое значительное преимущество по сравнению с моей теорией. В самом деле, мне не удалось получить уравнения, отнесенные к подвижным осям, в *точно* такой же форме, что и уравнения для неподвижной системы, Эйнштейн же выполнил это при помощи системы новых переменных, весьма, впрочем, мало отличающихся от тех, которые были введены мной. Я не пользовался этими подстановками только по той причине, что формулы представляются довольно сложными и имеют несколько искусственный вид, если только не выводить их из самого принципа относительности [1]).

---

[1]) См., впрочем, примечание 72*.

1. (Стр. 25.) Уравнение (4) эквивалентно трем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial y}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial z}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial x}=\frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial x}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial z}=\frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial t}.$$

Вычитая производную второго из этих уравнений по z из производной третьего уравнения по y, получаем:[1])

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial z}\right)-\Delta \boldsymbol{h}_x=\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial y}-\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial z}\right), \quad (I)$$

или, принимая во внимание (3) и (5),

$$\Delta \boldsymbol{h}_x=\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{h}_x}{\partial t^2}.$$

Подобным же образом получаются соответственные формулы для $\boldsymbol{h}_y$, $\boldsymbol{h}_z$ и для составляющих $\boldsymbol{d}$.

Следует отметить, что величина

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial x}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial z}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial x}\right),$$

получаемая при вышеприведенных преобразованиях, является составляющей по оси OX вихря $\operatorname{rot} \boldsymbol{h}$, или, как мы можем иначе сказать, величины $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{h}$, и что выражение в левой части уравнения (I) является составляющей по оси OX вектора

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{h}-\Delta \boldsymbol{h}.$$

---

[1]) Нумерация формул в этом добавлении ведется курсивом.

Вообще, обозначая через $\boldsymbol{A}$ любой вектор, мы можем написать:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}. \tag{2}$$

Эта теорема дает нам возможность исключить $\boldsymbol{d}$ из основных уравнений, пользуясь обозначениями векторного анализа. В самом деле, из (4) мы можем вывести:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{d}},$$

или, так как

$$\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{d}}=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{d},$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{h}-\Delta\boldsymbol{h}=\frac{1}{c}\ \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{d},$$

т. е. на основании (3) и (5)

$$\Delta\boldsymbol{h}=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\boldsymbol{h}}{\partial t^2}.$$

Подобным же образом, рассматривая вектор $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{d}$, можно получить уравнение

$$\Delta\boldsymbol{d}=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\boldsymbol{d}}{\partial t^2}.$$

2. (Стр. 39.) Определения § 2 приводят к общей формуле

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0.$$

Отсюда, по уравнению (19)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{c}=\operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{d}}+\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{3}$$

т. е. полный ток, который состоит из тока смещения $\dot{\boldsymbol{d}}$ и тока конвекции $\rho\boldsymbol{v}$, имеет соленоидальное распределение. Чтобы показать, что это положение является справедливым независимо от того, удовлетворяется ли условие, о котором говорится в тексте, или нет, мы фиксируем наше внимание на элементе заряженного вещества, который в момент времени t находится в точке (x, y, z) и поэтому в момент времени $t+dt$ расположен в точке $(x+\boldsymbol{v}_x\,dt,\ y+\boldsymbol{v}_y\,dt,\ z+\boldsymbol{v}_z\,dt)$. По известной теореме теории бесконечно малых деформаций элемент объема, первоначально равный dS, будет в конце промежутка времени dt иметь значение

$$\left\{1+\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_x}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{v}_y}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{v}_z}{\partial z}\right)dt\right\}dS. \tag{4}$$

С другой стороны, так как время изменилось на величину dt, а координаты — на $v_x\,dt$, $v_y\,dt$, $v_z\,dt$, плотность заряда, прежде равная ρ, теперь будет:

$$\rho+\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)dt.$$

Произведение из этого выражения на (4) должно быть равно первоначальному заряду элемента $\rho\,dS$, так что получим:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}=0,$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{5}$$

на основании чего, принимая во внимание (17), сразу приходим к уравнению (3).

3. (Стр. 40.) Метод исключения в точности подобен тому, которым мы пользовались в примечании **1**. Из (20) и (19) можем вывести:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{d}=-\frac{1}{c}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{h}},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{d}}+\frac{1}{c}\operatorname{rot}(\rho\boldsymbol{v});$$

или, пользуясь (2):

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{d}-\Delta\boldsymbol{d}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\boldsymbol{h}),$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{h}-\Delta\boldsymbol{h}=\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\boldsymbol{d})+\frac{1}{c}\operatorname{rot}(\rho\boldsymbol{v});$$

подставляя величины $\operatorname{div}\boldsymbol{d}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{h}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{h}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{d}$ из (17), (19), (18) и (20), мы получаем формулы (24) и (25).

4. (Стр. 42.) Нижеследующие соображения показывают, что функция (30) не только удовлетворяет дифференциальному уравнению (29) (это можно было бы проверить непосредственным дифференцированием), но при известных условиях является его единственным решением; рассуждения эти заимствованы из статьи Кирхгофа по теории световых лучей [1]).

Они основаны на теореме Грина и на том положении, что если r есть расстояние от неподвижной точки, а F — некоторая произвольная функция, то величина

$$\chi=\frac{1}{r}F\left(t\pm\frac{r}{c}\right)$$

[1]) Kirchhoff, Ann. d. Phys. u. Chem. 18 (1883), стр. 663.

обладает свойством, которое дается уравнением

$$\Delta\chi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}. \qquad (6)$$

Это следует непосредственно из формулы

$$\Delta\chi = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r^2},$$

которая является справедливой для любой функции от r, не содержащей координат явно; в силу этой формулы выражение (6) принимает вид

$$\frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(r\chi)}{\partial t^2}.$$

Известно, что решениями этого уравнения являются:

$$r\chi = F\left(t+\frac{r}{c}\right) \quad \text{и} \quad r\chi = F\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Пусть σ будет поверхность, ограничивающая некоторый объем S, на всем протяжении которого ψ удовлетворяет уравнению (29); пусть P будет та точка объема S, для которой нам нужно определить значение функции, dS — элемент объема, расположенный на расстоянии r от P, Σ — малая сферическая поверхность с центром в точке P, n и N — нормали к σ и Σ, проведенные в обоих случаях наружу.

Введем вспомогательное выражение

$$\chi = \frac{1}{r}F\left(t+\frac{r}{c}\right),$$

где F есть функция, точное определение которой будет дано далее; рассмотрим интеграл

$$J = \int(\psi\,\Delta\chi - \chi\,\Delta\psi)\,dS,$$

который берется по объему между σ и Σ.

Во-первых, мы имеем по теореме Грина:

$$J = \int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma - \int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial N} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\partial\Sigma,$$

и, во-вторых, в силу (29) и (6):

$$J = -\int\chi\omega\,dS + \frac{1}{c^2}\int\left(\psi\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - \chi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)dS =$$

$$= -\int\chi\omega\,dS + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial t} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dS.$$